

ГИДРОДИНАМИКА ТУРБУЛЕНТНОГО СЛОЯ СМЕШЕНИЯ

В.П. Воротилин *

*Институт прикладной механики Российской академии наук
125040, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 26 мая 2022 г.,
после переработки 10 июня 2022 г.
Принята к публикации 13 июня 2022 г.

Разработана теория и проведен расчет турбулентного слоя смешения, завершающий описание классических (учебных) вариантов турбулентных течений под общим названием турбулентные течения «со сдвигом», ранее рассмотренных для турбулентных струй, турбулентных течений в каналах и турбулентного пограничного слоя [7, 8, 10]. В основе физического механизма предлагаемого подхода, исходя из факта формирования отрывных вихрей на границах потока, лежала идея переноса сдвига (т.е. трения между слоями турбулентного потока) из объема потока к его границам. Полученные соотношения описывают геометрическую структуру и динамические особенности поведения слоя в безграничном диапазоне изменения исходных параметров течения.

DOI: 10.31857/S0044451022120185
EDN: LFFNME

1. ВВЕДЕНИЕ

Турбулентный слой смешения (далее ТСС) образуется в результате потери устойчивости двух параллельных соприкасающихся потоков, движущихся с различными скоростями. Исследование закономерностей развития ТСС является частью общей теории турбулентных струй, поскольку эта стадия движения потока предшествует режиму развитого течения турбулентной струи. С практической точки зрения течения подобного рода представляют интерес также при исследовании атмосферных явлений над просторами морей и океанов [1]. Используемые в литературе методы теоретического описания ТСС, как, впрочем, любых других типов турбулентных течений со сдвигом, основаны на уравнениях полумпирической теории турбулентной вязкости и ограничены незначительным различием скорости и плотности смешиваемых потоков [2–5]. При этом границы слоя в объеме потоков формально задаются как те линии, где скорость течения в слое отличается от скорости внешнего течения на некоторую малую величину (чаще всего на один процент). И таким образом, исчезает как факт реально существующей

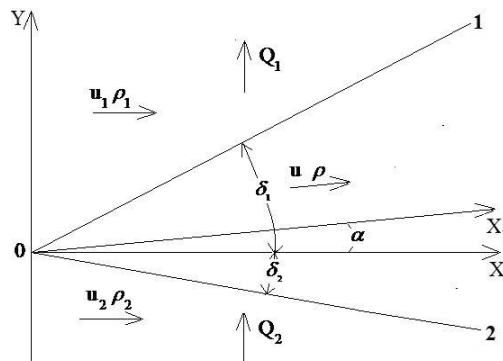
границы, разделяющей области ламинарного (внешнего) и турбулентного течения, так и различие действующих в них физических механизмов. Результаты современных численных решений уравнений Навье–Стокса [1, 6] дают описание картины турбулентных течений во всем многообразии определяющих ее условий. Но они не проясняют действия физических объективных законов, управляющих механизмом турбулентности, и поэтому не позволяют оценить значение и роль вычисляемых характеристик течения в процессе развития слоя. В лучшем случае (в идеале) их можно рассматривать только как эквивалент турбулентности, реализуемой в экспериментальных измерениях. Суть предлагаемого подхода к описанию ТСС заключается в том, что действие физических механизмов турбулентности в своем главном качестве, т.е. переносе кинетической энергии потока к энергии турбулентных пульсаций, ранее разработанных для струй [7] и течений в каналах [8], переходит из объема потока к его границам и связано с образованием отрывных вихрей на границах потока. Для течений в каналах факт их существования позволил описать эффективную шероховатость в законе сопротивления как средний объем отрывных застойных зон на единице поверхности стенки, а для турбулентных струй вывести выражение для скорости захвата внешней среды и написать замыкающее уравнение баланса массы турбулентной жидкости (что в данной работе будет выполнено

* E-mail: VPVorotilin@yandex.ru

и для ТСС). Таким образом, решение самих уравнений для выяснения важнейших характеристик турбулентных течений теряет свою актуальность, и для распределения скоростей по сечению потока становится возможным использовать упрощенное условие однородности профиля скорости по сечению потока, не умаляя при этом сути физических механизмов, определяющих процесс развития ТСС. Границы ТСС разделяют области внешнего ламинарного течения и турбулентного течения в ТСС, поэтому и действие механизма турбулентности на границах ТСС будет подобно упомянутому для турбулентных струй. Однако различие параметров внешних ламинарных потоков обуславливает особенности и многообразие режимов течения ТСС, отличающие его от течения турбулентных струй.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЫВОД УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ПРОЦЕСС РАЗВИТИЯ ТСС

