
**ГОРЕНИЕ, ВЗРЫВ
И УДАРНЫЕ ВОЛНЫ**

УДК 534.222.2

**ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ
УДАРНОЙ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С НЕРАВНОМЕРНЫМ
РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПЛОТНОСТИ**

© 2022 г. Я. Э. Порошина¹, А. И. Лопато¹, П. С. Уткин^{1*}

¹Институт автоматизации проектирования Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: pavel_utk@mail.ru

Поступила в редакцию 10.01.2022;

после доработки 12.02.2022;

принята в печать 21.02.2022

Работа посвящена численному исследованию распространения ударной волны в среде с неравномерным распределением плотности. Математическая модель основывается на уравнениях Эйлера, которые решаются в системе координат, связанной с лидирующим скачком. Подобный подход делает возможным проведение аккуратного характеристического анализа задачи. Сначала рассмотрены задачи о распространении ударной волны в среде с участками конечной длины с линейно увеличивающейся и уменьшающейся плотностью. Проведено сравнение полученных результатов с известными аналитическими решениями. Затем рассмотрен случай непрерывного изменения плотности среды перед ударной волной по синусоидальному закону. Возникающее при этом течение описано и объяснено с использованием результатов для случая линейного градиента плотности.

Ключевые слова: математическое моделирование, ударная волна, неоднородная среда, характеристический анализ.

DOI: 10.31857/S0207401X22080106

ВВЕДЕНИЕ

В последние несколько лет наблюдается рост числа работ, посвященных задачам распространения детонационных волн в неоднородных газовых смесях. Такие задачи представляют интерес не только с точки зрения фундаментальных основ теории детонации, но и с практической точки зрения. Одно из конкретных применений — предотвращение случайного возникновения детонации в шахтах, в изолированных частях которой может накапливаться взрывоопасная смесь. В такой смеси по разным причинам возможно образование градиента концентрации топлива, что, в свою очередь, будет влиять на механизм воспламенения смеси, переход горения в детонацию и ее последующее распространение. Однако основной причиной активных исследований особенностей детонационных процессов в неоднородных газовых смесях является разработка двигателей, основанных на непрерывной вращающейся детонации [1–4]. В таких двигателях окислитель и топливо впрыскиваются в установку раздельно, что приводит к распространению детонации по сильно неоднородной смеси.

Для описания сложного процесса, происходящего в реальных установках, проводятся исследования модельных постановок, при рассмотрении

которых проясняются механизмы распространения детонации в неоднородных средах. Можно выделить следующие группы работ, в которых изучается распространение детонации в плоском канале:

- в среде с переменным продольным [5, 6] и поперечным [7–9] градиентом концентрации топлива;
- в среде с переменной плотностью смеси [10, 11];
- вдоль [12, 13] или поперек [14] инертного слоя газа;
- в рамках уравнений-аналогов [15].

Отдельно стоит отметить недавнюю работу [16], в которой изучаются соотношения вкладов следующих двух составляющих в итоговую нелинейную динамику процесса распространения детонационной волны в неоднородной среде: первая — связана с пульсирующей природой детонационной волны как таковой, проявляющейся и в однородной среде; вторая — обусловлена периодическим изменением параметров перед фронтом лидирующей ударной волны (ЛУВ). Обнаружено, что в зависимости от параметров задачи может происходить как усиление колебаний параметров за фронтом детонационной волны, так

и, наоборот, их стабилизация по сравнению со случаем однородной среды.

В наших предыдущих работах [17, 18] были построены вычислительные алгоритмы для моделирования детонации в системе координат, связанной с лидирующим фронтом (СКФ) волны детонации, в рамках одно- [17] и двухстадийной [18] моделей кинетики химических реакций. Суммируем кратко основные достоинства и недостатки расчетов детонации в СКФ [18]. В подобной постановке, с одной стороны, осуществляется переход в неинерциальную систему координат, поскольку скорость лидирующего скачка зависит от времени. Это приводит к преобразованию привычных уравнений Эйлера, составляющих основу математической модели – в них начинает фигурировать априори неизвестная скорость лидирующего скачка, для нахождения которой необходимо использовать те или иные дополнительные соображения [19–21]. Неинерциальность системы координат и необходимость рассмотрения дополнительных уравнений для скорости волны определяют большую сложность подобного подхода с точки зрения его программной реализации по сравнению с численным решением уравнений Эйлера в неподвижной, лабораторной системе координат. С другой стороны, рассмотрение задачи в СКФ имеет три основных достоинства.

Во-первых, данный подход требует существенно меньше вычислительных затрат по сравнению с традиционным рассмотрением задачи инициирования и распространения детонации в лабораторной системе координат (см., например, [22]). Здесь расчетная область физически соответствует на части или полному по длине каналу, в котором рассматривается распространение детонационной волны, а всегда некоторой области непосредственно за фронтом ЛУВ.

Во-вторых, данный подход позволяет точно фиксировать параметры непосредственно за фронтом ЛУВ. Ударная волна является фиксированной границей расчетной области и не испытывает численного “размазывания”, что неизбежно происходит в методах сквозного счета.

В-третьих, СКФ гораздо больше подходит для характеристического анализа поля течения за фронтом детонационной волны [23]. Характеристический анализ, в отличие от анализа только полей давления, плотности, массовой доли реагента, скорости газа, который обычно проводится для иллюстрации динамики распространения детонации, способен дать объяснение наблюдающихся режимов течения. Так, в работе [19] подобный анализ позволил обобщить понятие звуковой точки из теории Чепмена–Жуге для случая нестационарной пульсирующей волны детонации. Более того, реализующиеся пульсирующие режимы течения можно объяснить и с количе-

ственной точки зрения, анализируя поведение характеристик, как это сделано в работах [18, 23].

Эти факторы стимулируют расчеты распространения детонационной волны в неоднородной газовой смеси в системе координат фронта лидирующего скачка. При построении такого алгоритма необходимо разработать соответствующие вычислительные алгоритмы расчета распространения ударной волны (УВ) в неоднородной среде.

