

## ГОРЕНИЕ, ВЗРЫВ И УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

УДК 544.454

### КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГАЗООБРАЗОВАНИЯ В МЕЛКОДИСПЕРСНОЙ КОНДЕНСИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ

© 2022 г. В. А. Дубовицкий<sup>1\*</sup>, В. В. Барелко<sup>1</sup>, З. С. Андрианова<sup>1</sup>, Л. Н. Гак<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем химической физики Российской академии наук, Черноголовка, Россия

\*E-mail: dubv@icp.ac.ru

Поступила в редакцию 24.05.2021;  
после доработки 08.02.2022;  
принята в печать 21.03.2022

Рассмотрена кинетическая модель изменения состава гомогенной смеси мелкодисперсного конденсированного вещества и газообразных компонент в замкнутой системе постоянного объема, принимающей поток тепла. Модель описывает быстрые переходные процессы при установлении детального равновесия и перестройках неустойчивых состояний. Расчеты показали, что предложенная модель качественно воспроизводит наблюдаемые взрывные процессы при движении разрушенного ледяного метеорита в атмосфере и прохождении импульса электрического тока в проводнике.

*Ключевые слова:* фазовый взрыв, химическая кинетика, обратимые реакции, детальное равновесие, испарение, теория Эйринга, электровзрыв.

DOI: 10.31857/S0207401X22090035

#### ВВЕДЕНИЕ

В природе и технике существуют явления, когда быстрые взрывоподобные изменения термодинамических параметров происходят в химически нейтральных системах, обменивающихся энергией с окружающей средой. Примерами такого рода являются взрывы автоклавов, метеоритов при движении в плотных слоях атмосферы, магматических очагов вулканов, электровзрыв проводника. Причины таких явлений давно дискутируются, но до сих пор не обрели устоявшейся теоретической схемы и поэтому эта тема сохраняет актуальность.

Предложенные в литературе подходы к объяснению взрывных явлений в химически инертных системах исходят из предположений о целостности исследуемого объекта. Так, при газодинамическом моделировании [1] процессов при движении болида рассматривается твердое тело, к которому применимы постулаты механики сплошных сред. В рамках такого подхода единственным каналом уменьшения массы болида является испарение либо абляция при поверхностном нагреве, которыми невозможно объяснить наблюдаемый во многих случаях практически мгновенный объемный взрыв и исчезновение метеоритов при входе в плотные слои атмосферы.

В рамках концепции “фазового взрыва” [2, 3] исходят из представлений о термодинамическом равновесии изолированной жидкофазной системы в изотермических условиях. Причиной взрыв-

ного газообразования здесь является наличие метастабильных особенностей термодинамического потенциала. Применимость этого подхода ограничивается отсутствием учета подвода энергии, а также изменением во времени компонент и температуры.

Один из возможных, но не изученных в литературе путей объяснения явлений такого рода — рассмотрение на элементарном уровне неизотермической кинетики процесса испарения и газообразования для мелкодисперсного вещества в конденсированном состоянии в условиях подвода внешнего потока энергии. Этот подход был высказан в работе [4] и существенно отличается от перечисленных выше концепций. Основной идеей здесь является предположение о четком разделении стадии разрушения изначально целостного объекта в конденсированном состоянии и следующей стадии, на которой в сформировавшейся мелкодисперсной системе по законам кинетики происходят реакции химических превращений, паро- и газообразования. И уже потом перешедшее в газообразное состояние сильно сжатое вещество взрывоподобно расширяется, приводя к объемному взрыву, который формирует ударную волну с катастрофическими последствиями.

В статье предложена общая кинетическая модель такого типа для многокомпонентной мелкодисперсной системы. Процесс разрушения и диспергирования не рассматривается и предполага-

ется завершившимся к начальному моменту времени. Возможным механизмом разрушения в случае метеоритов могут служить механические напряжения и ударные волны в материале твердого тела, возникающие при торможении в атмосфере [5–7], потеря гидродинамической устойчивости [8–11]. Другим возможным механизмом диспергирования может служить также детонационное распространение волн фазовых превращений [12] в твердом теле, которое инициируется при торможении.

Очевидно, что более адекватная математическая модель должна быть значительно сложнее, согласованно включая описание процесса диспергирования и кинетику элементарных превращений компонент, газодинамику расширения системы, а также учитывать при описании испарения метеорита эффекты [13–16]. Эта проблематика выходит за рамки данной статьи.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

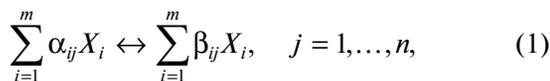
### Кинетические уравнения

Рассмотрим гомогенную систему постоянного объема, содержащую  $m$  компонент в мелкодисперсном конденсированном и газообразном состояниях. Будем предполагать следующее:

- вещества взаимодействуют по  $n$  обратимым реакциям, причем изменение объемных концентраций и температуры подчиняется обычным уравнениям химической кинетики;
- в систему поступает поток энергии, а обмен веществом с внешней средой пренебрежимо мал.

Постоянство объема системы неявно предполагает, что у этой системы либо есть внешнее ограничение (оболочка), либо длительность моделируемого процесса столь мала, что изменение объема пренебрежимо мало. В рассмотренных примерах это выполнено.

Запишем рассматриваемые обратимые элементарные реакции в форме



где  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$  – целые неотрицательные стехиометрические коэффициенты,  $X_i$  – компоненты системы.

Обозначим через  $x_1, \dots, x_m$  и  $T$  концентрации компонент и температуру, введем в рассмотрение множества индексов компонент в газообразном и конденсированном состоянии:  $I_g, I_s$ . Будем полагать, что скорости химических превращений подчиняются закону действующих масс и имеют для прямых ( $w^+$ ) и обратных ( $w^-$ ) реакций вид

$$\begin{aligned} w_j^+(x, T) &= \hat{k}_j^+ T^{d_j} \exp(-E_j^+/RT) x_1^{\alpha_{1j}} \dots x_m^{\alpha_{mj}}, \\ w_j^-(x, T) &= \hat{k}_j^- T^{d_j} \exp(-E_j^-/RT) x_1^{\beta_{1j}} \dots x_m^{\beta_{mj}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\hat{k}_j^\pm$  и  $E_j^\pm$  – предэкспоненты и энергии активации для прямых и обратных реакций,  $d_j$  – степенные показатели соответствующих реакций. Считаем, что для реакций справедливы общие термодинамические соотношения:

$$\begin{aligned} \hat{k}_j^+ / \hat{k}_j^- &= \exp\left(\sum_{i=1}^m (\beta_{ij} - \alpha_{ij}) s_i / R\right), \\ Q_j &= \sum_{i=1}^m (\alpha_{ij} - \beta_{ij}) h_i, \quad E_j^- - E_j^+ = Q_j, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $h_i$  и  $s_i$  – удельная энтальпия образования и энтропия компонент,  $Q_j$  – тепловой эффект реакции. С некоторым упрощением, следуя предложенному в работе [17], примем постоянными  $h_i, s_i$ , а также удельную теплоемкость  $c_i$  компонент при постоянном объеме. Числа  $\hat{k}_j^\pm, E_j^\pm, c_i$  по своему смыслу предполагаются положительными.

В силу сделанных предположений из законов сохранения вещества и энергии получаем систему дифференциальных уравнений, описывающих изменение концентраций и температуры:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n (\beta_{ij} - \alpha_{ij}) [w_j^+(x, T) - w_j^-(x, T)], \quad (4)$$

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{i=1}^m c_i x_i T\right) / dt &= \\ = \sum_{j=1}^n Q_j [w_j^+(x, T) - w_j^-(x, T)] + J(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $J(t)$  – объемная плотность скорости потока тепловой энергии, поступающего в систему. Дифференциальное уравнение сохранения энергии (5) можно записать в дифференциальной консервативной или в эквивалентной интегральной формах:

$$\frac{d}{dt} H(x, T) = J(t), \quad (6)$$

$$H(x(t), T(t)) - H(x(0), T(0)) = \int_0^t J(\tau) d\tau,$$

где

$$H(x, T) = \sum_{i=1}^m x_i (c_i T + h_i) \quad (7)$$

– функция плотности энергии системы.

