ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
2019, № 1, с. 141–153

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО ШАРНИРНО-ОПЕРТОГО СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

К. Ш. Мкртчян*

Институт геофизики и инженерной сейсмологии им. А.Г. Назарова, НАН РА, Гюмри, Армения

**e-mail: karush.mkrtchyan.57@mail.ru*

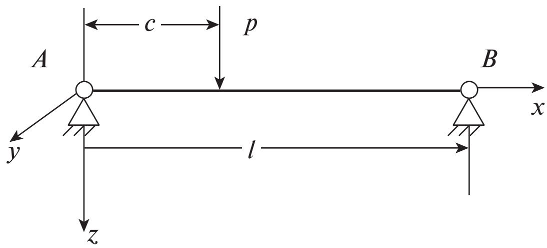
Поступила в редакцию 22.06.2017 г.
После доработки 29.01.2018 г.
Принята к публикации 06.02.2018 г.

Исследуются вынужденные поперечные колебания упругого шарнирно-опертого стержня под действием нормальной сосредоточенной периодической во времени силы. Задача решается методом, предложенным в [1] с использованием комбинированных условий, включающих динамическое воздействие на стержень и вращательное движение относительно фронта волны изгиба. В рамках линейной теории тонких прямолинейных нерастяжимых стержней, при помощи принципа Гамильтона–Остроградского получены уравнение движения и система уравнений поперечных колебаний упругого стержня. Решение поставленной задачи строится в виде ряда собственных форм колебаний. Получены два типа вынужденных поперечных колебаний и новые резонансные частоты. Численные результаты расчетов приведены в виде таблиц, графиков; дан анализ полученных результатов.

Ключевые слова: стержень, сечение, сила тяжести, поперечные колебания, собственные частоты, собственные формы

DOI: 10.1134/S0572329919010070

1. Введение. Вынужденные поперечные колебания упругого шарнирно-опертого стержня под действием нормально сосредоточенной периодической во времени силы представляет практический и теоретический интерес для приложений, например для мостовых работ. Важным фактором при исследовании поперечных колебаний упругого стержня является учет вращательного движения, поскольку под его воздействием в стержне возникают новые упругие колебания и дополнительные силы, обусловленные упругостью стержня. Основные достижения в этой области изложены в нашей недавней работе [1], где исследуется вынужденное поперечное колебание упругого стержня, когда одному концу придано перемещение, а другой свободен. Для решения была использована элементарная теория стержня. Однако, уравнение поперечных колебаний (1) в [1] негиперболическое, задачи о распространении волн носят совершенно иной характер. Существуют возмущения, которые распространяются мгновенно. На этот результат нужно смотреть как на дефект уравнения (1) в [1], пригодного лишь для достаточно длинных волн [2, с. 208]. Если волны короткие, то кроме инерции поступательного движения, следует учитывать инерцию вращения, а также влияние на прогиб не только нормальных напряжений, но также и касательных напряжений от перерезывающих сил. Учитывая эти факты, можно получить уточненное уравнение



Фиг. 1

динамического изгиба, которое является гиперболическим и не допускает мгновенного распространения импульсов.

Цель данного исследования – сформулировать гораздо более общую задачу о вынужденных поперечных колебаниях упругого стержня с шарнирно-опертыми концами, описываемых при помощи модели Тимошенко, в котором учитываются вращательные движения.

Основное внимание уделено результатам теоретических исследований, относящихся к этой задаче. Основная задача, как и в работе [1], решается путем разделения ее на две задачи, в каждой из которых рассматриваются вынужденные поперечные колебания упругого шарнирно-опертого стержня, обусловленные различными частями комбинированного воздействия, включающие динамическое воздействие на стержень и вращательное движение относительно фронта волны изгиба. Приведены новые, более точные теоретические результаты для второй задачи, в которой исследованы вынужденные поперечные колебания упругого шарнирно-опертого стержня, обусловленные вращательным движением, что является основным результатом данного исследования.

2. Математическая постановка задачи 1 и ее решение. Пусть упругий стержень с шарнирно-опертыми концами на расстоянии c от левой опоры подвергается действию нормально сосредоточенной периодической во времени силы. Эта сила вызывает в стержне динамическое напряженное состояние, возникают свободные и вынужденные колебания. Для общности поперечное сечение стержня примем произвольным, но постоянным вдоль ее оси. Предположим, что стержень однороден и работает на сдвиг и изгиб. В недеформированном состоянии нейтральная линия стержня прямолинейна и направлена горизонтально. Отнесем ее к декартовой системе координат x, y, z, в которой ось x направлена вдоль нейтральной линии недеформированного стержня, оси y и z вдоль осей симметрии поперечного сечения. Колебания стержня происходят в вертикальной плоскости xz геометрия которой представлена на фиг. 1. Ставится и решается следующая задача: требуется определить вынужденные поперечные колебания этого стержня, возникающие в результате приложения силы в виде

$$P = P_0\delta(x - c)\sin\omega t$$

Для рассматриваемой задачи вынужденные поперечные колебания стержня с учетом эффектов поперечного сдвига и инерции вращения описываются следующими уравнениями с граничными и начальными условиями [3]:

$$\mathrm{E}J\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + kGF\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi\right) = \rho J\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

$$kGF\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + P_0\delta(x - c)\sin\omega t = \rho F\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (2.1)$$

$$x = 0, l: \quad w = 0; \quad \partial\psi/\partial x = 0 \tag{2.2}$$

$$t = 0: \; w = 0; \quad \partial w/\partial t = 0 \tag{2.3}$$

$$\psi = 0; \quad \partial\psi/\partial t = 0$$

где t — время; l — длина стержня; F — площадь поперечного сечения; J — момент инерции поперечного сечения; $\delta()$ — дельта-функция Дирака; P — силы, в некоторой точке x в момент времени t; ρ — плотность материала; E, G-модули Юнга и сдвига, соответственно; k — безразмерный числовой коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения стержня; w — перемещение центра изгиба сечения в направлении оси z (прогиб); ψ — угол поворота сечения вокруг центра изгиба; ω — круговая частота.

