ЖЭТФ, 2023, том 163, вып. 3, стр. 387–391

О ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫХ СВОЙСТВАХ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ РЭЛЕЯ

Б. Я. Балагуров[*]

Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 13 ноября 2022 г.,
после переработки 13 ноября 2022 г.
Принята к публикации 20 ноября 2022 г.

Рассмотрены гальваномагнитные свойства двумерной модели Рэлея — изотропной матрицы с двоякопериодическим расположением включений круговой формы — с фазовым переходом металл – диэлектрик. Для соответствующего тензора эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ получено выражение, справедливое во всей предпороговой (вплоть до соприкосновения кругов) критической области — окрестности точки перехода. Выяснено поведение составляющих тензора $\hat{\sigma}_e$ в слабом и сильном магнитных полях.

DOI: 10.31857/S0044451023030100
EDN: QEQFON

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение гальваномагнитных свойств проводящих материалов представляет общефизический интерес и позволяет определить как их электронную структуру, так и индивидуальные характеристики носителей заряда — подвижность и эффективную массу. Возможность извлечения подобной информации из экспериментальных данных основана на подробно разработанной микроскопической теории гальваномагнитных явлений в однородных проводниках [1]. Аналогичные исследования проводимости в присутствии магнитного поля проводятся и для композиционных материалов. При этом гальваномагнитные характеристики компонент считаются заданными, так как могут определяться на соответствующих однородных образцах. В данном случае представляет интерес влияние на гальваномагнитные характеристики композита в целом соотношения между свойствами компонент, концентрации и пространственного распределения, т. е. структуры композита. При этом особый интерес представляет изучение этих явлений в композитах с фазовым переходом металл – диэлектрик, что дает возможность получать дополнительную информацию и о самом фазовом превращении.

Для бинарных композитов с фазовым переходом металл – диэлектрик такие величины, как коэффициент Холла и магнитосопротивление, получили достаточно подробное теоретическое описание [2, 3] в случае малой напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$. В то же время теоретическое изучение гальваномагнитных характеристик неоднородных сред при произвольном $\mathbf{H}$ наталкивается на серьезные трудности.

Определенный прогресс в решении этой проблемы достигнут для двумерных моделей композитов. Так, в работе [4] с помощью преобразования симметрии вычислены составляющие тензора эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ двумерной бинарной системы со случайным распределением компонент с половинным составом. Из результатов этой работы следует, что для рассмотренной в ней модели омическая составляющая σ_{xe} тензора $\hat{\sigma}_e$ при $H \to \infty$ ведет себя аномальным образом: $\sigma_{xe} \propto 1/H$ вместо обычного $\sigma_x \propto 1/H^2$.

Обсуждаемая задача для двумерного бинарного композита получила точное решение в работе [5], где составляющие тензора $\hat{\sigma}_e$ произвольной подобной системы выражены через гальваномагнитные характеристики отдельных компонент и безразмерную эффективную проводимость этой модели при $H = 0$. Использование представлений гипотезы подобия [6] позволило рассмотреть [5] поведение эффективных гальваномагнитных характеристик двумерного случайно-неоднородного композита с фазовым переходом металл – диэлектрик во всей кри-

[*] E-mail: byabalagurov@mail.ru

тической области — окрестности точки перехода. В результате оказалось, что при концентрации, отличной от критической, аномальная проводимость $\sigma_{xe} \propto 1/H$ существует в конечном интервале магнитных полей. Для применения общих формул работы [5] к моделям другой структуры (например, регулярной) достаточно знать эффективную проводимость σ_e этой системы в отсутствие магнитного поля.

Вычисление эффективной проводимости σ_e композитов является крайне сложной задачей даже при $H = 0$. Точные аналитические выражения для σ_e известны только для некоторых двумерных моделей. Для упомянутой выше бинарной случайно-неоднородной системы величина σ_e определена только при фиксированной (критической) концентрации [7]. В то же время для двумерной модели Рэлея эффективная проводимость σ_e вычислена для всей критической предпороговой области [8].

