

О РЕЗОНАНСНЫХ ВКЛАДАХ В ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ МАГНИТНОГО ПРОБОЯ ПРИ ПЕРЕСТРОЙКАХ ЭЛЕКТРОННОЙ ДИНАМИКИ НА ПОВЕРХНОСТИ ФЕРМИ

А. Я. Мальцев ^{a*}

^a Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук,
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 23 июля 2022 г.,
после переработки 1 августа 2022 г.
Принята к публикации 1 августа 2022 г.

Рассматриваются специальные замкнутые электронные траектории, возникающие при перестройках электронной динамики на поверхности Ферми в присутствии сильных магнитных полей, а также явление внутреннего магнитного пробоя, возникающее на таких траекториях. При этом мы рассматриваем случаи, когда электронный спектр, возникающий в такой ситуации, отвечает резонансному вкладу в квантовые осцилляции. Выделены все случаи, когда такое имеет место, а также рассмотрено возможное влияние появления фазы Берри и других эффектов на описываемые явления.

DOI: 10.31857/S0044451022120173
EDN: LEZZWQ

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе мы обсуждаем особенности, связанные с явлением магнитного пробоя на электронных траекториях, возникающих вблизи перестроек топологической структуры системы

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{\text{gr}}(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}] = \frac{e}{c} [\nabla\epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}], \quad (1)$$

описывающей динамику электронных состояний в металлах в присутствии внешнего магнитного поля.

Система (1) описывает квазиклассическую динамику электронов в пространстве квазиимпульсов с произвольным законом дисперсии $\epsilon(\mathbf{p})$ (см., например, [1–3]). Поскольку значения \mathbf{p} , различающиеся на векторы обратной решетки, задают одно и то же электронное состояние, пространство квазиимпульсов можно при этом рассматривать либо как трехмерный тор \mathbb{T}^3 , либо как расширенное пространство \mathbb{R}^3 . В последнем случае функция $\epsilon(\mathbf{p})$ представляет собой 3-периодическую функцию в трехмерном пространстве.

Траектории системы (1) в пространстве \mathbb{R}^3 задаются пересечениями плоскостей, ортогональных

\mathbf{B} , с поверхностями $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$. В общем случае, они представляют пересечения 3-периодических поверхностей семейством параллельных плоскостей (рис. 1). Как хорошо известно, при описании электронных явлений в металлах существенным, как правило, является лишь один энергетический уровень, т.е. уровень Ферми $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$.

Как было показано в работах школы И.М. Лифшица (см., например, [2, 4–6]), геометрия траекторий системы (1) на поверхности Ферми играет очень важную роль в описании гальваномагнитных явлений в металлах в пределе сильных магнитных полей. Общая задача классификации всех возможных типов траекторий системы (1) была поставлена Новиковым в работе [7] и затем интенсивно исследовалась в его топологической школе (см. [8–15]). В настоящий момент можно констатировать, что такая классификация получена для соотношений $\epsilon(\mathbf{p})$ самого общего вида, что позволяет говорить об успешном решении задачи Новикова в общем случае. Можно отметить здесь, что результаты, полученные при исследовании задачи Новикова, также оказываются весьма важными при описании гальваномагнитных явлений в металлах, в частности, их использование позволило ввести важные топологические характеристики, наблюдаемые в проводимости нормальных металлов, а также описать ряд новых режимов поведения проводимости в сильных маг-

* E-mail: maltsev@itp.ac.ru

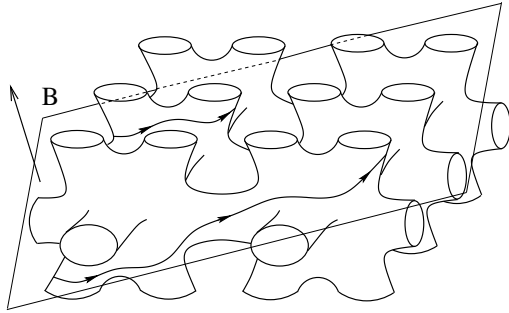


Рис. 1. Траектории системы (1) в пространстве квазиимпульсов

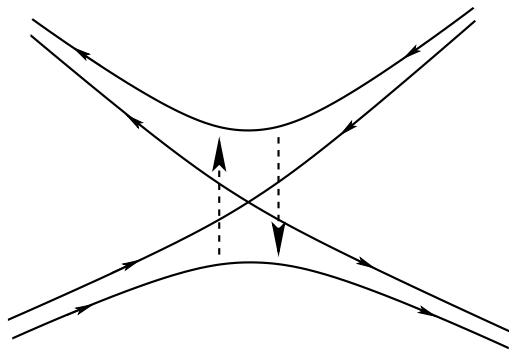


Рис. 2. Явление магнитного пробоя на траекториях, близких к седловым особым точкам системы (1) на поверхности Ферми

нитных полях, неизвестных до этого (см. [16–21]).

Структура системы (1) на достаточно сложных поверхностях Ферми может быть довольно сложной. В частности, система (1) имеет в общем случае особые точки на поверхности Ферми, представляющие собой локальные минимумы или максимумы, а также седловые особые точки. Здесь нам будут интересны именно седловые особые точки, поскольку именно они связаны с явлением внутризонного магнитного пробоя в достаточно сильных магнитных полях (рис. 2).

Явление внутризонного магнитного пробоя изучено довольно детально (см., например, [22–26]). Нас здесь будут интересовать явления, связанные с квантованием электронных состояний на замкнутых траекториях (1) в условиях пробоя (см. [23–26]). В отличие от наиболее общей задачи, нас будет интересовать явление магнитного пробоя на экстремальных замкнутых траекториях (имеющих максимальную или минимальную площадь по сравнению с близкими к ним траекториями), где соответствующие ему эффекты должны быть выражены наиболее

ярко при исследовании квантовых осцилляций. Появление траекторий такого типа, в действительности, связано с перестройками структуры системы (1) на поверхности Ферми при изменении направления магнитного поля, которые мы и будем рассматривать здесь.