Граничные условия (2.2) будут удовлетворены, если решение системы (2.1) представить в вид

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin \mu_n x \tag{2.4}$$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) \cos \mu_n x \tag{2.5}$$

$$\mu_n = n\pi/l$$

доставляя значения функций w и ψ из (2.4) и (2.5) в систему (2.1) получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомых функций w_n и ψ_n:

$$\rho J \frac{d^2\psi_n}{dt^2} + (\mathrm{E}J\mu_n^2 + kGF)\psi_n - kGF\mu_n w_n = 0 \tag{2.6}$$

$$\rho F \frac{d^2 w_n}{dt^2} + kGF\mu_n^2 w_n - kGF\mu_n\psi_n = 2l^{-1}P_0 \sin \mu_n c \sin \omega t$$

Общее решение системы (2.6) при начальных условиях (2.3) имеет вид

$$w_n(t) = A_n \sin \omega_{n1} t + B_n \sin \omega_{n2} t + 2l^{-1} P_0 H_n L_n \sin \mu_n c \sin \omega t \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}\psi_n(t) = \left(\mu_n - \frac{\rho\omega_{n1}^2}{kG\mu_n}\right) A_n \sin \omega_{n1} t + \left(\mu_n - \frac{\rho\omega_{n2}^2}{kG\mu_n}\right) B_n \sin \omega_{n2} t + \\ +2l^{-1} P_0 \mu_n H_n \sin \mu_n c \sin \omega t\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$A_n = \frac{2P_0\omega \mathrm{H}_n \sin \mu_n c[kG\mu_n^2 - (kG\mu_n^2 - \rho\omega_{n2}^2)L_n]}{\rho l \omega_{n1}(\omega_{n1}^2 - \omega_{n2}^2)}$$

$$B_n = -\frac{2P_0\omega H_n \sin \mu_n c[kG\mu_n^2 - (kG\mu_n^2 - \rho\omega_{n1}^2)L_n]}{\rho l \omega_{n2}(\omega_{n1}^2 - \omega_{n2}^2)}$$

$$H_n = \left\{\mathrm{E}J\mu_n^4 - \left[\rho F + \left(\rho J + \frac{\rho \mathrm{E} J}{kG}\right)\mu_n^2\right]\omega^2 + \frac{\rho^2 J\omega^4}{kG}\right\}^{-1} \qquad (H_n)^{-1} \neq 0$$

$$L_n = 1 + \frac{\mathrm{E}J\mu_n^2}{kGF} - \frac{\rho J\omega^2}{kGF}$$

ω_{n1}, ω_{n2} — представляют частоту собственных колебаний рассматриваемого стержня, которые определяются из условия $(H_n)^{-1} = 0$ и описываются выражением

$$\omega_{ni} = (2\gamma)^{-1/2}(\lambda_n + (-1)^i(\lambda_n^2 - 4\gamma k_n^2)^{1/2})^{1/2} \tag{2.9}$$

$$\lambda_n = 1 + \left(\frac{J}{F} + \frac{\mathrm{E}J}{kGF}\right)\mu_n^2, \qquad k_n = \sqrt{\frac{\mathrm{E}J}{\rho F}}\mu_n^2, \quad \gamma = \frac{\rho J}{kGF}$$

Здесь и далее $i = 1, 2$; n – число полуволн, которые образует ось стержня при колебаниях. Формула (2.9) определяет два значения собственной частоты, отвечающих данному числу n полуволн.

Подставляя значения функций $w_n(t)$, $\psi_n(t)$ из (2.7), (2.8) в соответствующие формулы (2.4), (2.5), получаем, что вынужденные поперечные колебания рассматриваемого стержня определяются по закону

$$w = \frac{2P_0}{l}\sum_{n=1}^{\infty} H_n L_n \sin\mu_n c \sin\omega t \sin\mu_n x \tag{2.10}$$

$$\psi = \frac{2P_0}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n H_n \sin\mu_n c \sin\omega t \cos\mu_n x \tag{2.11}$$

Состояние резонанса имеет место, когда частота возмущающей силы приближается к одной из собственных частот колебаний.