Примем, что давление газовых компонент в модели описывается уравнением состояния идеального газа:

$$P = RT \sum_{i \in I_g} x_i. \quad (8)$$

Будем считать известными и неотрицательными начальными условиями:  $x_i(0) = x_i^0$ ,  $T(0) = T^0$ . Свойства дифференциальных уравнений химической кинетики хорошо изучены [18]. В частности, при наличии для схемы реакций (1) положительного вектора материальных балансов и соотношений (3) решение (4), (5) определено на полуоси  $t \geq 0$ , неотрицательно и ограничено. Решение (4), (5) в общем случае можно исследовать только численно, например путем численного интегрирования по программам, реализующим алгоритмы [19], основанные на неявной разностной схеме Эйлера.

Отметим, что используемые нами понятия концентрации и скорости реакций описывают поведение мелкодисперсной системы в некотором промежуточном масштабе. Так, молярная концентрация дисперсного конденсированного вещества – это отношение количества молей этого вещества в некоторой области к ее объему при условии, что размер области мал, но больше характерного размера частиц. Скорости реакций (2) означают предел числа превращений в единичном объеме в единицу времени, который достигается при микроскопическом диспергировании и не зависит от распределения частиц по геометрической форме и размеру.

#### *Асимптотика по быстрым реакциям и квазистационарное приближение*

В случае быстрых обратимых реакций (1) решение кинетических уравнений (4), (5) обладает асимптотикой по большим константам скоростей реакций. Эта асимптотика полезна и позволяет просто описать поведение решения. Введем в рассмотрение малый параметр

$$\varepsilon = \max \{ 1/\hat{k}_j^\pm, j = 1, \dots, n \}.$$

Для теоретического описания асимптотики решения будем далее считать, что константы скоростей реакций (1) линейно зависят от множителя  $1/\varepsilon$ . Особенность неизотермической кинетической системы (4), (5) состоит в том, что множитель  $1/\varepsilon$  входит во все уравнения. Поэтому быстрые и медленные переменные не разделены и невозможно непосредственно применить теорию квазистационарного приближения [18, 20] для дифференциальных уравнений с малым параметром при производной. Возможность разделения переменных появляется при переходе от температуры  $T$  к энергии системы  $H$ , связанной с пе-

ременными  $x$ ,  $T$  уравнением (7). Уравнение (5) при такой замене переменных перейдет в эквивалентное уравнение (6), не содержащее параметра  $\varepsilon$ . Введем обозначения, необходимые для описания квазистационарной асимптотики.

Определим прямоугольную матрицу  $B = \{b_{li}\}$ ,  $1 \leq l \leq L$ ,  $1 \leq i \leq m$ , состоящую из максимального набора линейно независимых балансов реакций (1), т.е. векторов решений  $b = (b_1, \dots, b_m)$  однородной системы линейных уравнений:

$$\sum_{i=1}^m (\beta_{ij} - \alpha_{ij}) b_i = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Из соотношений (3) следует, что при любой температуре  $T$  набор концентраций  $\tilde{x}_i(T) = \exp(s_i/R - h_i/RT)$  является положительной точкой детального равновесия реакций (1), т.е.  $w_j^+(\tilde{x}(T), T) = w_j^-(\tilde{x}(T), T)$ . Согласно теории, изложенной в работе [18], для кинетических уравнений обратимых реакций в изотермических условиях решение (4) при  $t \rightarrow \infty$  стремится к единственной положительной точке детального равновесия на балансной плоскости, проходящей через вектор начальных условий. Учитывая точное выполнение для системы (4), (5) законов сохранения, естественно ожидать, что предел при  $\varepsilon \downarrow 0$  решения (4), (5) будет удовлетворять условиям детального равновесия, материального и энергетического баланса. Запишем формально эти уравнения:

$$\sum_{i=1}^m (\beta_{ij} - \alpha_{ij})(RT \ln x_i - Ts_i + h_i) = 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^m b_{li} (x_i - x_i^0) = 0, \quad 1 \leq l \leq L, \quad (10)$$

$$H(x, T) - H(x^0, T^0) = E(t). \quad (11)$$

Здесь

$$E(t) = \int_0^t J(\tau) d\tau$$

– объемная плотность энергии, полученной системой к моменту времени  $t$ . Заметим, что уравнение (9) получается логарифмированием равенства  $w_j^+(x, T) = w_j^-(x, T)$  для положительного вектора концентраций  $x$ . Кроме того, соотношения (9), (10) означают, что при фиксированной температуре  $T$  вектор концентраций  $x$  является решением экстремальной задачи:

$$G(x, T) \rightarrow \min, \quad B(x - x^0) = 0, \quad x \geq 0, \quad (12)$$

где

$$G(x, T) = \sum_{i=1}^m x_i (RT \ln x_i - Ts_i + h_i - RT)$$

— функция объемной плотности свободной энергии Гиббса. То есть решение  $x$  минимизирует при заданной температуре  $T$  свободную энергию на неотрицательных векторах балансной плоскости, содержащей  $x^0$ . В силу строгой выпуклости и гладкости функции  $G(x, T)$  этот минимум существует и единственен. Обозначив его через  $x^{eq}(T)$ , получаем непрерывно дифференцируемую векторную функцию значений равновесных концентраций. С использованием значения  $x^{eq}(T)$  определим равновесное значение полной энергии:

$$H^{eq}(T) = H(x^{eq}(T), T). \quad (13)$$

Функция равновесной энергии имеет положительную нижнюю линейную оценку роста при  $T \rightarrow \infty$ , так как

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{z \geq T} H^{eq}(z)/T \geq \min \left\{ \sum_i c_i x_i : x \geq 0, B(x - x^0) = 0 \right\} > 0.$$

В общем случае эта функция может иметь локальные экстремумы при  $T \geq 0$ . Именно локальные максимумы  $H^{eq}(T)$  определяют быстрые переходные процессы решения кинетической системы (4), (5).

Полезно в связи с этим ввести понятие критического значения энергии: значение энергии  $E$  называется критическим, если найдется такое число  $T > 0$ , что  $H^{eq}(T) = E$ ,  $\frac{d}{dT} H^{eq}(T) = 0$ . В противном случае  $E$  называется регулярным.

Множество всех критических значений  $E$  обозначим как  $E^*$ . Как правило, оно пусто или состоит из конечного набора точек. Теперь мы можем точно охарактеризовать асимптотическое приближение точного решения (4), (5) к решению (9)–(11). Обозначим решение (4), (5) при начальных условиях  $x(0) = x^0$ ,  $T(0) = T^0$ , соответствующее значению параметра  $\varepsilon$ , через  $x^\varepsilon(t)$ ,  $T^\varepsilon(t)$ .

**Предложение.** Существует пара функций  $\bar{x}(t)$ ,  $\bar{T}(t)$ , являющихся решением уравнений (9)–(11), таких что:

1) для времени  $t > 0$  такого, что  $E(t) + H(x^0, T^0) \notin E^*$ , выполнены условия

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} x^\varepsilon(t) = \bar{x}(t), \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} T^\varepsilon(t) = \bar{T}(t),$$

$$\frac{d}{dT} H^{eq}(\bar{T}(t)) \geq 0;$$

2) для интервала времен  $0 < t' < t''$  такого, что при  $t' \leq t \leq t''$  выполнено условие  $E(t) + H(x^0, T^0) \notin E^*$  (т.е. энергия системы не принимает на этом интервале критических значений), сходимость равномерна по  $t$ .