Целями настоящей работы являются:

- разработка вычислительного алгоритма для моделирования распространения УВ в среде с возмущением плотности в СКФ;
- проведение с использованием разработанного алгоритма характеристического анализа динамики распространения УВ в среде с линейным (задача, рассмотренная в работах Чиснелла и Уизема [24, 25]) и синусоидальным распределением плотности (задача Шу–Ошера [26]).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математическая модель основывается на уравнениях Эйлера, дополненных уравнением состояния идеального газа и записанных в векторной форме в системе координат (x, t) , связанной с фронтом ЛУВ:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{f} - D\mathbf{u}) = 0, \quad x = x' - \int_0^t D(\tau) d\tau,$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ (p + e)v \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$e = \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho v^2, \quad \varepsilon = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}.$$

Здесь ρ – плотность газа, v – скорость газа в лабораторной системе координат (x', t) , D – скорость УВ, p – давление газа, e – полная энергия газа на единицу объема, ε – удельная внутренняя энергия газа, γ – фиксированное значение показателя адиабаты, которое во всех расчетах принималось равным 1.4. Эффектами вязкости, молекулярной диффузии и теплопроводности пренебрегаем. Отметим, что скорость газа v в системе уравнений (1) связана со скоростью ЛУВ посредством следующего уравнения:

$$v = u + D,$$

где u – скорость газа в СКФ. Второе из системы уравнений (1), уравнение импульса, записанное через скорость u , будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

что совпадает с классическим результатом из работы [27]. Уравнение (2) отличается от привычного уравнения Эйлера добавлением силы инерции dD/dt .

Для определения скорости ударной волны в СКФ определяющая система уравнений (1) записывается в характеристической форме вдоль C_+ -характеристики:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} + \rho c \frac{dv}{dt} = 0, \\ \frac{dx}{dt} = v + c - D, \\ \rho_0 = \rho_0(t), \quad p_0 = p_0(t), \quad v_0 = v_0(t), \end{cases} \quad (3)$$

где в первом уравнении системы через d/dt обозначена материальная производная вдоль C_+ -характеристики, c – скорость звука. Нижним индексом “0” обозначены параметры перед фронтом ЛУВ. В лабораторной системе координат это – известные функции пространственной координаты, а в рассматриваемой постановке в СКФ – известные функции времени. В рамках настоящей работы

$$\rho_0 = \rho_0 \left(x_0 + \int_0^t D(\tau) d\tau \right), \quad p_0 = \text{const}, \quad v_0 = \text{const}. \quad (4)$$

Через x_0 обозначена начальная координата УВ.

Возможность определения скорости ЛУВ при рассмотрении системы (3) обусловлена результатами работы [19], в которой изучалась динамика распространения детонационной волны в однородной среде, т.е. в случае $\rho_0 = \text{const}$. Конкретная разностная реализация, приводящая к выражению для текущей скорости ЛУВ, приведена ниже в разделе с вычислительным алгоритмом.

Определяющая система уравнений решается на фиксированном отрезке $[-H; 0]$. Правая граница соответствует фронту ЛУВ. На ней выставляются граничные условия, определяемые соотношениями Ренкина–Гюгоньо (Rankine–Hugoniot) на скачке, движущемся с текущей скоростью D , которая находится в результате решения системы уравнений (3), (4) (см. следующий раздел). Длина расчетной области H выбиралась достаточно большой, чтобы для рассматриваемых задач левая граница области не влияла на динамику движения фронта ЛУВ. Формально левая граница области считалась свободной, использовались граничные условия экстраполяции нулевого порядка.

В качестве начальных условий во всей расчетной области задаются одинаковые параметры за фронтом ударной волны с числом Маха M , которая в начальный момент времени начинает взаи-

модействовать с пространственной неоднородностью плотности на пути ее распространения:

$$\begin{aligned} p_s &= p_0 + p_0 \frac{2\gamma(M^2 - 1)}{(\gamma + 1)}, \quad \rho_s = \frac{\rho_0(x_0)(\gamma + 1)M^2}{(\gamma - 1)M^2 + 2}, \\ v_s &= \frac{2(M^2 - 1)}{(\gamma + 1)M} \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0(x_0)} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5)$$

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Расчетная область покрывается равномерной расчетной сеткой. Расчетные ячейки нумеруются от 1 до N . Для численного интегрирования системы уравнений (1) используются конечно-объемная дискретизация конвективной части и явная схема Эйлера интегрирования по времени. Параметры на гранях ячеек определяются в результате кусочно-линейной реконструкции вектора консервативных переменных с помощью ограничителя `minmod`. Шаг интегрирования по времени выбирается динамически для обеспечения устойчивости на выбранной сетке. Численный поток, который рассчитывается по сеточно-характеристическому варианту схемы Куранта–Изааксона–Рис (Courant–Isaakson–Rees) [28] учитывает неявным образом скорость УВ. В этой части решения уравнений газовой динамики без учета протекания химических реакций алгоритм не отличается от методики, подробно описанной в работах [17, 18].

Основное отличие от предыдущих работ в части вычислительного алгоритма связано со способом интегрирования уравнений для нахождения скорости ЛУВ, так как параметры среды перед УВ теперь неоднородны. Дискретизация системы уравнений (3), (4) выглядит следующим образом [19]:

$$\begin{cases} p_s^{n+1} - p_*^n + \frac{1}{2} \left((\rho c)_*^n + (\rho c)_s^{n+1} \right) (v_s^{n+1} - v_*^n) = 0, \\ -x_*^n = \left(c_*^n + v_*^n - D^n \right) \Delta t^n, \\ \rho_0^{n+1} = \rho_0 \left[x_0 + L^n + \left(\frac{\gamma p_0^{n+1}}{\rho_0^{n+1}} \right)^{1/2} M^{n+1} \Delta t^n \right]. \end{cases} \quad (6)$$

Нижним индексом “s” обозначим параметры на скачке при $x_s = 0$, индексом “*” – параметры в точке пересечения C_+ -характеристики с осью x (см. рис. 1). Через L^n обозначен путь, пройденный ЛУВ на момент времени t^n :

$$L^n = \sum_{j=0}^n D^j \Delta t^j.$$

Параметры с индексом “*” находятся с помощью линейной интерполяции по известным па-