3. Описание задачи 2. Для описания задачи 2, кратко представим волновые процессы, происходящие в стержне. Система уравнений (2.1) – гиперболического типа и описывает распространение волн с дисперсией. Однако в рамках класса более коротких волн, согласно теореме предельности [4, с. 26] в стержне распространяются два типа волн (изгибного и сдвигового) со скоростями фронтов $c_1 = \sqrt{E/\rho}$, $c_2 = \sqrt{kG/\rho}$. Для длинных волн, перенос энергии в стержне характеризуется групповой скоростью. Групповая скорость для задачи (2.1)–(2.3) вычисляется по формуле

$$\nu_i = \left.\frac{\partial\omega_i}{\partial s}\right|_{s=\mu_n} = \frac{1}{4\gamma\omega_{ni}}\left[\frac{\partial\lambda_n}{\partial\mu_n} + (-1)^i \frac{\partial}{\partial\mu_n}(\lambda_n^2 - 4\gamma k_n^2)^{1/2}\right] \tag{3.1}$$

где $\omega_i = \omega_i(s)$ – закон дисперсии волны изгиба. Этот закон можно получить с помощью формулы (2.9), заменив μ_n на s:

$$\frac{\partial}{\partial\mu_n}(\lambda_n^2 - 4\gamma k_n^2)^{1/2} = \frac{\lambda_n\partial\lambda_n/\partial\mu_n - 4\gamma k_n\partial k_n/\partial\mu_n}{(\lambda_n^2 - 4\gamma k_n^2)^{1/2}}$$

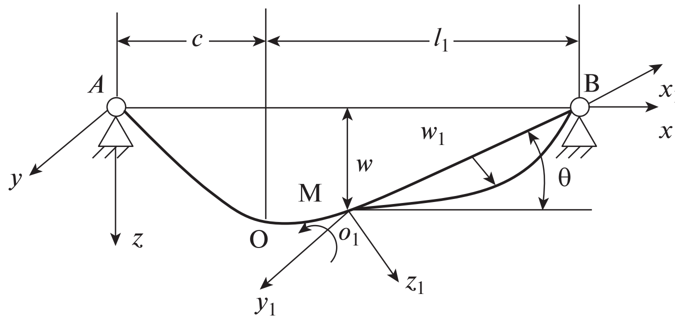
$$\frac{\partial\lambda_n}{\partial\mu_n} = 2\left(\frac{J}{F} + \frac{\mathrm{E}J}{kGF}\right)\mu_n, \quad \frac{\partial k_n}{\partial\mu_n} = 2\sqrt{\frac{\mathrm{E}J}{\rho F}}\mu_n$$

Движение в стержне будем исследовать в рамках линейной теории тонких прямолинейных нерастяжимых стержней, в соответствии с которой упругие смещения точек нейтральной линии стержня относительно их положения в недеформированном состоянии предполагаются малыми по сравнению с длиной стержня и перпендикулярными оси x. Движение в стержне можно разложить на два движения. Поступательное, определяемое движением полюса и вращательное движение вокруг оси, проходящей через полюс.

Для иллюстрации вращательного движения в стержне рассмотрим волны изгиба, образовавшиеся в результате приложения силы (фиг. 1) к сечению шарнирно-опертого стержня $x = c$ в момент времени $t = 0_+$ и распространяющиеся по первоначально невозмущенному стержню. В прямом и обратном направлениях начнут распространяться волны изгиба. Закон распространения в прямом направлении переднего фронта волны изгиба вдоль стержня дается уравнением

$$x'(t) = \begin{cases} c + \nu_1 t - 2ml & \text{при} \quad t > (2ml - c)/\nu_1 \\ 2(m+1)l - \nu_1 t - c & \text{при} \quad t < [2(m+1)l - c]/\nu_1 \end{cases} \tag{3.2}$$

$$m = 0, 1, \ldots$$



Фиг. 2

где v_1 — групповая скорость распространения волн изгиба вдоль стержня и определяется по формуле (3.1). Ввиду того что, волна изгиба (3.2) волна сильного разрыва, в этом случае на фронте волны изгиба (3.2) происходит скачкообразное изменение изгибающего момента M, угловой скорости ψ и т.д. Здесь и далее точкой обозначено дифференцирование по времени t. Функция ψ определяется из выражения (2.11). При этих условиях, кроме того, из условия непрерывности перемещения w и угла поворота элемента стержня ψ на фронте волны изгиба, можно представить форму возмущенной части стержня, в участке, от края В до точки приложения силы в момент времени $t < l_1/\nu_1$, которое показано на фиг. 2 со следующими обозначениями: l_1 — длина рассматриваемого участка; o — точка приложения силы в выбранный момент времени; o_1 — точка в переднем фронте волны изгиба на нейтральной линии стержня; oo_1 — кривая, представляющая вид возмущенной части стержня; прямолинейный отрезок o_1. В-вид невозмущенной части стержня; $w(t, x')$ — прогиб поперечного сечения на фронте волны изгиба в момент времени относительно ее положения при недеформированном стержне (относительно оси x); $x'(t)$ — измеряемое вдоль стержня расстояние от точки А до o_1. Для описания вращательного движения невозмущенной части стержня вводится подвижная система координат x_1, y_1, z_1 с началом отсчета в точке o_1 на нейтральной линии стержня, неизменно связанная с фронтом волны изгиба, ось x_1 которой направим вдоль нейтральной линии невозмущенной части стержня, ось y_1 — параллельна оси y. Заметим, что в случае недеформированного состояния стержня оси системы координат x_1, x_2, z_1 параллельны соответствующим осям инерциальной системы x, y, z (фиг. 2). Система x_1, y_1, z_1 может перемещаться вдоль стержня со скоростью ν_1 вместе с фронтом волны изгиба, относительно инерциальной системы x, y, z.