Доказательство **Предложения** сводится к обобщению рассуждений [18] о методе квазистационарных концентраций на случай неизотермической кинетики обратимых реакций и получается приложением теоремы Тихонова [20] для системы уравнений (4)–(6) с малым параметром при производной. Быстрыми переменными в этих уравнениях являются концентрации  $x$ , а медленными — материальные балансы и энергия  $H$ . Неравенство  $dH^{eq}/dT \geq 0$  — это форма условия устойчивости корня для системы уравнений связи быстрых и медленных переменных в теореме Тихонова (так называемое присоединенное уравнение [16]).

Будем называть функции  $\bar{x}(t)$ ,  $\bar{T}(t)$  квазистационарным приближением решения (4), (5). Из сформулированного **Предложения** следует, что скачкообразное поведение решения  $\bar{x}(t)$ ,  $\bar{T}(t)$  происходит при  $t = 0$  и в моменты времени  $t$ , когда приобретенная системой в ходе накачки потоком энергия  $E(t) + H(x^0, T^0)$  принимает критические значения  $E^*$ . Первый скачок компонент происходит при  $t = 0$  в ходе установления в системе равновесия, соответствующего начальным условиям. Далее с ростом  $E(t)$  происходит непрерывное изменение  $\bar{x}(t)$ ,  $\bar{T}(t)$ , которое прерывается при  $dH^{eq}(\bar{T}(t))/dT = 0$ , т.е. при достижении энергией системы  $E(t) + H(x^0, T^0)$  критического значения. При этом скачок температуры минует участок с  $dH^{eq}(T)/dT < 0$ , соответствующий неустойчивым равновесным состояниям (4), (5). Температура после скачка принимает минимальное значение  $T$ , такое что

$$T \geq \bar{T}(t), \quad dH^{eq}(T)/dT \geq 0,$$

$$H^{eq}(T) = H(x^0, T^0) + E(t),$$

а соответствующие значения концентрации компонент и давления газа определяются по формулам  $x = x^{eq}(T)$  и (8).

Вычисление асимптотических предельных функций  $\bar{x}(t)$ ,  $\bar{T}(t)$  сводится к решению уравнений термодинамического равновесия (8)–(10) с заданной плоскостью материальных балансов и полной энергией. Оно эффективно реализуется алгоритмом, использующим итерации метода Ньютона, и не связано с численным интегрирование кинетических уравнений (4), (5).

Предположение о постоянстве удельных термодинамических величин  $s_i, h_i, c_i$  не является существенным для теоретического анализа и сделано для краткости. Сформулированные результаты справедливы в более общем случае, когда удельные термодинамические функции зависят от  $T$  в рамках согласованного описания, приведенного в современных базах данных термодинамики, например в [21].

## ПРИМЕРЫ

### Оценка кинетических параметров испарения и конденсации

Рассмотрим простейший вариант модели, в котором система состоит из одного мелкодисперсного конденсированного компонента  $X$  и его пара  $Y$ . Процессы испарения и конденсации описывает одна обратимая реакция:  $X \leftrightarrow Y$ .

Уравнения (4), (5) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -k^+(T)x + k^-(T)y, \quad \dot{y} = k^+(T)x - k^-(T)y, \\ \frac{d}{dt}[(c_x x + c_y y)T] &= Q[k^+(T)x - k^-(T)y] + J(t), \quad (14) \\ x(0) &= x^0, \quad y(0) = y^0, \quad T(0) = T^0, \end{aligned}$$

причем теплота реакции и энергия испарения связаны формулой  $Q = -Q_{\text{исп}}$ , а функция  $H$  плотности энергии системы и температурные факторы реакций даются выражениями

$$H(x, y, T) = x(c_x T + h_x) + y(c_y T + h_y), \quad (15)$$

$$k^+(T) = \hat{k}^+ \exp\left(-\frac{E^+}{RT}\right), \quad k^-(T) = \hat{k}^- \exp\left(-\frac{E^-}{RT}\right). \quad (16)$$

Интегральный закон сохранения энергии (6) применительно к системе уравнений (14) записывается как

$$\begin{aligned} [(c_x x + c_y y)T - (c_x x^0 + c_y y^0)T^0] + Q_{\text{исп}}(y - y^0) &= \\ = \int_0^t J(\tau) d\tau, \quad (17) \end{aligned}$$

т.е. сумма прироста тепловой энергии системы  $(c_x x + c_y y)T - (c_x x^0 + c_y y^0)T^0$  и энергии, затраченной на парообразование,  $Q_{\text{исп}}(y - y^0)$ , равна интегральной энергии внешнего потока.

Нам неизвестны из литературы данные по кинетике испарения и конденсации, поэтому для оценки параметров будем исходить из естественных предположений:

- будем предполагать, что кинетика процесса конденсации описывается мономолекулярной реакцией первого порядка с типичными параметрами гомогенных газовых реакций теории абсолютных скоростей Эйринга [22]:

$$\hat{k}^- = 10^{13} \text{ с}^{-1}, \quad E^- = 160000 \text{ Дж/моль}; \quad (18)$$

- для оценки параметров кинетики процесса испарения будем опираться на условие равенства скоростей испарения и конденсации при кипении для атмосферного давления, предполагая известными температуру кипения, начальную мольную плотность конденсированной фазы  $x^0$  и другие необходимые физические параметры вещества.

Условие равенства скорости испарения и конденсации при температуре кипения  $T_{\text{кип}}$ , уравнение состояния идеального газа, равенство разности энергий активации прямой и обратной реакций теплоте испарения приводят к следующим уравнениям:

$$k^+(T_{\text{кип}})x^0 = k^-(T_{\text{кип}})y, \quad (19)$$

$$P_{\text{атм}} = RT_{\text{кип}}y,$$

$$E_+ = E_- + Q_{\text{исп}}. \quad (20)$$

Подставляя (16) в (19) и исключая  $y$ , найдем предэкспонент  $\hat{k}^\pm$  для реакции испарения:

$$\hat{k}^+ = \hat{k}^- \frac{P_{\text{атм}}}{RT_{\text{кип}}x^0} \exp\left(\frac{Q_{\text{исп}}}{RT_{\text{кип}}}\right). \quad (21)$$

В случае однокомпонентной модели (14) легко выразить явно зависимость равновесного состава компонент и соответствующей полной энергии от температуры  $T$ . Решая уравнения (9)–(11), получим

$$\begin{aligned} x^{eq}(T) &= (x^0 + y^0)/[1 + k^{eq}(T)], \\ y^{eq}(T) &= k^{eq}(T)x^{eq}(T), \quad (22) \end{aligned}$$

$$H^{eq}(T) = \frac{(c_x T + h_x) + k^{eq}(T)(c_y T + h_y)}{1 + k^{eq}(T)}(x^0 + y^0),$$

где  $k^{eq}(T) = \hat{k}^+/\hat{k}^- \exp(Q/RT)$  – константа равновесия реакции  $X \leftrightarrow Y$ .

Сведем числовые параметры системы (14) для рассматриваемых далее конкретных веществ в табл. 1. В последних двух колонках таблицы значения  $\hat{k}^+, E^+$  вычислены по формулам (20), (21), остальные значения – данные из [23, 24].

Для теплоемкости паров металлов возьмем значение  $C_V = (3/2)R = 12.471 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$  (идеальный одноатомный газ), а для пара воды  $C_V = (5/2)R = 20.786 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$  (многоатомный газ с линейными молекулами). Для удельных энтальпий примем значения, согласованные с теплотой испарения

$$h_x = -Q_{\text{исп}}, \quad h_y = 0.$$

Отметим, что энтальпий компонент в качестве параметров входят только в выражение для энер-

Таблица 1. Характеристики конденсированных веществ

Вещество	$\mu$ , моль/м <sup>3</sup>	$C_x$ , Дж/моль · К	$Q_{исп}$ , Дж/моль	$T_{кип}$ , °С	$x^0$ , моль/м <sup>3</sup>	$\hat{k}^+$ , с <sup>-1</sup>	$E^+$ , Дж/моль
H <sub>2</sub> O	18	75.35	48898	100	55555	$4.116 \cdot 10^{16}$	208898
Al	26	24.35	284100	2518	98460	$9.165 \cdot 10^{13}$	444100
Cu	64	24.44	304600	2300	133900	$5.398 \cdot 10^{14}$	464600

Примечания:  $\mu$  – мольная плотность,  $C_x$  – мольная удельная теплоемкость компонента X.