Для изучения основных закономерностей развития ТСС рассмотрен простейший вариант смешения двух параллельных потоков, движущихся вдоль оси X системы координат (X, Y, Z) , однородных в поперечном направлении (по оси Z) и при $X < 0$ разделенных непроницаемой стенкой. Соприкосновение и перемешивание потоков происходит, начиная с точки $X = 0$. Исходные значения скорости u_i , плотности ρ_i и прочих параметров обозначаются индексом $i = 1$ в верхней полуплоскости потока ($Y > 0$) и индексом $i = 2$ в нижней полуплоскости. Исключая этап формирования различного рода переходных структур потока [1], принимается, что с самого начала в результате турбулентного перемешивания формируется режим течения ТСС с однородным распределением по ширине слоя h , скорости u и плотности ρ . Направление скорости (вдоль оси X_u) в общем случае образует некоторый подлежащий определению угол α с направлением исходной оси X . Границы слоя, ввиду отсутствия каких-либо характерных параметров размерности длины, будут иметь вид прямых, расположенных под углом δ_i относительно оси X_u . Отрезки h_i ширины слоя, поделенные осью X_u , с учетом малости углов δ_i (для турбулентной струи в [7] было принято значение $\text{tg } \delta_i = 0.1$) запишутся в виде $h_i = \delta_i x$, $h = \delta x$, где $\delta = \delta_1 + \delta_2$. Условная схема потоков вместе с обозначениями искомых и вычисляемых величин, необходимых при выводе уравнений, описывающих развитие ТСС, показана на рисунке.



Иллюстративная схема турбулентного смешения двух параллельных потоков с плотностью ρ_i , движущихся вдоль оси X_u со скоростью u_i , где $i = 1, 2$, Q_i — набегающие на ТСС потоки массы внешней среды; u и ρ — средняя скорость и плотность потока в слое смешения. Границы слоя смешения с внешней областью течения отмечены линиями $O1$ и $O2$, δ_i — углы разлета границ слоя, α — угол поворота средней скорости в слое

3. УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА МАСС, ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ

Уравнения для искомых переменных получим, составляя балансы их потоков между близкими сечениями оси, принимая во внимание углы и линии геометрической структуры ТСС, формирующей картину смешения потоков, как показано на рисунке. Для варианта несжимаемой жидкости средняя плотность записывается в виде

$$\rho = \frac{\rho_1 s_1 + \rho_2 s_2}{h}, \tag{1}$$

где $h = s_1 + s_2$, $s_i = \beta_i x$ — доля i -го компонента смеси в сечении слоя X . Уравнения баланса массы для каждого компонента примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho_1 u s_1)}{dx} &\equiv \rho_1 u \beta_1 = \rho_1 u_1 \delta_1 - Q_1, \\ \frac{d(\rho_2 u s_2)}{dx} &\equiv \rho_2 u \beta_2 = \rho_2 u_2 \delta_2 + Q_2, \end{aligned} \tag{2}$$

где Q_i — набегающие на ТСС потоки массы внешней среды (имеющие разные знаки) в результате ее вытеснения из зоны ТСС. Уравнения импульса вдоль и поперек потока, а также кинетической энергии с учетом того, что производную любой из искомых переменных φ можно записать как

$d(u\varphi h)/dx = \delta u\varphi$, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho u^2 h)}{dx} &\equiv \delta \rho u^2 = \delta_1 \rho_1 u_1^2 + \delta_2 \rho_2 u_2^2 - Q_1 u_1 + Q_2 u_2, \\ \frac{d(\alpha \rho u^2 h)}{dx} &\equiv \delta \alpha \rho u^2 = \\ &= \delta_1 Q_1 u_1 + \delta_2 Q_2 u_2 - \frac{Q_1^2}{\rho_1} + \frac{Q_2^2}{\rho_2}, \quad (3) \\ \frac{d(\rho u^3 h)}{dx} &\equiv \delta \rho u^3 = \\ &= \delta_1 \rho_1 u_1^3 + \delta_2 \rho_2 u_2^3 + u_1^2 Q_1 - u_2^2 Q_2 - \varepsilon h. \end{aligned}$$