Учитывая выше сказанное, легко убедиться, что момент изгиба на фронте волны изгиба превращается в момент вращения. Обозначим возникший момент вращения через M. Когда момент вращения M от приложения силы со скоростью ν_1 двигается до края стержня В, то невозмущенная часть стержня, при этом совершает вращательное движение вокруг оси y_1 в вертикальной плоскости xz, относительно фронта волны изгиба. Оно осуществляется моментом вращения M, формирующегося на фронте волны изгиба. При совершении вращательного движения в этой части стержня возникают новые упругие колебания $w_1(t, x)$, $\psi_1(t, x)$ и дополнительные силы, обусловленные упругостью стержня [5]. Обозначим обобщенный координат движения через $\theta(t)$, где θ — угол, который выражается углом поворота элемента стержня вокруг оси y_1 в точке o_1

(фиг. 2), чья зависимость от изменения точки o_1 вдоль стержня и времени t можно представить в виде

$$\theta(t) = \psi(t, x'), \tag{3.3}$$

где точка o_1 движется вдоль стержня по закону (3.2).

4. Математическая постановка задачи 2 и основные уравнения. Рассмотрим в рамках уточненной теории Тимошенко вращательное движение невозмущенной части стержня, относительно фронта волны изгиба (фиг. 2). Вращательное движение происходит в вертикальной плоскости xz, вокруг оси y_1 и оно осуществляется вращательным моментом $M(t)$, формирующимся на фронте волны изгиба. Ставится и решается следующая задача: требуется определить при этом вынужденные поперечные колебания $w_1(t, x)$ и $\psi_1(t, x)$, возникающие в результате вращательного движения невозмущенной части стержня, а также момент вращения $M(t)$, обеспечивающего заданное движение этой части стержня.

Для решения поставленной задачи выведем уравнение движения и систему уравнений упругих поперечных колебаний невозмущенной части стержня. С этой целью в качестве обобщенной координаты движения примем $\theta(t)$, где θ определяется по формуле (3.3). Вектор упругих поперечных смещений точек невозмущенной части стержня в момент времени t, относительно оси x_1 обозначим через $\mathbf{w}_1(t, x)$. Радиус – вектор точек в участке $x' < x \le l$, $t > (2ml - c)/\nu_1$ ($m = 0, 1, \ldots$) стержня относительно точки o_1 обозначим

$$\mathbf{R}(t, x) = \mathbf{R}_{o_1}(t, x) + \boldsymbol{w}_1(t, x) \tag{4.1}$$

где $\mathbf{R}_{o_1}(t, x)$ – вектор недеформированного состояния стержня относительно точки o_1, причем $|\mathbf{R}_{o_1}| = x - c$, $x \ge c$ (измеряемое вдоль стержня расстояние от точки А до o_1 равен $c + \nu_1 t$, а от точки А до произвольной точки o' при $t < l_1/\nu_1$ равен $x + \nu_1 t$, следует, что вдоль стержня расстояние от точки o_1 до o' равен $(x - c)$).

Векторы $\mathbf{R}_{o_1}$ и w_1 имеют в инерциальной системе координат x, y, z следующие координатные представления:

$$\mathbf{R}_{o_1}(t, x) = \begin{Vmatrix} (x - c)\cos\theta \\ 0 \\ -(x - c)\sin\theta \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{w}_1(t, x) = \begin{Vmatrix} w_1(t, x)\sin\theta \\ 0 \\ w_1(t, x)\cos\theta \end{Vmatrix} \tag{4.2}$$

Кинетическая энергия движения стержня имеет вид

$$K = \frac{1}{2}\int_0^l [\rho J(\dot\psi_1)^2 + \rho F[\dot{\mathbf{R}}]^2]dx \tag{4.3}$$

В силу принятых выше предположений о нерастяжимости стержня и малости его поперечных упругих смещений и при исполненных в [5] предположениях относительно малости характерных величин движения, а также формулам (4.1)–(4.3) для кинетической энергии движения стержня, получим с точностью до величины порядок ε^2 ($\varepsilon \ll 1$):

$$K = \frac{1}{2}\int_0^l \{\rho J(\dot\psi_1)^2 + \rho F[(x - c)^2\dot\theta^2 + \dot w_1^2(t, x) - 2(x - c)\dot\theta \dot w_1(t, x)]\}dx \tag{4.4}$$

Потенциальная энергия стержня равна сумме потенциальных энергий упругих сил, возникающих при деформации стержня и силе тяжести

$$\begin{gathered}\Pi = \rho g F\int_0^l [-(x-c)\sin\theta + w_1(t,x)\cos\theta]dx + \\ +\frac{1}{2}\int_0^l \left[EJ\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)^2 + kGF\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} - \psi_1\right)^2\right]dx\end{gathered} \tag{4.5}$$

Для получения уравнения движения и системы уравнений упругих поперечных колебаний стержня воспользуемся вариационным принципом механики Гамильтона–Остроградского:

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta K - \delta\Pi + \delta A)dt = 0 \tag{4.6}$$

где δK, $\delta\Pi$ – вариации кинетической и потенциальной энергии; $\delta A = M(t)\delta t$ – элементарная работа вращающегося момента $M(t)$ на виртуальных изменениях угла поворота θ.