гии  $H$ , которое при соблюдении материального баланса по  $x$ ,  $y$  и сдвиге  $h_x, h_y$  на общую величину  $c$  изменяется на  $c(x + y) = \text{const}$ . Поэтому можно положить  $h_y = 0$ , что сделано для упрощения формул.

В рассматриваемых ниже примерах постулируется наличие гомогенной мелкодисперсной системы постоянного объема с теплофизическими и кинетическими параметрами из табл. 1, примерно соответствующим конкретным веществам (вода, металлы). Разумеется, при использовании приведенных оценок кинетических параметров абстрагируются от многих деталей. В частности, отождествляются жидкая и твердая конденсированные фазы и их градации, занижаются скорости испарения и конденсации воды при температуре ниже 500 К. Но для описания качественной картины рассматриваемых быстрых взрывных процессов они пригодны. Гипотеза о постоянстве объема в примерах основана на малости рассматриваемого при моделировании интервала времени. Более точный расчет и проверка адекватности этой гипотезы нуждается в учете в модели баллистики компонент системы.

### Моделирование электровзрыва проводника

Рассмотрим объект-проводник, через который идет электрический ток  $I$  большой интенсивности. Предполагаем следующее:

- частицы вещества находятся в мелкодисперсном конденсированном и парообразном состояниях, переход между которыми происходит по схеме обратимой реакции 1-го порядка;
- пренебрегаем изменением удельного электрического сопротивления и величины тока в рассматриваемом при моделировании диапазоне времен.

В рамках этих предпосылок, для концентраций и температуры получим систему дифференциальных уравнений (14) с объемной плотностью скорости тепловыделения  $J(t)$ , равной джоулеву тепловыделению, генерируемому током:

$$J(t) = \rho I^2, \quad (23)$$

где  $\rho$  и  $I$  – удельное электрическое сопротивление вещества проводника и плотность тока.

Проведем численное интегрирование системы (14) для характеристик меди и алюминия из табл. 1. В качестве параметров, входящих в (23), возьмем характерное значение плотности тока при электровзрыве:  $I = 10^5$  А/мм<sup>2</sup> [25] и удельные электрические сопротивления меди и алюминия при 300 К [24]:

$$\rho_{Cu} = 1.75 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}^{-1}, \quad \rho_{Al} = 2.71 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}^{-1}.$$

Типичная длительность импульса тока при электровзрыве, согласно [25], лежит в диапазоне от  $10^{-6}$  до  $10^{-5}$  с.

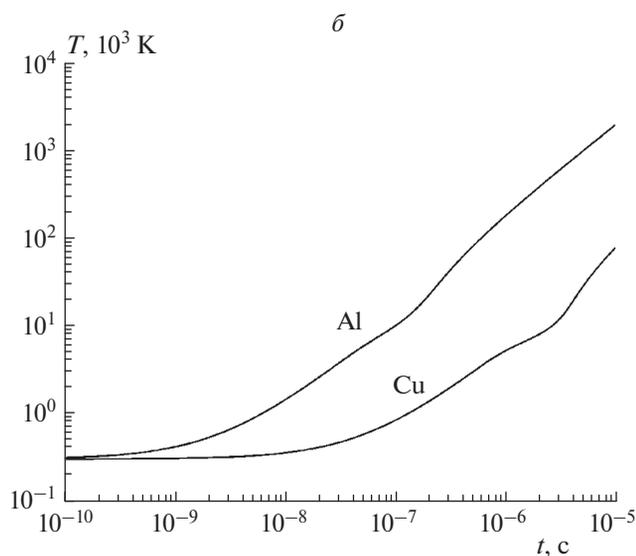
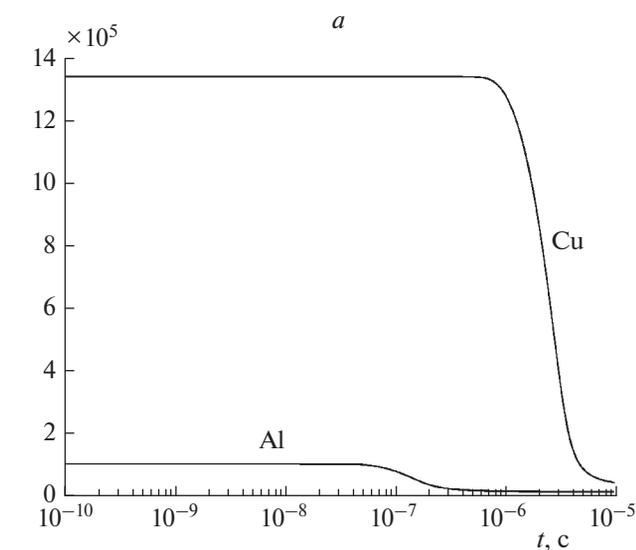
Формула (22) даст для плотности тепловыделения следующие значения:

$$\begin{aligned} J_{Cu} &= 1.75 \cdot 10^{14} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}, \\ J_{Al} &= 2.71 \cdot 10^{14} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Решаем численно систему (14) при начальных условиях  $x(0) = x^0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $T(0) = 300$  К, используя алгоритм из работы [19] с переменным адаптирующимся шагом по времени, задав относительную точность аппроксимации компонент  $\sim 10^{-4}$ .

Изменение во времени концентрации металла в конденсированном состоянии, температуры и давления представлено на рис. 1 и 2. Из этих графиков видно, что для меди на временах порядка  $10^{-6}$  с происходит разогрев системы до  $10^4$  К и рост давления до  $10^3$  атм. Концентрация меди к моменту времени  $10^{-5}$  с устанавливается на малом положительном значении, соответствующем равновесию скорости испарения и конденсации; при этом температура и давление превышают соответственно  $10^5$  К и  $10^5$  атм. Из рис. 2 видно, что найденная методом численного интегрирования кинетическая кривая давления практически совпадает с кривой давления для квазистационарного приближения начиная с момента времени установления равновесия скоростей испарения и конденсации. Для алюминия наблюдаются те же эффекты, но приблизительно при тридцатикратном меньшем времени.

На рис. 3 для рассмотренных систем изображены графики изменения во времени прироста тепловой энергии, затрат энергии на парообразование, их суммы и джоулеву тепловыделения. Видно, что закон сохранения энергии (17) выполнен с высокой точностью.

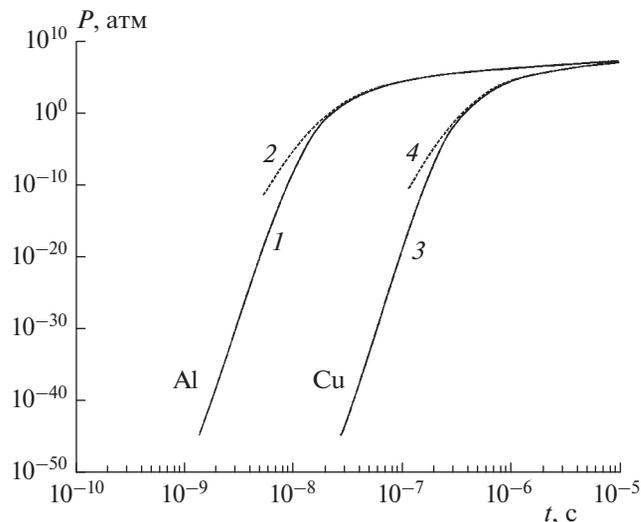


**Рис. 1.** Изменение концентрации (моль/м<sup>3</sup>) металла и температуры при электровзрыве и  $T^0 = 300$  К: *a* – концентрация, *б* – температура.