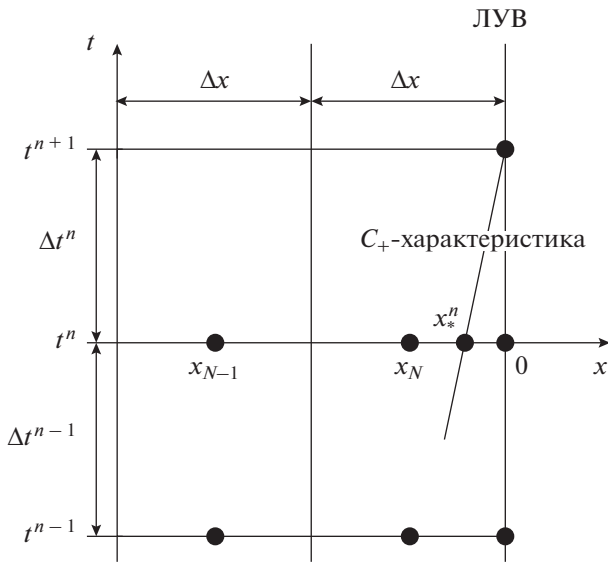


Рис. 1. Сеточный шаблон разностной схемы для расчета скорости ЛУВ.

параметрам в точках $x_N = -\Delta x/2$ (центр последней ячейки в расчетной области) и $x_s = 0$ и имеют вид

$$p_*^n = p_s^n + \frac{x_*^n}{\Delta x/2}(p_s^n - p_N^n), \quad v_*^n = v_s^n + \frac{x_*^n}{\Delta x/2}(v_s^n - v_N^n),$$

$$\rho_*^n = \rho_s^n + \frac{x_*^n}{\Delta x/2}(\rho_s^n - \rho_N^n), \quad c_*^n = \left(\gamma \frac{p_*^n}{\rho_*^n}\right)^{1/2}. \quad (7)$$

Из второго уравнения системы (6) следует выражение для координаты точки пересечения C_+ -характеристики с осью x :

$$x_*^n = -\frac{(c_s^n + v_s^n - D^n)\Delta t^n}{1 + \frac{2\Delta t^n}{\Delta x}(c_s^n - c_N^n + v_s^n - v_N^n)}. \quad (8)$$

Параметры в точке $x_s = 0$ в момент времени $t = t^{n+1}$ определяются из соотношений Ренкина–Гюгонио, аналогичным параметрам (5) как

$$p_s^{n+1} = p_0 \left(1 + \frac{2\gamma((M^{n+1})^2 - 1)}{\gamma + 1}\right),$$

$$\rho_s^{n+1} = \rho_0^{n+1} \frac{(\gamma + 1)(M^{n+1})^2}{(\gamma - 1)(M^{n+1})^2 + 2}, \quad (9)$$

$$v_s^{n+1} = c_s^{n+1} \frac{2((M^{n+1})^2 - 1)}{(\gamma + 1)(M^{n+1})^2}, \quad c_s^{n+1} = \left(\gamma \frac{p_s^{n+1}}{\rho_s^{n+1}}\right)^{1/2}.$$

Подстановка выражений (7)–(9) в (6) приводит к системе из двух нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров M^{n+1} и ρ_0^{n+1} , которая решается численно методом Ньютона. Граничные условия реализуются путем задания параметров в фиктивных ячейках. Для расчета потоков через левую и правую грани расчетной области вводятся фиктивные ячейки с индексами “ $m = -1$ ” и “ $m = N$ ”. На левой границе расчетной области применяется экстраполяция нулевого порядка:

$$u_{-1}^n = u_0^n.$$

На правой границе параметры в фиктивной ячейке равняются текущим параметрам за фронтом ЛУВ:

$$\rho_N^n = \rho_s^n, \quad v_N^n = v_s^n, \quad p_N^n = p_s^n.$$

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С ЛИНЕЙНЫМ ГРАДИЕНТОМ ПЛОТНОСТИ

Перед рассмотрением задачи о распространении УВ в среде с синусоидальным распределением плотности рассмотрим сначала более простую задачу, когда плотность перед УВ меняется линейно – увеличивается или уменьшается. Во-первых, для данной задачи существуют аналитические оценки решения. Во-вторых, можно провести наглядную качественную аналогию между гладким синусоидальным профилем плотности и кусочно-линейным профилем с чередующимися участками увеличения и уменьшения плотности.

Задача о распространении УВ в среде с линейным градиентом плотности изучалась многими авторами. Аналогично задаче о взаимодействии УВ с единичным контактным разрывом [29], при взаимодействии УВ с градиентом плотности формируются контактные разрывы и волны разрежения или сжатия (в зависимости от знака градиента). Волны разрежения или сжатия взаимодействуют с контактными разрывами с образованием переотраженных волн, которые также влияют на динамику движения ЛУВ. В работе [30] с использованием численного анализа проводилось исследование влияния переотраженных волн на фронт ЛУВ в зависимости от различных факторов, таких как: число Маха волны, абсолютное значение и знак градиента плотности, а также вид профиля плотности (линейное изменение или по степенному закону). Выводы были основаны на сравнении численных результатов с аналитическим решением Чиселла–Уизема [24, 25] (см. Приложение 1). Одно из основных предположений при построении аналитического решения Чиселла–Уизема – отсутствие влияния переотраженных волн на фронт ЛУВ. Отметим, что аналитические оценки параметров течения в ударно-

волновых задачах представляют и самостоятельный интерес, например, в задачах распространения ударных волн в двухфазных средах [31–33] и в каналах сложной формы [34].

Расчетная область – отрезок $[-10;0]$. Значения начальной плотности, скорости и давления во всей расчетной области соответствуют параметрам за УВ с числом $M = 3.0$. Перед фронтом ЛУВ находится покоящийся газ при давлении $p_0 = 1.0$. На участке конечной длины, равной 1.0 плотность газа меняется по линейному закону:

$$\rho_0(t) = \begin{cases} a \int_0^t D(\tau) d\tau + b, & \text{если } \int_0^t D(\tau) d\tau < 1.0, \\ a + b, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (10)$$

Для случая линейно растущей плотности газа перед фронтом ЛУВ $a = 7.0$, $b = 1.0$. Для случая линейно падающей плотности $a = -7.0$, $b = 8.0$. Числовые параметры постановки взяты из работ [30] (закон изменения плотности (10) и конкретные значения a и b) и [26] (интенсивность УВ). Здесь и далее все параметры приведены в безразмерном виде. Расчеты проводились на сетке с числом ячеек $N = 2000$.