2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПЕРЕСТРОЙКИ СТРУКТУРЫ (1) И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Как мы уже говорили, структура системы (1) на достаточно сложных поверхностях Ферми может быть довольно сложной. В общем случае на поверхности Ферми могут присутствовать как замкнутые, так и открытые траектории системы (1). Вместе с тем, как следует из анализа задачи Новикова, знание полного множества замкнутых траекторий на поверхности Ферми позволяет определить тип также и возникающих на ней открытых траекторий и дать достаточно полное их описание. Информацию о возникновении различных типов траекторий при различных направлениях \mathbf{B} удобнее всего представлять на угловой диаграмме (единичной сфере S^2), указывая для каждого направления \mathbf{B} тип траекторий, возникающих на поверхности Ферми. Прежде всего при этом удобно выделить области на S^2 , отвечающие наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми. Дополнение к таким областям отвечает появлению на поверхности Ферми открытых траекторий (различных типов). Можно отметить здесь, что для реальных дисперсионных соотношений области появления лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми занимают, как правило, большую часть площади на угловой диаграмме.

Для направлений \mathbf{B} общего положения никакие две особые точки на поверхности Ферми не соединяются (сингулярными) траекториями системы (1). При вращениях направления \mathbf{B} , не нарушающих это условие, структура траекторий системы (1) на поверхности Ферми не меняется существенным образом. Ситуации, когда такое соединение происходит, можно называть моментами перестройки структуры системы (1) на поверхности Ферми, и они возникают лишь при специальных направлениях \mathbf{B} .

При перестройках структуры системы (1) общего положения происходит соединение ровно двух седловых особых точек сингулярными траекториями. Нас здесь будут интересовать «элементарные» перестройки системы (1), при которых все траектории, выходящие из соединяемых особых точек, являют-

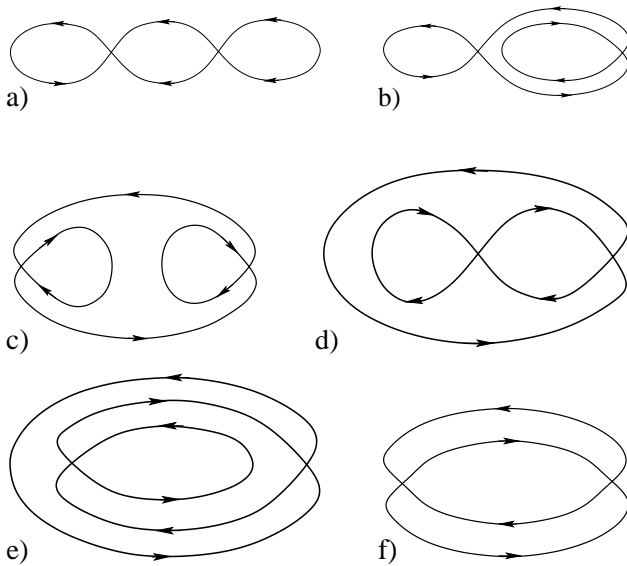


Рис. 3. Моменты «элементарных» перестроек топологической структуры системы (1) на поверхности Ферми

ся замкнутыми. Такие перестройки происходят, в частности, при направлениях \mathbf{V} , лежащих в областях существования лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми. В момент элементарной перестройки в плоскости, ортогональной \mathbf{V} , должна при этом возникать одна из ситуаций, изображенных на рис. 3. Здесь мы везде будем предполагать, что направление оси z совпадает с направлением магнитного поля.

Перестройки топологической структуры системы (1) при вращениях направления магнитного поля происходят на поверхностях Ферми почти всех металлов. Исключение составляют, пожалуй, только щелочные металлы, обладающие очень простыми поверхностями Ферми (близкими к сферической). В частности, если при некоторых направлениях \mathbf{V} на поверхности Ферми имеются незамкнутые траектории, то при приближении к таким направлениям из зоны замкнутых траекторий должно произойти бесконечное число элементарных перестроек структуры системы (1).

Каждая из структур, изображенных на рис. 3, является устойчивой по отношению к малым вращениям \mathbf{V} в плоскости, ортогональной отрезку, соединяющему седловые особые точки, и разрушается при других вращениях \mathbf{V} . Каждой из возникающих перестроек на заданной поверхности Ферми соответствует, таким образом, некоторая одномерная линия на угловой диаграмме, вдоль которой наблюдается именно заданный тип перестройки. Можно ска-

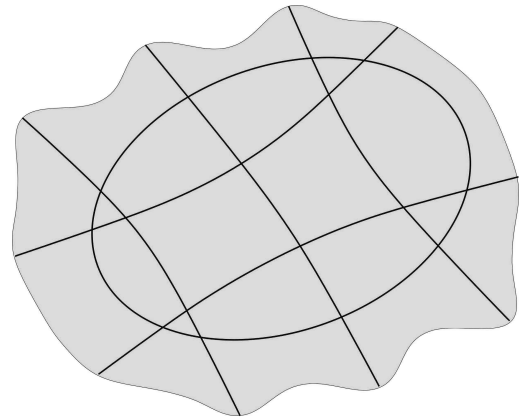


Рис. 4. Сеть линий на угловой диаграмме, отвечающая перестройкам структуры системы (1) на поверхности Ферми (схематично)

зать при этом, что топологические структуры системы (1) по разные стороны от такой линии различаются именно элементарной перестройкой заданного типа. Линии, отвечающие элементарным перестройкам всех типов для достаточно сложных поверхностей Ферми, образуют, как правило, довольно сложную сеть в области существования лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми (рис. 4), которая бесконечно сгущается при приближении к направлениям существования открытых траекторий на поверхности Ферми (см., например, [27]). Кроме того, элементарные перестройки структуры системы (1) могут происходить также и при наличии открытых траекторий на поверхности Ферми.

