

# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОЛИТОНОВ С ГРАНИЦЕЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ ПЛАСТИНЫ

*В.В. Киселев*\*, *А.А. Расковалов*

*Институт физики металлов им. М.Н. Михеева Уральского отделения  
Российской академии наук, 620041, Екатеринбург, Россия  
Физико-технологический институт Уральского федерального университета  
620002, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 18 апреля 2022 г.,  
после переработки 06 июня 2022 г.  
Принята к публикации 06 июня 2022 г.

В рамках фокусирующего нелинейного уравнения Шредингера найдены и проанализированы солитонные состояния полубесконечной ферромагнитной пленки при частичном закреплении спинов на её границе. Показано, что солитоны делятся на два класса. Первый из них представляют локализованные вблизи края пленки колебания намагниченности с дискретными частотами. Второй содержит движущиеся частице-подобные объекты, ядра которых сильно деформируются у границы пленки, а затем упруго отражаются от нее, восстанавливая форму солитонов, типичных для протяженного образца. Получена серия законов сохранения для волнового поля, обеспечивающая локализацию солитонных колебаний около границы образца и упругое отражение от нее движущихся солитонов. Показано, что изменение фазы внутренней прецессии солитона при отражении зависит от характера закрепления краевых спинов.

DOI: 10.31857/S0044451022110104  
EDN: KZITUW

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Пленки железо-иттриевых гранатов с толщиной от нескольких микрон до десятков микрон и длиной от нескольких до десятков сантиметров обладают свойствами ферромагнитной среды в интервале от 1 ГГц до 20 ГГц. Этот частотный интервал интенсивно исследуется благодаря возможности возбуждения распространяющихся вдоль пленки обменно-дипольных спиновых волн. Одним из главных результатов такого изучения явилось обнаружение солитонов огибающей спиновых волн в ферромагнитных пленках [1–3]. Если в теории линейных волн об эффектах обменного и диполь-дипольного взаимодействий принято говорить, когда соответствующие энергии сравнимы по порядку величины, то условия образования и структура даже слабонелинейных солитонов во многом определяются не соотношением энергий, а конкуренцией двух типов пространственной дисперсии – обменной и магнитостатической [4].

Кроме того, учет магнитостатики делает задачу не только неоднородной, но и нелокальной, и требует корректного учета краевых условий на поверхности образца.

Для анализа малоамплитудных возбуждений в магнитных пленках обычно используется локальное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ):

$$i\partial_\tau\psi - \frac{\partial_k^2\omega(k)}{2}\partial_X^2\psi + g|\psi|^2\psi = 0. \quad (1)$$

Комплексное поле  $\psi(X, \tau)$  описывает пространственно-временную модуляцию бегущей активационной волны

$$\psi(X, \tau)e^{i kx + i \omega(k) t} \equiv \psi e^{i \theta},$$

где  $k$  и  $\omega(k)$  – волновое число и частота основной гармоники,  $x$  и  $t$  – пространственная координата и время,  $X, \tau$  – соответствующие медленные переменные. Отклонения нормированной намагниченности  $m_i(x, t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) от равновесного положения  $(0, 0, 1)$  выражаются через  $\psi(X, \tau)$ :

$$m_1 + im_2 = \psi e^{i\theta}, \quad m_3 \approx -|\psi|^2/2. \quad (2)$$

Упрощенный вывод НУШ предполагает дифференцируемость закона дисперсии линейных спиновых

\* E-mail: kiseliev@imp.uran.ru

волн  $\omega(k)$  по волновому числу  $k$ . Постоянная взаимодействия волн  $g$  традиционно вычисляется в пределе  $k \rightarrow 0$  из разложения по амплитуде колебаний частоты однородного ферромагнитного резонанса [5]. Однако в области малых волновых чисел ( $|kd| \ll 1$ ,  $d$  — толщина пленки) частота обменно-дипольных спиновых волн  $\omega(k)$  является недифференцируемой функцией от  $k$  [6]. В работах [4, 7] показано, что при волновых числах  $k$  и частотах  $\omega(k)$ , удовлетворяющих условиям

$$L \gg \lambda \gg k^{-1} > d \gg a, \quad \lambda \ll c/\omega, \quad \partial_k^2 \omega(k) \neq 0, \quad (3)$$

допустима последовательная редукция уравнений нелинейной и нелокальной динамики ферромагнитной пластины при отсутствии закрепления спинов на её поверхности и корректном учете обменных и магнитостатических взаимодействий к упрощенной локальной модели (1). Здесь  $L$  — размер образца,  $\lambda$  — характерный размер магнитных неоднородностей,  $a$  — постоянная решетки,  $c$  — скорость света. Окрестности точек нулевой дисперсии, где  $\partial_k^2 \omega(k) \approx 0$  (из-за конкуренции обменной и магнитостатической дисперсий), а также длинноволновые возбуждения с  $|kd| < 1$ , требуют отдельного рассмотрения [4]. При последовательном выводе НУШ константа взаимодействия волн учитывает неоднородности распределения намагниченности вдоль нормали к пластине и нетривиально зависит от волнового вектора основной гармоники и толщины пластины. В результате удастся описать особенности взаимодействия неоднородных по толщине пластины и распространяющихся вдоль пластины спиновых волн с близкими значениями не равных нулю волновых векторов. Использование этих результатов позволяет более тщательно перейти от модели (1) к наблюдаемым величинам.

В достаточно тонких пленках при свободных поверхностных спинах переменным магнитным полем возбуждается только нижняя ветвь спектра обменно-дипольных волн с почти однородным распределением намагниченности вдоль нормали к пластине [8]. Для нее существуют протяженные области волновых чисел (3), в которых  $g > 0$ ,  $\partial_k^2 \omega(k) < 0$ . А значит справедлив критерий Лайтхилла [9]

$$g \partial_k^2 \omega < 0, \quad (4)$$

допускающий формирование экспоненциальных «светлых» солитонов из локализованных импульсов внешнего воздействия. В этом случае модель (1) масштабными преобразованиями приводится к стандартному виду фокусирующего НУШ:

$$i \partial_t \psi + \partial_x^2 \psi + 2|\psi|^2 \psi = 0. \quad (5)$$

В случае безграничной пластины ( $-\infty < x < \infty$ ) уравнение (5) эквивалентно условию коммутативности двух дифференциальных операторов, зависящих от комплексного спектрального параметра [10, 11]. Такое представление ( $U$ - $V$ -пара) позволяет найти отображение решений модели (5) в данные рассеяния вспомогательной спектральной задачи. В простейшем случае, когда  $\psi(x, t)$  стремится к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ , эволюция данных рассеяния определяется линейными уравнениями и вычисляется явно по заданному в начальный момент времени распределению намагниченности  $\psi(x, t = 0)$ . Обратное спектральное преобразование позволяет по данным рассеяния найти полное решение начально-краевой задачи для НУШ (5). Строго говоря, эти результаты применимы лишь для протяженных образцов. Поэтому основные приложения НУШ (5) и его обобщения нашли в нелинейной оптике и гидродинамике: при конструировании линий оптоволоконной связи и моделировании волновых процессов в водных бассейнах (см. [12–15] и цитированную там литературу).

В случае конечных интервалов изменения  $x$  невозможно получить простое отображение начально-краевых условий, сформулированных для исходных полей, в данные рассеяния. Тем не менее, традиционный метод обратной задачи рассеяния на всей оси  $-\infty < x < \infty$  позволяет решить ряд начально-краевых задач для волновых процессов на полуинтервале  $0 \leq x < \infty$  [16–19]. В случае НУШ (5) для поля  $\psi(x, t) = \chi(x, t)$  на полуоси  $0 \leq x < \infty$  интегрируемыми оказываются практически важные краевые условия:

$$[\partial_x \chi - \beta \chi]|_{x=+0} = 0; \quad (6)$$

$$\chi \rightarrow 0, \quad \partial_x \chi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Положительная или отрицательная постоянная поверхностной анизотропии  $\beta$  определяет характер закрепления спинов на краю пленки. С физической точки зрения параметр  $\beta$  учитывает одноионную анизотропию и/или внешнее магнитное поле на грани  $x = 0$  образца. Эффективное магнитное поле и ось анизотропии направлены по нормали к развитой поверхности пленки.

В предельном случае  $\beta \rightarrow 0$  первое соотношение (6) переходит в условие Неймана  $\partial_x \chi|_{x=+0} = 0$  (свободные спины на краю пластины); в формальном пределе  $|\beta| \rightarrow \infty$  оно сводится к условию Дирихле:  $\chi|_{x=+0} = 0$  (полное закрепление спинов в точке  $x = 0$ ).

