

ФОРМИРОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ФАНТОМНОЙ ВОЛОКОННОЙ ЭНДОСКОПИИ МЕТОДОМ РЕДУКЦИИ ИЗМЕРЕНИЙ

Д. А. Балакин^{*}, Д. П. Агапов^{**}, П. П. Гостев^{***}, С. А. Магницкий^{****}, Д. Н. Фроловцев[†],
А. С. Чиркин[‡]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 15 июня 2022 г.,
после переработки 3 августа 2022 г.
Принята к публикации 7 августа 2022 г.

Для формирования фантомных изображений (ФИ) в волоконно-оптических системах применен метод редукции измерений. ФИ восстанавливались путем численного моделирования полного цикла получения ФИ в базовой схеме волоконного многомодового эндоскопа, начиная с распространения случайно модулированного света по многомодовому волокну и заканчивая расчетом ФИ с помощью численных методов однопиксельной визуализации. Для получения высококачественных восстановленных ФИ привлекалась априорная информация об исследуемом объекте. Показано, что при числе используемых шаблонов освещения объекта, существенно меньшем числа пикселей восстанавливаемого изображения, погрешность восстановления объекта может быть уменьшена, несмотря на ограничение числа мод, распространяющихся по оптическому волокну и формирующих некогерентное излучение. Для сравнения для формирования ФИ были использованы несколько вариантов метода сжатых измерений и традиционный корреляционный метод. Продемонстрировано, что предложенный вариант метода редукции измерения в применении к многомодовым волокнам показывает сравнимые, а часто лучшие результаты, чем традиционный корреляционный метод и метод сжатых измерений.

DOI: 10.31857/S004445102212001X
EDN: LBWCFT

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние несколько лет наблюдается повышенный интерес к новому направлению оптики — волоконной фантомной оптике (ВФО), которая находится на стыке волоконной, квантовой, статистической оптики, оптики фантомных изображений и интеллектуальных систем формирования и обработки изображений. Ключевым моментом в ВФО является приготовление пространственно структурированного света и формирование изображений на

основе получаемой косвенной информации об объекте с использованием фантомного принципа синтеза изображений. Это требует не только разработки специальных физических методов управления свойствами света, но и разработки специальных математических алгоритмов.

Перспективным направлением может стать применение методов ВФО для получения изображений в эндоскопических системах, где наблюдение за объектом происходит через оптическое волокно или жгут волокон. Интерес прежде всего связан с возможностью поместить основные оптические элементы вне зонда, что позволяет уменьшить его размеры и тем самым улучшить качество инвазивной диагностики. Отметим также, что принцип фантомных изображений (ФИ) позволяет исключить влияние флуктуаций и различных неоднородностей среды на трассе распространения излучения на восстановленное изображение.

^{*} E-mail: balakin_d_a@physics.msu.ru

^{**} E-mail: dimaagapov@mail.ru

^{***} E-mail: fongostev@gmail.com

^{****} E-mail: sergeymagnitskiy@gmail.com

[†] E-mail: dfrolovtsev@gmail.com

[‡] E-mail: aschirkin@physics.msu.ru

Изначально, в отличие от формирования обычных изображений, при детектировании фантомного изображения [1–3] для получения информации об объекте использовалась корреляция фотонов двух пучков, один из которых (в объектном канале) освещает объект, после чего регистрируется пространственно неразрешающим (однопиксельным) датчиком, а второй (в восстанавливающем канале) регистрируется многопиксельной камерой. В этом варианте ФИ, который будем в дальнейшем называть традиционным, для формирования изображений предлагалось вычислять корреляционную функцию второго порядка сигнала однопиксельного датчика в объектном канале и сигнала, соответствующего каждому отдельному пикселю в восстанавливающем канале. Позднее появился вычислительный вариант ФИ, в котором объект освещается случайными шаблонами [4], формируемыми пространственным модулятором света (см. [5] и цитируемую там литературу), или цифровым микрозеркальным устройством, а регистрация фотонов в восстанавливающем канале заменяется ее численным моделированием, что позволяет обойтись без многопиксельной камеры. Позднее такой вариант ФИ и производные от него алгоритмы начали называть однопиксельной визуализацией. Если формирование шаблонов освещения воспроизводимо, вместо численного моделирования можно предварительно зарегистрировать освещение в плоскости объекта, временно заменив его камерой (на этапе формирования изображения объекта многопиксельная камера по-прежнему не используется) [6]. Такой алгоритм плохо подходит для систем реального времени, предназначенных для генерации изображений объекта с частотой 10 Гц и более, так как для построения одного изображения объекта требуется накопить большое количество данных для расчета корреляционной функции.

На рис. 1 приведена схема формирования фантомных изображений при облучении объекта светом, прошедшим через оптическое волокно. Лазерное излучение проходит через фазовый/амплитудный пространственный модулятор света, в дальней зоне которого профиль интенсивности пучка представляет из себя спекл-картину. С помощью микрообъектива излучение заводится в многомодовое волокно. После распространения в волокне свет облучает объект исследования. Излучение, прошедшее через объект, собирается однопиксельным датчиком, сигнал с которого поступает на персональный компьютер (ПК на рис. 1) для вычисления пространственной корреляционной

функции.

Типичная модель измерения при обработке изображений имеет вид

$$\xi = A\mathbf{f} + \nu, \quad (1)$$

где вектор $\xi \in \mathcal{X}$ — результат измерения (последовательность показаний однопиксельного датчика), неизвестный вектор $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$ характеризует степень прозрачности объекта исследования, оператор A моделирует измерительный преобразователь (в рассматриваемой схеме оператор A определен развернутыми в строки шаблонами освещения), $\nu \in \mathcal{X}$ — погрешность измерений, \mathcal{F}, \mathcal{X} — конечномерные евклидовы пространства. В этих обозначениях традиционный алгоритм восстановления фантомных изображений описывается формулой

$$\sum_{j=1}^{\dim \mathcal{X}} \left(\xi_j - \frac{1}{\dim \mathcal{X}} \sum_{k=1}^{\dim \mathcal{X}} \xi_k \right) \left(\mathbf{a}_j - \frac{1}{\dim \mathcal{X}} \sum_{l=1}^{\dim \mathcal{X}} \mathbf{a}_l \right), \quad (2)$$

где \mathbf{a}_j — j -я строка матрицы оператора A , т. е. развернутый в строку j -й шаблон освещения, ξ_j — показания однопиксельного датчика при освещении объекта j -м шаблоном.

В современных системах ФИ с применением оптических волокон используется несколько основных подходов. Так, в работе [7] обсуждается идея использования жгута одиночных волокон. В [8, 9] для облучения объекта применяется одиночное многомодовое волокно, на входном торце которого располагается жгут одиночных волокон. Еще один тип систем в ВФО включает в себя многопиксельные модуляторы света и одиночные многомодовые волокна. Этот подход экспериментально реализован в работах [6, 10, 11]. В таких системах формирование изображения может быть осуществлено с помощью различных математических алгоритмов (см., например, [12]). Результаты последних исследований показывают, что наиболее перспективными для создания волоконно-оптических фантомных эндоскопов являются системы, использующие одиночные многомодовые волокна. Такие системы позволяют создать миниатюрные эндоскопы, обладающие минимальной степенью инвазивности, т. е. позволяют проводить вмешательства с минимальной травматизацией окружающих тканей.