Рассмотрим сначала случай линейно растущего градиента плотности. Ударная волна преодолевает участок с неоднородной плотностью за время $t_A \approx 0.43$ (см. рис. 2 и 3). Процедура построения характеристик описана в *Приложении 2*. В течение этого периода времени за фронтом ЛУВ генерируются волны сжатия и контактные разрывы. При этом скорость ЛУВ падает, а число Маха увеличивается. Как до, так и после момента времени t_A аналитическое решение Чиснелла–Уизема (кривая 4 на рис. 3), не учитывающее влияние переотраженных волн на ЛУВ, сильно отличается от численного решения (кривая 2 на рис. 3). Отметим, что в работе [35] представлена модификация аналитической теории Чиснелла–Уизема для возможности учета влияния переотраженных волн на ЛУВ.

После того как плотность перед волной становится постоянной, скорость волны и число Маха уменьшаются под воздействием волн, отраженных от контактных разрывов за волной и догоняющих ЛУВ. Основные изменения продолжают до тех пор, пока волна, отраженная от контактного разрыва, следующего вдоль C_0 -характеристики, выпущенной в начальный момент времени, не догонит ЛУВ при $t_B \approx 1$. В этот момент времени число Маха ЛУВ выходит на значение, близкое асимптотической величине (прямая 5 на рис. 3). Данная асимптотика определяется решением задачи Римана (Riemann). Параметры по одну сторону от разрыва в этой задаче Римана – параметры за фронтом УВ с числом Маха, равным 3.0, со-

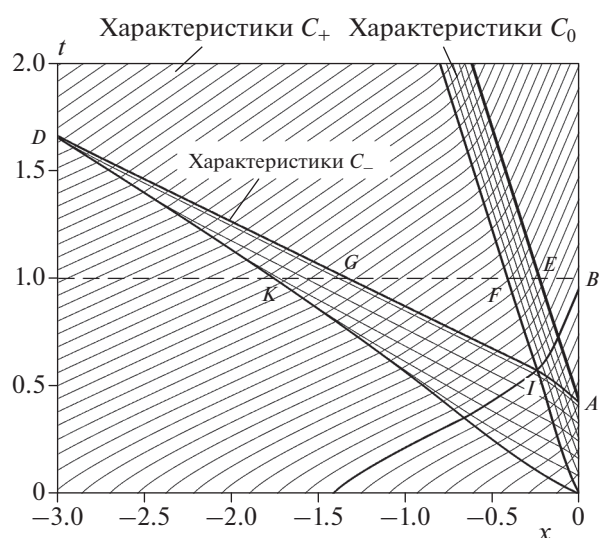


Рис. 2. Семейство характеристик в задаче о распространении УВ по участку среды конечной длины с линейно возрастающим градиентом плотности.

ответствующие начальному моменту времени, когда значение плотности перед УВ равно 1.0. Параметры справа – итоговые параметры перед УВ, соответствующие моменту времени, когда плотность перестает меняться и ее значение становится равным 8.0.

Из рис. 2 видно, что C_- -характеристики, вдоль которых следуют отраженные от ЛУВ волны сжатия, постепенно вливаются в характеристику, следующую из начала координат. По этой причине по мере распространения протяженность волны сжатия уменьшается. Например, в момент времени $t_B \approx 1$ на рис. 2 и 4 границы ее обозначены точками K и G . Контактные разрывы, формирующиеся при прохождении ЛУВ участка переменной плотности, двигаются с постоянной скоростью. Граница области контактных разрывов обозначена на рис. 2 и 4 точками E и F . Давление и скорость в области между ЛУВ и хвостом волны сжатия на промежутке времени от t_A до t_B (например, для момента времени t_B это – область $[x_G; 0]$ на рис. 4) не постоянны из-за влияния характеристик из “переотраженного характеристического треугольника”, IAB , на рис. 2. Время, в течение которого переотраженные волны продолжают влиять на ЛУВ, несмотря на то, что плотность перед УВ уже постоянна, коррелирует со временем, которое требуется пройти волне, отраженной от точки A , до точки I , а также волне, переотраженной от точки I , до точки B .

Аналогичное исследование проведено для случая уменьшающейся перед фронтом ЛУВ плотности. В этом случае УВ преодолевает участок с градиентом плотности за время ≈ 0.66 . Вместо волн

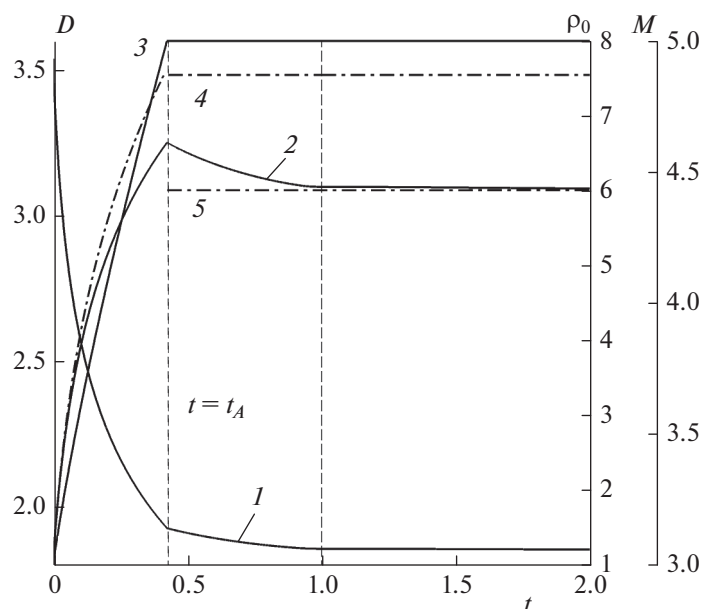


Рис. 3. Динамика изменения скорости (кривая 1) и числа Маха ЛУВ (кривая 2) в задаче о распространении УВ по участку среды конечной длины с линейно возрастающим градиентом плотности (кривая 3, плотность перед фронтом ЛУВ). Штрих-пунктирная кривая 4 – аналитическое решение Чиснелла–Уизема. Штрих-пунктирная прямая 5 – асимптотическое решение.