Подставляя значения (4.4) и (4.5) в соотношение (4.6) и вычисляя вариации кинетической и потенциальной энергий с использованием принципа независимых вариаций, учитывая при этом, что вариации $\delta\theta$, δw_1, в начальный t_1 и конечный t_2 моменты времени равны нулю, получим линейное интегро-дифференциальное уравнение движения

$$\begin{gathered}\rho F\int_0^l (x-c)[(x-c)\ddot{\theta} - \ddot{w}_1(t,x)]dx = M(t) + \\ + \rho g F\int_0^l [(x-c)\cos\theta + w_1(t,x)\sin\theta]dx\end{gathered} \tag{4.7}$$

и систему уравнений упругих поперечных колебаний упругого шарнирно-опертого стержня

$$\begin{gathered}\mathrm{E}J\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + kGF\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} - \psi_1\right) = \rho J\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} \\ kGF\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right) + q(t,x) = \rho F\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}\end{gathered} \tag{4.8}$$

с граничными и начальными условиями:

$$x = 0, l: \quad w_1 = 0, \quad \partial\psi_1/\partial x = 0 \tag{4.9}$$

$$\begin{gathered}t = 0: \quad w_1 = 0, \quad \dot{w}_1 = 0 \\ \psi_1 = 0, \quad \dot{\psi}_1 = 0\end{gathered} \tag{4.10}$$

где $q(t, x)$ – дополнительные силы, которые возникли из вращательного движения стержня и чья зависимость от координаты x и времени t имеет вид

$$q(t,x) = \begin{cases}\rho F[(x-c)\ddot{\theta} - g\cos\theta] & \text{при} \quad x' < x \le l, \quad t > (2ml - c)/\nu_1 \\ 0 - \text{при остальных значениях} & x, t\end{cases}$$
$$m = 0, \ldots$$

Если волна изгиба вдоль стержня распространяется в обратном направлении, то $q(t, x)$ представляется в виде

$$q(t,x) = \begin{cases} -\rho F[(x-c)\ddot{\theta} + g\cos\theta] & \text{при} \quad 0 < x \le x', \quad t < [2(m+1)l - c]/\nu_1 \\ 0 - \text{при остальных значениях } x, t \end{cases}$$
$$m = 0, \ldots$$

С помощью (2.11), (3.3) в участке $x' < x \le l$, $t > (2ml - c)/\nu_1$, $(m = 0, 1, \ldots)$ можно привести $\ddot{\theta}(t)$ к следующему виду:

$$\ddot{\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\theta}_n(t) \tag{4.11}$$

$$\ddot{\theta}_n(t) = -P_0 l^{-1} \mu_n \mathrm{H}_n\{(\mu_n\nu_1 + \omega)^2 \sin[(\mu_n\nu_1 + \omega)t + \mu_n\alpha_m] -$$
$$-(\mu_n\nu_1 - \omega)^2 \sin[(\mu_n\nu_1 - \omega)t + \mu_n\alpha_m]\}\sin\mu_n c$$

$$\alpha_m = c - 2ml, \quad m = 0, 1, \ldots$$

После определения прогиба $w_1(t, x)$ и угла поворота элемента стержня $\psi_1(t, x)$ необходимый момент вращения $M(t)$, обеспечивающий заданное движение в этой части стержня, вычисляется по формуле (4.7).

5. Решение задачи 2. Решение системы (4.8) (без учета собственного веса стержня) будем искать в такой форме, чтобы граничные условия (4.9) и начальные условия (4.10) удовлетворились полностью, а именно: будем полагать, что

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty} w_{1n}(t)\sin\mu_n x$$
$$(x' \le x \le l, t > (2ml - c)/\nu_1, \ m = 0, 1, \ldots) \tag{5.1}$$
$$\psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1n}(t)\cos\mu_n x$$

Подставляя значения w_1 и ψ_1 из (5.1) в систему (4.8) получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомых функций w_{1n}, ψ_{1n}:

$$\begin{gathered} \rho J \frac{d^2\psi_{1n}}{dt^2} + (\mathrm{E}J\mu_n^2 + kGF)\psi_{1n} - kGF\mu_n w_{1n} = 0 \\ \rho F \frac{d^2 w_{1n}}{dt^2} + kGF\mu_n^2 w_{1n} - kGF\mu_n\psi_{1n} = q_n(t) \end{gathered} \tag{5.2}$$

$$q_n(t) = 2l^{-1}\rho F\ddot{\theta}_n D_n(x')$$

$$D_n(x') = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_n^2}\{\beta_n - [\sin\mu_n x' - \mu_n(x' - c)\cos\mu_n x']\} & \text{при} \quad t > (2ml - c)/\nu_1 \\ \dfrac{1}{\mu_n^2}\{[\sin\mu_n x' - \mu_n(x' - c)\cos\mu_n x'] - c\mu_n\} & \text{при} \quad t < [2(m+1)l - c]/\nu_1 \end{cases}$$

$$\beta_n = \sin\mu_n l - \mu_n(l - c)\cos\mu_n l$$

Построив решение системы (5.2) по методу вариаций постоянных при начальных условиях (4.10), заключаем, что упругие поперечные колебания стержней во времени движения определяются по закону:

$$w_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t f_{1n}(\tau)\sin\omega_{n1}(t-\tau)d\tau + \int_0^t f_{2n}(\tau)\sin\omega_{n2}(t-\tau)d\tau\right]\sin\mu_n x \tag{5.3}$$

$$(x' \le x \le l, t > (2ml - c)/\nu_1, m = 0,1,\ldots)$$

$$\psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t g_{1n}(\tau)\sin\omega_{n1}(t-\tau)d\tau + \int_0^t g_{2n}(\tau)\sin\omega_{n2}(t-\tau)d\tau\right]\cos\mu_n x \tag{5.4}$$

$$f_{1n}(t) = \ddot{\theta}_n(t)D_n(x')\mathrm{P}_{1n}, \quad f_{2n}(t) = \ddot{\theta}_n(t)D_n(x')\mathrm{P}_{2n}$$

$$\mathrm{P}_{1n} = \frac{2(kG\mu_n^2 - \rho\omega_{n2}^2)}{\rho l\omega_{n1}(\omega_{n1}^2 - \omega_{n2}^2)}, \quad \mathrm{P}_{2n} = \frac{2(kG\mu_n^2 - \rho\omega_{n1}^2)}{\rho l\omega_{n2}(\omega_{n1}^2 - \omega_{n2}^2)},$$

$$g_{1n}(t) = \left(\mu_n - \frac{\rho\omega_{n1}^2}{kG\mu_n}\right)f_{1n}(t), \quad g_{2n}(t) = \left(\mu_n - \frac{\rho\omega_{n2}^2}{kG\mu_n}\right)f_{2n}(t)$$