В принципе, ФИ могут быть синтезированы с применением различных структур света, освещающих объект (шаблонов освещения). На сегодняшний день предпочтение отдается статистически независимым шаблонам со случайной структурой. В дан-

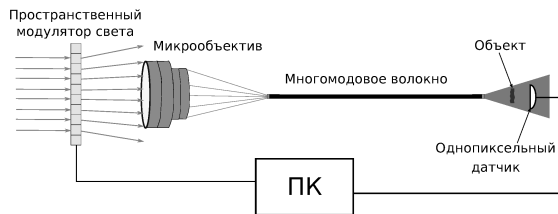


Рис. 1. Схема для реализации фантомной визуализации с помощью многомодового волокна

ной работе мы ограничимся рассмотрением формирования ФИ только таким светом.

На рис. 1 представлена базовая схема формирования фантомных изображений при облучении объекта светом со случайной пространственной структурой, прошедшим через многомодовое оптическое волокно. В такой схеме с теоретической точки зрения учитываются практически все аспекты формирования ФИ в волоконно-оптических схемах, основой которых являются многомодовые волокна. Лазерное излучение проходит через фазовый/амплитудный пространственный модулятор света, в дальней зоне которого профиль интенсивности пучка представляет из себя спекл-картину. С помощью микрообъектива излучение заводится в многомодовое волокно. После распространения в волокне свет облучает объект исследования. Излучение, прошедшее через объект, собирается однопиксельным датчиком, сигнал с которого поступает на ПК. Для получения ФИ используются специальные математические алгоритмы, входными данными которых являются пространственное распределение интенсивности света в плоскости объекта и интегральная интенсивность прошедшего через объект света, собранная однопиксельным детектором. Заметим, что исторически первый традиционный алгоритм, основанный на вычислении ковариационной функции, и все последующие, включая разрабатываемые в настоящее время, алгоритмы являются статистическими в том смысле, что требуют довольно значительного числа измерений, полученных при различных пространственных профилях освещения объекта (шаблонов освещения).

В ВФО проблема конечного числа шаблонов освещения обостряется из-за того, что в оптическом волокне от модулятора до объекта распространяется ограниченное число мод. Поэтому даже увеличение числа шаблонов освещения выше определенного предела позволяет лишь более точно оценить составляющие изображения, информация о которых уже была получена из предшествующих измерений, так

как новые строки матрицы оператора A оказываются линейно зависимыми от старых. Число мод определяет верхний предел ранга оператора A . В связи с этим заметим, что хотя волоконные фантомные изображения (ВФИ) могут быть получены в схемах с различными конфигурациями волокон [8–10], наиболее перспективными являются одиночные многомодовые волокна. Это связано с тем, что соотношение размера волокна и количества пространственных мод в многомодовых волокнах лучше, чем в жгутах одномодовых и многомодовых волокон.

Для повышения качества восстановления вектора \mathbf{f} требуется привлечь дополнительную информацию о нем. Эта информация, как правило, ограничивает класс объектов, изображения которых могут быть точно восстановлены. Иными словами, погрешность обработки уменьшается при восстановлении изображений «более правдоподобных» объектов в ущерб восстановлению изображений «менее правдоподобных». Например,

- кусочно-постоянный вид оптических характеристик объекта, если он состоит из оптически однородных материалов;
- близость оптических характеристик объекта в близких его точках.

В данной работе рассмотрен ряд математических методов, позволяющих сформировать ФИ на основе данных, получаемых в схеме, изображенной на рис. 1, а именно, традиционный метод, несколько вариантов метода сжатых измерений и предложенный в работе вариант метода редукции измерения, в котором используется дополнительная информация о равенстве нулю многих компонент восстанавливаемого изображения в собственном базисе модели интерпретации измерения. Показано, что использование дополнительной информации об объекте исследования позволяет значительно уменьшить число шаблонов освещения, которыми требуется осветить объект для формирования фантомного изображения, и, следовательно, ускорить регистрацию.

2. МЕТОД СЖАТЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

2.1. Общая идея метода сжатых измерений

Как правило, для уменьшения числа шаблонов освещения, которыми требуется осветить объект для формирования фантомного изображения, используется метод сжатых измерений [13–18]. В нем оценка вектора \mathbf{f} определена решением задачи минимизации по \mathbf{g} (здесь \mathbf{g} — вектор, характеризующий степень прозрачности некоторого объекта,

выступающего как пробный объект в смысле сравнения реального результата измерений и результата измерений, который был бы получен при измерении пробного объекта) функционала

$$\Delta(\mathbf{A}\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}) + \alpha\Omega(\mathbf{g}) \sim \min_{\mathbf{g} \in \mathcal{F}}, \quad (3)$$

где функционал Δ характеризует отклонение ожидаемого (при объекте, моделируемом вектором \mathbf{g}) результата измерения $\mathbf{A}\mathbf{g}$ и фактически полученного $\boldsymbol{\xi}$, а регуляризующий функционал Ω характеризует регулярность объекта (как правило — гладкость его изображения как функции координат).

Основные используемые варианты выбора функционала Δ :

- функционал наименьших квадратов [6, 17–21] $\Delta(\mathbf{A}\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}) = \|\mathbf{A}\mathbf{g} - \boldsymbol{\xi}\|^2$;
- логарифм функции правдоподобия [22]. При пуассоновской статистике фотоотсчетов

$$\Delta(\mathbf{A}\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{\dim \boldsymbol{\xi}} (\xi_j \ln((\mathbf{A}\mathbf{g})_j + \epsilon) - ((\mathbf{A}\mathbf{g})_j + \epsilon) - \ln \xi_j!),$$

где ϵ — среднее число фотоотсчетов, вызванных темновыми шумами, ! обозначает факториал.

Выбор функционала Δ , как правило, определяется доступной информацией о модели измерения (известна ли статистика фотоотсчетов и распределение темновых шумов, определяющие функцию правдоподобия).

2.2. Использование разреженности в базисе заданного преобразования

Коэффициенты пропускания реальных объектов в близких точках часто имеют схожие величины. Это утверждение может быть математически сформулировано как разреженность вектора \mathbf{f} в некотором (выбираемом априори, в том числе на основе информации о характерном виде объекта) базисе, заданном преобразованием T [6, 18–22]. В качестве этого базиса, как правило, применяется базис дискретного косинусного преобразования (DCT) [22], см. сравнение ряда преобразований (тождественного преобразования, дискретного вейвлет-преобразования, DCT) в работе [23]. Основное требование к преобразованию — как можно более быстрое убывание упорядоченных по невозрастанию модулей координат вектора \mathbf{f} . На этом способе основаны следующие варианты выбора функционала Ω в формуле (3):

- норма L^1 в заданном базисе,

$$\Omega(\mathbf{g}) = \|\mathbf{T}\mathbf{g}\|_1 \quad (4)$$

(основной используемый вариант), см. [6, 24];

- отношение квадратов норм L^1 и L^2 , $\Omega(\mathbf{g}) = \|\mathbf{T}\mathbf{g}\|_1^2 / \|\mathbf{T}\mathbf{g}\|^2$, см. [22].

