

# ГЕНЕРАЦИЯ ПРОДОЛЬНОГО УЛЬТРАЗВУКА ИМПУЛЬСАМИ СДВИГОВОЙ ДЕФОРМАЦИИ В РЕЖИМЕ СПИН-ФОНОННОГО ЭХА

*С. В. Сазонов\**

*Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»  
123182, Москва, Россия*

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119991, Москва, Россия*

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)  
125993, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 10 сентября 2022 г.,  
после переработки 10 сентября 2022 г.  
Принята к публикации 26 сентября 2022 г.

Предсказана возможность генерации импульсов продольного ультразвука гигагерцевых частот в режиме спин-фононного эха с помощью воздействия на намагниченный изотропный парамагнетик резонансными наносекундными импульсами сдвиговой деформации. Частота генерируемых эхо-сигналов продольного ультразвука в два раза превышает частоту импульсов, подаваемых на среду. Для реализации эффекта скорость продольного ультразвука не должна более чем в два раза превышать скорость волн деформации сдвига. Данный резонансный механизм импульсного режима генерации второй гармоники, сопровождающегося нелинейным преобразованием поперечного ультразвука в продольный, не имеет оптического аналога.

DOI: 10.31857/S0044451023030045  
EDN: QDIKKL

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Открытие в 1950 г. Эрвином Ханом спинового эха [1] стимулировало предсказание [2] и экспериментальное наблюдение [3] аналогичного резонансного эффекта в видимом диапазоне электромагнитных волн — фотонного (светового) эха. Затем вышла серия экспериментальных и теоретических работ по спин-фононному (акустическому) эху в парамагнитных кристаллах [4–9], помещенных во внешнее магнитное поле **B**. Квантовые переходы между зеемановскими подуровнями парамагнитных ионов могут быть инициированы как акустическими, так и электромагнитными полями. В свою очередь, данные переходы способны генерировать поля той и другой природы. В работах [5–7] рассматривалось комбинированное (акусто-электромагнитное) воздействие

на парамагнитные кристаллы, а также регистрировались акустические и электромагнитные эхо-сигналы.

Для наблюдения сигналов спин-фононного эха важно, чтобы характерные частоты  $\omega_0$  зеемановского расщепления значительно превышали соответствующие неоднородные ширины  $\delta\omega$  образовавшихся в результате данного расщепления переходов. Обычно при температурах жидкого гелия  $\delta\omega \sim 10^7\text{--}10^8\text{ с}^{-1}$  [10]. Поэтому в экспериментах по спин-фононному эху используются сильные магнитные поля, вызывающие зеемановские расщепления с частотами  $\omega_0 \sim 10^{11}\text{ с}^{-1}$  [10, 11]. Тот же порядок имеют несущие частоты  $\omega$  акустических импульсов, резонансно взаимодействующих с квантовыми переходами между зеемановскими подуровнями. Таким образом, спектры возбуждающих акустических импульсов и акустических эхо-сигналов лежат в гигагерцевом диапазоне частот, принадлежащем дальнему ультразвуку.

В твердом теле способны формироваться и распространяться как продольные, так и поперечные

\* E-mail: sazonov.sergey@gmail.com

акустические волны. Последние называют также импульсами сдвиговой деформации. Данное обстоятельство коренным образом отличает акустические волны от электромагнитных. Комбинированное воздействие на кристаллы поперечными и продольными акустическими импульсами способно порождать такие же комбинированные эхо-отклики. Важным представляется то, что скорости продольных и поперечных упругих волн в твердом теле существенно различаются между собой. Это может привносить свои особенности в акустическое (спин-фононное) эхо, отсутствующие в случаях спинового и фотонного эха.

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию возможности формирования эхо-откликов продольного ультразвука при резонансном возбуждении парамагнитного кристалла ультразвуковыми импульсами сдвиговой деформации.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Внедренные в твердое тело парамагнитные ионы характеризуются эффективным спином  $S$  [12], значением которого определяется количество образовавшихся зеемановских подуровней из наиболее заселенного квантового состояния после помещения данных ионов в магнитное поле.

Наиболее сильное спин-фононное взаимодействие с динамическими локальными деформациями твердого тела испытывают парамагнитные ионы, обладающие эффективным спином  $S = 1$  [12]. Согласно механизму Ван Флека [11, 12], локальные деформации приводят к появлению локальных градиентов внутреннего электрического поля. В свою очередь, данные градиенты вызывают электрические квадрупольные переходы между зеемановскими подуровнями парамагнитных ионов. Гамильтониан спин-фононного взаимодействия в таком случае имеет вид [10–12]

$$\hat{H}_{int} = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=x, y, z} G_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} (\hat{S}_\mu \hat{S}_\nu + \hat{S}_\nu \hat{S}_\mu), \quad (1)$$

где  $G_{\mu\nu}$ ,  $\varepsilon_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} \right)$  — компоненты тензоров спин-фононной связи и локальной деформации соответственно,  $u_\mu$  — проекция вектора  $u$  локальных смещений на декартову координату  $x_\mu$ ,  $\hat{S}_\mu$  — трехрядные спиновые матрицы, в представлении соб-

ственных функций оператора  $\hat{S}_z$  имеющие вид [12]

$$\begin{aligned} \hat{S}_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{S}_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{S}_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Спиновый гамильтониан свободного от спин-фононного взаимодействия выделенного парамагнитного иона имеет вид

$$\hat{H}_s = \hbar \omega'_0 \hat{S}_z, \quad (3)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $\omega'_0$  — частота зеемановского расщепления спинового состояния.