В работах [16–19] предложена модификация метода обратной задачи рассеяния для решения НУШ

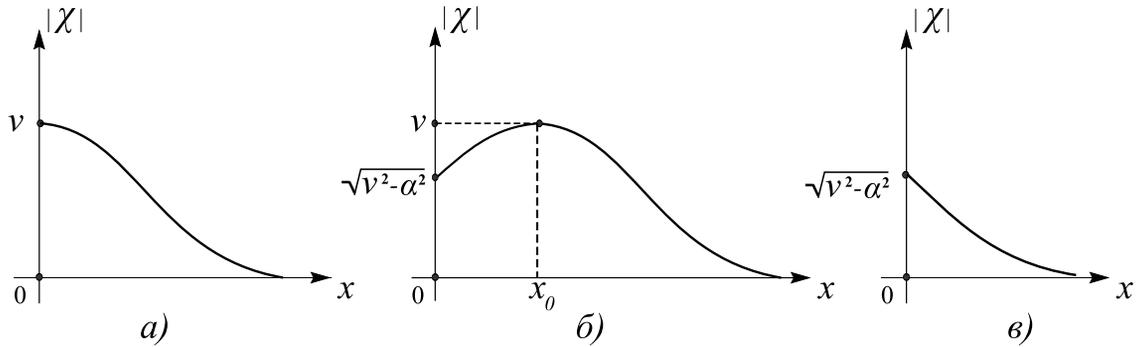


Рис. 1. Солитон, локализованный вблизи края образца, при  $\alpha = 0$  (а),  $\alpha < 0$ ,  $2\nu x_0 = \ln[(\nu + |\alpha|)/(\nu - |\alpha|)]$  (б) и  $\alpha > 0$  (в)

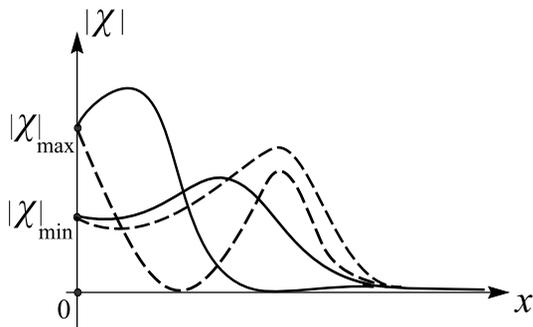


Рис. 2. Двухсолитонное возбуждение (60) при  $\alpha = \varepsilon|\alpha|$ ,  $\varepsilon = 1$  (сплошные линии) и  $\varepsilon = -1$  (штриховые линии) в предельных положениях, соответствующих значениям  $|\chi|(x = 0) = |\chi|_{min}$  и  $|\chi|(x = 0) = |\chi|_{max}$

на полуоси при заданном начальном возмущении  $\chi(x, t = 0)$  и краевых условиях (6), (7). Схема интегрирования является аналогом метода «изображений», используемого при решении линейных краевых задач электростатики с определенной пространственной симметрией. Однако в перечисленных работах анализ мультисолитонов отсутствует. Так, в [19] с самого начала обсуждаются лишь диспергирующие волны без солитонов. В данной работе мы исследуем начально-краевую задачу в полубесконечной ферромагнитной пленке при наличии спиновых волн и солитонов. Покажем, что солитоны вблизи границы пленки обладают качественно новыми свойствами, которые отсутствуют в безграничной среде. Исследуем изменения динамических свойств и строение солитонов при разной степени закрепления спинов на границе  $x = 0$  образца. Получим новые законы сохранения для нелинейных коллективных возбуждений в полубесконечной пленке.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 приведены формулы работ [16, 17], кото-

рые необходимы для теоретического описания нелинейной динамики полубесконечной ферромагнитной пленки. В разд. 3 дано решение начально-краевой задачи для НУШ на полуоси. Преимущество метода состоит не только в прямой связи с традиционной схемой интегрирования НУШ на интервале  $-\infty < x < \infty$  [11], но и в том, что в отличие от других подходов [18, 19], он допускает обобщение и открывает принципиальную возможность подробного анализа квазиодномерных солитонов и диспергирующих волн в полубесконечных образцах с интегрируемыми краевыми условиями [20] в рамках базовых моделей Ландау–Лифшица для гейзенберговского ферромагнетика и ферромагнетиков с квадратичной по намагниченности анизотропией [4].

В разд. 4 получены явные формулы для солитонных возбуждений в полубесконечной пластине. Показано, что существуют два класса солитонов. Мультисолитоны первого из них локализованы вблизи края  $x = 0$  пленки и представляют собой приграничные колебания намагниченности со специфическими частотными и амплитудными свойствами. Второй класс образуют движущиеся частицеподобные объекты, которые упруго отражаются от края пленки. На больших расстояниях от края пленки они трансформируются в типичные для безграничной среды прецессирующие магнитные солитоны, упруго сталкивающиеся друг с другом.

В разд. 5 для полубесконечной ферромагнитной пленки найдена серия локальных интегралов движения, каждый из которых представляет аддитивную сумму вкладов от солитонов и квазичастиц непрерывного спектра спиновых волн. Установлены дополнительные законы сохранения, которые обеспечивают локализацию солитонов вблизи границы образца или их отражение от нее.

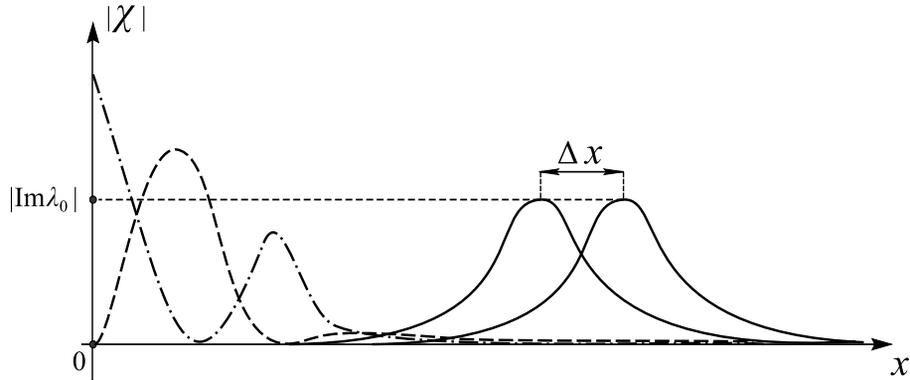


Рис. 3. Солитон (66) в моменты времени  $t = \pm t_0, t_0 \gg 1$  (сплошные линии),  $t = 0$  при  $\alpha = \infty$  (штриховая линия) и  $t = 0$  при  $\alpha = 0$  (штрихпунктирная линия)

### 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Напомним, что при решении начально-краевой задачи для НУШ на всей оси  $-\infty < x < \infty$  поле  $\psi(x, t)$  предполагается нужное число раз дифференцируемым по переменным  $x, t$ . Тогда уравнение (5) эквивалентно условию коммутативности двух операторов [11]:

$$[\partial_x - U(\lambda), \partial_t - V(\lambda)] = 0, \tag{8}$$

где

$$U(\lambda) = -\frac{i\lambda}{2} \sigma_3 + i(\psi^* \sigma_+ + \psi \sigma_-),$$

$$V(\lambda) = i\sigma_3 \left( \frac{\lambda^2}{2} - |\psi|^2 \right) - [(\partial_x \psi - i\lambda \psi) \sigma_- - (\partial_x \psi^* + i\lambda \psi^*) \sigma_+],$$

$\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — матрицы Паули,  $\sigma_{\pm} = (\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$ ,  $\lambda$  — комплексный спектральный параметр. Представление (8) можно переписать в проинтегрированном виде, используя матрицу  $T_0(x, y, \lambda)$  трансляции вдоль оси  $x$  из точки  $y$  в точку  $x$ . Здесь и далее, где это не вызывает недоразумений, не указываем зависимость от времени  $t$ . Матрица  $T_0(x, y, \lambda)$  удовлетворяет уравнениям [11]

$$\begin{aligned} \partial_x T_0(x, y, \lambda) &= U(x, \lambda) T_0(x, y, \lambda), \\ \partial_y T_0(x, y, \lambda) &= -T_0(x, y, \lambda) U(y, \lambda), \\ \partial_t T_0(x, y, \lambda) &= V(x, \lambda) T_0(x, y, \lambda) - T_0(x, y, \lambda) V(y, \lambda) \end{aligned} \tag{9}$$

с условиями  $T_0(x, x, \lambda) = I, \det T_0(x, y, \lambda) = 1$  и обладает свойством суперпозиции

$$T_0(x, z, \lambda) T_0(z, y, \lambda) = T_0(x, y, \lambda).$$

В частности, выполняется соотношение  $T_0(x, y, \lambda) = T_0^{-1}(y, x, \lambda)$ . Матричные функции  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  имеют специальный вид:

$$U^*(\lambda^*) = \sigma_2 U(\lambda) \sigma_2, \quad V^*(\lambda^*) = \sigma_2 V(\lambda) \sigma_2, \tag{10}$$

Поэтому из (9) следует свойство инволюции

$$T_0^*(x, y, \lambda^*) = \sigma_2 T_0(x, y, \lambda) \sigma_2. \tag{11}$$

Перейдем к рассмотрению НУШ (5) для поля  $\psi(x, t) = \chi(x, t)$  на полуоси  $0 \leq x < \infty$  при крайевых условиях (6), (7). Для включения такой задачи в классическую схему метода обратной задачи продолжим поле  $\chi(x, t)$  на всю ось четным образом. Для этого зададим  $\psi(x, t)$  в виде непрерывной кусочно-дифференцируемой функции

$$\psi(x, t) = \begin{cases} \chi(x, t), & x \geq 0, \\ \chi(-x, t), & x < 0. \end{cases} \tag{12}$$

В точке  $x = 0$  продолжение  $\psi(x, t)$  будет непрерывным:

$$\psi(x = +0, t) = \psi(x = -0, t) = \chi(x = 0, t),$$

но его первая производная претерпевает скачок [16, 17]:

$$\partial_x \psi|_{x=+0} - \partial_x \psi|_{x=-0} = 2\partial_x \chi(x = +0, t).$$

Эти соотношения позволяют трактовать прежнее краевое условие (6) как дополнительные ограничения на поле  $\psi(x, t)$  в точке  $x = 0$ :

$$\Delta \psi|_{x=0} = 0, \quad [\Delta \partial_x \psi - 2\psi]|_{x=0} = 0, \tag{13}$$

которые аналогичны таковым в процедуре интегрирования методом «изображений» линеаризованного НУШ на полуоси  $0 \leq x < \infty$ . Здесь  $\Delta f|_{x=0} = f(x = +0) - f(x = -0)$ .