Каждая из элементарных перестроек меняет структуру траекторий (1) лишь на определенном участке поверхности Ферми, не затрагивая других (неэквивалентных данному) участков. Для описания соответствующей перестройки, кроме картины, описывающей соединение особых точек сингулярными траекториями (рис. 3), необходимо указать еще, являются ли векторы $\nabla\epsilon(\mathbf{p})$ сонаправленными, или направленными противоположно друг другу, в рассматриваемой паре седел. На рис. 5, 6 изображены перестройки, отвечающие ситуации, представленной на рис. 3a, с направленными противоположно друг другу (рис. 5) и сонаправленными (рис. 6) векторами $\nabla\epsilon(\mathbf{p})$ в седловых особых точках.

Можно видеть, что каждая элементарная перестройка структуры системы (1) представляет собой исчезновение цилиндра малой высоты, образованного замкнутыми траекториями (1), и замену его цилиндром другого типа. Замкнутые траектории, находящиеся на таких цилиндрах малой высоты (до

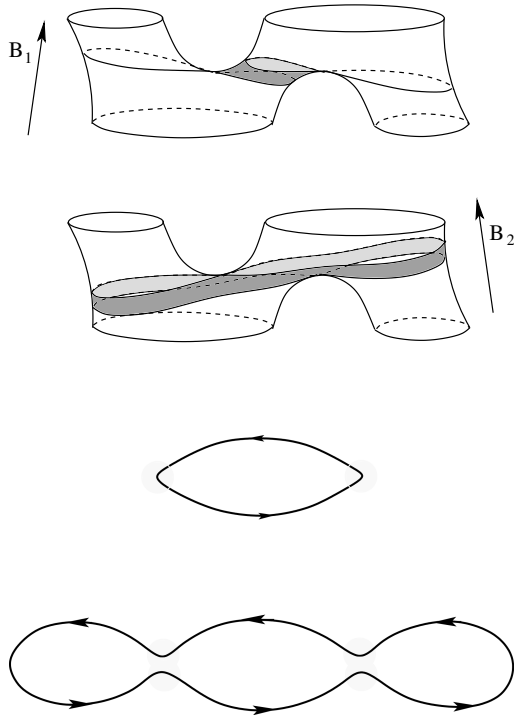


Рис. 5. Элементарная перестройка структуры системы (1) на поверхности Ферми, отвечающая случаю рис. За с направленными противоположно друг другу векторами $\nabla\epsilon(\mathbf{p})$ в седловых особых точках. Показаны также экстремальные траектории на цилиндрах малой высоты, до и после перестройки (цветом обозначены участки, близко подходящие к особым точкам системы (1))

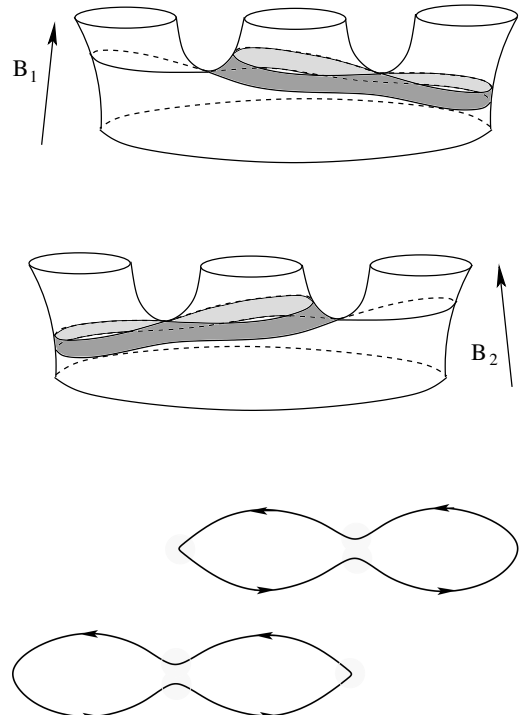


Рис. 6. Элементарная перестройка структуры системы (1) на поверхности Ферми, отвечающая случаю рис. За с направленными векторами $\nabla\epsilon(\mathbf{p})$ в седловых особых точках. Показаны также траектории с минимальными периодами обращения на цилиндрах малой высоты, до и после перестройки

и после перестройки), отличаются тем, что на них всегда имеются участки, подходящие близко к седловым особым точкам системы (1). Особые точки системы (1) всегда присутствуют на обоих основаниях цилиндра малой высоты, что вызывает неограниченное увеличение периода обращения по замкнутым траекториям при приближении как к нижнему, так и к верхнему основанию. Как следствие этого, на каждом цилиндре малой высоты (как до, так и после перестройки) всегда присутствуют траектории, обладающие наименьшим периодом обращения на цилиндре. Резкое изменение геометрии таких траекторий при перестройке структуры (1) приводит к резкому изменению общей картины классических осцилляций в металле (циклотронный резонанс) в присутствии сильных магнитных полей, что позволяет, в частности, отслеживать такие перестройки при изменении направления \mathbf{B} (см., например, [27]). При чрезвычайно близком приближении к моменту перестройки (и достаточно больших значениях B) на траекториях такого типа должен возникать внут-

ризонный магнитный пробой, обусловленный близостью к седловым особым точкам системы (1). Можно видеть, что магнитный пробой должен «смазывать» картину классических осцилляций в описываемой ситуации. Можно отметить также, что для наблюдения этого эффекта вблизи момента перестройки необходима весьма высокая точность при постановке эксперимента.