Основное, среднее и верхнее состояния эффективного спина обладают соответственно проекциями  $S_z = -1, 0, +1$  на ось  $z$  (рис. 1).

Ниже будем считать, что подаваемые на среду импульсы сдвиговой деформации поляризованы вдоль внешнего магнитного поля  $B$ , направленного параллельно оси  $z$ , и характеризуются компонентой  $\varepsilon_{zx} = 0.5 \partial u_z / \partial x$  тензора упругой деформации. Данную компоненту будем считать заданной, пренебрегая обратным воздействием на нее парамагнитных

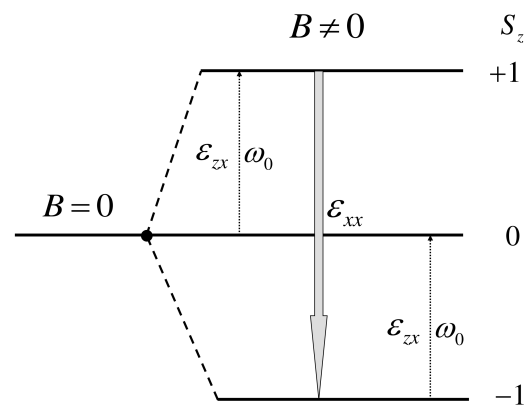
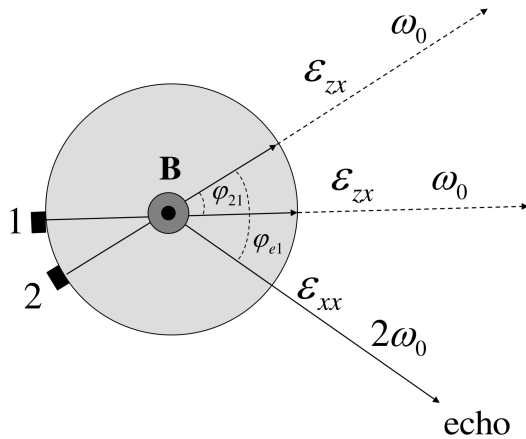


Рис. 1. Расщепление квантового уровня на три зеемановских подуровня парамагнитного иона с эффективным спином  $S = 1$  и разрешенные спин-фононные переходы для волн поперечного и продольного ультразвука, характеризующихся соответственно компонентами  $\varepsilon_{zx}$  и  $\varepsilon_{xx}$  тензора относительной деформации



**Рис. 2.** Геометрическая схема возбуждения парамагнитного цилиндра импульсами сдвиговой деформации  $\epsilon_{zx}$  с несущей частотой  $\omega_0$  и «высвечивания» эхо-сигнала продольного ультразвука  $\epsilon_{xx}$  с несущей частотой  $2\omega_0$ . Черными прямоугольниками с номерами 1 и 2 обозначены соответственно генераторы первого и второго возбуждающих импульсов сдвиговой деформации. Магнитное поле  $\mathbf{B}$  и ось симметрии цилиндрического парамагнитного образца перпендикулярны к плоскости рисунка

ионов. Такой подход, типичный при исследовании эффектов эха, оправдан при условии  $\alpha l \ll 1$ , где  $\alpha$  — коэффициент поглощения поперечного ультразвука,  $l$  — характерный размер твердотельного образца, на который данный ультразвук воздействует. Кроме того, примем, что как воздействующие на образец импульсы, так и эхо-сигнал распространяются перпендикулярно магнитному полю (рис. 2). При этом поле продольного эхо-сигнала, распространяющегося вдоль оси  $x$ , характеризуется компонентой тензора деформаций. В соответствии со сказанным при учете аксиальной симметрии относительно вращений вокруг оси, параллельной  $B$ , представим (1) в виде суммы

$$\hat{H}_{int} = \hat{H}_{int}^{\perp} + \hat{H}_{int}^{\parallel}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int}^{\perp} &= \frac{1}{2} G_{\perp} \epsilon_{zx} (\hat{S}_x \hat{S}_z + \hat{S}_z \hat{S}_x), \\ \hat{H}_{int}^{\parallel} &= G_{\parallel} \epsilon_{xx} \hat{S}_x^2, \\ G_{\perp} &= G_{zx}, \quad G_{\parallel} = G_{xx}. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как на парамагнитные ионы воздействуют только импульсы сдвиговой деформации, то в уравнение для матрицы плотности  $\hat{\rho}$  данных ионов входит часть гамильтониана, равная  $\hat{H}_s + \hat{H}_{int}^{\perp}$ .

В соответствии со значениями проекций эффективного спина на ось  $z$  для различных квантовых

состояний парамагнитного иона (рис. 1), матрицу плотности представим в виде

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{++} & \rho_{+0} & \rho_{+-} \\ \rho_{0+} & \rho_{00} & \rho_{0-} \\ \rho_{-+} & \rho_{-0} & \rho_{--} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Здесь нижние индексы  $+$ ,  $0$  и  $-$  обозначают соответственно проекции эффективного спина  $+1$ ,  $0$  и  $-1$ . При этом выполняются условия эрмитовости  $\rho_{+0} = \rho_{0+}^*$ ,  $\rho_{+-} = \rho_{-+}^*$ ,  $\rho_{0-} = \rho_{-0}^*$  и нормировки  $\rho_{++} + \rho_{00} + \rho_{--} = 1$ .