2.3. Характеристики регулярности, основанные на конечных разностях

Существуют также варианты метода сжатых измерений, в которых в формуле (3) используются другие характеристики регулярности изображения:

- полная кривизна [18, 25]

$$\Omega(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^{\dim \mathbf{g}} (|(D_x^2 \mathbf{g})_i| + |(D_y^2 \mathbf{g})_i|);$$

- квадратичная кривизна [25]

$$\Omega(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^{\dim \mathbf{g}} (|(D_x^2 \mathbf{g})_i|^2 + |(D_y^2 \mathbf{g})_i|^2); \quad (5)$$

- сглаженная (при $\beta \neq 0$) изотропная (в смысле чувствительности к ориентации координатных осей в плоскости изображения) полная вариация [26]

$$\Omega(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^{\dim \mathbf{g}} \sqrt{\beta^2 + |D_x^1 \mathbf{g}|_i^2 + |D_y^1 \mathbf{g}|_i^2}; \quad (6)$$

- анизотропная полная вариация [18]

$$\Omega(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^{\dim \mathbf{g}} (|D_x^1 \mathbf{g}|_i + |D_y^1 \mathbf{g}|_i) = \|\mathbf{D}_x^1 \mathbf{g}\|_1 + \|\mathbf{D}_y^1 \mathbf{g}\|_1; \quad (7)$$

- альтернативный вариант анизотропной полной вариации

$$\Omega(\mathbf{g}) = \|\mathbf{D}_x^1 \mathbf{g}\| + \|\mathbf{D}_y^1 \mathbf{g}\|. \quad (8)$$

Здесь $(D_{x,y}^k \mathbf{g})_i$ — конечная разность k -го порядка изображения \mathbf{g} в направлении оси x (y) в позиции i -го пикселя.

2.4. Свойства метода сжатых измерений. Выбор параметра регуляризации

Если восстанавливаемое изображение содержит компоненты, не влияющие на полученное изображение и восстанавливаемые за счет информации о разреженности, для обработки применяется вариант регуляризованного метода наименьших квадратов с

поиском минимума регуляризирующего функционала при требовании воспроизведения полученных изображений [27], формально получающийся как предел решения задачи (3) при $\alpha \rightarrow +0$. Для этого случая доказана [14] оптимальность выбора нормы L^1 в выбранном базисе как регуляризирующего функционала при отсутствии шума и определенных ограничениях, накладываемых на модель измерения. Требуется, чтобы матрица оператора AT обладала ограниченной изометрией, а именно, если для любого натурального $s \leq \dim \mathcal{F}$ существует такая константа изометрии δ_s , что $(1 - \delta_s)\|z\|^2 \leq \|Az\|^2 \leq (1 + \delta_s)\|z\|^2$ для любого вектора $z \in \mathcal{F}$, имеющего не более s ненулевых компонент, и $\delta_s + \delta_{2s} + \delta_{3s} \leq 1$, то точно восстановим любой вектор, имеющий не более s ненулевых компонент. Смысл этого условия применительно к схеме на рис. 1 — объекты, распределения прозрачностей которых представимы с помощью малого числа векторов из выбранного базиса, при измерении дают достаточно сильно различающиеся результаты.

Кроме указанной причины, выбор функционала Ω часто определяется вычислительными соображениями. Приведенные выше функционалы, в которых используется не норма L^1 изображения в некотором базисе, а конечные разности изображения, позволяют решать задачу (3) локальными методами (в частности, стохастической оптимизацией), поскольку изменение пикселя восстанавливаемого изображения изменяет лишь ограниченное число слагаемых в регуляризирующем функционале, соответствующих этому пикселю и его соседям [18, 25]. Использование сглаженной изотропной полной вариации (6) вместо несглаженной упрощает вычисления, поскольку сглаженная изотропная полная вариация дифференцируема, а несглаженная — нет.

Выбор в качестве функционала Δ логарифма функции правдоподобия приводит к формальной эквивалентности соответствующего варианта метода сжатых измерений и метода апостериорного максимума, использованного, например, в [28], в котором оценивание выполняется максимизацией вычисленного по правилу Байеса апостериорного распределения прозрачности, где априорное распределение случайной прозрачности объекта исследования, например, пропорционально экспоненте отрицательной полной вариации изображения [28]. Соответствующее заданному регуляризирующему функционалу априорное распределение при этом может не быть распределением вероятностей ввиду ненормированности.

В дополнение к таким широко известным способам выбора значения параметра регуляризации α , как принцип невязки [29] (к которому близка рекомендация [18] использовать значение α , при котором для полученной оценки \hat{f} отличие прогнозируемого результата от наблюдаемого $\|A\hat{f} - \xi\|^2 \approx \dim \mathcal{X}$), метод L -кривой [30, 31], метод обобщенной кроссвалидации [32], в [25] предложен способ, в котором несколько раз моделируется получение изображения объекта, описываемого гауссово размытой оценкой максимального правдоподобия, вычисляется среднее уменьшение значения логарифма функции правдоподобия при переходе от размытой оценки к результату моделирования и ищется значение α , при котором результат обработки настолько же уменьшает значение логарифма функции правдоподобия по сравнению с оценкой максимального правдоподобия.

В силу его схожести с рассматриваемым далее вариантом метода редукции измерения также отметим метод восстановления изображения при помощи усеченного сингулярного разложения [8, 33], обычно не относимый к методам сжатых измерений, но формально получающийся по формуле (3) при $\Omega(\mathbf{g}) = \max\{0 \leq k \leq \text{rk } A | (I - P_k)\mathbf{g} \neq 0\}$, где P_k — проектор на линейную оболочку первых k упорядоченных по невозрастанию соответствующих им сингулярных чисел правых сингулярных векторов оператора A , rk — ранг оператора или матрицы. В нем восстановленное изображение формируется действием на ξ оператора, псевдообратного к A после усечения до нуля k наименьших сингулярных чисел оператора A .

В заключение раздела отметим возможность комбинирования различных регуляризирующих функционалов, как это сделано, например, в работе [34], где использована линейная комбинация нормы L^2 , нормы L^1 и полной вариации. В этом случае требуются более сложные (из-за необходимости минимизации или нахождения корня функции нескольких параметров, а не одного) способы выбора значений регуляризирующих параметров, обобщающие принцип невязки [35, 36], метод L -кривой [37], метод обобщенной кроссвалидации [38], или основанные на использовании тестовых измерений [39]. Также применение этих методов затрудняется тем, что, как правило, их свойства проанализированы для регуляризирующего функционала — суммы слагаемых вида $\|Q\mathbf{g}\|^2$ для заданного набора операторов Q , в то время как в методе сжатых измерений обычно используются более сложные регуляризирующие функционалы, указанные выше (исключение — функционал (8)).