Простой проверкой можно убедиться, что ограничение (13) эквивалентно связи [20]

$$V_+(\lambda)K(\lambda) - K(\lambda)V_-(\lambda) = 0, \quad (14)$$

где  $V_{\pm}(\lambda) \equiv V(\lambda)|_{x=\pm 0}$ ,  $K(\lambda) = \lambda I + i\beta\sigma_3$ ,  $I$  — единичная матрица. Для учета связи (14) модифицируем  $T_0(x, y, \lambda)$  и введем новую матрицу трансляции  $T(x, y, \lambda)$  [16]:

$$T(x, y, \lambda) = \begin{cases} T_0(x, y, \lambda), & xy > 0, \\ T_0(x, +0, \lambda)K(\lambda)T_0(-0, y, \lambda), & x > 0 > y, \\ T_0(x, -0, \lambda)K^{-1}(\lambda)T_0(+0, y, \lambda), & x < 0 < y, \end{cases} \quad (15)$$

включающую множители  $K(\lambda)$  и  $K^{-1}(\lambda)$ . Из представления (15) заключаем, что новая матрица переноса не является унимодулярной:

$$\det T(x, y, \lambda) = [\lambda^2 + \beta^2]^{(\text{sign } x - \text{sign } y)/2}. \quad (16)$$

Для нее справедливы соотношения

$$\begin{aligned} T(x, x, \lambda) &= I \text{ при } x \neq 0, \\ T(x, y, \lambda) &= T^{-1}(y, x, \lambda) \text{ при } x \neq y \end{aligned} \quad (17)$$

и

$$T(+0, -0, \lambda) = T^{-1}(-0, +0, \lambda) = K(\lambda). \quad (18)$$

При  $x \neq 0, y \neq 0$  с учетом (14), (15) получаем для  $T(x, y, \lambda)$  дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \partial_x T(x, y, \lambda) &= U(x, \lambda)T(x, y, \lambda), \\ \partial_y T(x, y, \lambda) &= -T(x, y, \lambda)U(y, \lambda), \\ \partial_t T(x, y, \lambda) &= V(x, \lambda)T(x, y, \lambda) - T(x, y, \lambda)V(y, \lambda) \end{aligned} \quad (19)$$

— те же, что и для безграничной пластины (9). Это позволяет включить краевую задачу (6), (7) для НУШ (1) на полуоси  $0 \leq x < \infty$  в схему обратной задачи рассеяния на всей оси  $-\infty < x < \infty$ . В то же время, специфика продолжения поля  $\psi(x, t)$  (12) приводит к модификации расчетов. Остановимся на этом подробнее.

### 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НУШ НА ПОЛУОСИ МЕТОДОМ «ИЗОБРАЖЕНИЙ»

#### Прямая задача рассеяния

Следуя стандартной схеме метода обратной задачи рассеяния на всей оси  $-\infty < x < \infty$  [11], введем матричные функции

$$T_{\pm}(x, t, \lambda) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left[ T(x, y, \lambda) \exp\left(-\frac{i\lambda y}{2} \sigma_3\right) \right] \quad (20)$$

— базисные решения Ёоста вспомогательной линейной системы [11, 16]

$$\partial_x T_{\pm} = U T_{\pm}. \quad (21)$$

Их асимптотическое поведение

$$T_{\pm}(x, t, \lambda) \rightarrow \exp\left(-\frac{i\lambda x \sigma_3}{2}\right) \text{ при } x \rightarrow \pm\infty$$

согласовано с условием (7).

Нетрудно проверить, что при  $x \geq 0$  матрица  $p(x, t)$  в разложении решения Ёоста  $T_+(x, t, \lambda)$  по обратным степеням  $\lambda$  (при  $\lambda \rightarrow \infty$ )

$$T_+(x, \lambda) = \left( I + \frac{p(x, t)}{\lambda} + \dots \right) \exp\left(-\frac{i\lambda x \sigma_3}{2}\right),$$

удовлетворяет соотношению

$$[\sigma_3, p] = 2(\chi^* \sigma_+ + \chi \sigma_-).$$

Отсюда сразу находим явное решение НУШ (5) при  $x \geq 0$  в терминах матричного элемента  $[T_+(x, t, \lambda)]_{21}$ :

$$\chi(x, t) = - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[ [T_+(x, t, \lambda)]_{21} \exp\left(\frac{i\lambda x}{2}\right) \lambda \right]. \quad (22)$$

Свойство четности продолжения  $\psi(x, t) = \psi(-x, t)$  (12) ведет к дополнительной симметрии матриц  $U$  и  $V$ :

$$\begin{aligned} U(x, \lambda) &= -\sigma_3 U(-x, -\lambda) \sigma_3, \\ V(x, \lambda) &= \sigma_3 V(-x, -\lambda) \sigma_3, \end{aligned}$$

с учетом которой из системы (19) следует пропорциональность матричных функций  $T(x, y, \lambda)$  и  $\sigma_3 T(-x, -y, -\lambda) \sigma_3$ . Коэффициент пропорциональности фиксируется равенством (18)

$$T(x, y, \lambda) = \text{sign}(xy) \sigma_3 T(-x, -y, -\lambda) \times \sigma_3 [\lambda^2 + \beta^2]^{(\text{sign } x - \text{sign } y)/2}, \quad \lambda \in R. \quad (23)$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$K^{-1}(\lambda) = -\frac{K(-\lambda)}{\lambda^2 + \beta^2}.$$

Поскольку  $K^*(\lambda^*) = \sigma_2 K(\lambda) \sigma_2$ , формулы (11), (15) сохраняют прежнюю редукцию для новой матрицы трансляции:

$$T^*(x, y, \lambda^*) = \sigma_2 T(x, y, \lambda) \sigma_2. \quad (24)$$

Из (16), (23), (24) находим ключевые свойства функций Йоста при  $\lambda \in R$ :

$$\begin{aligned} \det T_{\pm}(x, \lambda) &= [\lambda^2 + \beta^2]^{(\text{sign} x \mp 1)/2}, \\ T_{\pm}(x, \lambda) &= \pm \text{sign } x \sigma_3 T_{\mp}(-x, -\lambda) \sigma_3 \times \\ &\quad \times [\lambda^2 + \beta^2]^{(\text{sign} x \mp 1)/2}, \\ T^*(x, \lambda) &= \sigma_2 T(x, \lambda) \sigma_2. \end{aligned} \tag{25}$$

На вещественной  $\lambda$ -оси фундаментальные решения определены одновременно, поэтому они связаны матрицей перехода  $T(\lambda)$ :

$$T_-(x, \lambda) = T_+(x, \lambda) T(\lambda), \tag{26}$$

алгебраическая структура которой определяется редукциями (25):

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= \begin{pmatrix} a(\lambda) & -\bar{b}(\lambda) \\ b(\lambda) & \bar{a}(\lambda) \end{pmatrix}, \\ a(\lambda)\bar{a}(\lambda) + b(\lambda)\bar{b}(\lambda) &= \lambda^2 + \beta^2, \\ \bar{a}(\lambda) &= a^*(\lambda), \quad \bar{b}(\lambda) = b^*(\lambda), \\ a^*(-\lambda) &= -a(\lambda), \quad b(-\lambda) = -b(\lambda), \quad \lambda \in R. \end{aligned} \tag{27}$$

Введем обозначение  $T_{\pm}^{(i)}$  для  $i$ -ого столбца матрицы  $T_{\pm} = (T_{\pm}^{(1)}, T_{\pm}^{(2)})$ . Столбцы  $T_-^{(1)}(x, \lambda)$  и  $T_+^{(2)}(x, \lambda)$  решений Йоста аналитически продолжаютя с вещественной оси в область  $\text{Im} \lambda > 0$ , а столбцы  $T_-^{(2)}(x, \lambda)$  и  $T_+^{(1)}(x, \lambda)$  будут аналитическими функциями в нижней полуплоскости  $\text{Im} \lambda < 0$ , кроме, может быть, простых полюсов матрицы  $T_+(x, \lambda)$  при  $x < 0$  в точках  $\lambda = \pm i\beta$ , унаследованных от матрицы  $K^{-1}(\lambda)$ .