В настоящей работе рассмотрены гальваномагнитные свойства двумерной модели Рэлея в области фазового перехода металл – диэлектрик. Использование общих формул из [5] и выражения для безразмерной эффективной проводимости при $H = 0$ из [8] позволило определить гальваномагнитные характеристики этой модели во всей предпороговой критической области и при произвольных магнитных полях. Оказалось, в частности, что при критической концентрации (пороге протекания) омическая составляющая тензора $\hat{\sigma}_e$ в пределе $H \to \infty$ меняется следующим образом: $\sigma_{xe} \propto H^{-2} \ln H$, вместо обычного закона $\sigma_x \propto 1/H^2$.

2. ПРОВОДИМОСТЬ МОДЕЛИ ПРИ $H = 0$

Согласно работе [5], для определения гальваномагнитных характеристик двумерной модели Рэлея необходимо знать ее эффективную проводимость σ_e в отсутствие магнитного поля. Обсуждаемая модель представляет собой изотропную матрицу проводимости σ_1 с системой круговых включений радиуса r_0 и проводимости σ_2. Центры кругов расположены в узлах квадратной решетки периода $2a$. Эффективная проводимость σ_e такой модели является функцией трех основных аргументов: $\sigma_e = \sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2)$, где $p = (4a^2 - \pi r_0^2)/(2a)^2$ — безразмерная концентрация (доля занимаемой площади) первой компоненты, т. е. матрицы. В дальнейшем будет использоваться безразмерная эффективная проводимость $f(p, h)$, вводимая согласно

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 f(p, h), \quad h = \sigma_2/\sigma_1 \tag{1}$$

и являющаяся функцией двух аргументов. При $h \to 0$ и $p \to p_c$, где

$$p_c = 1 - \frac{\pi}{4} \tag{2}$$

— критическая концентрация (порог протекания), величина f стремится к нулю, так что в рассматриваемой модели происходит фазовый переход металл – диэлектрик.

В окрестности точки этого перехода безразмерная эффективная проводимость имеет вид [8]

$$f(p, h) = \frac{1}{\pi} \left\{ \xi_0 + 2h \left[\ln \frac{1}{\xi_0} - g(\gamma) \right] \right\}, \quad \gamma = \frac{h}{\xi_0}, \tag{3}$$

$$g(\gamma) = -\gamma \int_0^\infty e^{-\gamma x} \ln\left(1 - e^{-x}\right) dx. \tag{4}$$

Здесь

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{a^2 - r_0^2}}{a}, \quad \xi_0^2 = \frac{4p_c}{\pi}\tau, \tag{5}$$

где

$$\tau = \frac{p - p_c}{p_c} \tag{6}$$

— параметр близости к точке перехода по концентрации.

Выражения (3), (4) для проводимости $f(p, h)$ справедливы в предпороговой ($a \geqslant r_0$, $\tau \geqslant 0$) критической ($\xi_0 \ll 1$, $h \ll 1$) области. Для функции $g(\gamma)$ имеем разложения

$$\gamma \ll 1: \quad g(\gamma) = \frac{\pi^2}{6}\gamma - \zeta(3)\gamma^2 + \frac{\pi^4}{90}\gamma^3 + \ldots, \tag{7}$$

$$\gamma \gg 1: \quad g(\gamma) = \\ = \ln \gamma + \mathbb{C} + \frac{1}{2\gamma} - \frac{1}{12}\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{120}\frac{1}{\gamma^4} + \ldots \tag{8}$$

Здесь

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1.202\ldots \tag{9}$$

и $\mathbb{C} = 0.577\ldots$ — постоянная Эйлера. Для проводимости $f(p, h)$ в двух предельных случаях имеем соответственно

$$h \ll \xi_0 \ll 1: \\ f(p, h) = \xi_0 \left\{ \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\frac{h}{\xi_0} \ln \frac{1}{\xi_0} - \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{\xi_0}\right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi}\zeta(3)\left(\frac{h}{\xi_0}\right)^3 + \ldots \right\}, \tag{10}$$

$\xi_0 \ll h \ll 1:$

$$f(p,h) = h\left\{\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{1}{h} - \mathbb{C}\right) + \frac{1}{6\pi}\left(\frac{\xi_0}{h}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{60\pi}\left(\frac{\xi_0}{h}\right)^4 + \ldots\right\}. \quad (11)$$