Используя (2), (5) и (6), запишем уравнения для элементов  $\rho_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = -, 0, +$ ) матрицы плотности в виде

$$\frac{\partial \rho_{\mu\nu}}{\partial t} = i\omega'_{\nu\mu} \rho_{\mu\nu} - \frac{i}{\hbar} [H_{int}^{\perp}, \hat{\rho}]_{\mu\nu}. \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \omega'_{+0} &= \omega'_{0-} = \omega'_0, \\ \omega'_{+-} &= 2\omega'_0, \\ \omega'_{++} &= \omega'_{00} = \omega'_{--} = 0. \end{aligned}$$

Здесь и ниже мы пренебрегаем энергетической и фазовой необратимыми релаксациями, считая, что характерное время  $\Delta t$  проведения эксперимента значительно меньше характерных времен обоих видов релаксации.

Применяя для расчета параметров эхо-сигнала полуклассический подход, дополним (4) и (5) классическим гамильтонианом поля продольной деформации  $H_a = \int H_a d^3r$ , где интегрирование ведется по всему объему образца среды, а плотность гамильтониана  $H_a$  определяется выражением

$$H_a = \frac{p_x^2}{2\rho} + \frac{\rho}{2} a_{\parallel}^2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2, \quad (8)$$

где  $\rho$  — равновесная плотность среды,  $p_x$  — декартова компонента плотности импульса продольных локальных смещений,  $a_{\parallel}$  — скорость продольного звука в рассматриваемой среде.

Используем уравнения Гамильтона для механики сплошных сред [13]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_x}{\partial t} &= -\frac{\delta}{\delta u_x} \left( H_a + \langle \hat{H}_{int}^{\parallel} \rangle \right), \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} &= \frac{\delta}{\delta p_x} \left( H_a + \langle \hat{H}_{int}^{\parallel} \rangle \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $\langle \hat{H}_{int}^{\parallel} \rangle = \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{H}_{int}^{\parallel})$  — квантовое среднее оператора Гамильтона, описывающего взаимодействие эффективного спина с полем продольных де-

формаций.

Отсюда, а также из (2), (5), (6) и (8) приходим к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial t^2} - a_{\parallel}^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial x^2} = \frac{nG_{\parallel}}{2\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho_{00} + \rho_{-+} + \rho_{-+}^*) g(\Delta) d\Delta, \quad (10)$$

где  $n$  — концентрация парамагнитных ионов,  $g(\Delta)$  — функция контура неоднородного уширения на квантовом переходе  $- \leftrightarrow +$ , центрированная на частоте  $\omega_0$ ,  $\Delta = \omega'_0 - \omega_0$  — отстройка квантового перехода  $- \leftrightarrow +$  выделенного парамагнитного иона от центральной частоты спектральной линии.

Таким образом, в принятом приближении  $\alpha l \ll 1$  возбуждение парамагнитных ионов происходит импульсами сдвиговой деформации, что описывается последним слагаемым в (7). В свою очередь, продольный ультразвук генерируется квантовым переходом  $- \leftrightarrow +$  в периоды свободной эволюции спинов, когда в (7) можно положить  $H_{int}^{\perp} = 0$ . Этот процесс описывается динамикой элемента  $\rho_{-+}$  матрицы плотности. Что касается матричного элемента  $\rho_{00}$ , то его динамика в периоды свободной эволюции описывается энергетической релаксацией, которой мы здесь, как было сказано выше, пренебрегаем. Поэтому в правой части (10) можно с хорошей точностью считать  $\rho_{00} = \text{const}$ .

Используем далее стандартное приближение медленно меняющихся амплитуд (ММА) [14]. В периоды возбуждений для динамических переменных поля и среды имеем

$$\varepsilon_{zx} = \psi_{\perp} e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{r})} + \text{c. c.}, \quad (11)$$

$$\rho_{-+} = R_{-+} e^{i(2\omega_0 t - \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{r})},$$

$$\rho_{-0} = R_{-0} e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{r})}, \quad (12)$$

$$\rho_{0+} = R_{0+} e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{r})},$$

где  $\psi_{\perp}$  и  $R_{\mu\nu}$  — комплексные ММА импульсов сдвиговой деформации и недиагональных элементов матрицы плотности соответственно ( $\mu, \nu = -, 0, +$ ),  $\mathbf{k}_{\perp}$  — волновой вектор импульсов сдвиговой деформации, несущая частота  $\omega_0$  данных импульсов совпадает с центральной частотой контуров неоднород-

ного уширения для переходов  $- \leftrightarrow 0$  и  $0 \leftrightarrow +$ ,  $r$  — радиус-вектор точки парамагнетика.

Для периодов свободной эволюции ( $H_{int}^{\perp} = 0$ ) запишем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \psi_{\parallel} e^{i(2\omega_0 t - \mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r})} + \text{c. c.}, \\ \rho_{-+} &= R_{-+} e^{i(2\omega_0 t - \mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r})}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\psi_{\parallel}$  и  $\mathbf{k}_{\parallel}$  — комплексная ММА и параллельный оси  $x$  волновой вектор продольного ультразвука соответственно.

Матричные элементы  $\rho_{-0}$  и  $\rho_{0+}$  здесь по-прежнему представляются в виде (12).

Отметим, что величины волновых векторов для волн сдвиговой деформации и продольного ультразвука определяются соответственно выражениями  $k_{\perp} = \omega_0/a_{\perp}$ ,  $k_{\parallel} = 2\omega_0/a_{\parallel}$ , где  $a_{\perp}$  — скорость поперечного ультразвука.