Из соотношения (26) получаем представление для  $a(\lambda)$  в форме

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \frac{\det[T_-^{(1)}(x, \lambda), T_+^{(2)}(x, \lambda)]}{\det T_+(x, \lambda)} = \\ &= [\lambda^2 + \beta^2]^{(1 - \text{sign} x)/2} \det[T_-^{(1)}(x, \lambda), T_+^{(2)}(x, \lambda)]. \end{aligned} \tag{28}$$

Отсюда следует, что функция  $a(\lambda)$  допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость  $\text{Im} \lambda > 0$ , где в общем случае имеет нули, которые будем предполагать простыми. Кроме того, она может иметь нуль в точке  $\lambda = i|\beta|$  (см. (15), (20), (28)). Можно показать, что элемент  $\bar{a}(\lambda)$  матрицы перехода продолжается с вещественной оси в область  $\text{Im} \lambda < 0$ , где выражается через  $a(\lambda^*)$ :  $\bar{a}(\lambda) = a^*(\lambda^*)$ .

Редукция  $a^*(-\lambda) = -a(\lambda)$  (27) переносится с вещественной оси в область  $\text{Im} \lambda > 0$ , где принимает вид

$$a^*(-\lambda^*) = -a(\lambda). \tag{29}$$

Согласно (29), нули функции  $a(\lambda)$  либо входят парами:

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \{\lambda_k, -\lambda_k^*\}, \quad \text{Im } \lambda_k > 0, \\ &\quad k = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, 2N; \end{aligned} \tag{30}$$

либо являются чисто мнимыми:

$$\lambda_j = \{i\nu_s\}, \quad \nu_s > 0, \quad s = 1, 2, \dots, M. \tag{31}$$

Если  $a(\lambda_i) = 0$ , то из (28) заключаем, что столбцы  $T_-^{(1)}(x, \lambda_j)$  и  $T_+^{(2)}(x, \lambda_j)$  пропорциональны:

$$T_-^{(1)}(x, \lambda_j) = \gamma(\lambda_j) T_+^{(2)}(x, \lambda_j). \tag{32}$$

Продолжение комбинации двух последних равенств (25) в комплексную  $\lambda$ -плоскость дает соотношение

$$\begin{aligned} T_{\pm}(x, \lambda) &= \pm \text{sign } x \sigma_1 T_{\mp}^*(-x, -\lambda^*) \sigma_1 \times \\ &\quad \times [\lambda^2 + \beta^2]^{(\text{sign} x \mp 1)/2}, \end{aligned} \tag{33}$$

где значения  $\lambda$  выбираются в областях аналитичности соответствующих столбцов. В частности, из (33) находим

$$\begin{aligned} T_-^{(1)}(x, \lambda) &= -\text{sign } x \sigma_1 T_+^{(2)*}(-x, -\lambda^*) \times \\ &\quad \times [\lambda^2 + \beta^2]^{(\text{sign} x + 1)/2}, \\ T_+^{(2)}(x, \lambda) &= \text{sign } x \sigma_1 T_-^{(1)*}(-x, -\lambda^*) \times \\ &\quad \times [\lambda^2 + \beta^2]^{(\text{sign} x - 1)/2}, \end{aligned} \tag{34}$$

где  $\text{Im} \lambda > 0$ .

С помощью (32), (34) выводим связь нормировочных постоянных:

$$\gamma(\lambda_k) \gamma^*(-\lambda_k^*) = -(\lambda_k^2 + \beta^2), \quad k = 1, 2, \dots, N; \tag{35}$$

$$|\gamma(i\nu_s)|^2 = \nu_s^2 - \beta^2 > 0, \quad s = 1, 2, \dots, M. \tag{36}$$

Ограничение (36) справедливо только при  $\nu_s > |\beta|$ .

В пределе больших  $\lambda$  функции Йоста имеют асимптотики [16]:

$$\begin{aligned} T_+(x, \lambda) &= \exp\left(-\frac{i\lambda x}{2} \sigma_3\right) [I + o(1)], \quad x > 0; \\ T_+(x, \lambda) &= \lambda^{-1} \exp\left(-\frac{i\lambda x}{2} \sigma_3\right) [I + o(1)], \quad x < 0; \\ T_-(x, \lambda) &= \lambda \exp\left(-\frac{i\lambda x}{2} \sigma_3\right) [I + o(1)], \quad x > 0; \\ T_-(x, \lambda) &= \exp\left(-\frac{i\lambda x}{2} \sigma_3\right) [I + o(1)], \quad x < 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Элемент  $a(\lambda)$  матрицы перехода восстанавливается по своим нулям, полюсам, асимптотическому

поведению при больших  $\lambda$  и коэффициенту отражения  $b(\lambda)$  [11, 16]:

$$\begin{aligned}
 a(\lambda) &= \\
 &= (\lambda + i\alpha) \prod_{s=1}^M \left( \frac{\lambda - i\nu_s}{\lambda + i\nu_s} \right) \prod_{k=1}^N \frac{(\lambda - \lambda_k)(\lambda + \lambda_k^*)}{(\lambda + \lambda_k)(\lambda - \lambda_k^*)} \times \\
 &\times \exp \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \frac{\ln[1 - |b(\mu)|^2(\mu^2 + \beta^2)^{-1}]}{\mu - \lambda} \right), \\
 &\quad \text{Im}\lambda > 0, \quad \alpha^2 = \beta^2. \quad (38)
 \end{aligned}$$

В формуле (38)  $N$  и  $M$  определяют соответственно число комплексных (30) и чисто мнимых (31) нулей коэффициента  $a(\lambda)$ .

Для конкретизации в соотношении (38) связи между параметром  $\alpha$  и постоянной анизотропии  $\beta$  построим подходящее представление для элементов матрицы перехода. Таковое следует из (26) с учетом (15) в пределе  $x \rightarrow +0$ :

$$T(\lambda) = T_+^{-1}(+0, \lambda) K(\lambda) T_-(-0, \lambda). \quad (39)$$

Используя (33), при  $x \rightarrow +0$  выражаем  $T_-(-0, \lambda)$  через  $T_+(+0, \lambda)$ :

$$T_-(-0, \lambda) = \sigma_1 T_+^*(+0, -\lambda^*) \sigma_1,$$

и переписываем (39) в виде

$$T(\lambda) = T_+^{-1}(+0, \lambda) (\lambda + i\beta\sigma_3) \sigma_1 T_+^*(+0, -\lambda^*) \sigma_1. \quad (40)$$

Принимая во внимание, что  $\det T_+(+0, \lambda) = 1$ , из (40) получаем полезные для дальнейшего анализа формулы для элементов матрицы перехода:

$$\begin{aligned}
 a(\lambda) &= (\lambda + i\beta)[T_+(+0, \lambda)]_{22}[T_+(+0, -\lambda^*)]_{22}^* - \\
 &- (\lambda - i\beta)[T_+(+0, \lambda)]_{12}[T_+(+0, -\lambda^*)]_{12}^*, \\
 &\quad \text{Im}\lambda > 0; \quad (41)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b(\lambda) &= -(\lambda + i\beta)[T_+(+0, \lambda)]_{21}[T_+(+0, -\lambda^*)]_{22}^* + \\
 &+ (\lambda - i\beta)[T_+(+0, \lambda)]_{11}[T_+(+0, -\lambda^*)]_{12}^*, \\
 &\quad \lambda \in R. \quad (42)
 \end{aligned}$$

Напомним, что  $a(\lambda)$  является аналитической функцией в верхней полуплоскости параметра  $\lambda$ . В (41) она выражена через элементы столбца  $T_+^{(2)}(\lambda)$ , которые аналитичны в той же области. Функция  $b(\lambda)$ , напротив, не обладает какими-либо определенными свойствами аналитичности и определена лишь при  $\lambda \in R$ . Поэтому в правой части (42) следует брать пределы компонент векторов  $T_+^{(2)}(\lambda)$  и  $T_+^{(1)}(\lambda)$  из областей их определения  $\text{Im}\lambda > 0$  и  $\text{Im}\lambda < 0$  на контур  $-\infty < \lambda < \infty$ .

Представление (41) в пределе  $\lambda \rightarrow +i0$  с учетом последней из формул (25) дает значение

$$a(\lambda = 0) = i\beta \det T_+(+0, \lambda) = i\beta.$$

С другой стороны, из дисперсионного соотношения (38) ввиду четности функции  $|b(\mu)|^2$  находим

$$a(\lambda = 0) = i\alpha(-1)^M.$$

Таким образом, связь параметров  $\alpha$  и  $\beta$  определена равенством

$$\beta = \alpha(-1)^M, \quad (43)$$

зависящим от числа мнимых нулей коэффициента  $a(\lambda)$ .