Отметим, что высказанная гипотеза о мелкодисперсном состоянии проводника согласуется с экспериментальными данными [25]: при прохождении импульса тока, приводящего к электровзрыву, происходит диспергирование проводника на частицы, диаметр которых распределен по логарифмически нормальному закону с максимумом плотности распределения от 10 до 500 нм. Пренебречь изменением объема системы из-за разлета частиц на времена порядка  $10^{-6}$  с вполне допустимо.

**Моделирование парового взрыва метеорита**

Рассмотрим объект, который прямолинейно движется со скоростью  $V$  в атмосфере плотностью  $\rho_{\text{атм}}$ . Предполагаем следующее:



**Рис. 2.** Сравнение давления паров металла при электровзрыве для численного решения кинетических уравнений и квазистационарного приближения при  $T^0 = 300$  К: 1, 2 – давление пара алюминия и квазистационар; 3, 4 – давление пара меди и квазистационар.

- частицы вещества объекта находятся в мелкодисперсном конденсированном и парообразном состояниях, переход между которыми происходит по кинетическому механизму обратимой реакции 1-го порядка;

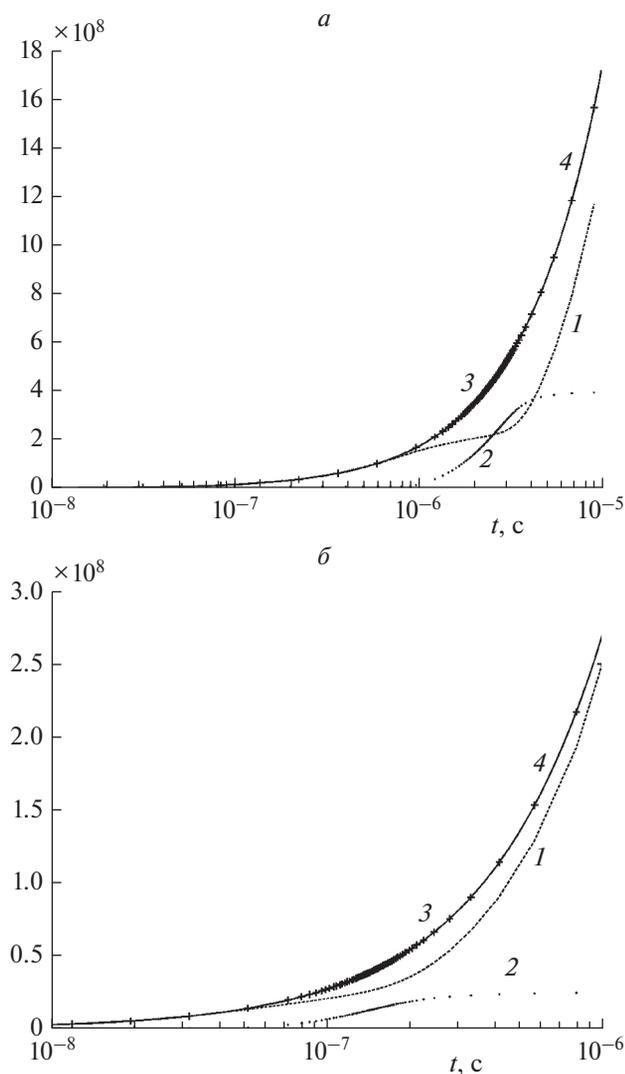
- в начальный момент времени  $t = 0$  концентрации и температура во всех точках объекта одинаковы;

- объект пронизаем для атмосферы при  $t > 0$ , часть проходящего потока воздуха задерживается при неупругих столкновениях с частицами объекта, отдавая импульс на торможение и кинетическую энергию на нагрев. Массовая интенсивность потока воздуха стационарна и зависит от расстояния  $l$ , пройденного в объекте, по формуле  $I(l) = I_0 \exp(-\alpha l)$ , где  $I_0$  и  $\alpha > 0$  интенсивность потока при входе и коэффициент поглощения;

- пренебрегаем притоком вещества в объект, изменением скорости, влиянием на изменение концентраций и температуры в точке объекта их значений в соседних точках, а также изменением концентраций и температуры до момента достижения потоком воздуха точки объекта;

- объект имеет форму прямого цилиндра с осью, параллельной направлению движения, с основаниями (торцами) площадью  $S$  и расстоянием между ними  $L$ .

Предположение об экспоненциальном падении интенсивности потока от пройденного пути общепринято при описании поглощения разреженного потока любой природы, проходящего в однородной среде. Поскольку, по предположению,



**Рис. 3.** Баланс энергии ( $\kappa\text{Дж/м}^3$ ) при электровзрыве: *a* – медь, *б* – алюминий; 1 – приращение тепловой энергии; 2 – энергия, затраченная на испарение; 3 (маркеры) – сумма приращения тепловой энергии и энергии парообразования; 4 (линия) – джоулево тепловыделение тока.

весь поток воздуха проходит через торец, массовая интенсивность его при входе есть  $I_0 = \rho_{\text{атм}} V$ .

Рассмотрим одномерную декартову систему координат, движущуюся вместе с объектом со скоростью  $V$  с началом отсчета в плоскости переднего торца и положительным направлением, противоположным движению. Обозначим через  $l$  координату ортогональной проекции точки на координатную ось. В рамках сделанных предположений параметры состояния в объекте зависят только от  $l$  и  $t$ . Обозначая через  $\tilde{x}(l, t)$ ,  $\tilde{y}(l, t)$ ,  $\tilde{T}(l, t)$ ,  $\tilde{J}(l, t)$  концентрации, температуру и плотность скорости тепловыделения в точке объекта в момент времени  $t$ , получим, что при  $t \leq l/V$

$$\tilde{x}(l, t) = x^0, \quad \tilde{y}(l, t) = 0, \quad \tilde{T}(l, t) = T^0, \quad \tilde{J}(l, t) = 0,$$

так как только при  $t = l/V$  поток воздуха от нулевой границы объекта доходит до точки объекта. При  $t \geq l/V$  объемная плотность скорости тепловыделения выражается как

$$\tilde{J}(l, t) = \alpha \exp(-\alpha l) \rho_{\text{атм}} V^3 / 2. \quad (25)$$

Действительно, при малых и положительных  $\Delta l, \Delta t$  в цилиндрическом слое между  $l$  и  $l + \Delta l$  выделяется  $\Delta t S [\exp(-\alpha l) - \exp\{-\alpha(l + \Delta l)\}] \rho_{\text{атм}} V^3 / 2$  кинетической энергии поглощённой (т.е. задержанной) доли потока воздуха. Деля это выражение на объем слоя  $S \Delta l \Delta t$  и переходя к пределу при  $\Delta l, \Delta t \rightarrow 0$ , получим формулу (25). Теперь в силу предположения о независимом изменении концентраций и температуры в точках объекта получается

$$\tilde{x}(l, t) = x(t - l/V), \quad \tilde{y}(l, t) = y(t - l/V), \quad (26)$$

$$\tilde{T}(l, t) = T(t - l/V),$$

где  $x(t), y(t), T(t)$  – решение кинетической системы (14) с не зависящей от времени плотностью тепловыделения из (25):

$$J(t) = \alpha \exp(-\alpha l) \rho_{\text{атм}} V^3 / 2. \quad (27)$$

Итак, в точке объекта на расстоянии  $l$  от переднего торца изменение компонент (концентрации, температура) описывается кинетической системой (14) с задержкой по времени  $l/V$ , причем соответствующая плотность тепловыделения в силу (27) экспоненциально убывает с ростом  $l$  из-за поглощения. Определим также нужную для дальнейших рассмотрений долю  $\theta(t)$  прошедшего через передний торец потока воздуха, поглощённого в объекте к моменту времени  $t$ . В силу сформулированных предположений о поглощении потока воздуха

$$\theta(t) = \frac{1}{Vt} \int_0^{Vt} [1 - \exp(-\alpha \min(L, Vt))] dl.$$

Вычисление по этой формуле дает, что при  $t \geq L/V$

$$\theta(t) = 1 - \exp(-\alpha L) + \frac{1}{Vt} \left[ L \exp(-\alpha L) - \frac{1 - \exp(-\alpha L)}{\alpha} \right]. \quad (28)$$