Параметр ε при стандартном выводе уравнения энергии из уравнений Навье–Стокса есть скорость диссипации кинетической энергии. В предлагаемой теории уравнением энергии формально задается величина этого параметра и его физический смысл будет позднее установлен как энергии порождаемых при трении на границах ТСС турбулентных вихрей. Полученная система уравнений содержит семь подлежащих определению искомым параметров: u , δ_i , β_i , Q_i ($i = 1, 2$). Вывод двух недостающих уравнений связан с выяснением механизма захвата внешней среды и последующего расширения границ слоя, поскольку именно его ширина или угол δ ($h = \delta x$) определяет особенности его развития.

4. О МЕХАНИЗМЕ ЗАХВАТА И ТУРБУЛИЗАЦИИ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ

В литературе попытка качественного (точнее, на словах) объяснения механизма этого явления была основана на гипотезе существования вязкого надслоя на границе турбулентного слоя и внешней ламинарной среды толщиной масштаба минимальных турбулентных пульсаций λ_{min} [9], в котором завихрение и захват внешней среды происходил под действием сил молекулярной вязкости (viscous nibbling). Но при этом, поскольку движение турбулентной среды не зависит от молекулярной вязкости, по аналогии с объяснением механизма диссипации турбулентной энергии утверждалось, что скорость захвата должна зависеть только от интенсивности крупномасштабных пульсаций внутри турбулентной области. Мотивом для предлагаемого в данной работе, как и в [7, 10], объяснения механизма захвата явился тот пробел гипотезы вязкого надслоя, что в основе ее допущений исключается обратное влияние скорости внешней среды на движение ТСС. Но достаточно отметить, что, даже если в строгой постановке задачи использовать понятие турбулентной вязкости, то решение с условием

$u_x(x, y \rightarrow \infty) = u_\infty$, где u_∞ — скорость внешнего течения, даст формальный результат, учитывающий влияние внешних условий. Исходя из того факта, что внешняя среда и ТСС — это две четко различимые жидкости, их динамическое взаимодействие можно представить как силу трения, действующую на разделяющих их границах. Поскольку при турбулентном движении молекулярная вязкость роли не играет, из соображений размерности следует, что эта сила на каждой из границ слоя может быть пропорциональна только квадрату некоторой комбинации скоростей движения внешней среды и ТСС:

$$F_{fr,i} = \gamma \rho_i (u_s - u_i)^2,$$

где $i = 1, 2$, γ — константа (для турбулентных струй ее значение на основе опытных данных было принято равным 0.1), u_s — промежуточная скорость между u_i и средней скоростью струи u . Из условия непрерывности потока импульса, перетекающего от внешней границы во внутреннюю область ТСС, эту же силу можно записать как

$$F_{fr,i} = \gamma \rho (u_s - u)^2.$$

Отсюда для u_s и F_{fr} следуют выражения

$$\begin{aligned} u_s &= \eta_i \left(u + \frac{\rho_i}{\rho^{1/2} u_i} \right), \\ F_{fr,i} &= \gamma_i \rho_i (u_i - u)^2, \quad \gamma_i = \gamma \eta_i^2, \end{aligned} \quad (4)$$

где введено обозначение $\eta_i = 1/(1 + (\rho_i/\rho)^{1/2})$.

Вывод о том, что закон трения квадратичен по скорости, означает, что обтекание возмущенных границ ТСС внешним потоком должно происходить с образованием отрывных вихрей. По смыслу деления всей области течения на внешнюю безвихревую среду и собственно ТСС указанные отрывные вихри должны остаться в составе ТСС, играя для него роль источника турбулентности. Поэтому и импульс, при трении отдаваемый им ТСС, также должен возвратиться ТСС вместе с захваченными вихрями. От ТСС вихри получают импульс, пропорциональный разности скоростей $u - u_i$. Отсюда, введя обозначение v_{ci} для скорости захвата вихрей внешней среды на каждой из границ слоя, поток возвращаемого импульса (на единицу поверхности ТСС) запишем в виде $j = \rho_i v_{ci} |u - u_i|$. Из условия равенства потоков j и $F_{fr,i}$ находим выражение для v_{ci} :

$$v_{ci} = \gamma_i |u - u_i|. \quad (5)$$

Универсальную применимость полученных формул подчеркивает то обстоятельство, что никакие конкретные свойства турбулентных вихрей, особенности механизма их формирования на возмущенной