С помощью вспомогательного линейного уравнения (21) мы построили отображение решений исходной начально-краевой задачи для НУШ на полуоси в полный набор данных рассеяния. Он содержит спектральные плотности  $b(\lambda)$ , где

$$-\infty < \lambda < +\infty,$$

дискретные нули  $\lambda_j$  коэффициента  $a(\lambda)$  ( $\text{Im}\lambda_j > 0$ ) и нормировочные постоянные  $\gamma(\lambda_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, N + M$ ). В новых переменных задача интегрирования НУШ сводится к решению линейных задач. Из последнего уравнения (19) вытекает привычная зависимость данных рассеяния от времени:

$$\begin{aligned}
 a(t, \lambda) &= a(0, \lambda), \quad b(t, \lambda) = b(0, \lambda) e^{-i\lambda^2 t}, \\
 \gamma(\lambda_j, t) &= \gamma(0, \lambda_j) e^{-i\lambda_j^2 t}. \quad (44)
 \end{aligned}$$

Значения постоянных интегрирования  $b(0, \lambda)$ ,  $\lambda_j$ ,  $\gamma(0, \lambda_j)$  находим из уравнения (21) по заданному начальному распределению намагниченности  $\chi(x, t = 0)$ .

*Обратная задача рассеяния*

Спектральная функция  $b(\lambda, t)$  параметризует спин-волновые цуги, которые расплываются с течением времени из-за преобладания эффектов дисперсии над эффектами сжатия пакетов из-за взаимодействия гармоник. Нули  $\lambda_j$  коэффициента  $a(\lambda)$  параметризуют структурно-устойчивые частицеподобные объекты — солитоны. Долгоживущим магнитным солитонам в отсутствие диспергирующих волн соответствует коэффициент  $a(\lambda)$  с нулями при условии  $b(\lambda) = \bar{b}(\lambda) \equiv 0$ .

Для теоретического описания эволюции начального распределения намагниченности в полубесконечной пластине с краевыми условиями (6), (7) следует перейти от данных рассеяния к наблюдаемой

величине  $\chi(x, t)$ . Специфика работ [16, 17] состоит в том, что обратные отображения на интервалах

$$0 < x < \infty \quad \text{и} \quad -\infty < x < 0$$

оказываются разными и могут рассматриваться независимо. Хотя построенные в конечном счете решения НУШ — реальное при  $x > 0$  и «фиктивное» при  $x < 0$  — связаны симметрией (12), соответствующие им функции Йоста таким свойством не обладают.

Для построения искомых решений  $\psi(x, t) = \chi(x, t)$  задачи Коши для НУШ (5) с краевыми условиями (6), (7) на интервале  $0 < x < \infty$  исходим из первого столбца матричной связи (26) функций Йоста на вещественной  $\lambda$ -оси. Соответствующее равенство запишем в виде, удобном для дальнейших вычислений:

$$\begin{aligned} & \frac{T_-^{(1)}(x, \lambda)}{a(\lambda)} \exp\left(\frac{i\lambda x}{2}\right) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ & = T_+^{(1)}(x, \lambda) \exp\left(\frac{i\lambda x}{2}\right) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ & + T_+^{(2)}(x, \lambda) r(\lambda) \exp\left(\frac{i\lambda x}{2}\right), \quad \lambda \in R, \quad (45) \end{aligned}$$

где  $r(\lambda) = b(\lambda)/a(\lambda)$ . Зависимость от времени  $t$  пока опускаем.

Напомним, что векторная функция  $T_-^{(1)}(x, \lambda) a^{-1}(\lambda) \exp(i\lambda x/2)$  является аналитической в области  $\text{Im}\lambda > 0$  всюду, кроме полюсов, которые совпадают с нулями коэффициента  $a(\lambda)$  (38). В общем случае их положения определяются формулами (30), (31). При  $\alpha < 0$  у элемента  $a(\lambda)$  в области  $\text{Im}\lambda > 0$  появляется дополнительный особый нуль  $\lambda = i|\alpha|$ . Функция  $T_+^{(1)}(x, \lambda) \exp(i\lambda x/2)$  будет аналитической в нижней полуплоскости параметра  $\lambda$ . Асимптотическое поведение этих функций при  $x > 0$  и  $\lambda \rightarrow \infty$  дают формулы (см. (37), (38)):

$$\begin{aligned} & \frac{T_-^{(1)}(x, \lambda)}{a(\lambda)} \exp\left(\frac{i\lambda x}{2}\right) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \\ & T_+^{(1)}(x, \lambda) \exp\left(\frac{i\lambda x}{2}\right) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \end{aligned} \quad (46)$$

Процедура построения линейных интегральных уравнений обратной задачи рассеяния для НУШ на полуоси (при  $0 < x < \infty$ ) отличается от таковой на всей оси [10] лишь наличием дополнительных редукций и появлением у функции  $a(\lambda)$  особого нуля  $\lambda = i|\alpha|$  при  $\alpha < 0$ . Обсудим, к чему это приводит.

Рассмотрим кусочно-аналитическую функцию параметра  $\lambda$ :

$$F(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{T_-^{(1)}(x, \lambda)}{a(\lambda)} \exp\left(\frac{i\lambda x}{2}\right), & \text{Im}\lambda > 0, \\ T_+^{(1)}(x, \lambda) \exp\left(\frac{i\lambda x}{2}\right), & \text{Im}\lambda < 0. \end{cases} \quad (47)$$

В силу оценок (46) ее значения в любой точке  $\lambda$ -плоскости с помощью теоремы Коши выражаются [10] через интеграл вдоль вещественной оси от скачка функции  $F(x, \lambda)$  при переходе этой оси, а также через вычеты функции  $T_-^{(1)}(x, \lambda) a^{-1}(\lambda) \exp(i\lambda x/2)$  в нулях знаменателя  $a(\lambda)$ . При  $\alpha > 0$  остаются только вычеты в точках  $\lambda = \lambda_j$  (30), (31), в которых, согласно (32), имеем

$$\begin{aligned} & \text{Res}_{\lambda=\lambda_j} \left[ T_-^{(1)}(x, \lambda) a^{-1}(\lambda) \exp\left(\frac{i\lambda x}{2}\right) \right] = \\ & = \gamma(\lambda_j) T_+^{(2)}(x, \lambda_j) [a'(\lambda_j)]^{-1} \exp\left(\frac{i\lambda_j x}{2}\right). \end{aligned}$$

В отличие от [10] производные  $a'(\lambda_j)$  и нормировочные постоянные  $\gamma(\lambda_j)$  теперь связаны редукциями (29), (35), (36). При  $\alpha < 0$  элемент  $a(\lambda)$  в области своей аналитичности имеет особый нуль  $\lambda = i|\alpha|$ , поэтому у функции  $F(x, \lambda)$  в этой точке может появиться полюс. В действительности таковой отсутствует, так как согласно редукции (36)  $\gamma(i|\alpha|) = 0$ , а значит  $T_-^{(1)}(x, i|\alpha|) = 0$  при  $\alpha < 0, x > 0$ .

Интегральное представление для кусочно-аналитической функции  $F(x, \lambda)$  имеет вид

$$\begin{aligned} F(x, \lambda) = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_n \frac{c_n y(x, \lambda_n)}{\lambda - \lambda_n} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \frac{T_+^{(2)}(x, \mu) r(\mu) \exp\left(\frac{i\mu x}{2}\right)}{\mu - \lambda}, \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} & y(x, \lambda_n) = T_+^{(2)}(x, \lambda_n) \exp(i\lambda_n x/2), \\ & c_n = \gamma(\lambda_n)/a'(\lambda_n), \quad \gamma(\lambda_n)\gamma^*(-\lambda_n^*) = -(\alpha^2 + \lambda_n^2). \end{aligned}$$

В этой и последующих формулах величины  $c_n$  и  $r(\mu)$  зависят от времени:

$$c_n(t) = c_n(t=0) e^{-i\lambda_n^2 t}, \quad r(\mu, t) = r(\mu, t=0) e^{-i\mu^2 t}.$$

Последнее из свойств (25) переносится с вещественной  $\lambda$ -оси в комплексную плоскость и для столбцов  $T_+^{(1)}(x, \lambda)$  и  $T_+^{(2)}(x, \lambda)$  принимает вид

$$T_+^{(1)}(x, \lambda) = i\sigma_2 [T_+^{(2)}(x, \lambda^*)]^*, \quad \text{Im}\lambda \leq 0. \quad (49)$$

С учетом (49) представление (48) дает замкнутую систему линейных интегральных уравнений для расчета функций  $T_+^{(2)}(x, \lambda)$  при  $-\infty < \lambda < \infty$  и дискретных значений  $y(x, \lambda_n)$  ( $\text{Im}\lambda_n > 0$ ):

$$i\sigma_2[T_+^{(2)}(x, \lambda)]^* \exp\left(\frac{i\lambda x}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_n \frac{c_n y(x, \lambda_n)}{\lambda - \lambda_n} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \frac{T_+^{(2)}(x, \mu)}{\mu - \lambda + i0} r(\mu) \exp\left(\frac{i\mu x}{2}\right), \quad \lambda \in R;$$

$$i\sigma_2 y^*(x, \lambda_n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ix\lambda_n^*} + \sum_m \frac{c_m y(x, \lambda_m) e^{-ix\lambda_n^*}}{\lambda_n^* - \lambda_m} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \frac{T_+^{(2)}(x, \mu)}{\mu - \lambda_n^*} r(\mu) \exp\left(\frac{i\mu x}{2} - ix\lambda_n^*\right).$$

(50)

После того, как решение уравнений (50) найдено, формула (48) определяет значения функции  $F(x, \lambda)$  во всех точках верхней и нижней  $\lambda$ -полуплоскости.