3. СЛАБЫЕ МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

Предположим, что двумерная модель Рэлея занимает плоскость xy, так что вектор напряженности поперечного магнитного поля $\mathbf{H}$ направлен вдоль оси z. В этом случае проводимость компонент описывается тензорами $\hat{\sigma}_1$ и $\hat{\sigma}_2$, где

$$\hat{\sigma}_i = \begin{pmatrix} \sigma_{xi} & \sigma_{ai} \\ -\sigma_{ai} & \sigma_{xi} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad (12)$$

Здесь σ_{xi} — омическая, а σ_{ai} — холловская составляющие тензора проводимости $\hat{\sigma}_i$. В слабом магнитном поле напряженности H холловские составляющие линейны по H ($\sigma_{ai} \propto H$), а для омических составляющих имеем

$$\sigma_{xi} \simeq \sigma_i + \delta\sigma_{xi}, \quad \delta\sigma_{xi} \propto H^2. \quad (13)$$

Здесь σ_i — проводимость i-й компоненты при $H = 0$. Тензор эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ имеет вид, аналогичный (12):

$$\hat{\sigma}_e = \begin{pmatrix} \sigma_{xe} & \sigma_{ae} \\ -\sigma_{ae} & \sigma_{xe} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Холловская составляющая σ_{ae} тензора $\hat{\sigma}_e$ также линейна по H и имеет следующий вид [5, 9]:

$$\sigma_{ae} = \sigma_{a2} + (\sigma_{a1} - \sigma_{a2})\,\varphi_a(p,h). \quad (15)$$

В двумерном случае функция $\varphi_a(p,h)$ может быть выражена через безразмерную эффективную проводимость $f(p,h)$:

$$\varphi_a = \frac{f^2 - h^2}{1 - h^2}. \quad (16)$$

В линейном по H приближении основной исследуемой характеристикой является коэффициент Холла R, определяемый следующим образом $R = H^{-1}\sigma_a/\sigma^2$. Здесь σ — проводимость в отсутствие магнитного поля. Для эффективного коэффициента Холла R_e из (15) и (16) находим

$$R_e = \frac{1}{H}\frac{\sigma_{ae}}{\sigma_e^2} = h^2\frac{R_2}{f^2} + (R_1 - h^2 R_2)\mathbb{R}, \quad (17)$$

$$\mathbb{R}(p,h) = \frac{\varphi_a(p,h)}{\left[f(p,h)\right]^2} = \frac{1}{1-h^2}\left(1 - \frac{h^2}{f^2}\right). \quad (18)$$

В формуле (17) R_1 и R_2 — коэффициенты Холла для первой и второй компонент.

Таким образом, в двумерном случае эффективный коэффициент Холла R_e полностью определяется величиной $f(p,h)$ и для рассматриваемой модели Рэлея может быть вычислен с помощью выражений (3), (4) в любой точке предпороговой критической области. В двух предельных случаях (10), (11) получаем

$$h \ll \xi_0: \quad \mathbb{R} \simeq 1 - \pi^2\frac{h^2}{\xi_0^2}, \quad (19)$$

$$h \gg \xi_0: \quad \mathbb{R} \simeq 1 - \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{\left[\ln(b/h)\right]^2}, \quad (20)$$

где $\ln b = -\mathbb{C}$ и учтено, что $h \ll 1$. Согласно (19) и (20), в обоих предельных случаях величина $\mathbb{R}$ не превосходит единицы.

В квадратичном по H приближении аналогично (13) имеем

$$\sigma_{xe} = \sigma_e + \delta\sigma_{xe}, \quad \delta\sigma_{xe} \propto H^2, \quad (21)$$

где σ_e — эффективная проводимость при $H = 0$. Согласно [5, 9],

$$\delta\sigma_{xe} = \psi_1\delta\sigma_{x1} + \psi_2\delta\sigma_{x2} + \frac{(\sigma_{a1} - \sigma_{a2})^2}{\sigma_1}\chi. \quad (22)$$