Резонансные вклады в квантовые осцилляции, как хорошо известно, проистекают от замкнутых траекторий, обладающих экстремальной площадью по сравнению с близкими к ним траекториями. Нетрудно видеть, что площадь замкнутых траекторий остается конечной на цилиндрах малой высоты, при этом, однако, ее производная по высоте обращается в бесконечность на основаниях цилиндров. Траектории экстремальной площади при этом присутствуют не на всех цилиндрах малой высоты. Так, можно видеть, что для перестройки, изображенной на рис. 5, такие траектории присутствуют как до перестройки (траектории минимальной площади), так и после нее (траектории максимальной площади).

Для перестройки, изображенной на рис. 6, напротив, траектории экстремальной площади отсутствуют на соответствующих цилиндрах малой высоты по обе стороны от перестройки. В действительности, это соответствует общему правилу для элементарных перестроек, а именно, траектории экстремальной площади присутствуют (по обе стороны от перестройки) для перестроек, отвечающих противоположно направленным векторам $\nabla\epsilon(\mathbf{p})$ в седловых особых точках, и отсутствуют при сонаправленных векторах $\nabla\epsilon(\mathbf{p})$. В частности, именно перестройкам первого типа соответствуют резкие изменения резонансных вкладов в квантовые осцилляции, в то время как изменения резонансных членов в классических осцилляциях свойственны перестройкам обоих типов (см. [28]).

Общее рассмотрение квантования электронных уровней в условиях магнитного пробоя (см. [23–26]) дает картину таких уровней при энергиях, близких к уровню появления сингулярной траектории при соответствующем значении p_z . В нашем случае рассматривается совокупность всех значений p_z вблизи появления сингулярных траекторий при заданном уровне Ферми. Как легко видеть, сингулярные траектории возникают здесь лишь при изолированных значениях p_z , вблизи которых траектории распадаются на регулярные. При этом, как мы уже сказали, нам хотелось бы выделить траектории, дающие резонансные члены в картину квантовых осцилляций вблизи перестроек структуры системы (1).

Нетрудно видеть, что для сингулярных траекторий с сонаправленными векторами $\nabla\epsilon(\mathbf{p})$ в особых точках сдвиг значения p_z в одну или другую сторону дает траектории, аналогичные возникающим на уровнях $\epsilon < \epsilon_F$ или $\epsilon > \epsilon_F$ при том же значении p_z . Все такие траектории дают одновременно вклад в картину квантовых осцилляций, что совершенно «размывает» квантованные значения энергии и лишает возможности наблюдать квантовый электронный спектр вблизи особых траекторий в этом случае. Можно также отметить, что участок поверхности Ферми, близкий к сингулярной траектории с сонаправленными векторами $\nabla\epsilon(\mathbf{p})$ в особых точках, не может обладать свойствами центральной симметрии.

Для сингулярных траекторий с противоположно направленными векторами $\nabla\epsilon(\mathbf{p})$ в седловых особых точках сдвиг значения p_z в одну или другую сторону не дает картины, аналогичной изменению уровня энергии, а приводит к появлению регулярных траекторий другой геометрии. В этом случае, однако, малые вращения направления \mathbf{B} дают картину, анало-

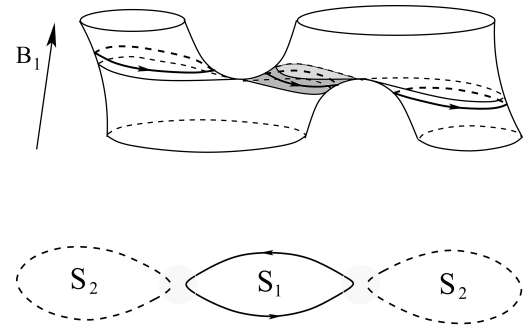


Рис. 7. Резонансная и нерезонансные траектории с одной стороны от перестройки, приведенной на рис. 5, принимающие участие в формировании электронных уровней в условиях магнитного пробоя

гичную возникающей на уровнях $\epsilon < \epsilon_F$ или $\epsilon > \epsilon_F$ по разные стороны от «линии перестройки» системы (1) на угловой диаграмме. Существование траекторий экстремальной площади вблизи «линии перестройки» могло бы быть при этом указанием на возможность экспериментального наблюдения их резонансных вкладов в квантовые осцилляции в условиях магнитного пробоя. Здесь, однако, надо сразу отметить два обстоятельства. Первое обстоятельство состоит в том, что в условиях магнитного пробоя в формировании электронного спектра принимают участие, вообще говоря, не только траектории экстремальной площади (см., например, рис. 7, где показаны траектории, участвующие в формировании электронного спектра по одну сторону от перестройки, приведенной на рис. 5). Второе обстоятельство (см. [23–26]) состоит в том, что кроме набега фазы при движении по траектории в формировании электронного спектра играют роль матрицы перехода, сшивающие квазиклассические решения на разных траекториях вблизи особых точек (закрашенные области на рис. 5, 6, 7). В общем случае матрицы перехода при этом не обладают специальными стационарными свойствами при изменении значения p_z . Можно видеть, таким образом, что описание картины квантовых осцилляций требует здесь специального рассмотрения.