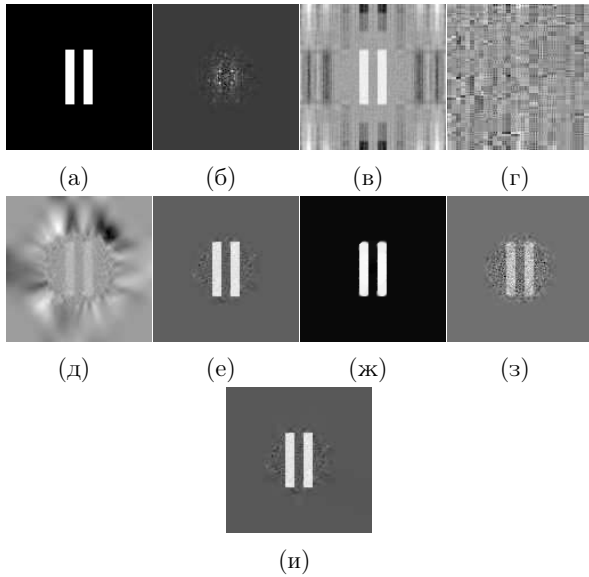


Рис. 2. Компьютерное моделирование восстановления фантомного изображения объекта исследования (а), 109.375×109.375 мкм, 128×128 пикселей, по результатам освещения объекта 1024 бинарными (на входе оптоволокну) шаблонами освещения: (б) традиционным методом (2), методами сжатых измерений при выборе в качестве регуляризирующего функционала нормы L^1 в базисе (в) DCT и (г) преобразования Хаара, см. формулу (4) в разд. 2.2, (д) квадратичной кривизны, см. формулу (5) в разд. 2.3, (е) анизотропной полной вариации (7) и (ж) ее альтернативного определения (8), см. разд. 2.3, (з) линейной редукции измерения, см. разд. 3.1, и (и) нового алгоритма редукции измерения, см. разд. 3.2

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕДУКЦИИ ИЗМЕРЕНИЯ

Другой вариант восстановления фантомного изображения дает математический метод редукции измерений [40], в котором ищется преобразование из некоторого класса (например, линейных преобразований), минимизирующее погрешность использования результата преобразования как оценки изображения объекта исследования.

3.1. Линейная несмещенная редукция измерения

Пусть в модели измерения (1) \mathbf{f} — априори произвольный вектор, погрешность $\boldsymbol{\nu}$ — случайный вектор, $\mathbb{E}\boldsymbol{\nu} = 0$ и известен невырожденный корреляционный оператор шума $\Sigma_{\boldsymbol{\nu}}$: $\forall x \in \mathcal{X} \Sigma_{\boldsymbol{\nu}}x = \mathbb{E}\boldsymbol{\nu}(x, \boldsymbol{\nu})$, а измерение на идеальном измерительном преобразователе, результат которого интересует исследователя, моделируется линейным оператором $U: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{U}$.

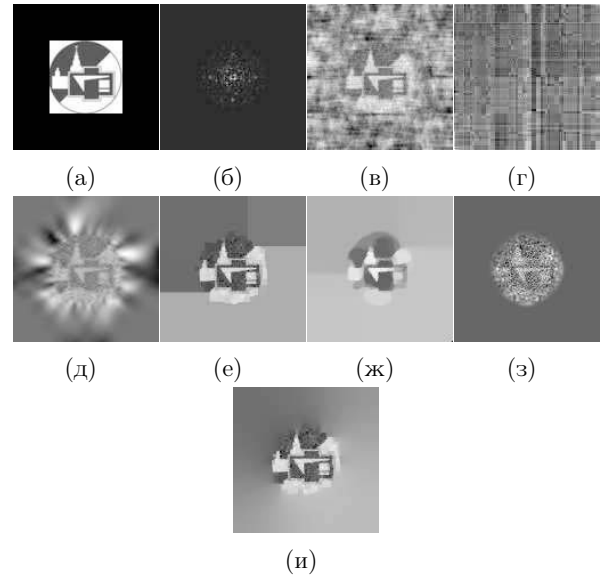


Рис. 3. Компьютерное моделирование восстановления фантомного изображения объекта исследования (а), 109.375×109.375 мкм, 128×128 пикселей, по результатам освещения объекта 1024 бинарными (на входе оптоволокну) шаблонами освещения: (б) традиционным методом (2), методами сжатых измерений при выборе в качестве регуляризирующего функционала нормы L^1 в базисе (в) DCT и (г) преобразования Хаара, см. формулу (4) в разд. 2.2, (д) квадратичной кривизны, см. формулу (5) в разд. 2.3, (е) анизотропной полной вариации (7) и (ж) ее альтернативного определения (8), см. разд. 2.3, (з) линейной редукции измерения, см. разд. 3.1, и (и) нового алгоритма редукции измерения, см. разд. 3.2

В рассматриваемом случае, когда процесс измерения не возмущает объект и восстанавливается именно изображение объекта, $U = I$. Примером ситуации, когда это не так, служит восстановление изображения отдельного слоя трехмерного объекта. Если погрешность оценивания $h(R, U)$, обусловленная линейным преобразованием результата измерения оператором R , определена как среднеквадратичная максимальная по всем значениям \mathbf{f} $h(R, U) = \sup_{\mathbf{f} \in \mathcal{F}} \mathbb{E}\|R\xi - U\mathbf{f}\|^2$, то [40, §5.1] минимизирующий ее оператор линейной редукции, если выполнено условие

$$U(I - A^{-1}A) = 0, \tag{9}$$

равен

$$R_* = U(\Sigma_{\boldsymbol{\nu}}^{-1/2}A)^{-}\Sigma_{\boldsymbol{\nu}}^{-1/2}, \tag{10}$$

где $^{-}$ обозначает псевдообращение. Линейной редукции соответствует минимальная погрешность

$$h(R_*, U) = \text{tr}(U(A^*\Sigma_{\boldsymbol{\nu}}^{-1}A)^{-}U^*). \tag{11}$$

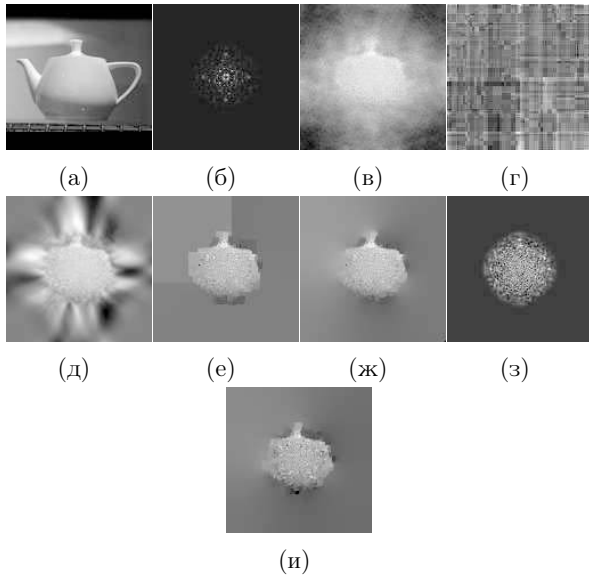


Рис. 4. Компьютерное моделирование восстановления фантомного изображения объекта исследования (а), 109.375×109.375 мкм, 128×128 пикселей, по результатам освещения объекта 1024 бинарными (на входе оптоволоконна) шаблонами освещения: (б) традиционным методом (2), методами сжатых измерений при выборе в качестве регуляризирующего функционала нормы L^1 в базисе (в) DCT и (г) преобразования Хаара, см. формулу (4) в разд. 2.2, (д) квадратичной кривизны, см. формулу (5) в разд. 2.3, (е) анизотропной полной вариации (7) и (ж) ее альтернативного определения (8), см. разд. 2.3, (з) линейной редукции измерения, см. разд. 3.1, и (и) нового алгоритма редукции измерения, см. разд. 3.2

Если же условие (9) не выполнено, то априори допускает оценивание с конечной погрешностью (равной (11)) лишь составляющая UA^-Af . Условие (9) означает, что изменения объекта, не отражающиеся на результатах измерений, не должны влиять на восстанавливаемое изображение.