В формуле (22) функции $\psi_1 = \psi_1(p,h)$, $\psi_2 = \psi_2(p,h)$ и $\chi = \chi(p,h)$ в рассматриваемом двумерном случае выражаются через проводимость $f(p,h)$:

$$\psi_1 = f - hf', \quad \psi_2 = f'; \quad f' = \frac{\partial f(p,h)}{\partial h}, \quad (23)$$

$$\chi = \frac{f - hf' - f\varphi_a}{1 - h^2} \quad (24)$$

с φ_a из формулы (16). В двух предельных случаях (10), (11) получаем

$h \ll \xi_0 \ll 1:$

$$\psi_1 \simeq \frac{1}{\pi}\xi_0, \quad \psi_2 \simeq \frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{\xi_0}, \quad \chi \simeq \frac{1}{\pi}\xi_0, \quad (25)$$

$\xi_0 \ll h \ll 1:$

$$\psi_1 \simeq \frac{2}{\pi}h, \quad \psi_2 \simeq \frac{2}{\pi}\ln\frac{d}{h}, \quad \chi \simeq \frac{2}{\pi}h, \quad (26)$$

где $\ln d = -\mathbb{C} - 1$.

Для тензора удельного сопротивления $\hat{\rho}$ имеем

$$\hat{\rho} = \hat{\sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_x & \rho_a \\ -\rho_a & \rho_x \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$\rho_x = \frac{\sigma_x}{\sigma_x^2 + \sigma_a^2}, \quad \rho_a = -\frac{\sigma_a}{\sigma_x^2 + \sigma_a^2}. \quad (28)$$

Поэтому для магнитосопротивления получаем

$$\frac{\rho_{xe}(H)-\rho_{xe}(0)}{\rho_{xe}(0)} = -\left(\frac{\delta\sigma_{xe}}{\sigma_e}+\frac{\sigma_{ae}^2}{\sigma_e^2}\right). \qquad (29)$$

4. СИЛЬНЫЕ МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

Задача о гальваномагнитных свойствах двумерного композита имеет решение для произвольной двухкомпонентной изотропной модели [5]. Согласно [5] (см. также [9]), для составляющих σ_{xe} и σ_{ae} тензора эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$ имеют место следующие выражения:

$$\sigma_{xe} = \frac{\sigma_{x1}\sigma_{x2}(1-\lambda^2)f}{\lambda(1-f^2)\sigma_{x1}+(f^2-\lambda^2)\sigma_{x2}}, \qquad (30)$$

$$\sigma_{ae} = \frac{\sigma_{a2}\lambda(1-f^2)\sigma_{x1}+\sigma_{a1}(f^2-\lambda^2)\sigma_{x2}}{\lambda(1-f^2)\sigma_{x1}+(f^2-\lambda^2)\sigma_{x2}}. \qquad (31)$$

Здесь

$$\lambda = \frac{1}{4\sigma_{x1}\sigma_{x2}}\Big\{\left[(\sigma_{x1}+\sigma_{x2})^2+(\sigma_{a1}-\sigma_{a2})^2\right]^{1/2} - \left[(\sigma_{x1}-\sigma_{x2})^2+(\sigma_{a1}-\sigma_{a2})^2\right]^{1/2}\Big\}^2 \qquad (32)$$

и $f = f(p,\lambda)$ — безразмерная эффективная проводимость рассматриваемой модели $f(p,h)$ с заменой аргумента h на λ. Отметим, что для бинарной случайно-неоднородной двумерной системы с половинным составом имеем $f(1/2,\lambda)=\sqrt{\lambda}$ [7], так что из (30), (31) с учетом (32) для σ_{xe} и σ_{ae} следуют выражения (см. [5]), несколько обобщающие соответствующие результаты работы [4].

Будем считать, что для обсуждаемого бинарного композита с фазовым переходом металл – диэлектрик неравенства $\sigma_{x2}\ll\sigma_{x1}$ и $\sigma_{a2}\ll\sigma_{a1}$ выполняются при любой напряженности магнитного поля H. В этом случае для величины λ из (32) имеем

$$\lambda \simeq \frac{\sigma_{x1}\sigma_{x2}}{\sigma_{x1}^2+\sigma_{a1}^2} \ll 1. \qquad (33)$$

Далее для проводимостей σ_{xi} и σ_{ai} будем использовать модельные формулы из [1]

$$\sigma_{xi} = \frac{\sigma_i}{1+\beta_i^2}, \quad \sigma_{ai} = \frac{\sigma_i\beta_i}{1+\beta_i^2}. \qquad (34)$$

Здесь σ_i — проводимость i-й компоненты при $H=0$ и $\beta_i\propto H$ — холловский параметр. Положив, как и в [4], $\beta_1=\beta_2=\beta$, из (33) с учетом (34) получим

$$\lambda = \frac{h}{1+\beta^2} \ll 1, \qquad (35)$$

где, как обычно, $h=\sigma_2/\sigma_1$. Поэтому $\lambda\simeq h\ll 1$ при $\beta\ll 1$ и $\lambda\simeq h/\beta^2\ll h$ при $\beta\gg 1$.