Отметим сразу, что при рассмотрении электронного спектра в описанной ситуации основную роль играет наличие центральной симметрии участка поверхности Ферми вблизи сингулярной траектории, отвечающей за перестройку заданного типа. Нетрудно видеть, что из траекторий, представленных на рис. 3, только траектории a , c и f (с противоположно направленными векторами $\nabla\epsilon(\mathbf{p})$ в особых точках) могут задавать перестройки, обладающие

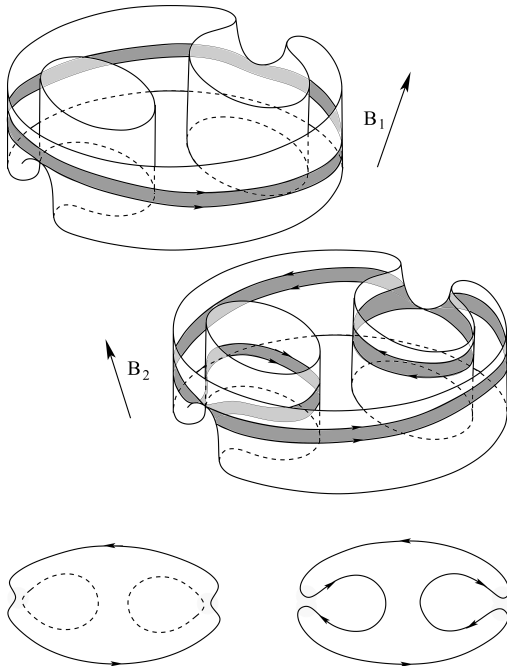


Рис. 8. Центрально-симметричная перестройка, отвечающая сингулярной траектории рис. 3с. Закрашены цилиндры замкнутых траекторий малой высоты, а также приведены резонансные и нерезонансные траектории, участвующие в формировании электронного спектра по разные стороны от перестройки

центральной симметрией. Можно также отметить, что перестройки, обладающие центральной симметрией, должны, в действительности, встречаться чаще перестроек, не обладающих такой симметрией. Действительно, любые перестройки, не обладающие центральной симметрией, должны встречаться парами на центрально-симметричной поверхности Ферми, что требует ее достаточной сложности.

Рассмотрим теперь подробнее перестройку, отвечающую траектории рис. 3а (т.е. перестройку, представленную на рис. 5), предполагая, что она обладает центральной симметрией. Если рассматривать рис. 7, в отсутствие магнитного пробоя (что отвечает достаточному удалению по энергии от ϵ_F на линии перестройки или отклонению направления \mathbf{B} от этой линии при заданном ϵ_F), электронный спектр, отвечающий представленной картине, имеет довольно простое описание. А именно, спектр, определяемый центральным сечением поверхности Ферми, задается двумя ветвями $\epsilon_{n_1}^{(1)}$ и $\epsilon_{n_2}^{(2)}$:

$$S_1(\epsilon_{n_1}^{(1)}) = \frac{2\pi e \hbar B}{c} \left(n_1 + \frac{1}{2} \right), \quad n_1 \gg 1,$$

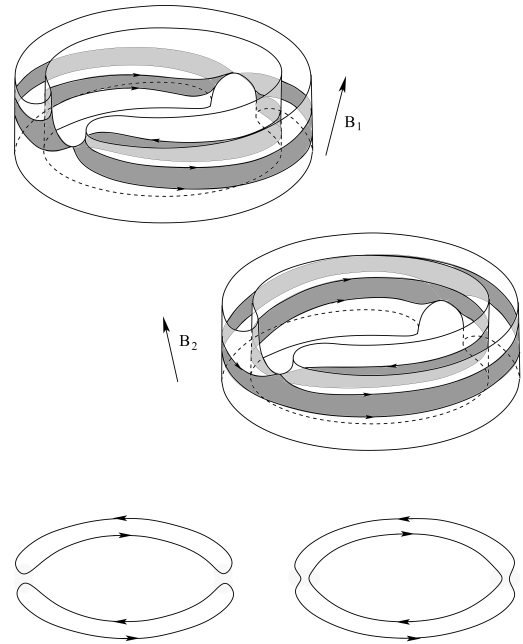


Рис. 9. Центрально-симметричная перестройка, отвечающая сингулярной траектории рис. 3f. Закрашены цилиндры замкнутых траекторий малой высоты, а также приведены траектории, участвующие в формировании электронного спектра по разные стороны от перестройки (все траектории являются «резонансными», т.е. имеют экстремальную площадь по сравнению с близкими траекториями)

$$S_2(\epsilon_{n_2}^{(2)}) = \frac{2\pi e \hbar B}{c} \left(n_2 + \frac{1}{2} \right), \quad n_2 \gg 1,$$

вторая из которых двукратно вырождена.

Формально говоря, вторая часть спектра отвечает симметричной и антисимметричной волновым функциям, локализованным на нерезонансных траекториях. Однако при исчезающе слабом магнитном пробое разница между энергиями таких состояний настолько мала, что они перестают быть правильными состояниями уже при ничтожно малых сдвигах p_z , приводящих к волновым функциям, локализованным на каждой из траекторий по отдельности. Таким образом, для близких сечений спектр задается тремя ветвями, при этом спектры для сдвигов Δp_z и $-\Delta p_z$ совпадают друг с другом. При преобразовании $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, однако, лишь одна ветвь спектра (отвечающая функциям, локализованным на резонансной траектории) переходит в себя, в то время как две другие меняются местами. Как следствие, лишь часть собственных значений спектра является стационарной при малых сдвигах значения p_z , в то время как другие не дают резонансного вклада в квантовые осцилляции в указанном пределе.