Будем считать ниже, что длительности  $\tau_p$  воздействующих импульсов значительно меньше времен  $T_{0+}^*$ ,  $T_{-0}^*$  и  $T_{-+}^*$  обратимой релаксации, обусловленной неоднородным уширением рассматриваемых квантовых переходов. Как результат, ширины  $\delta\omega_p \sim 1/\tau_p$  импульсных спектров значительно превышают неоднородные ширины  $\delta\omega \sim 1/T_{0+}^*$ ,  $1/T_{-0}^*$ ,  $1/T_{-+}^*$  данных переходов. Поэтому при описании возбуждения парамагнитных ионов пренебрежем в (7) частотными отстройками  $\omega'_{\nu\mu} - \omega_{\nu\mu}$  от соответствующих резонансов.

Суммируя сказанное выше, из (2), (5)–(7), (10)–(13) после пренебрежения в материальных уравнениях быстро осциллирующими слагаемыми для периодов возбуждения парамагнитных ионов получим

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial t} = i \frac{G_{\perp} \psi_{\perp}}{2\sqrt{2}\hbar} [\hat{R}, \hat{Q}], \quad (14)$$

где

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \rho_{++} & R_{+0} & R_{+-} \\ R_{0+} & \rho_{00} & R_{0-} \\ R_{-+} & R_{-0} & \rho_{--} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем заданную амплитуду  $\psi_{\perp}$  будем считать вещественной.

Для периодов свободной эволюции из (7), (10), (12) и (13) будем иметь  $\rho_{--} = \rho_{00} = \rho_{++} = \text{const}$ ,

$$\frac{\partial R_{-0,0+}}{\partial t} = i\Delta R_{-0,0+}, \quad \frac{\partial R_{-+}}{\partial t} = 2i\Delta R_{-+}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \psi_{\parallel}}{\partial x} + \frac{1}{a_{\parallel}} \frac{\partial \psi_{\parallel}}{\partial t} = i \frac{n G_{\parallel} \omega_0}{2 \rho a_{\parallel}^3} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{-+} g(\Delta) d\Delta. \quad (17)$$

С помощью системы (14), (15) определяются квантовые состояния парамагнитных ионов при воздействии на них резонансных импульсов сдвиговой деформации. Уравнениями (16), (17) описывается генерация продольного ультразвука после данного воздействия.

### 3. РЕЖИМ СПИН-ФОНОННОГО ЭХА

Рассмотрим динамику квантовых состояний парамагнитных ионов в периоды возбуждений, получив решение операторного уравнения (14).

Решение операторного уравнения (14) можно записать в виде

$$\hat{R}(t) = \hat{U}(t, t_0) \hat{R}(t_0) \hat{U}^+(t, t_0), \quad (18)$$

где

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-i\hat{S}}, \quad \hat{S} = \hat{Q} \frac{G_{\perp}}{2\sqrt{2}\hbar} \int_{t_0}^t \psi_{\perp} dt', \quad (19)$$

$t_0$  — время начала воздействия импульса.

Разлагая в ряд Тейлора экспоненту от матрицы  $e^{i\hat{\theta}}$ , после его суммирования с учетом (19) и второго выражения (15) будем иметь для оператора эволюции

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{I} - \hat{Q}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - i \frac{\hat{Q}}{\sqrt{2}} \sin \theta, \quad (20)$$

где  $\hat{I}$  — единичная матрица,

$$\theta = \frac{G_{\perp}}{2\hbar} \int_{t_0}^t \psi_{\perp} dt'. \quad (21)$$

Для периодов свободной эволюции из (16) находим

$$R_{-0,0+}(t) = R_{-0,0+}(t_1) \exp\{i\Delta(t-t_1)\}, \quad (22)$$

$$R_{-+}(t) = R_{-+}(t_1) \exp\{2i\Delta(t-t_1)\},$$

где  $t_1$  — время начала этапа свободной эволюции.

Пусть в момент времени  $t = 0$  на среду воздействует импульс сдвиговой деформации длительности  $\tau_1$ . Затем, спустя промежуток времени  $\tau$ , соответствующий первому этапу свободной эволюции, среда подвергается воздействию второго импульса, длительность которого равна  $\tau_2$ . После этого, при  $t = \tau + \tau_1 + \tau_2$ , начинается второй этап свободной эволюции, во время которого формируются эхосигналы (рис. 3).

Будем считать, что при  $t = 0$  матрица  $\hat{R}$  определяется только начальными населенностями  $w_+$ ,  $w_0$  и  $w_-$  соответствующих спиновых состояний парамагнитных ионов и имеет вид

$$\hat{R}(0) = \begin{pmatrix} w_+ & 0 & 0 \\ 0 & w_0 & 0 \\ 0 & 0 & w_- \end{pmatrix}.$$

Тогда, применяя в обозначенной последовательности формулы (18), (20)–(22), найдем выражения для элементов матрицы  $\hat{R}$  в моменты времени  $t > \tau + \tau_1 + \tau_2$ . Интересующая нас часть  $R_{-+}^{echo}$  элемента  $R_{-+}$ , вносящая вклад в эхо-отклик, имеет вид

$$R_{-+}^{echo} = R_{-+}^{3\tau/2} + R_{-+}^{2\tau}, \quad (23)$$

где

$$R_{-+}^{3\tau/2} = -\frac{w_- - 2w_0 + w_+}{4} \sin 2\theta_1 \times$$

$$\times \sin \theta_2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2} e^{2i\Delta(t-3\tau/2-\tau_1-\tau_2)}, \quad (24)$$

$$R_{-+}^{2\tau} = \frac{w_- - 2w_0 + w_+}{4} \sin^2 \theta_1 \sin^4 \frac{\theta_2}{2} e^{2i\Delta(t-2\tau-\tau_1-\tau_2)}. \quad (25)$$

Здесь

$$\theta_1 = \frac{G_{\parallel}}{2\hbar} \int_0^{\tau_1} \psi_{\perp} dt', \quad \theta_2 = \frac{G_{\parallel}}{2\hbar} \int_{\tau+\tau_1}^{\tau+\tau_1+\tau_2} \psi_{\perp} dt'$$

— «площади» соответственно первого и второго возбуждающих импульсов.