границе ТСС в окончательном виде полученных соотношений ни в чем не проявляются. Поток захватываемой массы внешней среды на каждой из границ ТСС будет равен $\rho_i v_{ci}$. Без умаления общности в постановке задачи далее принимается, что $u_1 > u_2$ и соответственно $u_1 > u > u_2$. Тогда уравнения баланса массы «турбулентной» жидкости по каждому из компонент смеси примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho_1 u h_1)}{dx} &\equiv \rho_1 u \beta_1 = \gamma_1 \rho_1 (u_1 - u) \equiv \varphi_1, \\ \frac{d(\rho_2 u h_2)}{dx} &\equiv \rho_2 u \beta_2 = \gamma_2 \rho_2 (u - u_2) \equiv \varphi_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Подчеркнем «для ясности», что ранее полученные уравнения баланса масс (2) в отличие от уравнений (6) выводились для всего пространства движения потоков и ими фактически задавались потоки Q_i натекания внешней среды на ТСС. Помимо уравнений баланса масс «турбулентной» жидкости можно написать и уравнения баланса объемов, разделенных осью X_u и границами слоя, как результат приращение объемов слоя на его границах с внешней средой:

$$\frac{d(uh_i)}{dx} \equiv u \delta_i = \frac{\varphi_i}{\rho_i}. \quad (7)$$

Как видим, данными уравнениями определяется величина параметров δ_i .

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И РЕШЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

С учетом (1), (7) для угла δ и средней плотности ρ следуют выражения

$$\delta = \frac{\varphi_1/\rho_1 + \varphi_1/\rho_2}{u}, \quad (8)$$

$$\rho = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{u \delta}, \quad (9)$$

а искомые Q_i , исключая переменные β_i из уравнений (2), (6), представим в виде

$$Q_1 = \rho_1 u_1 \delta_1 - \varphi_1, \quad Q_2 = -\rho_2 u_2 \delta_2 + \varphi_2. \quad (10)$$

Полученные выражения для величин ρ , δ_i , δ и Q_i при подстановке их в уравнения теории позволяют выявить неочевидные свойства развития ТСС. В частности, уравнения для x - и y -компонент импульса запишутся в компактной форме

$$\begin{aligned} \rho u^2 &= \frac{\rho_1 \varphi_1 + \rho_2 \varphi_2}{\delta}, \\ \alpha \delta \rho u^2 &= u_1 \varphi_1 \delta_1 - u_2 \varphi_2 \delta_2 - \frac{\varphi_1^2}{\rho_1} + \frac{\varphi_2^2}{\rho_2}, \end{aligned} \quad (11)$$

а первое из них, если с учетом (8), (9) исключить ρ и δ , — в виде

$$\varphi_1(u_1 - u) - \varphi_2(u - u_2) = 0. \quad (12)$$

Слагаемые данного равенства, как следует из соотношений (4), (6), имеют физический смысл сил трения, действующих на границах слоя, и выражают равенство этих сил. Также, чтобы выяснить в рамках представлений предлагаемой теории смысл параметра ε в уравнении энергии, из этого уравнения вычтем умноженное на u уравнение для x -компоненты импульса. В результате несложных преобразований с учетом подстановки выражений для Q_i (10), получим

$$\varepsilon h = \gamma_1 \rho_1 (u_1 - u)^2 u_1 - \gamma_2 \rho_2 (u - u_2)^2 u_2.$$