Решения (5.3) и (5.4) после преобразований можно представить в виде вынужденных и свободных колебаний, вызванных возмущающими силами $q(t, x)$. Опуская подробности, представим вынужденные поперечные колебания из общего решения (5.3), (5.4) в виде

$$w_1 = P_0 l^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}H_n\mu_n^{-1}[-P_{1n}u_n(\omega_{n1},t) + P_{2n}u_n(\omega_{n2},t)]\sin\mu_n c\sin\mu_n x \tag{5.5}$$

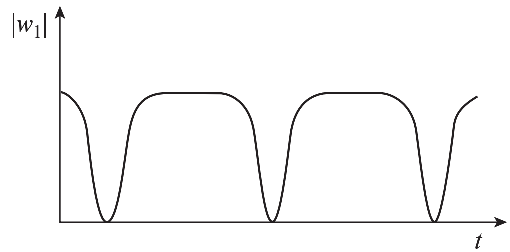
$$(x' \le x \le l,\ t > (2ml - c)/\nu_1, m = 0,1,\ldots)$$

$$\psi_1 = P_0 l^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}H_n\mu_n^{-1}[\mathrm{P}_{1n}^* u_n(\omega_{n1},t) + \mathrm{P}_{2n}^* u_n(\omega_{n2},t)]\sin\mu_n c\cos\mu_n x \tag{5.6}$$

$$\mathrm{P}_{1n}^* = -\left(\mu_n - \frac{\rho\omega_{n1}^2}{kG\mu_n}\right)\mathrm{P}_{1n}, \quad \mathrm{P}_{2n}^* = \left(\mu_n - \frac{\rho\omega_{n2}^2}{kG\mu_n}\right)\mathrm{P}_{2n}$$

$$u_n(\lambda,t) = \frac{\lambda\beta_n(\mu_n\nu_1+\omega)^2}{\lambda^2 - (\mu_n\nu_1+\omega)^2}\sin[(\mu_n\nu_1+\omega)t + \mu_n\alpha_m] - \frac{\lambda\beta_n(\mu_n\nu_1-\omega)^2}{\lambda^2-(\mu_n\nu_1-\omega)^2}\times$$
$$\times\sin[(\mu_n\nu_1-\omega)t+\mu_n\alpha_m] + \frac{\lambda\mu_n(\mu_n^2\nu_1^2+\omega^2)}{\lambda^2-\omega^2}(x'-c)\sin\omega t -$$
$$-\frac{2\mu_n\nu_1\omega\lambda(\lambda^2+\mu_n^2\nu_1^2)}{(\lambda^2-\omega^2)^2}\cos\omega t + \frac{\lambda(\mu_n\nu_1+\omega)^2}{2[\lambda^2-(2\mu_n\nu_1+\omega)^2]}\{\mu_n(x'-c)\times$$
$$\times\sin[(2\mu_n\nu_1+\omega)t+2\mu_n\alpha_m] + \frac{\lambda^2-(2\mu_n\nu_1+\omega)(4\mu_n\nu_1+\omega)}{\lambda^2-(2\mu_n\nu_1+\omega)^2}\times$$
$$\times\cos[(2\mu_n\nu_1+\omega)t+2\mu_n\alpha_m]\} - \frac{\lambda(\mu_n\nu_1-\omega)^2}{2[\lambda^2-(2\mu_n\nu_1-\omega)^2]}\{\mu_n(x'-c)\times$$
$$\times\sin[(2\mu_n\nu_1-\omega)t+2\mu_n\alpha_m] + \frac{\lambda^2-(2\mu_n\nu_1-\omega)(4\mu_n\nu_1-\omega)}{\lambda^2-(2\mu_n\nu_1-\omega)^2}\times$$
$$\times\cos[(2\mu_n\nu_1-\omega)t+2\mu_n\alpha_m]\}$$

Вынужденные колебания в участке $0 \le x \le x'$, $t < [2(m+1)l - c]/\nu_1$, $(m = 0, 1, \ldots)$ упругого шарнирно-опертого стержня можно получить с помощью формул (5.5), (5.6), заменив $c - 2ml$, ν_1, β_n на $2(m+1)l - c$, $-\nu_1$, $c\mu_n$. Комбинируя задачу (2.1)–(2.3) с зада-



Фиг. 3

чей (4.8)–(4.10), получаем, что выражения (5.5), (5.6) описывают вынужденные поперечные колебания упругого шарнирно-опертого стержня, вызванные возмущающими периодическими изменениями силы $q(t, x)$. Физику данных колебаний можно объяснить следующим образом. Изменение этой силы в стержне имеет характер пульсации, которая возникает во всех точках стержня, во время движения в начальный момент перемещения изгибных возмущений вдоль стержня. В короткие промежутки времени, когда движение удаляется с данной точки, сила в этой точке резко падает до нуля и столь же быстро восстанавливает свое значение при отраженных от краев стержня изгибных возмущениях. Далее процесс повторяется. Эта сила вызывает в стержне интенсивное развитие прогиба w_1, со временем происходит падение этой силы и исчезает причина образования прогиба, после чего происходит восстановление этой силы. График, иллюстрирующий этот процесс, показан на фиг. 3. Величина $|w_1|$ на фиг. 3 представляет абсолютное значение прогиба w_1.