В эхо-экспериментах с хорошей точностью выполняется неравенство  $\tau \gg \tau_1, \tau_2$ . Учитывая это, а также бoльцмановский характер распределения начальных населенностей спиновых подуровней, после интегрирования по лоренцевскому контуру неодно-

родного уширения перехода  $- \leftrightarrow +$

$$g(\Delta) = \frac{1}{\pi} \frac{T_{-+}^*}{1 + (T_{-+}^* \Delta)^2}$$

будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_{-+}^{3\tau/2} g(\Delta) d\Delta = -0.5 \frac{\text{ch}(\hbar\omega_0/k_B T) - 1}{2 \text{ch}(\hbar\omega_0/k_B T) + 1} \sin 2\theta_1 \sin \theta_2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2} \exp \left\{ -\frac{2}{T_{-+}^*} \left| t - \frac{3\tau}{2} \right| \right\}, \quad (26)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_{-+}^{2\tau} g(\Delta) d\Delta = -0.5 \frac{\text{ch}(\hbar\omega_0/k_B T) - 1}{2 \text{ch}(\hbar\omega_0/k_B T) + 1} \sin^2 \theta_1 \sin^4 \frac{\theta_2}{2} \exp \left\{ -\frac{2}{T_{-+}^*} |t - 2\tau| \right\}, \quad (27)$$

где  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура среды.

Выражениями (26) и (27) описываются появления ультразвукового эхо-сигнала в моменты времени  $3\tau/2$  и  $2\tau$  соответственно (рис. 3).

Взяв за начало координаты  $x$  центр цилиндрического парамагнитного образца (рис. 2), запишем решение уравнения (17) при  $x \gg l$ . При этом будем считать, что среда вне цилиндрического образца не обладает парамагнитными свойствами. Тогда с учетом (26) и (27) для  $3\tau/2$ - и  $2\tau$ -эха найдем

$$\begin{aligned} \psi_{\parallel}^{3\tau/2} &= -i\mu \sin 2\theta_1 \sin \theta_2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{2}{T_{-+}^*} \left| t - 3\tau/2 - x/a_{\parallel} \right| \right\}, \\ \psi_{\parallel}^{2\tau} &= i\mu \sin^2 \theta_1 \sin^4 \frac{\theta_2}{2} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{2}{T_{-+}^*} \left| t - 2\tau - x/a_{\parallel} \right| \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\mu = \frac{nG_{\parallel}\omega_0 l}{4\rho a_{\parallel}^3} \frac{\text{ch}(\hbar\omega_0/k_B T) - 1}{2 \text{ch}(\hbar\omega_0/k_B T) + 1}. \quad (29)$$

Важным является вопрос о направлении распространения эхо-сигналов. Так как характерные длины волн  $\lambda$  возбуждающих импульсов и сигналов эха значительно меньше размеров среды, то важную роль играют эффекты пространственной интерференции, сопровождающиеся сильной дифференциацией мод. Волновые векторы  $3\tau/2$ - и  $2\tau$ -сигналов эха, как следует из общих формул, найденных в [15], определяются соответственно выра-

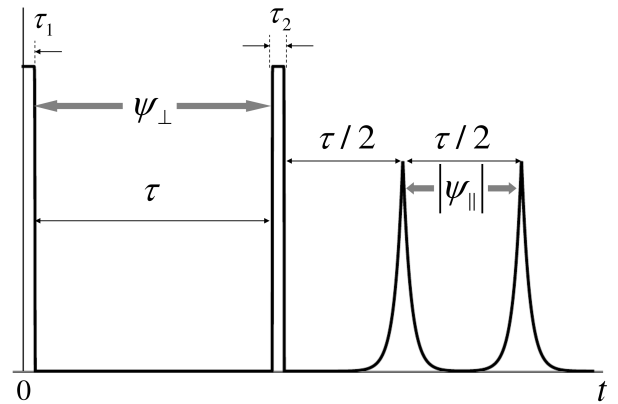


Рис. 3. Временная последовательность воздействия на парамагнетик двух импульсов сдвиговой деформации с огибающей  $\psi_{\perp}$  и длительностями  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , разделенных промежутком времени  $\tau$ , а также появления двух эхо-сигналов продольного ультразвука с величиной огибающей  $|\psi_{\parallel}|$

жениями  $\mathbf{k}_e^{3\tau/2} = 3\mathbf{k}_2/2 - \mathbf{k}_1/2$  и  $\mathbf{k}_e^{2\tau} = 2\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ . Заметим, что выражение для  $\mathbf{k}_e^{2\tau}$  в точности совпадает с соответствующим выражением для фотонного эха в двухуровневой системе [3, 14]. Отсюда, учитывая, что  $k_e^{3\tau/2} = k_e^{2\tau} = k_{\parallel} = 2\omega_0/a_{\parallel}$  и  $k_1 = k_2 = k_{\perp} = \omega_0/a_{\perp}$ , легко определить угол  $\varphi_{21}$  между направлениями распространения первого и второго возбуждающих импульсов, а также угол  $\varphi_{e1}$  между направлениями распространения первого импульса и эхо-отклика (рис. 2). Для  $3\tau/2$ -эха и  $2\tau$ -эха имеем соответственно