3.2. Использование дополнительной информации об объекте исследования

Пусть задача редукции измерения разрешима при заданном U и требуется, чтобы среднеквадратичная (с.к.) погрешность $h(R_*, U)$ оценивания Uf не превосходила заданную величину. Для ответа на этот вопрос в [41, гл. 2, §3] введено понятие собственного базиса модели интерпретации измерения. Например, в рассмотренном выше случае её ортонормированный собственный базис $e_j, j = 1, 2, \dots$, определяется путем решения задачи [40, гл. 8, введение и §8.1] на собственные значения оператора $U(A^* \Sigma_U^{-1} A)^{-1} U^* e_j = \sigma_j^2 e_j, \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \leq \dots$, т.е.

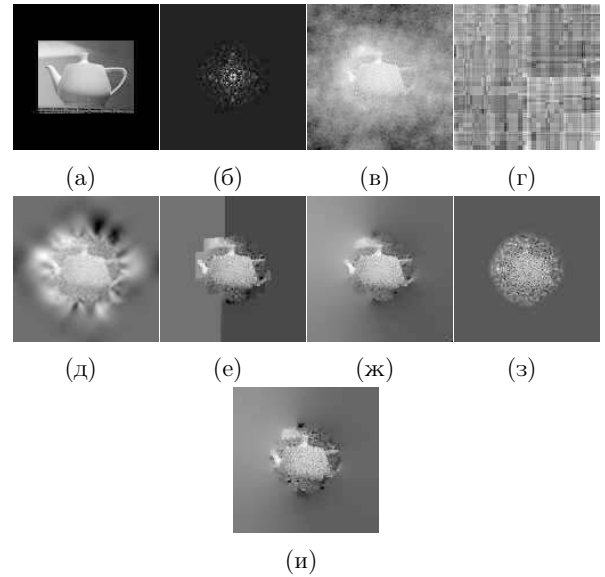


Рис. 5. Компьютерное моделирование восстановления фантомного изображения объекта исследования (а), 109.375×109.375 мкм, 128×128 пикселей, по результатам освещения объекта 1024 бинарными (на входе оптоволоконна) шаблонами освещения: (б) традиционным методом (2), методами сжатых измерений при выборе в качестве регуляризирующего функционала нормы L^1 в базисе (в) DCT и (г) преобразования Хаара, см. формулу (4) в разд. 2.2, (д) квадратичной кривизны, см. формулу (5) в разд. 2.3, (е) анизотропной полной вариации (7) и (ж) ее альтернативного определения (8), см. разд. 2.3, (з) линейной редукции измерения, см. разд. 3.1, и (и) нового алгоритма редукции измерения, см. разд. 3.2

как собственный базис этого оператора. Собственный базис обладает экстремальным свойством, согласно которому с.к. погрешность

$$h(\Pi_s R_*, \Pi_s U) = \sum_{j=1}^s \sigma_j^2 = \inf\{h(\Pi R_*, \Pi U) \mid \text{rk } \Pi \geq s\}, \quad (12)$$

$$s = 1, \dots, \dim \mathcal{U},$$

где Π_s — ортогональный проектор на линейную оболочку $\mathcal{L}(e_1, \dots, e_s)$ векторов e_1, \dots, e_s , Π — ортогональный проектор. Согласно (12), с.к. погрешность, сопутствующая оцениванию ортогональной проекции сигнала идеального измерительного преобразователя на линейное подпространство размерности s или более, минимальна, если это подпространство есть линейная оболочка первых s базисных векторов, упорядоченных по неубыванию соответствующих собственных значений. Таким образом, собственный базис оптимально (в указанном смысле)

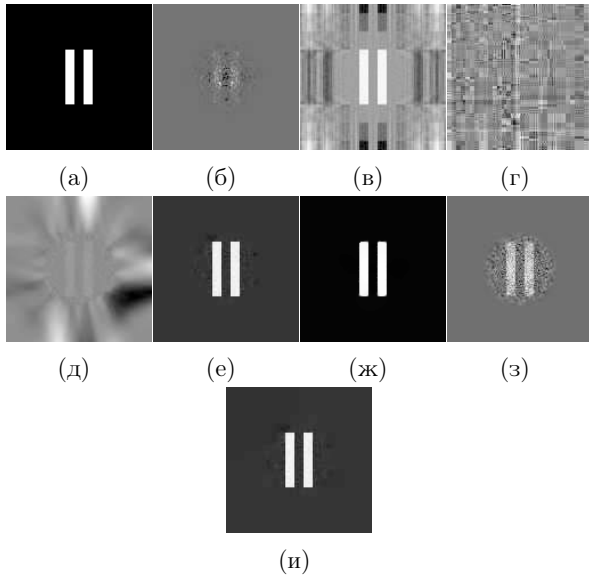


Рис. 6. Компьютерное моделирование восстановления фантомного изображения объекта исследования (а), 109.375×109.375 мкм, 128×128 пикселей, по результатам освещения объекта 1024 шаблонами освещения, соответствующими случайной модуляции фазы в каждом пикселе: (б) традиционным методом (2), методами сжатых измерений при выборе в качестве регуляризирующего функционала нормы L^1 в базисе (в) DCT и (г) преобразования Хаара, см. формулу (4) в разд. 2.2, (д) квадратичной кривизны, см. формулу (5) в разд. 2.3, (е) анизотропной полной вариации (7) и (ж) ее альтернативного определения (8), см. разд. 2.3, (з) линейной редукции измерения, см. разд. 3.1, и (и) нового алгоритма редукции измерения, см. разд. 3.2