Когда знаменатель $n - x$ членов рядов (5.5), (5.6) становится равным нулю, частота возмущающей силы приближается к одному из значений

$$\omega_{ni}, \quad \omega_{ni}^{\kappa} = \pm\mu_n\nu_1 \pm \omega_{ni}, \quad \bar{\omega}_{ni}^{\kappa} = \pm 2\mu_n\nu_1 \pm \omega_{ni} \quad (\kappa = 1, 2, 3, 4)$$

которые определяются из условий

$$(H_n)^{-1} = 0, \quad \omega_{ni}^2 - (\mu_n\nu_1 \pm \omega)^2 = 0, \quad \omega_{ni}^2 - (2\mu_n\nu_1 \pm \omega)^2 = 0$$

В этом случае получаем состояние резонанса.

Сравнивая задачу (2.1)–(2.3) с задачей (4.8)–(4.10), получаем новые значения

$$\omega_{ni}^{\kappa} = \pm\mu_n\nu_1 \pm \omega_{ni}, \quad \bar{\omega}_{ni}^{\kappa} = \pm 2\mu_n\nu_1 \pm \omega_{ni}, \quad (\kappa = 1, 2, 3, 4) \tag{5.7}$$

для состояния резонанса.

Отметим, что полученные новые резонансные частоты (5.7) отличаются от частоты собственных колебаний $\pm\mu_n\nu_1$, $\pm 2\mu_n\nu_1$ значениями, которые обратно пропорциональны длине стержня и возникли в результате распространения волны изгиба вдоль стержня.

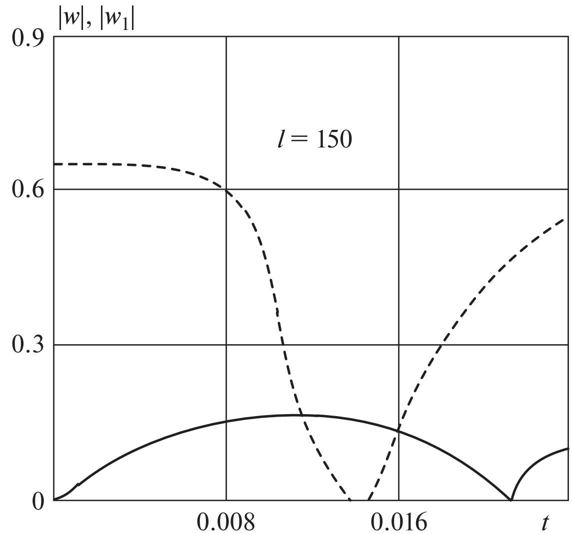
Величины ω_{ni}^{κ}, $\bar{\omega}_{ni}^{\kappa}$ пронумеруем так, чтобы выполнялись соотношения

$$\omega_{ni}^3 = -\omega_{ni}^2, \quad \omega_{ni}^4 = -\omega_{ni}^1, \quad \bar{\omega}_{ni}^3 = -\bar{\omega}_{ni}^2, \quad \bar{\omega}_{ni}^4 = -\bar{\omega}_{ni}^1$$

6. Численные результаты. Для иллюстрации эффективности полученных результатов рассмотрим в качестве конкретного примера стальной стержень с квадратным поперечным сечением со следующими параметрами:

$$F = 1 \text{ см}^2, \quad k = 2/3, \quad \omega = 100 \text{ с}^{-1}, \quad \rho = 7.85 \text{ г/см}^3, \quad c = 20 \text{ см}$$

$$P_0 = 15.6 \times 10^5 \text{ дин}, \quad E = 2.14 \times 10^{12} \text{ дин/см}^2, \quad G = 8.19 \times 10^{11} \text{ дин/см}^2.$$



Фиг. 4

Результаты расчетов приведены в следующих шести таблицах и на фиг. 4. В таблицах приведены значения, частоты собственных колебаний ω_{ni} и резонасные частоты $\omega^{\kappa}_{ni}, \overline{\omega}^{\kappa}_{ni}$, ($\kappa = 1, 2, 3, 4$), вычисленные по формулам (2.9) и (5.7), для каждого из значений $n = 1, ..., 5$, при разных значениях длины стержня.

Результаты вычислений, приведенные в этих таблицах, показывают, что во всех рассматриваемых случаях резонансные частоты отличаются от частоты собственных

Таблица 1

$i = 1$	$l = 50$ см				
n	ω_{n1}	$\omega^1_{n1} = \mu_n\nu_1 + \omega_{n1}$	$\omega^2_{n1} = \mu_n\nu_1 - \omega_{n1}$	$\overline{\omega}^1_{n1} = 2\mu_n\nu_1 + \omega_{n1}$	$\overline{\omega}^2_{n1} = 2\mu_n\nu_1 - \omega_{n1}$
1	539.3	1780.8	702.2	2967.8	1882.2
2	2370	7095	2355	11820	7080
3	5311.4	15858.5	5235.6	26405.6	15782.7
4	9390.6	27937.1	9155.7	46483.6	27702.2
5	14571	43153.8	14011.8	71736.6	42594.6