Проведем численное решение системы (14) для параметров воды из табл. 1, а в качестве значений  $\rho_{\text{атм}}, L, V$  возьмем примерные значения плотности Земной атмосферы на высоте 20 км, размеров и скорости Челябинского метеорита [4]:

$$\rho_{\text{атм}} = 0.1 \text{ кг/м}^3, \quad V = 18000 \text{ м/с}, \quad L = 10 \text{ м}.$$

Начальная температура  $T^0$  нам неизвестна, поэтому будем рассматривать при решении (14) три оценочных значения:  $T^0 = 200, 300$  и  $400$  К. Система (14) в данном примере содержит параметр поглощения потока воздуха,  $\alpha$ . Его можно оценить по известным данным о торможении метеоритов в Земной атмосфере [26]. Рассмотрим мелкодисперсный ледяной метеорит малой толщины  $\Delta L$ , тогда по закону сохранения импульса изменение импульса объекта  $P(t)$  равно импульсу поглощенной к моменту  $t$  доли потока воздуха, прошедшего через торец, т.е.  $P(t) - P(0) = \theta(t)\rho_{\text{атм}}SV^2t$ . Так как  $P(0) = 0$ , по формуле (28) при  $L = \Delta L$  и  $t \geq \Delta L/V$  получим

$$P(t) = tS\rho_{\text{атм}}V^2(1 - e^{-\alpha\Delta L}) + S\rho_{\text{атм}}V[L e^{-\alpha\Delta L} - (1 - e^{-\alpha\Delta L})/\alpha].$$

Следовательно, ускорение торможения  $a$  метеорита массой  $\Delta L S \rho_{\text{H}_2\text{O}}$  по второму закону Ньютона выражается как

$$a = \frac{\dot{P}(t)}{\Delta L S \rho_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{\rho_{\text{атм}} V^2 [1 - \exp(-\alpha\Delta L)]}{\rho_{\text{H}_2\text{O}} \Delta L},$$

что в пределе при  $\Delta L \rightarrow 0$  даст  $a = \alpha V^2 \rho_{\text{атм}} / \rho_{\text{H}_2\text{O}}$ , откуда получается выражение для  $\alpha$ :

$$\alpha = a \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{атм}}} V^{-2}. \quad (29)$$

Согласно [26], для метеоритов, разрушающихся в верхних плотных слоях атмосферы, характерно большое ускорение торможения, масштабом которого при обработке наблюдений является  $\text{км/с}^2$ . В числе данных на стр. 377 работы [26] есть ссылка на велограмму радиоизмерений падения метеорита в 1949 г., напоминающего по параметрам Челябинский болид. Для этой велограммы вычислено ускорение торможения  $a \approx 0.5 \text{ км/с}^2$ , которое естественно взять в качестве опорного значения. Полагая  $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ ,  $a = 0.5 \text{ км/с}^2$ , из (29) получим оценку  $\alpha = 0.0154 \text{ м}^{-1}$ .

Формула (27) для плотности тепловыделения при  $l = 0$  и  $10$  дает соответственно следующие значения:

$$J(t) = 4.49 \cdot 10^9 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$J(t) = 3.85 \cdot 10^9 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}.$$

В рассматриваемом примере  $\alpha L = 0.154$ , поэтому плотность тепловыделения, определяемая выражением (27), и соответствующие решения кинетической системы (14) в моделируемом объекте при  $0 \leq l \leq L$  изменяются несущественно. Приведем результаты интегрирования системы (14) только при  $l = 0$ , т.е. для переднего торца. Изменение во времени концентрации воды, темпе-

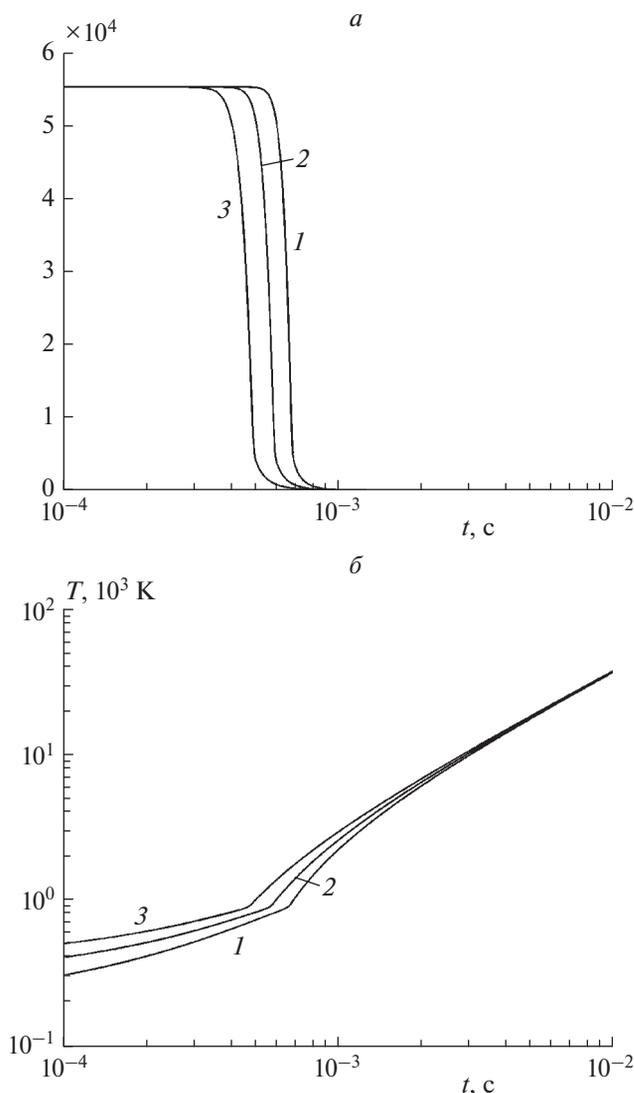


Рис. 4. Кинетические кривые концентрации (моль/м<sup>3</sup>) воды (а) и температуры (б) для трех значений начальных температур  $T^0$ , К: 1 – 200, 2 – 300, 3 – 400.

ратуры и давления для трех начальных температур представлено на рис. 4, 5. Наблюдаются три характерные особенности решения:

- начальный режим с плавным изменением компонент. Концентрация  $X$  медленно падает, постепенно с ускорением растут температура и давление, причем температура в конце достигает примерно  $1000 \text{ К}$ ;
- промежуточный режим с экспоненциальным переходом конденсированного компонента  $X$  в пар и экспоненциальным ростом температуры и давления. В конце конденсированное вещество полностью испаряется (точнее – устанавливается равновесие малого остатка компонента  $X$  и пара  $Y$ ).
- финальный установившийся режим, при котором система состоит практически из одного па-

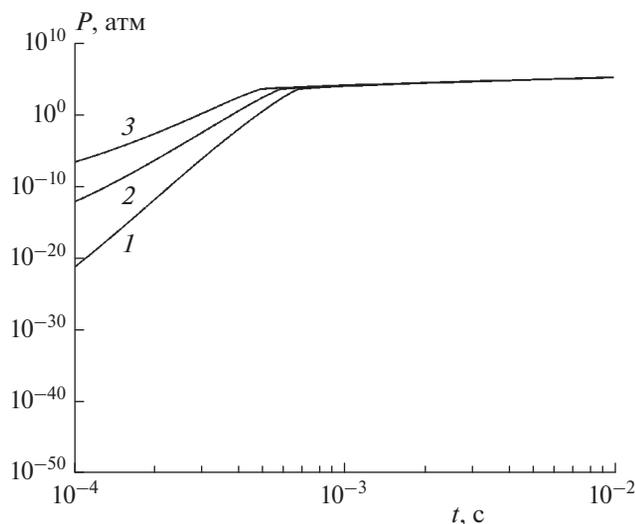


Рис. 5. График давления пара для трех начальных температур  $T^0$ , К: 1 – 200, 2 – 300, 3 – 400.