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{21}^{3\tau/2} &= \frac{1}{3} \left( 5 - 8 \frac{a_{\perp}^2}{a_{\parallel}^2} \right), \\ \cos \varphi_{e1}^{3\tau/2} &= \frac{a_{\parallel}}{a_{\perp}} - 2 \frac{a_{\perp}}{a_{\parallel}}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}\cos \varphi_{21}^{2\tau} &= \frac{5}{4} - \frac{a_{\perp}^2}{a_{\parallel}^2}, \\ \cos \varphi_{e1}^{2\tau} &= \frac{3a_{\parallel}}{4a_{\perp}} - \frac{a_{\perp}}{a_{\parallel}}.\end{aligned}\quad (31)$$

Простой анализ показывает, что для удовлетворения данным соотношениям необходимо выполнение условия  $a_{\parallel}/a_{\perp} \leq 2$ . Поскольку в твердом теле всегда  $a_{\parallel} > a_{\perp}$ , приходим к ограничению вида

$$1 < a_{\parallel}/a_{\perp} \leq 2. \quad (32)$$

Таким образом, скорость продольного ультразвука не должна более чем в два раза превышать скорость поперечного ультразвука. Условие (32) является необходимым для осуществления генерации продольного ультразвука импульсами сдвиговой деформации (поперечным ультразвуком) в резонансном режиме спин-фононного эха.

Из выражений (30) и (31) легко получаются неравенства  $\varphi_{21}^{3\tau/2} > \varphi_{21}^{2\tau}$  и  $\varphi_{e1}^{3\tau/2} > \varphi_{e1}^{2\tau}$ .

Как известно, в случае первичного (двухимпульсного) фотонного эха рассмотренные углы должны быть настолько малы, чтобы удовлетворялось условие  $\varphi_{e1} = 2\varphi_{21} < \sqrt{\lambda/l}$  [3, 14]. В реальных экспериментах эти углы составляют всего единицы градусов, что затрудняет пространственное разрешение возбуждающих сигналов и сигналов эха. Важно заметить, что здесь, в отличие от фотонного эха, отсутствует ограничение на величины рассмотренных углов. Связано это с различием между скоростями распространения возбуждающих импульсов и эхо-сигналов, а также с различием их несущих частот. Более того, выбрав только одно из условий синхронизма ((30) или (31)), можно наблюдать только эхо-сигнал, удовлетворяющий данному условию. Другой же эхо-сигнал при этом будет подавлен.

Приведем численные оценки для возможной реализации рассмотренного варианта спин-фононного эха в экспериментальных условиях. В качестве рабочего образца рассмотрим аморфный кристалл MgO при температурах жидкого гелия с внедренными в него парамагнитными ионами  $\text{Fe}^{2+}$  [10]. Для такого кристалла имеем  $a_{\parallel}/a_{\perp} = 1.89$  [16]. Тогда из (30) и (31) будем иметь  $\varphi_{21}^{3\tau/2} = 23^\circ$ ,  $\varphi_{e1}^{3\tau/2} = 34^\circ$ ,  $\varphi_{21}^{2\tau} = 14^\circ$ ,  $\varphi_{e1}^{2\tau} = 27^\circ$ . Таким образом, возбуждающие импульсы и импульсы эха обладают хорошей пространственной разрешимостью.

Для рассматриваемого образца с характерным размером  $l \sim 1$  мм (рис. 2) в случае импульсов сдвиговой деформации имеем  $al \sim 0.01-0.1 \ll 1$  [10].

Следовательно, использованное здесь приближение заданного поля для возбуждающих импульсов выполняется с хорошей точностью. Время обратимой фазовой релаксации для квантовых переходов между зеемановскими подуровнями ионов  $\text{Fe}^{2+}$  в кристалле MgO, как и характерная длительность эхо-сигналов (см. (28)), составляет  $T_{-+}^* \sim 10^{-7}$  с [7, 9]. Для того чтобы удовлетворить использованному выше условию  $\tau_p \ll T_{-+}^*$ , длительности возбуждающих импульсов сдвиговой деформации должны быть порядка  $\tau_p \sim 10^{-8}$  с. При этом временной промежуток  $\tau$  между возбуждающими импульсами удовлетворяет двойному неравенству  $T_{-+}^* \ll \tau \ll T_2$ , где  $T_2$  — характерное время фазовой релаксации на разрешенных спин-фононных переходах. Взяв  $T_2 \sim 10^{-5} \text{ с}^{-1}$  [10, 11], примем  $\tau \sim 10^{-6}$  с. Несущая частота импульсов сдвиговой деформации, равная половине частоты генерируемого ультразвукового сигнала, составляет  $\omega_0 \sim 10^{11} \text{ с}^{-1}$ .

Скорость продольного ультразвука в рассматриваемом рабочем образце  $a_{\parallel} = 5.77 \cdot 10^5 \text{ см/с}$  [16]. Следовательно, характерный размер эхо-сигнала в направлении распространения составляет  $\sim a_{\parallel} T_{-+}^* \sim 1$  мм. Так как данная величина сравнима с размером образца или превышает его, то эффектами распространения эхо-сигнала внутри образца можно пренебречь. Это и было сделано при получении выражений (28).