Таблица 2

$i = 1$	$l = 100$ см				
n	ω_{n1}	$\omega^1_{n1} = \mu_n\nu_1 + \omega_{n1}$	$\omega^2_{n1} = \mu_n\nu_1 - \omega_{n1}$	$\overline{\omega}^1_{n1} = 2\mu_n\nu_1 + \omega_{n1}$	$\overline{\omega}^2_{n1} = 2\mu_n\nu_1 - \omega_{n1}$
1	148.5	445.6	148.4	742.7	445.6
2	593.9	1780.8	592.9	2967.8	1779.9
3	1335	4000	1330.2	6665.5	3995.4
4	2370	7095	2354.8	11820	7079.8
5	3696	11052.9	3659.7	18409.2	11016

Таблица 3

$i=1$	$l = 150$ см				
n	ω_{n1}	$\omega_{n1}^{1} = \mu_n\nu_1 + \omega_{n1}$	$\omega_{n1}^{2} = \mu_n\nu_1 - \omega_{n1}$	$\overline{\omega}_{n1}^{1} = 2\mu_n\nu_1 + \omega_{n1}$	$\overline{\omega}_{n1}^{2} = 2\mu_n\nu_1 - \omega_{n1}$
1	66	198.05	66.5	330.1	198.1
2	264	792	263.9	1320.1	791.9
3	593.9	1780	592.9	2967.8	1779.9
4	1055.2	3162.7	1052.2	5270.2	3159.7
5	1647.5	4935.15	1640.1	8222.8	4927.7

Таблица 4

$i=2$	$l = 50$ см				
n	ω_{n2}	$\omega_{n2}^{1} = \mu_n\nu_1 + \omega_{n2}$	$\omega_{n2}^{3} = -\mu_n\nu_1 + \omega_{n2}$	$\overline{\omega}_{n2}^{1} = 2\mu_n\nu_1 + \omega_{n2}$	$\overline{\omega}_{n2}^{3} = -2\mu_n\nu_1 + \omega_{n2}$
1	914330	915517	913143	916704	911956
2	916538	921263	911813	925988	907088
3	920199	930746	909652	941293	888105
4	925285	943832	906739	962378	888192
5	931758	960341	903176	988924	874593

Таблица 5

$i=2$	$l = 100$ см				
n	ω_{n2}	$\omega_{n2}^{1} = \mu_n\nu_1 + \omega_{n2}$	$\omega_{n2}^{3} = -\mu_n\nu_1 + \omega_{n2}$	$\overline{\omega}_{n2}^{1} = 2\mu_n\nu_1 + \omega_{n2}$	$\overline{\omega}_{n2}^{3} = -2\mu_n\nu_1 + \omega_{n1}$
1	913776	914073	913479	914370	913182
2	914330	915517	913543	916704	911956
3	915251	917916	913586	920581	909920
4	916538	921263	913813	925988	907088
5	918188	825545	913832	932901	903476

Таблица 6

$i=2$	$l = 150$ см				
n	ω_{n2}	$\omega_{n2}^{1} = \mu_n\nu_1 + \omega_{n2}$	$\omega_{n2}^{3} = -\mu_n\nu_1 + \omega_{n2}$	$\overline{\omega}_{n2}^{1} = 2\mu_n\nu_1 + \omega_{n2}$	$\overline{\omega}_{n2}^{3} = -2\mu_n\nu_1 + \omega_{n1}$
1	913674	913806	913542	913938	913410
2	913920	914448	913392	914976	912864
3	914330	915517	913143	916704	911956
4	915303	917011	912796	919118	910688
5	915639	918927	912952	922215	929064

колебаний стержня. Это расхождение увеличивается с уменьшением длины стержня, причем, оно тем больше, чем больше n. На фиг. 4 показаны графики зависимостей $|w|$ (сплошная линия) и $|w_1|$ (штриховая линия) от времени t в точке $x = 80$ см. Величины $|w|$ и $|w_1|$ представляют абсолютные значения величин вынужденных колебаний стержня, рассчитанных, соответственно, по формулам (2.10) и (5.5). В определенном диапазоне периодическими изменениями силы $q(t,x)$. Графики показывают, что абсолютное значение прогиба $|w_1|$ выше, чем прогиба – $|w|$, причем с увеличением t значения $|w|$, $|w_1|$ вначале возрастают, а затем убывают. Наибольшее абсолютное значение $|w_1|$ в 3.5 раза больше $|w|$.

7. Заключение. На основе вышеприведенных исследований можно сделать следующее заключение. Основные результаты данных исследований указывают на то, что вращательное движение в стержне является весьма существенным фактором и его следует учитывать при изучении изгибных колебаний упругого стержня при динамическом воздействии.

Общее решение (5.1) справедливо всегда, когда в зависимости от внешнего динамического воздействия в упругом стержне возникают волновые явления.

Предлагаемый метод является достаточно общим методом для решения широкого класса краевых задач, в частности он может быть применен для решения задач изгибных колебаний упругого стержня, при различных нагрузках и граничных условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мкртчян К.Ш.* О двойственном характере поперечных колебаний упругого стержня // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 6. С. 1055–1058.
2. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
3. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 439 с.
4. *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер. Механика твердых деформир. тел. ВИНИТИ. 1973. Т. 5. 272 с.
5. *Гукасян А.А., Саркисян С.В.* О колебательном движении прямоугольной пластинки // Изв. АН Арм ССР. Механика. 1990. Т. 43. № 4. С. 13–23.