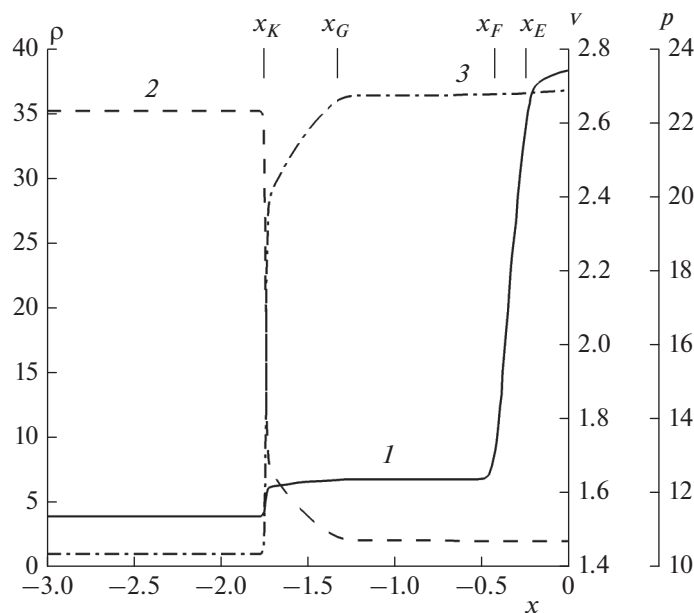


Рис. 4. Рассчитанные пространственные профили распределения за фронтом ЛУВ в задаче о распространении УВ по участку среды конечной длины с линейно возрастающим градиентом плотности в момент времени $t = 1.0$. Кривая 1 – распределение плотности, 2 – распределение скорости, 3 – распределение давления.

сжатия за фронтом ЛУВ генерируются волны разрежения. При этом, в отличие от случая с увеличивающейся плотностью перед ЛУВ, скорость ЛУВ увеличивается, а число Маха уменьшается. Также аналитическое решение Чиснелла–Уизема, не учитывающее влияние переотраженных

волн на ЛУВ, практически не отличается от численного до момента времени $t = 0.66$, когда аналитическое решение выходит на стационарный уровень. По предположению, сделанному в работе [30], это свидетельствует о том, что переотраженные волны почти не влияют на итоговое решение в этой

области. Данное предположение подкрепляется проведенным характеристическим анализом. Характеристики C_+ , вначале отклоняясь от ЛУВ, гораздо позже приходят к правой границе расчетной области, и, соответственно, их влияние на ЛУВ также начинается позже. Характеристики C_- , вдоль которых следуют отраженные от ЛУВ волны разрежения, постепенно расходятся, расстояние между ними увеличивается.

После того как плотность перед волной становится постоянной, ее скорость и число Маха увеличиваются под воздействием волн, отраженных от контактных разрывов за волной и догоняющих ЛУВ. Это продолжается до тех пор, пока последняя переотраженная волна не догонит ЛУВ в момент времени $t \approx 3.69$. К этому времени число Маха выходит на асимптотический уровень.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С СИНУСОИДАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПЛОТНОСТИ

Задача о взаимодействии УВ с синусоидальным возмущением плотности была рассмотрена в статье [26] (отсюда ее название – задача Шу–Ошера) в качестве примера, иллюстрирующего свойства ENO-схем повышенного порядка точности. Со временем данная задача стала распространенным, достаточно жестким тестом для проверки реализации и свойств методов сквозного счета для решения уравнений Эйлера, так как решением задачи является течение, в поле которого содержатся и гладкие структуры, и движущиеся разрывы. По этой же причине задача Шу–Ошера часто используется для проверки методов расчета течений с волнами детонации (см., например [36, 37]), поскольку структура фронта детонационной волны включает и лидирующий скачок, и область гладкого изменения параметров за ней, которая должна очень хорошо разрешаться. Разрешение гладких областей течения возможно при использовании схем повышенного порядка точности, которые в то же время должны быть достаточно устойчивыми и не приводить к возникновению нефизических осцилляций в окрестностях газодинамических разрывов. Задача Шу–Ошера не имеет точного решения, и в качестве эталонного часто рассматривают решение из работы [26], полученное на сетке с разрешением $6.25 \cdot 10^{-3}$ методом сквозного счета третьего порядка точности.

Отметим работы [35, 38, 39], в которых для исследования распространения УВ в среде с неоднородным распределением плотности, в том числе в модельных постановках, близких задаче Шу–Ошера, использовались методы, отслеживающие фронт ЛУВ. Данные методы, в некотором смысле близкие алгоритму, который предлагается в на-

стоящей работе, базировались на аппарате подвижных сеток или представляли собой разновидности метода погруженной границы.

Расчетная область – отрезок $[-20; 0]$. Значения начальной плотности, скорости и давления во всей расчетной области соответствуют параметрам за УВ с числом $M = 3.0$. Перед фронтом ЛУВ находится покоящийся газ при давлении $p_0 = 1.0$, плотность которого меняется по закону

$$\rho_0(t) = 1 + \varepsilon \sin \left(a \int_0^t D(\tau) d\tau \right),$$

где $\varepsilon = 0.2$, $a = 5.0$. Расчеты проводились на сетке с числом ячеек $N = 4000$.

В начальный момент времени и до момента $t \approx 0.154$ плотность перед УВ увеличивается по синусоидальному закону. Как и в задаче с линейно растущей плотностью перед фронтом ЛУВ, это сопровождается образованием волн сжатия и контактных разрывов (см. рис. 5). При этом число Маха ЛУВ увеличивается, в то время как ее скорость уменьшается. Волны, отраженные от ЛУВ и следующие вдоль характеристик C_- , постепенно сливаются в одну характеристику, догоняя друг друга. Фронт волны сжатия со временем становится более крутым. В итоге этот процесс приводит к формированию внутренних ударных волн. В момент времени $t \approx 0.154$ плотность перед ЛУВ начинает уменьшаться, и, аналогично описанному ранее случаю уменьшающегося линейного градиента плотности, теперь вдоль характеристик C_- следуют волны разрежения; ЛУВ начинает ускоряться, а число Маха ее уменьшается. Далее процесс циклично повторяется по мере продвижения ударной волны по среде с переменной плотностью.