Если система находится достаточно «далеко» от порога протекания (критической концентрации), так что $\xi_0\gg\lambda$, то

$$f(p,\lambda)\simeq f_d = \frac{1}{\pi}\xi_0, \qquad (36)$$

где $f_d = f(p,0)$. В этом случае из общих формул (30) и (31) с учетом (35) и (36) следует

$$\beta\ll 1: \quad \sigma_{xe}=\sigma_1 f_d, \quad \sigma_{ae}=\sigma_{a2}+\sigma_{a1}f_d^2, \qquad (37)$$

$$\beta\gg 1: \quad \sigma_{xe}=\frac{\sigma_1 f_d}{1+\beta^2 f_d^2}, \quad \sigma_{ae}=\frac{\sigma_{a2}+\sigma_{a1}\beta^2 f_d^2}{1+\beta^2 f_d^2}. \qquad (38)$$

Отсюда имеем

$$1\ll\beta\ll 1/f_d: \quad \sigma_{xe}=\sigma_1 f_d, \quad \sigma_{ae}=\frac{\sigma_2}{\beta}+\sigma_1\beta f_d^2, \qquad (39)$$

$$\beta\gg 1/f_d: \quad \sigma_{xe}=\frac{\sigma_1}{f_d}\frac{1}{\beta^2}, \quad \sigma_{ae}=\frac{\sigma_1}{\beta}. \qquad (40)$$

Выражение (39) для σ_{xe} справедливо при всех $\beta\ll 1/f_d$ вплоть до $\beta=0$. При $\beta\gg 1/f_d$ величины σ_{xe} и σ_{ae} имеют нормальные асимптотики ($\sigma_{xe}\propto 1/\beta^2, \sigma_{ae}\propto 1/\beta$), однако выход на них «затянут» и происходит при экстремально больших магнитных полях.

В непосредственной близости к порогу протекания согласно (11) имеем

$$\xi_0\ll\lambda: \quad f(p,\lambda)=\frac{2}{\pi}\lambda\ln\frac{b}{\lambda}\ll 1. \qquad (41)$$

Отсюда

$$\beta\gg 1: \quad \sigma_{xe}=\frac{2}{\pi}\frac{\sigma_2}{\beta^2}\ln\Big(\frac{b}{h}\beta^2\Big), \quad \sigma_{ae}=\frac{\sigma_2}{\beta}. \qquad (42)$$

В этой области концентраций омическая составляющая σ_{xe} тензора эффективной проводимости зависит от напряженности магнитного поля аномальным образом: $\sigma_{xe}\propto H^{-2}\ln H$. При критической концентрации ($p=p_c, \xi_0=0$) величина σ_{xe} аномальным образом зависит от H при напряженности магнитного поля, удовлетворяющей условию $\beta\gg 1$. Если же $p\neq p_c$, но ξ_0 мало́ ($\xi_0\ll\lambda$), то эта зависимость ограничена со стороны больших магнитных полей. Действительно, условие $\xi_0\ll\lambda\propto h/\beta^2$ выполняется при $\beta^2\ll h/\xi_0$. Поэтому аномальное поведение величины σ_{xe} ограничено интервалом напряженностей магнитного поля $1\ll\beta\ll\sqrt{h/\xi_0}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
2. Б. И. Шкловский, ЖЭТФ **72**, 288 (1977).
3. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **93**, 1888 (1987).
4. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 641 (1970).
5. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **82**, 1333 (1982).
6. A. L. Efros and B. I. Shklovskii, Phys. Stat. Sol.(b) **76**, 475 (1976).
7. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
8. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **161**, 358 (2022).
9. Б. Я. Балагуров, *Электрофизические свойства композитов. Макроскопическая теория*, URSS, Москва (2015).