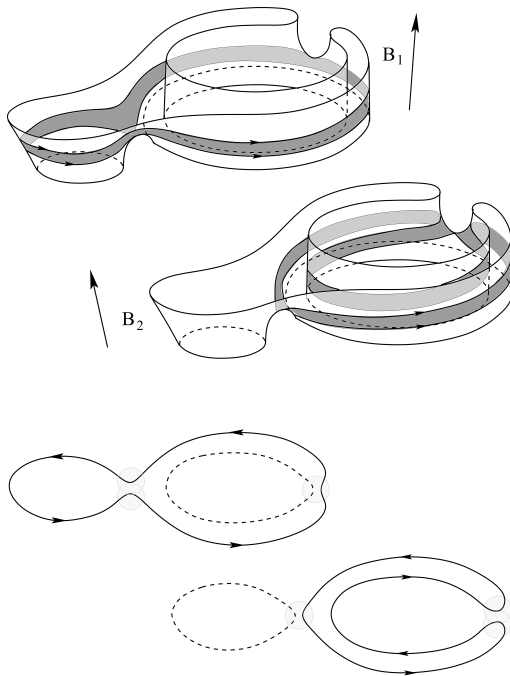


Рис. 10. Перестройка, отвечающая структуре рис. 3b с направленными противоположно друг другу векторами $\nabla\epsilon(\mathbf{p})$ в особых точках

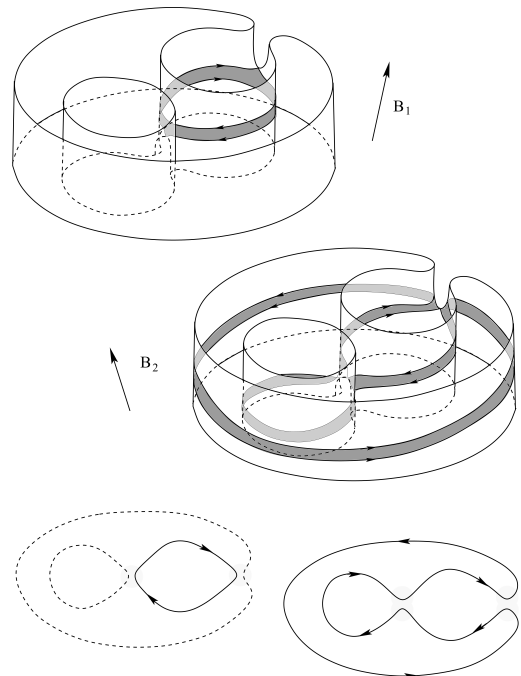


Рис. 11. Перестройка, отвечающая структуре рис. 3d с направленными противоположно друг другу векторами $\nabla\epsilon(\mathbf{p})$ в особых точках

При появлении магнитного пробоя, однако, спектр, отвечающий центральному сечению ($p_z = 0$), становится невырожденным и остается таковым при достаточно близких значениях p_z . Все электронные состояния теперь переходят в себя при преобразовании $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, и, как следствие, все точки спектра являются стационарными при малых сдвигах значения p_z . Можно видеть, таким образом, что в этом случае центральное сечение обладает некоторой окрестностью, дающей резонансный вклад в квантовые осцилляции для всех точек возникающего спектра.

Спектр, формирующийся в результате магнитного пробоя, можно наблюдать, в частности, при очень точном помещении направления \mathbf{V} на линию перестройки структуры системы (1), где сингулярная траектория рис. 3a возникает на поверхности Ферми. Сдвиг направления \mathbf{V} в одну или другую сторону от линии перехода, как мы уже говорили, дает картину, аналогичную сдвигу энергии вниз или вверх от энергии Ферми. Все квантовые уровни остаются стационарными (при сдвигах p_z) также и при переходе к траекториям, изображенным на нижней картинке рис. 5, где они дают резонансный вклад в осцилляции и при исчезновении магнитного пробоя.

Здесь можно также отметить, что, как показывает общий анализ, центрально-симметричная перестройка, представленная на рис. 5, является наиболее распространенной на поверхностях Ферми достаточно общей формы.

Нетрудно видеть, что аналогичная ситуация возникает также в случае центрально-симметричной перестройки, отвечающей траектории, приведенной на рис. 3c (рис. 8). Как и в предыдущем случае, здесь часть траекторий, участвующих в формировании спектра, не являются экстремальными. Таким образом, часть спектра исчезает из резонансного вклада в квантовые осцилляции в пределе исчезающего магнитного пробоя (с одной из сторон от перестройки, либо от уровня Ферми). В наиболее интересном интервале, однако, также можно наблюдать полный спектр электронных состояний среди резонансных членов. Отличия от предыдущего случая заключаются здесь лишь в деталях электронного спектра в режиме развитого магнитного пробоя.

Центрально-симметричная перестройка, отвечающая траектории, приведенной на рис. 3f (траектория типа «бабочки»), несколько отличается от двух перестроек, приведенных выше (см. рис. 9). Можно видеть, что все траектории, принимающие уча-

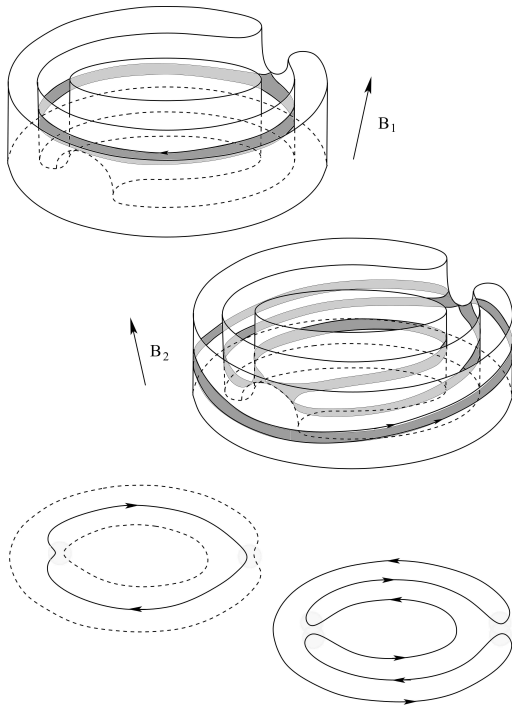


Рис. 12. Перестройка, отвечающая структуре рис. 3e с направленными противоположно друг другу векторами $\nabla \epsilon(\mathbf{p})$ в особых точках