Для солитонных состояний коэффициент отражения  $r(\mu) \equiv 0$  и значит функция  $F(x, \lambda)$  не имеет скачка на вещественной оси  $\lambda$ . Поэтому остаются только алгебраические уравнения для расчета функций  $y^*(x, \lambda_n)$  и  $y(x, \lambda_n)$ . После простых преобразований можно исключить  $y^*(x, \lambda_n)$  и получить замкнутую систему линейных уравнений для вычисления  $y(x, \lambda_n)$ :

$$y(x, \lambda_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ix\lambda_n} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sum_m \frac{c_m^* e^{ix(\lambda_n - \lambda_m^*)}}{\lambda_m^* - \lambda_n} + \sum_{p,m} \frac{c_m^* c_p e^{ix(\lambda_n - \lambda_m^*)} y(x, \lambda_p)}{(\lambda_m^* - \lambda_n)(\lambda_m^* - \lambda_p)}. \quad (51)$$

Формулы для мультисолитонов упрощаются, если вместо функций  $\gamma(\lambda, t)$  и  $a(\lambda)$  ввести

$$\tilde{\gamma}(\lambda, t) = \frac{\gamma(\lambda, t)}{\lambda + i\alpha},$$

$$\tilde{a}(\lambda) = \frac{a(\lambda)}{\lambda + i\alpha} = \prod_{s=1}^M \left( \frac{\lambda - i\nu_s}{\lambda + i\nu_s} \right) \prod_{k=1}^N \frac{(\lambda - \lambda_k)(\lambda + \lambda_k^*)}{(\lambda + \lambda_k)(\lambda - \lambda_k^*)}. \quad (52)$$

Тогда

$$c_n(t) = \tilde{\gamma}(\lambda, t) / \tilde{a}'(\lambda_n),$$

$$\tilde{\gamma}(\lambda_n, t) \tilde{\gamma}^*(-\lambda_n^*, t) = f(-\lambda_n), \quad (53)$$

$$\tilde{\gamma}(\lambda_n, t) = \tilde{\gamma}(\lambda_n, t=0) e^{-i\lambda_n^2 t},$$

где  $f(\lambda) = (\lambda + i\alpha)/(\lambda - i\alpha)$ .

Из системы (51) следует, что проекции векторов  $y(x, t, \lambda_n)$  независимы. Согласно (47), (48), (22), солитонные решения НУШ выражаются через вторые из них:

$$\chi(x, t) = - \sum_n c_n(t) y_2(x, t, \lambda_n), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (54)$$

и по построению удовлетворяют краевому условию (6) с соотношением (43):

$$[\partial_x \chi - \beta \chi]|_{x=0} = 0, \quad \beta = (-1)^M \alpha, \quad (55)$$

где  $M$  — число нулей коэффициента  $\tilde{a}(\lambda)$  вида  $\lambda = i\nu_s$  ( $\nu_s > |\alpha|$ ).

#### 4. АНАЛИЗ СОЛИТОНОВ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ ПЛАСТИНЕ

*Прецессирующие солитоны, локализованные около края пластины*

Обсудим вначале коллективные возбуждения, которые параметризуются мнимыми нулями функции  $\tilde{a}(\lambda)$  (52). Оказывается, что все они отвечают неподвижным солитонам, ядра которых имеют колебательные степени свободы и локализованы около края  $x = 0$  пластины.

Пусть  $M = 1$ ,  $\tilde{a}(\lambda) = (\lambda - i\nu)/(\lambda + i\nu)$  и  $\nu > |\alpha|$ . Из соотношений (53) найдем  $|\tilde{\gamma}(i\nu)| = \sqrt{(\nu - \alpha)/(\nu + \alpha)}$  и запишем выражение для  $c_1(t) \equiv c(t)$  в виде

$$c(t) = 2\nu \left( \frac{\nu - \alpha}{\nu + \alpha} \right)^{1/2} e^{i\varphi(t)}, \quad \varphi(t) = \nu^2 t + \delta_0, \quad (56)$$

где  $\delta_0$  — произвольная вещественная постоянная. Тогда система (51) дает компоненты вектора  $y(i\nu)$ :

$$y_1(i\nu) = \frac{ic^*(t)e^{-\nu x}}{2\nu\Delta(x)}, \quad y_2(i\nu) = \frac{1}{\Delta(x)}, \quad (57)$$

где  $\Delta(x) = e^{\nu x} + |c(t)/(2\nu)|^2 e^{-\nu x}$ , а формулы (54), (55) дают солитонное решение НУШ:

$$\chi(x, t) = - \frac{c(t)}{\Delta(x)} = - \frac{\nu\sqrt{\nu^2 - \alpha^2}}{\nu \text{ch}(\nu x) + \alpha \text{sh}(\nu x)} e^{i\nu^2 t + i\delta_0}, \quad \nu^2 > \alpha^2, \quad 0 < x < \infty, \quad (58)$$

с краевым условием  $\partial_x \ln \chi|_{x=0} = -\alpha$  (55). Солитон (58) примыкает к краю  $x = 0$  пластины. Согласно формулам (2), компоненты намагниченности в ядре солитона (58) совершают однородную прецессию с

частотой  $\omega = \nu^2$  вокруг нормали к плоскости пленки.

При  $\alpha = 0$  выражение (58) упрощается:

$$\chi(x, t) = -\frac{\nu}{\text{ch}(\nu x)} e^{i\nu^2 t + i\delta_0}, \quad (59)$$

и описывает солитон в отсутствие закрепления спинов на границе  $x = 0$  образца. В этом случае ширина солитона  $l \sim \nu^{-1}$ , частота его прецессии  $\omega = \nu^2$  и максимальная амплитуда  $A = \nu$  удовлетворяют алгебраическим связям, которые допускают экспериментальную проверку:

$$l^{-1} \sim \sqrt{\omega} \sim A.$$

Для полубесконечной пластины при отсутствии закрепления спинов на ее границе, когда  $\partial_x \chi|_{x=0} = 0$ , энергия модели (5) записывается в виде

$$H = \int_0^\infty (|\partial_x \chi(x, t)|^2 - |\chi(x, t)|^4) dx.$$

Слагаемые в скобках учитывают вклад обменно-дипольных взаимодействий, взаимодействие с постоянным внешним магнитным полем и объемную энергию одноосной магнитной анизотропии [5, 7]. Солитон (59) локализован около границы  $x = 0$  пленки, потому что притягивается к своему мнимому изображению  $\chi(-x, t)$  в нефизической области  $-\infty < x < 0$ .

Частичное закрепление спинов на границе пленки и краевое условие  $[\partial_x \chi - \beta \chi]|_{x=0} = 0$  связаны с появлением энергии поверхностной магнитной анизотропии в функции Гамильтона системы:

$$H = \int_0^\infty (|\partial_x \chi(x, t)|^2 - |\chi(x, t)|^4) dx + \beta |\chi(x = 0, t)|^2.$$

Когда постоянная  $\beta$  поверхностной анизотропии положительна, солитону энергетически выгоднее отодвинуться от границы образца. В случае  $\beta < 0$ , наоборот, полная энергия системы снижается, когда солитон плотнее прижимается к границе  $x = 0$  пленки. Степень сжатия ядра солитона растет с увеличением  $|\beta|$ . В общем случае параметр  $\alpha$  мультисолитонов соотношением (43) связан с постоянной поверхностной магнитной анизотропии  $\beta$ . Для солитона (58)  $M = 1$ , а значит,  $\beta = -\alpha$ . Структура такого солитона вблизи границы  $x = 0$  пленки количественно и качественно меняется при изменении величины и знака параметра  $\alpha$  (см. рис. 1).

Интересно, что при частичном закреплении спинов на краю пленки (при  $|\alpha| < \infty$ ) частота прецессии солитона (58) всегда больше определенного порогового значения

$$\omega = \nu^2 > \alpha^2 = \beta^2.$$

Для двухсолитонного возбуждения с двумя мнимыми нулями  $\lambda = i\nu_{1,2}$  (52) функции  $c_{1,2}(t)$  (53) имеют вид

$$c_{1,2}(t) = \pm 2\nu_{1,2} \left[ \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \right] \left( \frac{\nu_{1,2} - \alpha}{\nu_{1,2} + \alpha} \right)^{1/2} e^{i\varphi_{1,2}(t)},$$

$$\nu_{1,2} > |\alpha|; \quad \varphi_{1,2}(t) = \nu_{1,2}^2 t + \delta_{1,2},$$

где  $\delta_{1,2}$  — произвольные вещественные постоянные. Вычисления, аналогичные прежним, дают решение НУШ:

$$\chi(x, t) = -\frac{1}{D_0} [c_1(e^{\nu_2 x} + e^{-\nu_2 x} f(-i\nu_2)) + c_2(e^{\nu_1 x} + e^{-\nu_1 x} f(-i\nu_1))], \quad (60)$$

$$D_0 = e^{(\nu_1 + \nu_2)x} + e^{-(\nu_1 + \nu_2)x} f(-i\nu_1) f(-i\nu_2) + \left( \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \right)^2 [e^{-(\nu_1 - \nu_2)x} f(-i\nu_1) + e^{(\nu_1 - \nu_2)x} f(-i\nu_2)] + (c_1^* c_2 + c_1 c_2^*) (\nu_1 + \nu_2)^{-2},$$

где  $f(-i\nu) = (\nu - \alpha)/(\nu + \alpha)$ .