Аналогично, используя понятие силы трения, члены правой части данного равенства можно трактовать как работу сил трения на границах слоя, результатом которой является преобразование части кинетической энергии потока в энергию образующихся турбулентных вихрей. При этом на верхней границе слоя энергия вихрей берется за счет кинетической энергии внешнего потока, а на нижней — за счет кинетической энергии самого слоя, и поэтому в балансе кинетической энергии берется с отрицательным знаком. Таким образом, параметр ε , в отличие от существующих представлений, определяющих этот параметр как скорость диссипации кинетической энергии потока, характеризует скорость порождения энергии турбулентных вихрей (иначе турбулентных пульсаций). Из уравнения (11) при подстановке φ_i из (6) для скорости u следует выражение

$$u = \frac{u_1 + \omega u_2}{1 + \omega}, \quad (13)$$

где обозначено $\omega = (\gamma_2 \rho_2 / \gamma_1 \rho_1)^{1/2} \equiv (3 + \delta) / (1 + 3\delta)$ и $\sigma = (\rho_1 / \rho_2)^{1/2}$. Формулы для плотности слоя ρ , параметров φ_i с учетом соотношений (4), (7) и (9) запишем в виде

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{4\rho_1}{(1 + \sigma)^2}, \\ \varphi_1 &= \frac{\gamma \rho_1 (u_1 - u_2)}{(3 + \sigma)(1 + \sigma)}, \quad \varphi_2 = \omega \varphi_1. \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом δ_i из (7) и u из (13) выражение для угла α , фактически определяемое уравнением (11), примет вид

$$\alpha \rho u^2 = \frac{\varphi_1 \omega (u_1 - u_2)}{1 + \omega}.$$

Окончательно все геометрические характеристики слоя, т.е. углы α , δ_1 , δ_2 , представим в виде, удобном для качественной оценки их зависимости от параметров u_i, ρ_i :

$$\alpha = \frac{\gamma}{4}(1+\sigma)(1+3\sigma)\xi^2, \quad (15)$$

$$\delta_1 = \frac{4\gamma\xi}{3+\sigma}, \quad \delta_2 = \frac{4\gamma\xi\sigma^2}{1+3\sigma},$$

где введены обозначения $\xi = (1-\mu)/((1+\omega\mu)(1+3\sigma))$, $\mu = u_2/u_1$. С точки зрения возможной экспериментальной проверки представляют интерес оценки доли захватываемой массы внешней среды в объем ТСС на сечение слоя, записываемые с учетом равенств $\beta_i = \delta_i$ как $D_i = \rho_i\delta_i/(\delta_1 + \delta_2)$ или, после подстановки выражений для δ_i , в виде

$$D_1 = \frac{\rho_1(1+3\sigma)}{(1+\sigma)^3}, \quad D_2 = \frac{\rho_2\sigma^2(3+\sigma)}{(1+\sigma)^3}. \quad (16)$$

6. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ТСС

Из полученных соотношений видно, что если в роли масштабов скорости и плотности задавать u_1 и ρ_1 , то все искомые величины, описывающие движение ТСС, будут зависеть от двух безразмерных групп, обозначенных как μ и σ и по охвату допустимых вариантов развития слоя изменяющихся в пределах $0 \leq \mu < 1$ и $0 \leq \sigma \leq 1$, где предел $\sigma \rightarrow 0$ соответствует варианту контакта газообразного и жидкого потоков. Под термином «качественный анализ» понимается оценка теоретически выводимых физических характеристик ТСС для режимов предельных значений независимых параметров течения, позволяющая, с одной стороны, в наглядном виде описать особенности развития ТСС, а с другой, на примере особых режимов развития слоя убедиться в физической непротиворечивости исходных положений теории. Основной кинематической характеристикой слоя является параметр μ , и для пределов $\mu \rightarrow 0$ и $\mu \rightarrow 1$ имеют место с учетом соотношений (13) – (15) следующие оценки параметров слоя.

1. В случае $\mu = 0$ — неподвижный поток снизу, $u = 1/(1+\omega)$; при $\rho_1 = \rho_2$, т.е. для $\sigma = 1$, скорость в слое равна $u = 1/2$; углы разлета $\delta_1 = \delta_2 = \gamma/4$, $\alpha = \gamma/8$, $D_1 = D_2 = \rho_1/2$. В пределе $\sigma \rightarrow 0$, т.е. при смешении потока газа и неподвижной жидкости, $u = 1/4$, $\sigma_1 = (4/3)\gamma$, $\delta_2 = 4\gamma\sigma^2$, $\alpha = \gamma/4$, $D_1 = \rho_1$, $D_2 = 3\rho_1$.