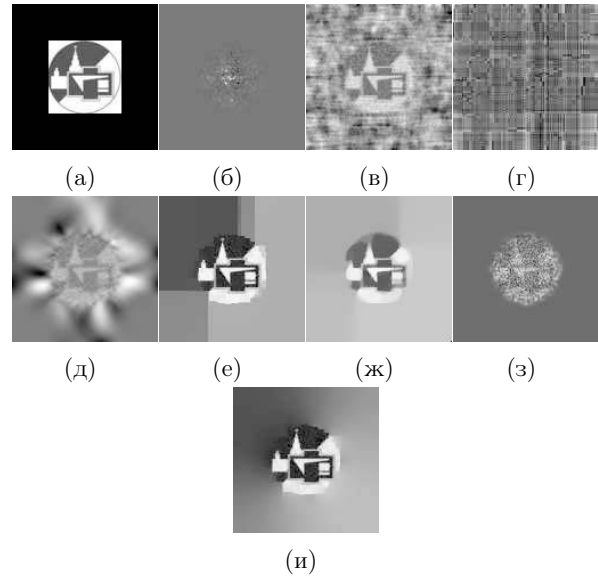


Рис. 7. Компьютерное моделирование восстановления фантомного изображения объекта исследования (а), 109.375×109.375 мкм, 128×128 пикселей, по результатам освещения объекта 1024 шаблонами освещения, соответствующими случайной модуляции фазы в каждом пикселе: (б) традиционным методом (2), методами сжатых измерений при выборе в качестве регуляризирующего функционала нормы L^1 в базисе (в) DCT и (г) преобразования Хаара, см. формулу (4) в разд. 2.2, (д) квадратичной кривизны, см. формулу (5) в разд. 2.3, (е) анизотропной полной вариации (7) и (ж) ее альтернативного определения (8), см. разд. 2.3, (з) линейной редукции измерения, см. разд. 3.1, и (и) нового алгоритма редукции измерения, см. разд. 3.2

отделяет наиболее зашумленные компоненты формируемой оценки от наименее зашумленных.

Ранее в [42] предложен алгоритм редукции измерений при априорной информации, аналогичной используемой в методе сжатых измерений, о близости оптических характеристик объекта в близких его точках и формализации этой информации разреженностью изображения как вектора в априори заданном базисе. Как и при линейной редукции, предполагалось выполнение условия (9). Алгоритм основан на проверке статистических гипотез о равенстве компонент восстанавливаемого изображения нулю при общем виде используемого для проверки гипотез критерия. Также в [42] показано его применение для критерия вида (13), см. ниже, но в заданном исследователем базисе, при этом внедиагональные компоненты матрицы корреляций формируемого изображения не учитывались. Позднее в теореме 1 в [43] определен оптимальный критерий, учитывающий корреляционные связи компонент формируемой оценки, в ситуации, когда погрешность измере-

ний характеризуется ее математическим ожиданием и ковариационным оператором. Построенный критерий существенно сложнее (13), поскольку требует найти максимальное $n \leq \dim \mathcal{U}$ и бинарную матрицу C ранга n , удовлетворяющую условию

$$((CT\Sigma_{R_*\xi}T^*C^*)^{-1}CT\hat{u}, CT\hat{u}) < n\tau^2,$$

где $\Sigma_{R_*\xi} = U(A^*\Sigma_U^{-1}A) - U^*$ — ковариационный оператор оценки $R_*\xi$. Наконец, в [44] предложено использование в качестве базиса, в котором проверяются гипотезы о компонентах, собственного базиса модели интерпретации измерения в силу его экстремального свойства (12) и показано, что оптимальный критерий, охарактеризованный в теореме 1 в [43], в этом базисе приобретает наиболее простой вид (13) благодаря диагональности матрицы ковариаций восстанавливаемого изображения в этом базисе.

С учетом сделанных замечаний алгоритм редукции приобретает следующий вид.

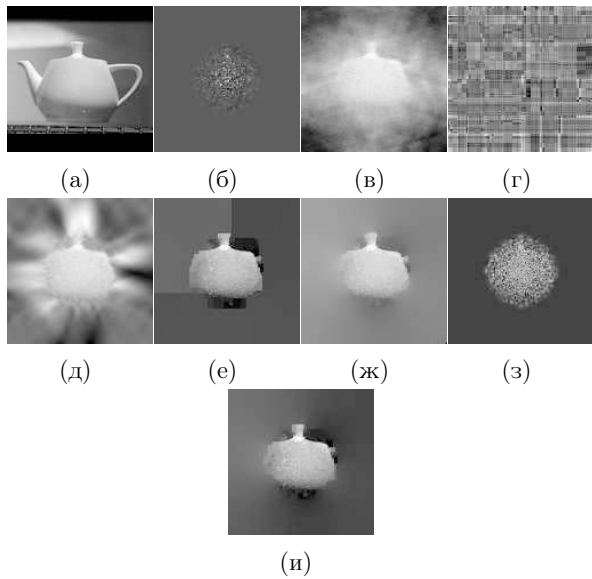


Рис. 8. Компьютерное моделирование восстановления фантомного изображения объекта исследования (а), 109.375×109.375 мкм, 128×128 пикселей, по результатам освещения объекта 1024 шаблонами освещения, соответствующими случайной модуляции фазы в каждом пикселе: (б) традиционным методом (2), методами сжатых измерений при выборе в качестве регуляризирующего функционала нормы L^1 в базисе (в) DCT и (г) преобразования Хаара, см. формулу (4) в разд. 2.2, (д) квадратичной кривизны, см. формулу (5) в разд. 2.3, (е) анизотропной полной вариации (7) и (ж) ее альтернативного определения (8), см. разд. 2.3, (з) линейной редукции измерения, см. разд. 3.1, и (и) нового алгоритма редукции измерения, см. разд. 3.2

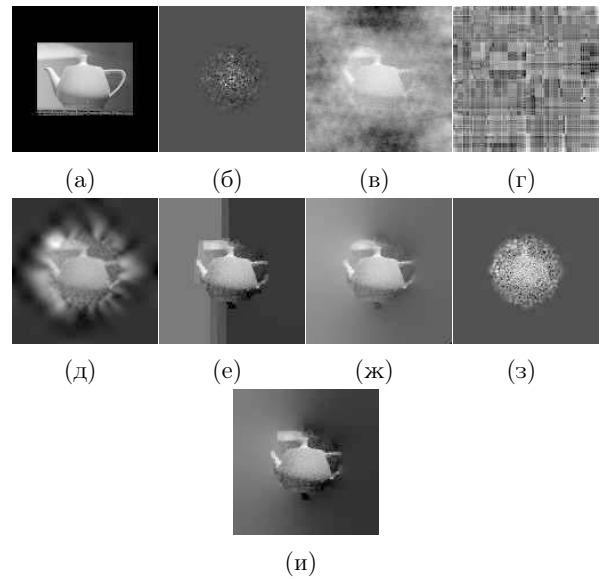


Рис. 9. Компьютерное моделирование восстановления фантомного изображения объекта исследования (а), 109.375×109.375 мкм, 128×128 пикселей, по результатам освещения объекта 1024 шаблонами освещения, соответствующими случайной модуляции фазы в каждом пикселе: (б) традиционным методом (2), методами сжатых измерений при выборе в качестве регуляризирующего функционала нормы L^1 в базисе (в) DCT и (г) преобразования Хаара, см. формулу (4) в разд. 2.2, (д) квадратичной кривизны, см. формулу (5) в разд. 2.3, (е) анизотропной полной вариации (7) и (ж) ее альтернативного определения (8), см. разд. 2.3, (з) линейной редукции измерения, см. разд. 3.1, и (и) нового алгоритма редукции измерения, см. разд. 3.2

1. Вычисление оценки $\hat{u} = R_*\xi$ (10) линейной несмещённой редукции.