В данном случае  $M = 2$ , поэтому поле (60) удовлетворяет краевому условию  $\partial_x \ln \chi|_{x=0} = \alpha$  (55). Оно описывает нелинейную суперпозицию двух солитонов (58). Таковые локализованы около границы  $x = 0$  образца в слоях толщиной порядка  $\nu_1^{-1}$  и  $\nu_2^{-1}$ . Намагниченность в ядрах солитонов прецессирует с частотами  $\nu_1^2$  и  $\nu_2^2$  вокруг нормали к развитой поверхности пленки.

Из-за взаимодействия солитонов амплитуда каждого из них осциллирует с частотой  $|\nu_1^2 - \nu_2^2|$ . Если для односолитонного состояния (58) компонента  $m_3$  намагниченности на границе пленки была постоянной, то для двухсолитонного возбуждения она совершает колебания с частотой  $|\nu_1^2 - \nu_2^2|$  между двумя предельными значениями (см. рис. 2):

$$|\chi(x = 0, t)|^2 = (\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 [\nu_1^2 + \nu_2^2 - 2\alpha^2 - 2\sqrt{(\nu_1^2 - \alpha^2)(\nu_2^2 - \alpha^2)} \times \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))]^{-1}, \quad (61)$$

$$|\chi|_{\min}^2 = (\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 [(\nu_1^2 - \alpha^2)^{1/2} + (\nu_2^2 - \alpha^2)^{1/2}]^{-2},$$

$$|\chi|_{\max}^2 = (\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 [(\nu_1^2 - \alpha^2)^{1/2} - (\nu_2^2 - \alpha^2)^{1/2}]^{-2}.$$

Когда нет закрепления спинов (при  $\alpha = 0$ ), из (61) получаем

$$|\nu_2 - \nu_1| \leq |\chi(x = 0, t)| \leq |\nu_1 + \nu_2|.$$

В общем случае мультисолитоны, параметризуемые разными наборами мнимых нулей (31) коэффициента  $\tilde{a}(\lambda)$ , описывают серию долгоживущих приграничных колебаний намагниченности с дискретными частотами амплитудной и фазовой модуляции поля  $\chi(x, t)$ .

*Отражение движущихся солитонов от края пластины*

Каждая пара комплексно сопряженных нулей функции  $\tilde{a}(\lambda)$  (30) параметризует один движущийся частицеподобный объект. На больших расстояниях от края пластины он принимает форму солитона типичного для безграничной среды. Парные взаимодействия солитонов являются упругими: после столкновения у каждого из них изменяются только начальная фаза внутренних колебаний и координата центра. Между тем, около границы пленки из-за взаимодействия с ней ядро движущегося солитона сильно деформируется. Взаимодействие с границей можно формально трактовать как взаимодействие реального солитона с фиктивным солитоном изображения. Поэтому столкновение каждого солитона с краем пленки также оказывается упругим. Поясним утверждение на примере простейшего солитона, который параметризуют два нуля  $\lambda = \lambda_0, -\lambda_0^*$  ( $\text{Im}\lambda_0 > 0$ ) коэффициента  $\tilde{a}(\lambda)$  (52):

$$\tilde{a}(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_0)(\lambda + \lambda_0^*)}{(\lambda + \lambda_0)(\lambda - \lambda_0^*)}.$$

Из (53) находим функции  $c_{1,2}(t)$ :

$$c_1(t) = \frac{2\lambda_0(\lambda_0 - \lambda_0^*)}{(\lambda_0 + \lambda_0^*)} \gamma_0 e^{-i\lambda_0^2 t},$$

$$c_2(t) = \frac{2\lambda_0^*(\lambda_0 - \lambda_0^*)}{(\lambda_0 + \lambda_0^*)\gamma_0^*} f^*(-\lambda_0) e^{-i\lambda_0^{*2} t},$$

где  $\gamma_0$  — произвольная комплексная постоянная,  $f(\lambda) = (\lambda + i\alpha)/(\lambda - i\alpha)$ . Формулы (51), (54) определяют солитонное решение модели (5):

$$\chi(x, t) = -\frac{2}{D} \left( \frac{\lambda_0 - \lambda_0^*}{\lambda_0 + \lambda_0^*} \right) \times$$

$$\times \left[ \lambda_0 \gamma_0 e^{-i\lambda_0^2 t} (e^{i\lambda_0^* x} + f^*(-\lambda_0) e^{-i\lambda_0^* x}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_0^* f^*(-\lambda_0)}{\gamma_0^*} e^{-i\lambda_0^{*2} t} (e^{-i\lambda_0 x} + f(-\lambda_0) e^{i\lambda_0 x}) \right], \quad (62)$$

$$D = e^{-ix(\lambda_0 - \lambda_0^*)} + |f(-\lambda_0)|^2 e^{ix(\lambda_0 - \lambda_0^*)} +$$

$$+ \left( \frac{2|\lambda_0|}{\lambda_0 + \lambda_0^*} \right)^2 \times$$

$$\times \left( |\gamma_0|^2 e^{-i(\lambda_0^2 - \lambda_0^{*2})t} + \left| \frac{f(-\lambda_0)}{\gamma_0} \right|^2 e^{i(\lambda_0^2 - \lambda_0^{*2})t} \right) +$$

$$+ \left( \frac{\lambda_0 - \lambda_0^*}{\lambda_0 + \lambda_0^*} \right)^2 \times$$

$$\times \left( f(-\lambda_0) e^{i(\lambda_0 + \lambda_0^*)x} + f^*(-\lambda_0) e^{-i(\lambda_0 + \lambda_0^*)x} \right),$$

которое удовлетворяет краевому условию (55) с  $M = 2$ :

$$\partial_x \ln \chi|_{x=0} = \alpha = \beta. \quad (63)$$

В справедливости (63) легко убедиться простой проверкой с учетом равенств

$$\partial_x D|_{x=0} = 0, \quad 1 - f(-\lambda_0) = \frac{2i\alpha}{\lambda_0 + i\alpha},$$

$$1 + f(-\lambda_0) = \frac{2\lambda_0}{\lambda_0 + i\alpha}.$$

Формула (62) описывает процесс распространения частицеподобного возбуждения из внутренней части пластины, где  $0 < x < \infty$ , к границе  $x = 0$ , его отражение от границы и последующее удаление снова вглубь образца. Покажем, что на больших расстояниях от края пластины возбуждение (62) трансформируется в движущийся прецессионный солитон безграничного образца. Для этого заметим, что характер решения (62) при значениях  $x \gg 1$  определяется конкуренцией слагаемых в числителе с экспоненциальными множителями  $\exp[\pm u(x + \nu t)/2]$ ,  $\exp[\pm u(x - \nu t)/2]$  и ведущих членов в знаменателе с коэффициентами  $e^{\pm ux}$ ,  $e^{\pm u\nu t}$ , где  $\nu + iu = 2\lambda_0$ . Поскольку  $\text{Im}\lambda_0 > 0$ , параметр  $u$  всегда положителен. Примем для определенности, что параметр  $\nu$  также положителен. Значения  $u$  и  $\nu$  задают соответственно размер  $l_0 \sim u^{-1}$  солитона и его скорость. Действительно, при  $x \gg 1$  в пределе  $t \rightarrow \pm\infty$  в системах отсчета, связанных с солитоном, когда  $x \mp \nu t = \text{const}$ , его структура описывается выражениями

$$\chi(x, t \rightarrow \pm\infty) \approx$$

$$\approx \text{Im}\lambda_0 \exp \left[ i \left( \frac{(u^2 - \nu^2)t}{4} \pm \frac{\nu x}{2} - \frac{\pi}{2} + \varphi_{\pm} \right) \right] \times$$

$$\times \text{ch}^{-1} \left[ \frac{u}{2} (x \mp \nu t - x_{\pm}) \right], \quad (64)$$

$$\varphi_+ = \arg(\gamma_0 \lambda_0), \quad \varphi_- = -\arg \left( \frac{\lambda_0 f(-\lambda_0)}{\gamma_0} \right),$$

$$x_+ = \frac{2}{u} \ln \left| \frac{2\lambda_0 \gamma_0}{\lambda_0 + \lambda_0^*} \right|, \quad x_- = \frac{2}{u} \ln \left| \frac{2\lambda_0 f(-\lambda_0)}{(\lambda_0 + \lambda_0^*)\gamma_0} \right|.$$