стие в формировании спектра, являются здесь резонансными по обе стороны от перестройки, поэтому все точки электронного спектра дают резонансные вклады в квантовые осцилляции во всем интервале энергий. Квантовый спектр, отвечающий траектории рис. 3f был рассмотрен в работе [26] и имеет «квазислучайный» вид. Такой же тип спектра следует, в действительности, ожидать и в описанных нами выше других двух случаях, отвечающих наличию резонансных вкладов в осцилляции в случае развитого магнитного пробоя. Отличие этих случаев, как мы уже сказали выше, состоит в том, что в них лишь часть возникающего спектра отвечает резонансным вкладам в осцилляции во всем рассматриваемом нами интервале энергий.

Что касается перестроек, не обладающих центральной симметрией (см. рис. 10–12), то, в силу сказанного нами ранее, квантовые уровни, возникающие здесь в режиме развитого пробоя, не обладают свойствами стационарности по отношению к малым вариациям значения p_z . Таким образом, резонансные вклады в квантовые осцилляции возникают лишь от экстремальных траекторий в режиме исчезающего магнитного пробоя. Отметим, однако, что интервал наблюдения развитого магнитного пробоя

в описанных ситуациях является довольно узким. В частности, он отвечает довольно малым допустимым отклонениям направления \mathbf{V} от линии перестройки на угловой диаграмме, и наблюдение резонансных вкладов в осцилляции позволяет, в действительности, определить положение линий перестройки с весьма хорошей точностью при исследовании геометрии поверхности Ферми (см., например, [27]).

Нам хотелось бы также упомянуть здесь о влиянии таких эффектов, как появление ненулевой кривизны Берри (см., например, [29, 30] и приводимые там ссылки) на описанную выше картину. Наличие ненулевой кривизны Берри, как хорошо известно, не позволяет выбрать блоховские функции таким образом, чтобы избежать учета фазы Берри при движении электрона по квазиклассической траектории. Вместе с тем, учет фазы Берри весьма существенно влияет на квантование уровней на замкнутых траекториях системы (1) как в отсутствие магнитного пробоя, так и при его наличии (см. [25, 26] и приводимые там ссылки). Отметим здесь, что при наличии кривизны Берри система (1) несколько модифицируется, однако, траектории электронов в \mathbf{p} -пространстве в присутствии внешнего магнитного поля также задаются при этом пересечениями плоскостей, ортогональных \mathbf{V} , с поверхностями постоянной энергии. В нашем случае важную роль играет появление фазы Берри при движении по траектории между участками сближения траектории с самой собой.

Нас здесь будет интересовать ситуация, когда наличие фазы Берри не разрушает резонансности вклада рассматриваемой нами траектории при наличии магнитного пробоя. Как мы уже видели выше, резонансность такого вклада обусловлена наличием центральной симметрии соответствующих перестроек, поэтому мы должны потребовать также наличие такой симметрии и от добавок к фазе волновых функций за счет фазы Берри (при правильном выборе базиса блоховских функций вблизи рассматриваемой траектории).

Возникновение ненулевой кривизны Берри на поверхности Ферми обусловлено, как правило, либо нарушением симметрии по отношению к обращению времени, либо отсутствием центральной симметрии у решетки кристалла. Как также хорошо известно, симметричные свойства кривизны Берри на поверхности Ферми отличаются друг от друга в этих двух ситуациях. В частности, при наличии центральной симметрии у решетки кристалла кривизна Берри $\Omega(\mathbf{p})$ удовлетворяет условию $\Omega(\mathbf{p}) = \Omega(-\mathbf{p})$. Кро-

ме того, при естественном выборе базиса блоховских функций ($\psi_{-\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \psi_{\mathbf{p}}(-\mathbf{x})$), значения фазы Берри на двух ориентированных кривых, переходящих друг в друга при преобразовании $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, в этом случае совпадают. Можно видеть, таким образом, что случай, когда резонансные свойства спектра, возникающего в описанных выше ситуациях, не разрушаются присутствием фазы Берри, соответствует именно наличию у кристалла центра инверсии.

Для сравнения, при наличии симметрии по отношению к обращению времени кривизна Берри обладает свойством $\Omega(-\mathbf{p}) = -\Omega(\mathbf{p})$. При естественном выборе базиса блоховских волновых функций ($\psi_{-\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \bar{\psi}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$) значения фазы Берри на двух ориентированных кривых, переходящих друг в друг друга при преобразовании $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, в этом случае противоположны друг другу. Можно видеть, таким образом, что при наличии симметрии по отношению к обращению времени (и при отсутствии у кристалла центра инверсии) наличие фазы Берри разрушает резонансные свойства спектра, возникающего на резонансных траекториях, описанных выше. Данное обстоятельство должно, таким образом, приводить к размытию спектра, наблюдаемого при наличии магнитного пробоя во всех описанных выше случаях. Аналогичная ситуация должна возникать также и в самом общем случае (одновременного отсутствия симметрии по отношению к обращению времени и центральной симметрии у решетки кристалла).