2. Переход к собственному базису модели интерпретации измерения, в котором искомое значение TUf интересующей исследователя характеристики объекта исследования считается разреженным, т.е. содержит много нулевых компонент по сравнению с его размерностью. Обозначим соответствующее преобразование T , а его результат — $T\hat{u}$.

3. Формирование оценки $T\hat{u}_{thr}$ по правилу $(T\hat{u}_{thr})_i \stackrel{\text{def}}{=} 0$, если гипотеза « $(T\hat{u})_i = 0$ » принимается, а именно, если выполнено условие

$$(T\hat{u})_i^2 < \tau(T\Sigma_{R_*\xi}T^*)_{ii}, \quad (13)$$

иначе $(T\hat{u}_{thr})_i \stackrel{\text{def}}{=} (T\hat{u})_i$, $i = 1, \dots, \dim \mathcal{U}$, где $\Sigma_{R_*\xi} = U(A^*\Sigma_{\nu}^{-1}A)^{-1}U^*$ — ковариационный оператор оценки $R_*\xi$, $\tau \geq 0$ — параметр критерия (13).

4. Возвращение к исходному базису: $\hat{u}_{thr} \stackrel{\text{def}}{=} T^{-1}T\hat{u}_{thr}$.

Если выполнено условие (9), шаги 1–4 решают задачу восстановления изображения. Но интерес представляет противоположный случай, так как именно он реализуется в случае $\dim \mathcal{X} < \dim \mathcal{U}$ (число шаблонов освещения меньше числа пикселей). Тогда по тем же причинам, что и при линейной редукции, после шага 4 восстанавливается лишь составляющая UA^-Af , и для восстановления составляющей $U(I - A^-A)f$ требуется, как и в методе сжатых измерений, привлечь дополнительную информацию. Воспользуемся в качестве такой информации используемым в методе сжатых измерений регуляризирующим функционалом Ω , считая, что восстанавливаемое изображение тем более правдоподобно, чем меньше значение этого функционала. Таким образом, завершающие шаги алгоритма имеют следующий вид.

5. Вычисление наиболее соответствующей дополнительной информации версии составляющей $U(I - A^-A)f$ (любым) решением задачи минимизации

ции

$$\Omega(\hat{u}_{thr} + U(I - A^-A)g) \sim \min_{g \in \mathcal{F}}. \quad (14)$$

Обозначим результат действия оператора $U(I - A^-A)$ на ее решение \hat{v}_{thr} .

6. Восстановление изображения как суммы $\hat{u}_{thr} + \hat{v}_{thr}$.

В непосредственно рассматриваемом случае $U = I$ задача (14) упрощается до

$$\Omega(\hat{u}_{thr} + v) \sim \min_{v \in \mathcal{F}: Av=0}. \quad (15)$$

Величина $\tau \geq 0$ есть параметр алгоритма. Он отражает приемлемый для исследователя компромисс между подавлением шума (чем больше τ , тем больше подавляется шум) и искажением изображений, компоненты которых близки к нулю. Для выбора значения τ исследователь может смоделировать регистрацию тестового изображения, содержащего требуемые интересующие исследователя «тонкие» детали, и использовать максимальное значение параметра, при котором эти детали сохраняются, или, аналогично [39], минимизировать среднюю погрешность восстановления по набору тестовых данных. Шаг 3 можно также интерпретировать как замену исходного оператора U на такой, ядру которого принадлежат наиболее поражённые шумом компоненты оценки.

4. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ

Сравнение описанных выше алгоритмов было проведено при моделировании схемы, изображенной на рис. 1. Возможны различные способы выбора шаблонов освещения, от детерминированных (например, шаблонов Адамара) до (псевдо)случайных. В настоящей работе использованы два варианта последних.

В первом варианте использована псевдослучайная бинарная амплитудная модуляция, т.е. на вход оптического волокна подается псевдослучайное изображение, яркость каждого пикселя которого с одинаковой вероятностью принимает либо нулевое, либо единичное значение. Такая модуляция может быть реализована с помощью микрозеркального модулятора. Во втором варианте использована псевдослучайная фазовая модуляция, т.е. на вход оптического волокна подается псевдослучайное изображение, каждый пиксель которого имеет единичную яркость, но вносится псевдослучайная фазовая задержка от 0 до 2π . Обычно фазовая

модуляция осуществляется с помощью жидкокристаллического модулятора света.

Изменение пространственного профиля интенсивности при распространении света в многомодовом волокне рассчитывалось с помощью библиотеки pyMMF (<https://github.com/vongostev/pyMMF>). При моделировании использованы следующие значения параметров: диаметр оптического волокна 31.25 мкм, длина волокна 50 см, отсутствие изгиба, аппроксимация пространственного распределения показателя преломления параболическим профилем с $n_1 = 1.4613$ и $a = 31.25$ мкм, численная апертура 0.275, длина волны 632.8 нм.

На рис. 2–5 показаны результаты применения методов восстановления изображения, рассмотренных в предыдущих разделах, при случайной погрешности измерений с дисперсией 0.1 и бинарной амплитудной модуляции. Используемые в вариантах метода сжатых измерений значения параметра регуляризации выбраны методом L -кривой (см. разд. 2.4). В случае метода редукции измерения при использовании дополнительной информации об объекте в качестве функционала Ω в (14) и (15) использована анизотропная полная вариация (7), поскольку именно этот функционал показал лучшие результаты по сравнению с другими вариантами метода сжатых измерений. На рис. 3, 4 видно, как ограниченность диаметра оптоволокна приводит к ухудшению качества восстановленного изображения в целом и в особенности у его краев.

Видно, что предлагаемый вариант метода редукции измерения показывает сравнимые и часто лучшие результаты, чем варианты метода сжатых измерений. Примечательно, что несмотря на теоретическое преимущество варианта полной вариации (7), вариант (8) на рис. 3–5 показал близкие результаты к результатам варианта (7), а в ряде случаев результаты использования функционала (8) оказались лучше (7). Представляется, что это связано с большим числом перепадов яркости на объектах, изображенных на рис. 3–5 по сравнению с рис. 2, в связи с чем «более мягкая» регуляризация функционалом (8) приводит к меньшей погрешности благодаря меньшему сглаживанию этих перепадов.