На рис. 6 показано изображение профиля плотности газа за ЛУВ в момент времени $t = 1.8$ в сравнении с профилем из работы [26]. При $-1.69 < x < 0$ график плотности имеет вид колеблющейся кривой, что связано с распространением налево контактных разрывов, отраженных от ЛУВ, а также влиянием на эту область характеристик C_+ и C_- , переотраженных внутри зоны контактных разрывов. Видно хорошее соответствие между результатом, полученным при расчете с использованием предложенного алгоритма, и эталонным результатом [26].

Некоторая неточность в фазе пиков в области контактных разрывов связана с погрешностями оцифровки результатов [26], не полной идентичностью моментов времени сравнения результатов и необходимостью совмещения графиков относительно текущего положения фронта ЛУВ для прямого сравнения результатов. Важными являются различия в амплитудах пиков, отстоящих от

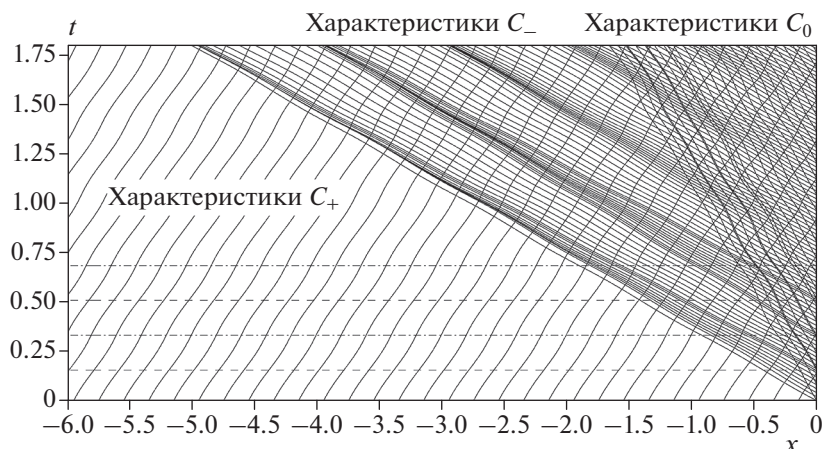


Рис. 5. Семейство характеристик в задаче Шу–Ошера. Пунктирные горизонтальные прямые обозначают моменты времени, соответствующие максимальным значениям плотности перед ЛУВ, штрих-пунктирные линии – минимальным.

фронта ЛУВ. Как показано, например, в работе [40], занижение амплитуды пиков связано с недостаточно высоким порядком точности численного метода. При использовании методов третьего и выше порядков точности соответствие данным [26] в этой части будет лучше. Специфика решения задачи в СКФ может также потребовать использования более точного алгоритма определения скорости ЛУВ. В работе [17] для этих целей использовалась локально-квадратичная аппроксимация характеристики C_+ в окрестности ЛУВ.

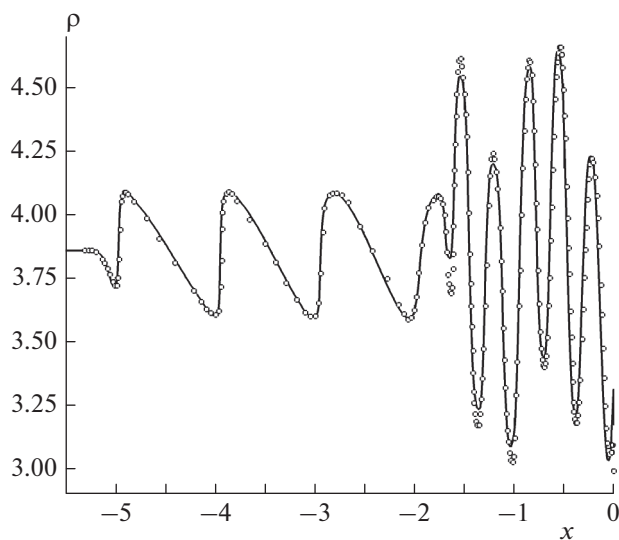


Рис. 6. Пространственные профили плотности газа за фронтом ЛУВ в задаче Шу–Ошера в момент времени $t = 1.8$. Сплошная линия – расчет авторов, точки – расчет из работы [26].

ВЫВОДЫ

1. В работе предложен алгоритм для расчета распространения ударной волны в среде с переменной плотностью в системе координат, связанной с ударной волной. С использованием работ [17, 18] описанный алгоритм может быть обобщен на случай химически реагирующих сред в рамках одно- и двухстадийной модели кинетики и применен для исследования механизмов распространения волн детонации в неоднородных средах.

2. Работоспособность вычислительного алгоритма продемонстрирована для двух типов неоднородностей перед ударной волной: участок конечной длины с линейным градиентом плотности и синусоидальное распределение плотности. Для случая линейного градиента проведено сравнение полученных результатов с аналитической теорией Чиселла–Уизема, не учитывающей влияния переотраженных волн на лидирующую ударную волну. Были получены хорошее согласование для случая уменьшающейся плотности перед ударной волной и расхождение результатов для случая увеличивающейся плотности, что связано с разной степенью влияния переотраженных волн на лидирующий скачок. Решение задачи о взаимодействии ударной волны с синусоидальным распределением плотности (задача Шу–Ошера) сравнивалось с решением, представленным в работе [26]. Получено хорошее согласование за исключением амплитуд некоторых пиков в зоне контактных разрывов. На уровне характеристик показано, что решение задачи Шу–Ошера циклически сочетает в себе элементы решения задачи об уменьшающемся и увеличивающемся линейных градиентах плотности перед волной.

3. Рассмотренные в статье задачи служат не только для валидации вычислительного алгорит-

ма. Они демонстрируют основную идею исследования в системе координат, связанной с лидирующим скачком. Подобный математический аппарат позволяет проводить качественные и количественные исследования течений с ударными и детонационными волнами с точки зрения поведения характеристик, которые раскрывают механику газодинамических процессов.