Здесь необходимо сказать еще следующее. В рассматриваемых нами ситуациях (отсутствие симметрии по отношению к обращению времени или центральной симметрии у решетки кристалла), помимо учета фазы Берри, необходимо учитывать также некоторые другие явления (см. обзор таких явлений, например, в работе [30]). В частности, в этих ситуациях необходимо учитывать также появление орбитального магнитного момента блоховских электронов $\mathbf{M}(\mathbf{p})$, влияющего на форму спектра в рассмотренных нами выше случаях. Учет влияния орбитального магнитного момента (магнитного момента волнового пакета) состоит в добавке к энергии $\epsilon(\mathbf{p})$ величины $-\mathbf{M}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{B}$, т.е. к (слабой) перенормировке дисперсионного соотношения, зависящей от магнитного поля. Как мы уже видели выше, квантованный спектр отвечает резонансным вкладам в осцилляционные явления лишь при наличии центральной симметрии в рассматриваемых нами перестройках. Таким образом, для сохранения этого свойства мы должны потребовать наличие централь-

ной симметрии также у перенормированного спектра. Как и кривизна Берри, орбитальный магнитный момент блоховских электронов обладает свойством $\mathbf{M}(\mathbf{p}) = \mathbf{M}(-\mathbf{p})$ при наличии центра инверсии в кристалле и $\mathbf{M}(-\mathbf{p}) = -\mathbf{M}(\mathbf{p})$ при наличии симметрии по отношению к обращению времени. Можно видеть, таким образом, что соответствующая добавка является четной по \mathbf{p} только при наличии центра инверсии в кристалле, и, следовательно, наличие орбитального магнитного момента не разрушает резонансные свойства спектра также только в этом случае.

Кроме сказанного выше, надо сделать еще одно замечание. А именно, в отсутствие симметрии по отношению к обращению времени или центра инверсии в кристалле в формировании спектра $\epsilon(\mathbf{p})$ часто также принимает участие спин-орбитальное взаимодействие. В результате, спин и квазиимпульс блоховских электронов не являются независимыми и нужно рассматривать также зависимость $\mathbf{s}(\mathbf{p})$ спина электрона от его квазиимпульса для каждой ветви электронного спектра. Поскольку спин электрона также дает вклад в его зеемановскую энергию в присутствии магнитного поля, для симметричности соответствующей добавки к энергии нам необходимо выполнение условия $\mathbf{s}(\mathbf{p}) = \mathbf{s}(-\mathbf{p})$, что также отвечает наличию центра инверсии в кристалле. (Мы предполагаем здесь также, что спин-орбитальное взаимодействие не приводит к пересечению ветвей электронного спектра вблизи рассматриваемой перестройки).

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена ситуация развитого магнитного пробоя, возникающая вблизи перестроек электронной динамики на поверхности Ферми в присутствии сильных магнитных полей. Рассмотрены случаи, когда возникающий квантовый спектр на перестраивающихся замкнутых траекториях отвечает резонансному вкладу в квантовые осцилляционные явления. Как показано в работе, эта ситуация возникает лишь при некоторых из возможных топологических перестроек электронной динамики на поверхности Ферми. Вместе с тем, появление таких перестроек на реальных поверхностях Ферми является более вероятным по сравнению с остальными в силу особенностей их геометрии. В работе рассмотрено также возможное влияние появления фазы Берри и других эффектов, возникающих при нарушении симметрии по отношению к обращению

времени или отсутствии центра инверсии в кристалле, на описываемые явления.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 21-11-00331).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ч. Киттель, *Квантовая теория твердых тел*, Наука, Москва (1967).
2. И.М. Лифшиц, М.Я. Азбель, М.И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва 1971.
3. А.А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).
4. И.М. Лифшиц, М.Я. Азбель, М.И. Каганов, *ЖЭТФ* **31**, 63 (1956).
5. И.М. Лифшиц, В.Г. Песчанский, *ЖЭТФ* **35**, 1251 (1958).
6. И.М. Лифшиц, В.Г. Песчанский, *ЖЭТФ* **38**, 188 (1960).
7. С.П. Новиков, *УМН* **37**, 3 (1982).
8. А.В. Зорич, *УМН* **39**, 235 (1984).
9. И.А. Дынников, *УМН* **47**, 161 (1992).
10. С.П. Царев, Частное сообщение, 1992-1993.
11. И.А. Дынников, *Математические заметки* **53**, 57 (1993).
12. A.V. Zorich. in: *Proc. Geometric Study of Foliations*, (Tokyo, November 1993), ed. T. Mizutani et al., World Scientific, Singapore (1994), p. 479.
13. I.A. Dynnikov, *Surfaces in 3-torus: Geometry of Plane Sections*, Proc. of ECM2, BuDA (1996).
14. I.A. Dynnikov, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, Vol. 179, AMS, Providence, RI (1997), p. 45.
15. И.А. Дынников, *УМН* **54**, 21 (1999).
16. С.П. Новиков, А.Я. Мальцев, *Письма в ЖЭТФ* **63**, 809 (1996).
17. А.Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **112**, 1710 (1997).
18. С.П. Новиков, А.Я. Мальцев, *УФН* **168**, 249 (1998).
19. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, *J. Stat. Phys.* **115**, 31 (2004).
20. А.Я. Мальцев, С.П. Новиков, *Труды МИАН* **302**, 296 (2018).
21. С.П. Новиков, Р. Де Лео, И.А. Дынников, А.Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **156**, 761 (2019).
22. Г.Е. Зильберман, *ЖЭТФ* **33**, 387 (1958).
23. Г.Е. Зильберман, *ЖЭТФ* **34**, 748 (1958).
24. М.Я. Азбель, *ЖЭТФ* **39**, 1276 (1960).
25. A. Alexandradinata and Leonid Glazman *Phys. Rev. Lett.* **119**, 256601 (2017).
26. A. Alexandradinata and Leonid Glazman, *Phys. Rev. B* **97**, 144422 (2018).
27. А.Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **158**, 1139 (2020).
28. А.Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **160**, 699 (2021).
29. Ganesh Sundaram and Qian Niu, *Phys. Rev. B* **59**, 14915 (1999)
30. Di Xiao, Ming-Che Chang, Qian Niu, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1959 (2010)