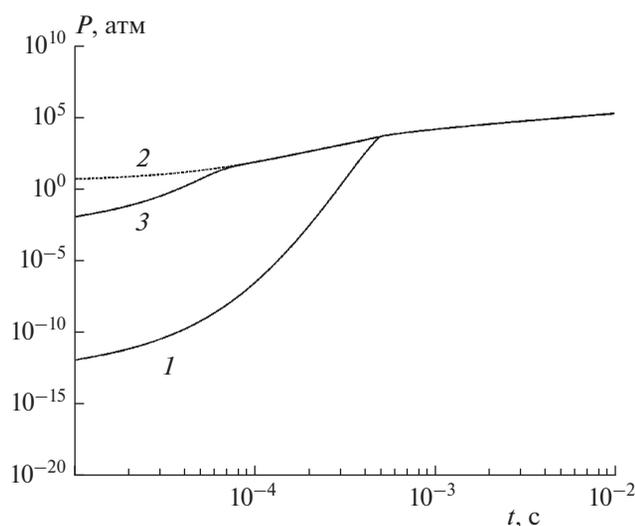


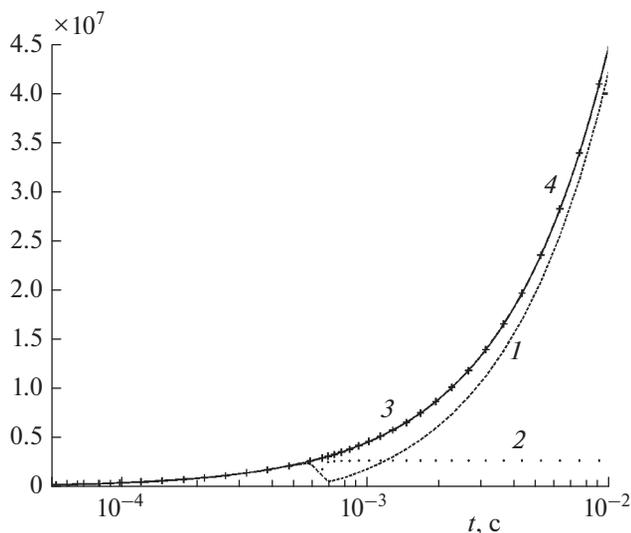
Рис. 6. Сравнение давления пара для решения кинетических уравнений и квазистационарного приближения при  $T^0 = 400$  К: 1 – численное интегрирование, 2 – квазистационарное приближение, 3 – численное интегрирование для модели с  $\hat{k}^- = 10^{23} \text{ с}^{-1}$ .

ра, а температура и давление линейно растут, так как вся энергия поглощенной доли потока воздуха идет на нагрев пара. Этот режим представлен на рис. 5 в виде линейного участка, начало которого – излом на графике давления. Момент времени этого излома зависит от начальной температуры  $T^0$  и примерно равен  $t^* = 0.0007$  с.

Итак, характер изменения температуры напоминает картину теплового взрыва: предвзрывной

разогрев переходит в экспоненциальный рост. Затем следует установившийся режим неограниченного подъема температуры системы и давления пара, причем ко времени  $t^* = 0.0007$  с температура превышает 1100 К, а давление – 4000 атм. Такое поведение решения качественно напоминает явления [4, 6], наблюдавшиеся при падении Челябинского метеорита (взрыв, вспышка, полное превращение в облако пара). Заметим, что ко времени  $t^*$  объект успеет пролететь 12.6 м. Доля задержанного к этому времени воздуха, согласно формуле (28), есть  $\theta(t^*) = 0.0875$ . Поэтому отношение массы задержанного воздуха к массе объекта, выраженное формулой  $\theta(t^*)\rho_{\text{атм}}Vt^*/\rho_{\text{H}_2\text{O}}L$ , равно  $1.103 \cdot 10^{-5}$ , а уменьшение скорости при ускорении торможения  $a = 0.5 \text{ км} \cdot \text{с}^{-2}$  есть  $\Delta V = 0.35 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ . Эти оценки согласуются со сделанными предположениями – объект превратился в пар с высокой температурой и давлением при относительно небольшом перемещении с пренебрежимо малым изменением массы и скорости движения. Характерной особенностью кинетики испарения метеорита, описанного моделью, является наличие времени задержки процесса на время  $l/V$  прохода потоком воздуха от переднего торца до точки объекта, что выражено формулой (25). Максимальное время задержки равно  $L/V = 5.55 \cdot 10^{-4}$  с – времени заполнения объекта потоком воздуха.

Методический интерес представляет сравнение найденного решения кинетических уравнений (14) и квазистационарного приближения. Для уравнений (14) имеем значение малого параметра  $\varepsilon = \max(1/\hat{k}^-, 1/\hat{k}^+) = 10^{-13}$ . При построении квазистационарного приближения методом Ньютона решается относительно неизвестной температуры  $T$  уравнение  $H^{eq}(T) - H(x^0, y^0, T^0) = tJ$  с использованием формул (21). Сравнение результатов численного интегрирования уравнений (14) и квазистационарной асимптотики показано на графике давления пара, представленном на рис. 6. Из этого рисунка видно, что в модели испарения метеорита численное решение и квазистационарное приближение хорошо совпадают только в финальном режиме, когда конденсированный компонент полностью исчез. На начальном участке квазистационарная асимптотика существенно завышает скорость испарения и рост давления. Причина расхождения кроется в недостаточной малости параметра  $\varepsilon$ . Например, используя значение  $\hat{k}^- = 10^{23} \text{ с}^{-1}$ , получим, что численное решение уравнений (14) совпадет с квазистационарным при  $t \geq 0.65 \cdot 10^{-4}$  с, что также показано на рис. 6.

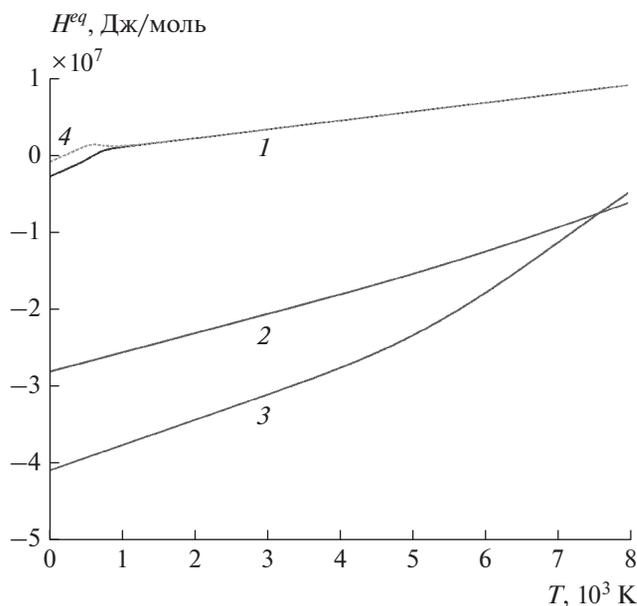


**Рис. 7.** Баланс энергии ( $\text{кДж/м}^3$ ) воды и пара при  $T = 200 \text{ К}$ : 1 – приращение тепловой энергии; 2 – энергия, затраченная на испарение; 3 (маркеры) – сумма приращений тепловой энергии и энергии парообразования; 4 (линия) – тепловыделение от потока воздуха.