Приложение 1

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЧИСНЕЛЛА–УИЗЕМА

Приведем аналитическое решение [24, 25] задачи о взаимодействии ударной волны с неоднородной средой без учета влияния переотраженных от контактных разрывов волн. Теория Чиснелла–Уизема рассматривает область непрерывно меняющейся плотности перед волной как совокупность слоев с постоянной плотностью, разделенных элементарными контактными разрывами. В частности, в работах [24, 25] выведено соотношение, связывающее изменение плотности перед ударной волной $d\rho_0$ и ее интенсивность dz , где z – отношение давления за ударной волной к давлению перед ударной волной:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{\lambda^2 + z} + \frac{2}{z-1} \left[\frac{1 + \lambda^2 z}{z(1 + \lambda^2)} \right]^{1/2}, \quad (11)$$

где $\lambda = [(\gamma - 1)/(\gamma + 1)]^{1/2}$ – константа, γ – показатель адиабаты. Из уравнения (11) следует система обыкновенных дифференциальных уравнений, которую следует решать численно относительно неизвестных z , ρ_0 и числа M :

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dx_s} \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)^{1/2} M \left\{ \frac{2}{z-1} - \frac{1}{\lambda^2 + z} + \right. \\ \left. + \frac{2}{z-1} \left[\frac{1 + \lambda^2 z}{z(1 + \lambda^2)} \right]^{1/2} \right\}^{-1}, \\ \frac{d\rho_0}{dt} = \frac{d\rho_0}{dx_s} \left\{ \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \left[\frac{(z(t) - 1)(\gamma + 1)}{2\gamma} + 1 \right] \right\}^{1/2}, \\ \frac{dM}{dt} = \left[\frac{(z-1)(\gamma + 1)}{2\gamma} + 1 \right]^{1/2}, \end{cases} \quad (12)$$

где x_s – траектория ударной волны, p_0 – постоянное давление перед ударной волной. Производная $d\rho_0/dx_s$ определяет заданное пространственное распределение плотности среды перед ударной волной. Например, если плотность перед ударной волной задается линейным законом:

$$\rho_0 = \begin{cases} ax_s + b, & 0 \leq x_s \leq 1, \\ a + b, & x_s > 1, \end{cases} \quad a = \text{const}, \quad b = \text{const},$$

то соответствующая производная будет записываться следующим образом:

$$\frac{d\rho_0}{dx_s} = \begin{cases} a, & 0 \leq x_s \leq 1, \\ 0, & x_s > 1. \end{cases}$$

Система уравнений (12) решалась явным методом Эйлера:

$$\begin{cases} z_{k+1} = z_k + \Delta t \frac{1}{\rho_{0k}} \frac{d\rho_0}{dx_s} \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_{0k}} \right)^{1/2} M_k \left\{ \frac{2}{z_k - 1} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda^2 + z_k} + \frac{2}{z_k - 1} \left[\frac{1 + \lambda^2 z_k}{z_k(1 + \lambda^2)} \right]^{1/2} \right\}^{-1}, \\ \rho_{0k+1} = \rho_{0k} + \Delta t \frac{d\rho_0}{dx_s} \left\{ \frac{\gamma p_0}{\rho_{0k}} \left[\frac{(z_k - 1)(\gamma + 1)}{2\gamma} + 1 \right] \right\}^{1/2}, \\ M_{k+1} = M_k + \Delta t \left[\frac{(z_k - 1)(\gamma + 1)}{2\gamma} + 1 \right]^{1/2}, \end{cases}$$

где нижний индекс “ k ” обозначает значение искомого параметра в момент времени $t_k = t_{k-1} + \Delta t$, а Δt – шаг интегрирования.

Приложение 2

ПОСТРОЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК

Для построения характеристик C_+ , C_- и C_0 на рис. 2 и 5 решались следующие уравнения:

$$\begin{cases} \frac{dx_{\pm}}{dt} = v_{\pm} + c_{\pm} - D, \\ \frac{dx_{-}}{dt} = v_{-} - c_{-} - D, \\ \frac{dx_0}{dt} = v_0 - D, \end{cases}$$

где индекс “ i ” = +, –, 0, указывает на принадлежность параметров к семейству характеристик C_i . Данные уравнения решаются численно с помощью явной схемы Эйлера:

$$\begin{cases} x_{+}^{n+1} = x_{+}^n + \Delta t^n (v_{+}^n + c_{+}^n - D^n), \\ x_{-}^{n+1} = x_{-}^n + \Delta t^n (v_{-}^n - c_{-}^n - D^n), \\ x_0^{n+1} = x_0^n + \Delta t^n (v_0^n - D^n), \end{cases}$$

где индекс “ n ” обозначает номер текущего шага по времени. Скорость газа и скорость звука в точках x_i^n определяются с помощью линейной интерполяции по параметрам в центрах ячеек между которыми попадает характеристика:

$$\begin{cases} v_i^n = v_m^n + \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{\Delta x} (x_i^n - x_m), & x_m \leq x_i^n \leq x_{m+1}, \\ c_i^n = c_m^n + \frac{c_{m+1}^n - c_m^n}{\Delta x} (x_i^n - x_m), & x_m \leq x_i^n \leq x_{m+1}. \end{cases}$$

Для рассматриваемых в статье задач характеристики C_+ направлены к правой границе расчетной области, т.е. к ЛУВ. Остальные характеристики имеют противоположный наклон. Уравнения для характеристик C_+ решаются, пока $x_+^n \leq 0$, т.е. пока характеристики не приблизятся к правой границе расчетной области. Уравнения для характеристик C_- и C_0 решаются, пока $x_-^n > -H$ и $x_0^n > -H$ соответственно, т.е. пока характеристики не выйдут за пределы расчетной области слева.