2. Вариант $\mu = 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$, т.е. для близких по скорости потоков, $u = 1 - \varepsilon/(1+\omega)$ и углы разлета при любых σ малы: $\delta_1, \delta_2 \approx \gamma\varepsilon$, $\alpha \approx \gamma\varepsilon^2$.

Особые случаи смешения доставляют вариации параметра σ . В случае $\sigma = 1$

$$u = (1+\mu)/2, \quad \delta_1 = \delta_2 = \gamma\xi, \quad \alpha = 2\gamma\xi^2, \\ D_1 = D_2 = \rho_1/2,$$

а в пределе $\sigma \rightarrow 0$

$$u = (1+3\mu)/4, \quad \delta_1 = \gamma\xi/3, \quad \delta_2 = \gamma\xi\sigma^2, \\ \alpha = 4\gamma\xi^2, \quad D_1 = \rho_1, \quad D_2 = 3\rho_1, \\ \xi = \frac{1-\mu}{4(1+\mu)}.$$

Приведенные формулы и оценки параметров слоя дают наглядную иллюстрацию разнообразия картин развития и геометрической структуры слоя в зависимости от особых и характерных значений параметров, задающих конкретные варианты его развития. Можно отметить интересный факт: при $\sigma \rightarrow 0$, т.е., например, при смешении потока воздуха над водой, доля массы захватываемой жидкости в единице объема ТСС равна $3\rho_1$.

7. ВЫВОДЫ

Подводя итоги проведенного исследования проблемы ТПС, отметим некоторые особенности из его результатов. В исходной системе уравнений (3), определяющих процесс развития ТСС, а также в соотношениях (7), (8), задающих количественную оценку массы захватываемой внешней среды, в явном виде описание механизма вихреобразования как действия сил трения на границах ТСС отсутствует. Но неожиданно этот механизм проявляет себя в уравнениях импульса и энергии в результате проведенных с ними тождественных преобразований, демонстрируя гармонию внутренних, т.е. неочевидных, взаимосвязей всех параметров и процессов, описывающих предложенный механизм развития турбулентного слоя смешения.

В основу понимания и последующего описания механизма турбулентности были положены представления о процессе вихреобразования на границах турбулентного течения слоя смешения. Как результат динамического взаимодействия ТСС с внешними ламинарными потоками были получены выражения для скорости захвата (турбулизации)

внешней среды. Это позволило написать уравнение баланса массы турбулентной жидкости (БМТ) и рассматривать геометрическую структуру слоя смешения как реальный физический объект исследования его свойств. Уравнение БМТ вместе с интегральными уравнениями баланса импульсов составили замкнутую систему уравнений для искомым переменных, описывающих процесс развития слоя при наличии множества независимых параметров, характеризующих общие условия развития турбулентного пограничного слоя. Поскольку механизм переноса кинетической энергии потока к энергии турбулентных пульсаций в рамках предлагаемой теории целиком обусловлен процессом образования вихрей на границах потока, при выводе уравнений использовалось условие однородности профиля скорости по сечению потока, не обедняя при этом сути физических механизмов, определяющих процесс развития ТСС. Что же касается сравнения с экспериментальными данными, то результаты представленной теории дают, скорее, повод или для постановки новых экспериментов, или для проведения численных расчетов, связанных с исследованием полученных в статье качественных оценок параметров ТСС в зависимости от многообразия внешних условий его развития.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. VanDine, H. T. Pham and V. Sarkar, *J. Fluid Mech.* **916**, A42 (2021).
2. Г. Шлихтинг, *Теория пограничного слоя*, Наука, Москва (1969).
3. A. A. Townsend, *The Structure of Turbulent Shear Flow*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1980).
4. *Турбулентность: принципы и применение*, под ред. У. Фроста, Т. Моулдена, Мир, Москва (1980).
5. Г. Н. Абрамович, *Теория турбулентных струй*, Наука, Москва (1984).
6. Z. Cheng and G. Constantinescu, *J. Fluid Mech.* **916**, A41 (2021).
7. В. П. Воротилин, *ЖЭТФ* **153**, 313 (2018).
8. В. П. Воротилин, *ЖЭТФ* **156**, 176 (2019).
9. S. Corrsin and A. L. Kistler, *Tech. Rep. TN-1244.NACA* (1955).
10. В. П. Воротилин, *ЖЭТФ* **160**, 587 (2021).