Взяв для апертуры  $D$  возбуждающих импульсов и сигналов эха  $D \approx l \sim 1$  мм, найдем для характерной длины дифракционного расплывания  $l_D \sim \omega_0 D^2/a_{\parallel} \sim 10^2-10^3 \text{ см}$ . Это значительно превосходит рассматриваемые нами пространственные масштабы и поэтому хорошо согласуется с использованным в (10), (17) и (28) одномерным приближением. Таким образом, эхо-сигналы можно фиксировать, установив соответствующие датчики, на расстояниях нескольких сантиметров от рабочего образца.

Из (28) видно, что амплитуда  $3\tau/2$ -эха максимальна, если «площади» двух возбуждающих импульсов равны соответственно  $\theta_1 = \pi/4$ ,  $\theta_2 = 2\pi/3$ . Аналогичные оптимальные «площади» для наблюдения  $2\tau$ -эха имеют значения  $\theta_1 = \pi/2$  и  $\theta_2 = \pi$ . Тогда из (21) для амплитуды подаваемых на среду импульсов сдвиговой деформации имеем оценку  $\psi_{\perp} \sim \hbar/G_{\perp}\tau_p \sim 10^{-5}$ . Взяв, в свою очередь, в случае рассматриваемого образца  $T \sim 1-4 \text{ К}$ ,  $n \sim 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $G_{\parallel} \sim 10^{-14} \text{ эрг}$  [10, 11],  $\rho = 3.6 \text{ г/см}^3$ , а также приведенные выше оценки для  $\omega_0$ ,  $a_{\parallel}$  и  $l$ , из (28) и (29) амплитуд эхо-сигналов продольного ультразвука будем

иметь  $|\psi_{\parallel}^{3\tau/2}| \sim |\psi_{\parallel}^{2\tau}| \sim 10^{-5}-10^{-6}$ . Такие амплитуды относительной деформации вполне могут быть зафиксированы в условиях реального эксперимента [12].

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное в настоящей работе исследование демонстрирует принципиальную возможность генерации импульсов продольного ультразвука гигагерцевого диапазона с помощью резонансных наносекундных импульсов сдвиговой деформации посредством спин-фононного эха. Так как несущая частота импульсов продольного ультразвука здесь в два раза превышает частоту подаваемых на образец поперечных импульсов, то можно говорить о резонансном механизме генерации второй гармоники. Важно заметить, что данный механизм не имеет оптического аналога по трем основным причинам. Во-первых, в трехуровневой системе не могут быть разрешены все три оптических перехода. Это запрещено правилами отбора по четности состояний. Во-вторых, генерация второй гармоники здесь сопровождается преобразованием поперечного ультразвука в продольный. Данный процесс невозможен в оптике по причине отсутствия продольных электромагнитных волн. В-третьих, как уже отмечалось в предыдущем разделе, углы «высвечивания» эхо-сигналов продольного ультразвука по отношению к направлениям распространения возбуждающих импульсов, в отличие от случая первичного фотонного эха, не являются малыми и никак не ограничены размерами рабочего образца, в котором они формируются. Это обусловлено различием несущих частот, а также скоростей продольного и поперечного ультразвуков.

Замечание об отсутствии оптического аналога представляется важным. Дело в том, что многие нелинейно-акустические эффекты предсказывались и обнаруживались в результате проведения параллелей с соответствующими оптическими явлениями [17–24].

Помимо рассмотренных здесь  $3\tau/2$ - и  $2\tau$ -сигналов эха продольного ультразвука на частоте  $2\omega_0$  при описанной выше схеме возбуждений среды в момент времени  $2\tau$  могут формироваться эхо-отклики сдвиговой деформации на частоте  $\omega_0$ . Однако условия синхронизма в этом случае значительно отличаются от (30) и (31), имея явное сходство с аналогичными условиями для наблюдения фотонного эха. Поэтому при выполнении (30) и (31) данные сигналы будут сильно подавлены.

Представляет интерес исследовать ультразвуковое эхо при возбуждении среды последовательно из различных комбинаций поперечных и продольных импульсов.

В настоящей работе рассмотрена ситуация, когда длительности возбуждающих импульсов значительно короче времен обратимой фазовой релаксации задействованных квантовых переходов. В этом случае временные профили эхо-сигналов представляют собой фурье-образы соответствующих контуров неоднородного уширения [25] (см., например, (28) и выражение для  $g(\Delta)$ ). Как известно, в противоположном случае (при импульсных длительностях, превышающих времена обратимой фазовой релаксации) в оптике наблюдаются эффекты корреляции между профилями возбуждающих импульсов и сигналов эха [26–32]. В этой связи возникает вопрос о том, как аналогичные эффекты корреляции могут проявиться в случае участия в формировании ультразвукового эха поперечных и продольных импульсов. Такой вопрос является предметом отдельного рассмотрения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. E. L. Hahn, *Phys. Rev.* **80**, 580 (1950).
2. У. Х. Копвиллем, В. Р. Нагибаров, *Физ. металлов и металловед.* **15**, 313 (1963).
3. N. A. Kurnit, I. D. Abella, and S. R. Hartmann, *Phys. Rev. Lett.* **6**, 567 (1964).
4. В. Р. Нагибаров, У. Х. Копвиллем, *ЖЭТФ* **52**, 936 (1967) [V. R. Nagibarov and U. Kh. Kopvillem, *Sov. Phys. JETP* **25**, 618 (1967)].
5. N. S. Shiren and I. G. Kazyaka, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1304 (1972).
6. D. R. Taylor and I. G. Bartlet, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 96 (1973).
7. У. Х. Копвиллем, В. Р. Ризаев, *ЖЭТФ* **65**, 2297 (1973) [U. Kh. Kopvillem and V. R. Rizaev, *Sov. Phys. JETP* **38**, 1147 (1974)].
8. В. А. Голенищев-Кутузов, В. Ф. Тарасов, Н. К. Соловаров, *Письма в ЖЭТФ* **22**, 266 (1975) [V. A. Golenishchev-Kutuzov, N. K. Solovarov, and V. F. Tarasov, *Sov. Phys. JETP Lett.* **22**, 123 (1975)].
9. В. А. Голенищев-Кутузов, А. И. Сиразиев, Н. К. Соловаров, В. Ф. Тарасов, *ЖЭТФ* **71**, 516 (1976) [V. A. Golenishchev-Kutuzov, A. I. Siraziev, N. K. Solovarov, and V. F. Tarasov, *Sov. Phys. JETP* **44**, 562 (1976)].