Все характеристики C_+ выпускались из точек на оси $t = 0$, находящихся на равном расстоянии друг от друга. Характеристики C_- и C_0 выпускались из точек на оси $x = 0$, также находящихся на равном расстоянии друг от друга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wolanski P. // Shock Waves. 2021. V. 31. № 7. P. 623; <https://doi.org/10.1007/s00193-021-01038-2>
2. Bykovskii F.A., Zhdan S.A., Vedernikov E.F. et al. // Ibid. Issue 8. P. 829; <https://doi.org/10.1007/s00193-021-01044-4>
3. Matsuoka K., Tanaka M., Noda T. et al. // Combust. and Flame. 2020. V. 225. P. 13; <https://doi.org/10.1016/j.combustflame.2020.10.048>
4. Фролов С.М., Иванов В.С. // Хим. физика. 2021. Т. 40. № 4. С. 68; <https://doi.org/10.31857/S0207401X21040075>
5. Honhar P., Kaplan C.R., Houim R.W. et al. // Combust. and Flame. 2020. V. 222. P. 152; <https://doi.org/10.1016/j.combustflame.2020.08.034>
6. Ma W.J., Wang C., Han W.H. // Shock Waves. 2020. V. 30. P. 703; <https://doi.org/10.1007/s00193-020-00976-7>
7. Kessler D.A., Gamezo V.N., Oran E.S. // Philos. Trans. R. Soc. B. London, Ser., 2012. V. 370. P. 567; <https://doi.org/10.1098/rsta.2011.0342>
8. Boeck L.R., Berger F.M., Hasslberger J. et al. // Shock Waves. 2016. V. 26. P. 181; <https://doi.org/10.1007/s00193-015-0598-8>
9. Han W., Wang C., Law C.C. // J. Fluid Mech. 2019. V. 865. P. 602; <https://doi.org/10.1017/jfm.2019.37>
10. Chue R.S., Lee J.H., Zhang F. // Shock Waves. 1995. V. 5. P. 159; <https://doi.org/10.1007/BF01435523>
11. Kim M., Mi X., Kiyanda C.B. et al. // Proc. Combust. Inst. 2021. V. 38. P. 3701; <https://doi.org/10.1016/j.proci.2020.07.138>
12. Mi X.C., Higgins A.J., Kiyanda C.B. et al. // Shock Waves. 2018. V. 28. P. 993; <https://doi.org/10.1007/s00193-018-0847-8>
13. Taileb S., Melguizo-Gavilanes J., Chinnayya A. // Combust. and Flame. 2020. V. 218. P. 247; <https://doi.org/10.1016/j.combustflame.2020.04.018>
14. Tropin D., Bedarev I. // J. Loss Prev. Process. Ind. 2021. V. 72. P. 104595; <https://doi.org/10.1016/j.jlp.2021.104595>
15. Kasimov A.R., Gonchar A.R. // Proc. Comb. Inst. 2021. V. 38. Issue 3. P. 3725; <https://doi.org/10.1016/j.proci.2020.07.149>
16. Kasimov A.R., Goldin A.Yu. // Shock Waves. 2021; <https://doi.org/10.1007/s00193-021-01049-z>
17. Lopato A.I., Utkin P.S. // Combust. Sci. Technol. 2016. V. 188. № 11–12. P. 1844; <https://doi.org/10.1080/00102202.2016.1212570>
18. Poroshyna Y.E., Lopato A.I., Utkin P.S. // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2021. V. 29. № 4. P. 557; <https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0032>
19. Kasimov A.R., Stewart D.S. // Phys. Fluids. 2004. V. 16. P. 3566; <https://doi.org/10.1063/1.1776531>
20. Henrick A.K., Aslam T.D., Powers J.M. // J. Comput. Phys. 2006. V. 213. P. 311; <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.08.013>
21. Romick C.M., Aslam T.D. // Ibid. 2019. V. 395. P. 765; <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.06.011>
22. Киверин А.Д., Смыгина А.Е., Яковенко И.С. // Хим. физика. 2020. Т. 39. № 8. С. 9; <https://doi.org/10.31857/S0207401X2008004X>
23. Leung C., Radulescu M.I., Sharpe G.J. // Phys. Fluids. 2010. V. 22. Paper 126101; <https://doi.org/10.1063/1.3520188>
24. Chisnell R.F. // Proc. R. Soc. A. London, Ser., 1955. V. 232. № 1190. P. 350; <https://doi.org/10.1098/rspa.1955.0223>
25. Whitham G.B. // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. P. 337; <https://doi.org/10.1017/S0022112058000495>
26. Shu C.-W., Osher S. // J. Comput. Phys. 1989. V. 83. P. 32; [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(89\)90222-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(89)90222-2)
27. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М.: ГИФМЛ, 1963. Ч. 1.
28. Холодов А.С. // Журн. вычислительной математики и мат. физики. 1978. Т. 18. № 6. С. 1476.
29. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. 2-е изд., доп. Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исслед., 2003.
30. Bird G.A. // J. Fluid Mech. 1961. V. 11. № 2. P. 180; <https://doi.org/10.1017/S0022112061000457>
31. Медведев С.П., Фролов С.М., Гельфанд Б.Е. // Инж.-физ. журн. 1990. Т. 58. № 6. С. 924.
32. Медведев С.П., Андержанов Э.К., Гук И.В. и др. // Хим. физика. 2020. Т. 39. № 12. С. 24; <https://doi.org/10.31857/S0207401X20120110>

33. Хомик С.В., Гук И.В., Иванцов А.Н. и др. // Хим. физика. 2021. Т. 40. № 8. С. 63;
<https://doi.org/10.31857/S0207401X21080045>
34. Шаргатов В.А., Чугайнова А.П., Горкунов С.В. и др. // Тр. МИАН. 2018. Т. 300. С. 216.
35. Tian Y., Jaber F.A., Livescu D. // Proc. AIAA SciTech Forum. 2020. Orlando, FL, USA;
<https://doi.org/10.2514/6.2020-0101>
36. Cole L.K., Karagozian A.R., Cambier J.-L. // Combust. Sci. Technol. 2012. V. 184. P. 1502;
<https://doi.org/10.1080/00102202.2012.690316>
37. Dong H., Fu L., Zhang F. et al. // Commun. Comput. Phys. 2019. V. 25. P. 1357;
<https://doi.org/10.4208/cicp.OA-2018-0008>
38. Suresh A. // J. Comput. Phys. 2005. V. 206. P. 6;
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2004.11.036>
39. Rawat P.S., Zhong X. // Ibid. 2010. V. 229. № 19. P. 6744;
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.05.021>
40. Лопато А.И., Уткин П.С. // Компьютерные исслед. и моделирование (Ижевск). 2014. Т. 6. № 5. С. 643;
<https://doi.org/10.20537/2076-7633-2014-6-5-643-653>