На рис. 6–9 показаны результаты компьютерного моделирования при получении шаблонов освещения случайной фазовой модуляцией. Сравнение с рис. 2–5 показывает, что сделанные выводы верны и в этом случае.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен и применен новый метод редукции измерений для формирования изображений с помощью одиночных многомодовых волокон. Показано, что конечное число мод в волокне не является принципиальным препятствием для получения изображений в ВФО. Проведенный в работе анализ ряда вариантов метода сжатых измерений и варианта метода редукции измерения для формирования изображений в ВФО показал осуществимость этой задачи при числе шаблонов освещения, существенно меньшем числа пикселей восстанавливаемого изображения, несмотря на ограниченное число мод, способных распространяться по оптическому волокну от модулятора до объекта. Выбор алгоритма восстановления ВФО оказывает значительное влияние на погрешность результата, в связи с чем приведен пример ситуации, когда в методе сжатых измерений использование в качестве регуляризирующего функционала полной вариации с нормой L^2 приводит к лучшим результатам, чем использование функционала полной вариации с нормой L^1 . Продемонстрировано, что предлагаемый вариант метода редукции измерения показывает сравнимые результаты с вариантами метода сжатых измерений. Кроме того, применение метода редукции приводит к менее ярко выраженным артефактам в области, где оптическое волокно слабо передает освещение. Ср., например, рис. 5e и 5u, где метод сжатых измерений восстанавливает удаленные от центра участки как две области постоянной яркости, а метод редукции не восстанавливает резкую границу областей. При этом для получения рис. 5u для формулирования дополнительной информации использован такой же регуляризирующий функционал, как и в варианте метода сжатых измерений, использованном для получения рис. 5e. Необходимость использования такой дополнительной информации, отличающая предложенный вариант метода редукции измерений от его непосредственных предшественников, как указано в разд. 3.2, обусловлена тем, что без нее в результате редукции была бы восстановлена лишь составляющая изображения, непосредственно влияющая на результат измерений.

Полученные результаты будут полезны при разработке эндоскопических систем реального времени на основе технологии ВФИ.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-12-00155).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Белинский, Д. Н. Клышко, ЖЭТФ **105**, 487 (1994) [A. V. Belinskii and D. N. Klyshko, JETP **78**, 259 (1994)].
2. Т. В. Pittman, Y. H. Shih, D. V. Strekalov, and A. V. Sergienko, Phys. Rev. A **52**, R3429 (1995).
3. А. Гатти, Э. Брамбилла, М. Баке и др., в *Квантовое изображение*, под ред. М. И. Колобова, А. С. Чиркина, Физматлит, Москва (2009), с. 96 [A. Gatti, E. Brambilla, M. Bache et al., in *Quantum Imaging*, ed. by M. I. Kolobov, Springer (2007), p. 79].
4. J. H. Shapiro, Phys. Rev. A **78**, 061802 (2008).
5. Д. П. Агапов, И. А. Беловолов, П. П. Гостев и др., ЖЭТФ **162**, 215 (2022) [D. P. Agapov, I. A. Belovolov, P. P. Gostev et al., JETP **135**, 188 (2022)].
6. L. V. Amitonova and J. F. de Boer, Opt. Lett. **43**, 5427 (2018).
7. C. Liu, J. Chen, J. Liu et al., Opt. Exp. **26**, 10048 (2018).
8. T. Fukui, Y. Kohno, R. Tang et al., J. Lightwave Technol. **39**, 839 (2021).
9. T. Fukui, Y. Nakano, and T. Tanemura, J. Opt. Soc. Amer. B **38**, 379 (2021).
10. A. M. Caravaca-Aguirre and R. Piestun, Opt. Exp. **25**, 1656 (2017).
11. L. M. Xiang, Y. Li, J. Gao et al., Opt. Exp. **28**, 13662 (2020).
12. D. Yang, M. Hao, G. Wu et al., Opt. Lasers Eng. **149**, 106827 (2022).
13. D. L. Donoho, IEEE Trans. Inf. Theory **52**, 1289 (2006).
14. E. J. Candes and T. Tao, IEEE Trans. Inf. Theory **52**, 5406 (2006).
15. E. J. Candes and M. B. Wakin, IEEE Signal Processing Magazine **25**, 21 (2008).
16. M. F. Duarte, M. A. Davenport, D. Takhar et al., IEEE Signal Processing Magazine **25**, 83 (2008).
17. S. Han, H. Yu, X. Shen et al., Appl. Sci. **8**, 1379 (2018).
18. G. M. Gibson, S. D. Johnson, and M. J. Padgett, Opt. Exp. **28**, 28190 (2020).
19. P. Zerom, K. W. C. Chan, J. C. Howell et al., Phys. Rev. A **84**, 061804 (2011).

20. W. Gong and S. Han, *Phys. Lett. A* **376**, 1519 (2012).
21. W. Gong and S. Han, *Sci. Rep.* **5**, 9280 (2015).
22. P. A. Morris, R. S. Aspden, J. E. C. Bell et al., *Nat. Commun.* **6**, 5913 (2015).
23. J. Du, W. Gong, and S. Han, *Opt. Lett.* **37**, 1067 (2012).
24. X. Shi, X. Huang, S. Nan et al., *Laser Phys. Lett.* **15**, 045204 (2018).
25. L. Mertens, M. Sonnleitner, J. Leach et al., *Sci. Rep.* **7**, 42164 (2017).
26. T. Jiang, W. Tan, X. Huang et al., *J. Opt.* **23**, 075201 (2021).
27. O. Katz, Y. Bromberg, Y. Silberberg et al., *Appl. Phys. Lett.* **95**, 131110 (2009).
28. S. H. Chan and Y. M. Lu, in *IEEE Global Conference on Signal and Information Processing (GlobalSIP)* Atlanta, GA (2014), p. 312.
29. А. В. Гончарский, А. С. Леонов, А. Г. Ягола, *Ж. вычислит. матем. и матем. физ.* **13**, 294 (1973) [A. V. Goncharkii, A. S. Leonov, and A. G. Yagola, *USSR Comp. Math. Math. Phys.* **13**, 25 (1973)].
30. P. C. Hansen and D. P. O'Leary, *SIAM J. Sci. Comp.* **14**, 1487 (1993).
31. C. L. Lawson and R. J. Hanson, *Solving Least Squares Problems* SIAM, Philadelphia, PA (1995).
32. G. H. Golub, M. Heath, and G. Wahba, *Technometrics* **21**, 215 (1979).
33. P. C. Hansen, *BIT* **27**, 534 (1987).
34. M. Marquez, P. Meza, H. Arguello et al., *Opt. Exp.* **27**, 17795 (2019).
35. S. Lu and S. V. Pereverzev, *Numerische Math.* **118**, 1 (2010).
36. Z. Wang, *J. Comp. Appl. Math.* **236**, 1815 (2012).
37. M. Belge, M. E. Kilmer, and E. L. Miller, *Inverse Problems* **18**, 1161 (2002).
38. C. Brezinski, M. Redivo-Zaglia, G. Rodriguez et al., *Numerische Math.* **94**, 203 (2003).
39. J. Chung and M. I. Espanol, *Inverse Problems* **33**, 074004 (2017).
40. Ю. П. Пытьев, *Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем*, Физматлит, Москва (2012).
41. Ю. П. Пытьев, *Математические методы интерпретации эксперимента*, Высшая школа, Москва (1989).
42. D. A. Balakin, A. V. Belinsky, and A. S. Chirkin, *Quantum Inf. Process.* **18**(3) (2019).
43. D. A. Balakin and A. V. Belinsky, *Quant. Inf. Process.* **19**, 316 (2020).
44. D. A. Balakin and Yu. P. Pyt'ev, *Pattern Recognition and Image Analysis* **31**, 601 (2021).