10. N. S. Shiren, Phys. Rev. B **2**, 2471 (1970).
11. В. А. Голенищев-Кутузов, В. В. Самарцев, Н. К. Соловьев, Б. М. Хабибуллин, *Магнитная квантовая акустика*, Наука, Москва (1977).
12. Дж. Такер, В. Рэмpton, *Гиперзвук в физике твердого тела*, Мир, Москва (1975) [J. W. Tucker and V. W. Rampton, *Microwave Ultrasonics in Solid State Physics*, North-Holland, Amsterdam (1972)].
13. S. V. Sazonov, J. Phys.: Condens. Matter **6**, 6295 (1994).
14. Л. Аллен, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*, Мир, Москва (1978) [L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms*, John Wiley and Sons, New York (1978)].
15. А. Ю. Пархоменко, С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **67**, 887 (1998) [A. Yu. Parkhomenko and S. V. Sazonov, JETP Lett. **67**, 934 (1998)].
16. Г. Кайно, *Акустические волны: устройства, визуализация и аналоговая обработка сигналов*, Мир, Москва (1990) [G. Kino, *Acoustic Waves: Devices, Imaging, and Analog Signal Processing*, Prentice-Hall Inc., New Jersey (1987)].
17. Ф. В. Бункин, Ю. А. Кравцов, Г. А. Ляхов, УФН **149**, 391 (1986) [F. V. Bunkin, Yu. A. Kravtsov, and G. A. Lyakhov, Sov. Phys. — Uspekhi **29**, 607 (1986)].
18. Г. А. Денисенко, ЖЭТФ **60**, 2270 (1971) [G. A. Denisenko, JETP **33**, 1220 (1971)].
19. В. В. Самарцев, Б. П. Смоляков, Р. З. Шарипов, Письма в ЖЭТФ **20**, 644 (1974) [V. V. Samartsev, B. P. Smolyakov, and R. Z. Sharipov, JETP Lett. **20**, 296 (1974)].
20. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **123**, 560 (2003) [A. A. Zabolotskii, JETP **96**, 496 (2003)].
21. А. А. Заболотский, Письма в ЖЭТФ **77**, 558 (2003) [A. A. Zabolotskii, JETP Lett. **77**, 464 (2003)].
22. А. Н. Бугай, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **139**, 464 (2011) [A. N. Bugay and S. V. Sazonov, JETP **112**, 401 (2011)].
23. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, ЖЭТФ **141**, 738 (2012) [S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, JETP **114**, 645 (2012)].
24. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **144**, 1016 (2013) [S. V. Sazonov, JETP **117**, 885 (2013)].
25. Э. А. Манькин, В. В. Самарцев, *Оптическая эхоспектроскопия*, Наука, Москва (1984).
26. С. О. Елютин, С. М. Захаров, Э. А. Манькин, ЖЭТФ **76**, 835 (1979) [S. O. Elyutin, S. M. Zakharov, and E. A. Manykin, Sov. Phys. JETP **49**, 421 (1979)].
27. В. А. Зуйков, В. В. Самарцев, Р. Г. Усманов, Письма в ЖЭТФ **32**, 293 (1980) [V. A. Zuikov, V. V. Samartsev, and R. G. Usmanov, Sov. Phys. JETP Lett. **32**, 270 (1980)].
28. Т. В. Моссберг, Opt. Lett. **7**, 77 (1982).
29. N. W. Carlson, W. R. Babbit, Y. S. Bai, and T. W. Mossberg, J. Opt. Soc. Amer. B **1**, 506 (1984).
30. N. W. Carlson, W. R. Babbit, Y. S. Bai, and T. W. Mossberg, Opt. Lett. **9**, 232 (1984).
31. У. Х. Копвиллем, В. Р. Нагибаров, В. А. Пирожков, В. В. Самарцев, Р. Г. Усманов, Письма в ЖЭТФ **20**, 139 (1974) [U. Kh. Kopvillem, V. R. Nagibarov, V. A. Pirozhkov, V. V. Samartsev, and R. G. Usmanov, Sov. Phys. JETP Lett. **20**, 60 (1974)].
32. Н. В. Знаменский, С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **85**, 440 (2007) [N. V. Znamenskii and S. V. Sazonov, JETP Lett. **85**, 358 (2007)].