На рис. 7 для варианта расчета при  $T^0 = 200 \text{ К}$  изображены графики изменения во времени прироста тепловой энергии, затрат энергии на парообразование, их суммы и тепловыделения от потока воздуха. Видно, что закон сохранения энергии (17) выполнен с высокой точностью. Отметим особенность в этом примере графика изменения тепловой энергии – он имеет локальный максимум и минимум, что, вероятно, связано с соотношением молярных теплоемкостей воды и ее пара.

Высказанная в нашей постановке гипотеза о достижении метеоритом мелкодисперсного состояния при входе в плотные слои атмосферы довольно давно рассматривается в литературе [8–11]. В этих работах изучаются процессы, которые при определенных условиях приводят к быстрому взрывному дроблению вещества метеорита и напоминают цепные реакции. Момент достижения нулевого значения параметром верхней оценки размера частиц формально трактуется в этом направлении моделирования как взрыв с передачей кинетической энергии метеорита атмосфере. Предложенная в нашей статье модель испарения мелкодисперсного объекта естественно дополняет схемы фрагментирования описанием причины взрыва: на этапе достижения ансамблем фрагментов микронных размеров запускаются кинетические процессы, превращающие за время менее 1 мс в исходном объеме ледяного метеорита почти все конденсированное вещество в сильно сжатый высокотемпературный пар.

В заключение данного раздела уместно сделать замечание о асимптотическом приближении в



**Рис. 8.** Зависимость равновесной энергии системы  $H^{eq}(T)$  от температуры для рассмотренных систем: 1 – вода и пар, 2 – медь и пар, 3 – алюминий и пар, 4 – вода и пар с измененным значением энтальпии  $h_x = Q = -16000 \text{ Дж/моль}$ .

приведенных примерах. На рис. 8 изображены графики зависимости от  $T$  энергии равновесного состава  $H^{eq}(T)$  для рассмотренных модельных систем. Видно, что  $H^{eq}(T)$  монотонно возрастает. Следовательно, в соответствии с изложенной теорией критических значений энергии для квазистационарного режима в этих примерах не существует и скачок давления из-за переходного процесса установления устойчивого равновесия может происходить только в начальный момент времени. Начальный скачок давления здесь пренебрежимо мал. Но если изменить в параметрах модели (14) числовые значения энтальпий образования компонент, то на кривой зависимости  $H^{eq}(T)$  могут появиться экстремумы. На рис. 8 также изображена полная температурная зависимость энергии равновесного состава для системы вода–пар, где формально принято  $h_x = Q = -16000 \text{ Дж/моль}$ , а остальные параметры сохранены. Для этих параметров график имеет S-образную форму с локальным максимумом и минимумом, т.е. существуют два критических значения энергии.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В литературе периодически появляются публикации (см., например, [27, 28]), объясняющие отсутствие материальных следов некоторых наблюдавшихся метеоритов тем, что твердый моно-

литный метеорит и скорость его движения были столь большими (диаметр сотни метров, скорость 20–70 км/с), а траектория движения такова, что он прошел Земную атмосферу насквозь, вызвав свечение и ударную волну, сохранив при этом целостность и потеряв малую часть своей массы из-за поверхностной абляции. На наш взгляд, такая трактовка возможна, но только для объектов, удовлетворяющих соответствующим условиям. Предложенная же в статье модель объемного парового взрыва мелкодисперсной системы не накладывается при рассмотрении метеорита ограничений на его размер и траекторию движения, причем для возникновения взрывного эффекта достаточно существенно меньшей скорости входа в атмосферу.

В целом, предложенная модель позволяет качественно верно описать кинетику взрывного роста давления при испарении мелко раздробленного метеоритного тела и при прохождении интенсивного импульса тока в проводнике. Некоторый произвол в сделанной оценке кинетических параметров (параметры мономолекулярной реакции по Эйрингу, теплофизические параметры, начальная температура и т.п.) незначительно влияет на качественные эффекты в проведенных расчетах.

Работа выполнена по теме госзадания (регистрационные номера ЦИТИС АААА-А19-119120690042-9, АААА-А19-119022690098-3).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стулов В.П., Мирский В.Н., Вислый А.И. Аэродинамика болидов. М.: Физматлит, 1995.
2. Мартынюк М.М. // Физика горения и взрыва. 1977. № 2. С. 213.
3. *Debenedetti P.G.* Metastable Liquids. Concepts and principles. Princeton, New Jersey: Princeton University press, 1996.
4. Барелко В.В., Дроздов М.С., Кузнецов М.И. // Наука в России. 2014. № 1. С. 36.
5. Григорян С.С. // Космич. исслед. 1979. Т. 17. № 6. С. 875.
6. Фортвов В.Е., Султанов В.Г., Шутов А.А. // Геохимия. 2013. № 7. С. 609.
7. Султанов В.Г. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Черноголовка: ИПХФ РАН, 2018.
8. *Hills J.G., Goba M.P.* // *Astronom. J.* 1993. V. 105. P. 1114; <https://doi.org/10.1086/116499>
9. *Crawford D.A.* Models of fragment penetration and fireball evolution // International Astronomical Union Colloquium. V. 156: The Collision of Comet Shoemaker-Levy 9 and Jupiter, 1996. P. 133; <https://doi.org/10.1017/S0252921100115490>
10. Петров Д.В., Шубин О.Н., Елсуков В.П., Симоненко В.А. Взрывное торможение и фрагментация метеоритов в атмосфере. Доклад на междунар. конф. “XIII Забабахинские научные чтения”; [http://vniitf.ru/data/images/zst/2017/section\\_1/13\\_petrov\\_ru.pdf](http://vniitf.ru/data/images/zst/2017/section_1/13_petrov_ru.pdf)
11. Сызранова Н.Г., Андрущенко В.А., Головешкин В.А. // Механика композиц. матер. и конструкций. 2017. № 23. № 1. С. 104.
12. *Pumir A., Barelko V.V.* // *Eur. Phys. J. B.* 1999. V. 10. P. 379.
13. Карпов И.В., Борчевкина О.П., Васильев П.А. // Хим. физика. 2020. Т. 39. № 4. С. 63.
14. Голубков Г.В., Шапочкин М.Б. // Хим. физика. 2019. Т. 38. № 7. С. 19.
15. Хомик С.В., Гук И.В., Иванцов А.Н., Медведев С.П. и др. // Хим. физика. 2021. Т. 40. № 8. С. 63.
16. Трофимов В.С., Веретенников В.А., Петров Е.В. // Хим. физика. 2021. Т. 40. № 4. С. 63.
17. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Справочное издание в 4-х томах / Под ред. Глушко В.П. М.: Наука, 1982.
18. Вольперт А.И., Худяев С.И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М.: Наука, 1975.
19. Дубовицкий А.Я., Дубовицкий В.А. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1983. Т. 23. № 5. С. 1960.
20. Тихонов А.Н. // Мат. сб. 1952. Т. 31. № 3. С. 575.
21. *Burcat A., Ruscic B.* Third Millenium ideal gas and condensed phase thermodynamical database for combustion with updates from active thermochemical tables, ANL-05/20 and TAE 960 Technion-ITT. Aerospace Engineering, and Argonne National Laboratory, Chemistry Division, 2005; <https://doi.org/10.2172/925269>
22. Глестон С., Лейдер К., Эйринг Г. Теория абсолютных скоростей реакций. М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948.
23. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1976.
24. Зиновьев В.Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах. М.: Металлургия, 1989.
25. Гусев А.И. Наноматериалы, наноструктуры, нанотехнологии. М.: Физматлит, 2007.
26. Астапович И.С. Метеорные явления в атмосфере Земли. М.: Физматлит, 1958.
27. Варламов С. // Квант. 2018. №9. С.4.
28. *Khrennikov D.E., Titov A.K., Ershov A.E., Pariev A.E., Karпов S.* // *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.* 2020. V. 493. P. 1344; <https://doi.org/10.1093/mnras/staa329>