Формулы (64) определяют простейший солитон безграничного образца [10, 11], движущийся вдоль оси  $x$  со скоростью  $\pm\nu$ . Из (64) следует, что на больших расстояниях от края  $x = 0$  пленки единственным результатом взаимодействия солитона с границей оказывается изменение фазы внутренней прецессии и сдвиг центра солитона. В системах отсчета, связанных с солитоном, намагниченность совершает прецессию с частотой  $\Omega = (u^2 + \nu^2)/4$  вокруг нормали к плоскости пленки. Изменение начальной фазы прецессии солитона после его отражения от границы имеет вид

$$\varphi_+ - \varphi_- = \arg \left[ \lambda_0 \left( \frac{\lambda_0 - i\alpha}{\lambda_0 + i\alpha} \right) \right].$$

Сдвиг фазы зависит от параметра закрепления поверхностных спинов  $\alpha$  ( $\alpha^2 = \beta^2$ ), а также от комплексного числа  $\lambda_0 = (\nu + iu)/2$ , вместо которого можно использовать подходящие наблюдаемые величины, например, ширину  $u^{-1}$  и скорость  $\nu$  солитона или скорость  $\nu$  солитона и частоту его прецессии  $\Omega$ . Отсюда следует, что измерение сдвига фазы солитона после его отражения от границы образца дает информацию о параметре  $\alpha$ . Это обстоятельство можно использовать для диагностики состояния спинов на краю пленки. В работе [21] теоретически предсказано и экспериментально подтверждено отражение солитона продольной деформации от торца нелинейно-упругого стержня. Подобные процессы характерны и для солитонов в ферромагнитных пленках.

Полному закреплению спинов на краю пленки соответствует условие Дирихле

$$\chi(x = 0, t) = 0, \tag{65}$$

которое получается из общего условия (55) в пределе  $|\beta| = |\alpha| \rightarrow \infty$ . В этом случае функция  $\tilde{a}(\lambda)$  (52) не имеет чисто мнимых нулей, так как их существование противоречит ограничению (36). Отсюда следует, что при полном закреплении спинов отсутствуют долгоживущие локализованные колебания около грани  $x = 0$  пластины. В то же время, в пластине допустимо формирование движущихся мультисолитонов. В пределе  $\alpha \rightarrow \infty$  функция  $f(-\lambda_0) \rightarrow -1$ , поэтому из (62) сразу находим аналитическое выра-

жение для простейшего из таких солитонов:

$$\begin{aligned} \chi(x, t) = & -\frac{2i}{D} \left( \frac{u}{\nu} \right) \exp \left( -\frac{i(u^2 - \nu^2)t}{2} \right) \times \\ & \times \left( \lambda_0 \gamma_0 \left[ \exp \left( \frac{i\nu x}{2} + \frac{u}{2}(x + \nu t) \right) + \right. \right. \\ & + \theta \exp \left( -\frac{i\nu x}{2} - \frac{u}{2}(x - \nu t) \right) \left. \right] + \\ & + \frac{\lambda_0^*}{\gamma_0^*} \left[ \exp \left( \frac{i\nu x}{2} - \frac{u}{2}(x + \nu t) \right) + \right. \\ & \left. \left. + \theta \exp \left( -\frac{i\nu x}{2} + \frac{u}{2}(x - \nu t) \right) \right] \right), \tag{66} \\ D = & 2 \left[ \text{ch}(ux) + \left( \frac{2|\lambda_0|}{\nu} \right)^2 \text{ch}(u\nu t + \ln |\gamma_0|^2) - \right. \\ & \left. - \theta \left( \frac{u}{\nu} \right)^2 \cos(\nu x) \right], \end{aligned}$$

где  $\nu + iu = 2\lambda_0$ ,  $\theta \equiv -1$ . Нетрудно проверить, что (66) удовлетворяет краевому условию (65).

Обратный случай свободных спинов ( $\alpha = 0$ ) описывается тем же выражением (66) при  $\theta \equiv 1$ . В этом случае  $f(-\lambda_0) = 1$ . В обоих случаях,  $\alpha = 0$  и  $\alpha \rightarrow \infty$ , после отражения от границы солитон имеет одинаковый сдвиг центра тяжести  $\Delta x = x_+ - x_- = 4u^{-1} \ln \gamma_0$  (рис. 3).

### 5. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛЕНКЕ

Рассмотренную процедуру можно интерпретировать как нелинейный аналог решения методом Фурье краевой задачи для линейного дифференциального уравнения. Действительно, в малоамплитудном пределе при отсутствии солитонов, когда справедливы соотношения

$$\alpha = \beta, \quad a(\lambda) = \lambda + i\beta, \quad [T_+^{(2)}(x, \lambda)]_2 \approx \exp \left( \frac{i\lambda x}{2} \right),$$

волновое поле  $\chi(x, t)$ , найденное по формулам (48), (22), имеет вид

$$\begin{aligned} \chi(x, t) \approx & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu r(\mu, t) e^{i\mu x} = \\ = & \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} d\mu b(\mu, t = 0) e^{-i\mu^2 t} \left[ \frac{e^{i\mu x}}{\mu + i\beta} + \frac{e^{-i\mu x}}{\mu - i\beta} \right], \\ & x \geq 0, \tag{67} \end{aligned}$$

и, следовательно, связано с коэффициентом отражения  $r(\mu)$  задачи рассеяния стандартным преобразованием Фурье. При переходе к правой части формулы (67) мы учли нечетность функции  $b(\lambda)$  (27). Непосредственной проверкой легко убедиться, что формула (67) дает решение линеаризованного уравнения (5) на интервале  $0 < x < \infty$  с краевыми условиями (6), (7).

Хорошо известно, что далекие фурье-компоненты функций, не имеющих особенностей на вещественной оси, экспоненциально малы [22]. В данной задаче из-за продолжения поля  $\chi(x)$  на всю вещественную ось его производные приобретают скачки в точке  $x = 0$ . Когда волновое поле  $\psi(x)$  или его производные имеют скачки на вещественной оси, экспоненциальная малость его фурье-компонент  $r(\mu)$  при  $\mu \rightarrow \infty$  превращается в степенную [22]. Указанную закономерность преобразований Фурье наследуют спектральные плотности  $b(\mu)$  обратной задачи рассеяния. В этом разделе мы получим степенное разложение для коэффициента  $b(\mu)$  при  $\mu \rightarrow \infty$ . Для построения чисто солитонных возбуждений в полубесконечной пластине отличие функций  $b(\mu)$  от тех, что были в безграничной пластине, не существенно, так как для солитонов по определению  $b(\mu) \equiv 0$ . В то же время, мы покажем, что условие  $b(\mu) \equiv 0$  приводит к дополнительным законам сохранения для волнового поля на границе образца, обеспечивающим локализацию солитонных колебаний вблизи края пленки и упругое отражения движущихся солитонов от границы образца.

Получим серию локальных интегралов движения для солитонов и диспергирующих волн в пластине из разложения по степеням  $\lambda^{-1}$  не зависящего от времени функционала  $a(\lambda)$ . Воспользуемся формулой (41) для  $a(\lambda)$ , в которую введем представление функции Йоста  $T_+(+0, \lambda)$  в виде

$$T_+(+0, \lambda) = (I + W(+0, \lambda)) e^{Z(+0, \lambda)}. \quad (68)$$

Разложение по обратным степеням  $\lambda$  антидиагональной матрицы  $W(x, \lambda)$  при  $x \geq 0$  получено в [11]:

$$W(x, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} [\omega_n^*(x)\sigma_+ - \omega_n(x)\sigma_-], \quad x \geq 0. \quad (69)$$

Здесь  $\omega_1 = \chi(x)$ , следующие коэффициенты определяются рекуррентно:

$$\omega_{n+1}(x) = -i \partial_x \omega_n(x) - \chi^*(x) \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k(x) \omega_{n-k}(x),$$

$$n = 1, 2, \dots$$

При  $n = 1$  второе слагаемое в правой части равенства отсутствует. Диагональная матрица  $Z(+0, \lambda)$  выражается через  $\omega_n(x)$ :

$$Z(+0, \lambda) = \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} \int_0^{\infty} [\chi^*(z) \omega_n(z)(I + \sigma_3) - \chi(z) \omega_n^*(z)(I - \sigma_3)] dz. \quad (70)$$

После простых вычислений находим первые наиболее важные из интегралов движения [16]:

$$\ln \frac{a(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 + \beta^2}} = -\frac{2iN}{\lambda} - \frac{2i}{\lambda^3} H + \dots, \quad (71)$$

где

$$N = \int_0^{\infty} |\partial_x \chi(x, t)|^2 dx - \frac{\beta}{2}$$

— число спиновых отклонений [23, 24], а

$$H = \int_0^{\infty} (|\partial_x \chi(x, t)|^2 - |\chi(x, t)|^4) dx + \beta |\chi(x=0, t)|^2 + \frac{\beta^3}{6}$$

— функция Гамильтона (энергия) магнитных колебаний в пленке.

С другой стороны, ряд по степеням  $\lambda^{-1}$  для функции  $a(\lambda)$  сразу следует из (38). Напомним, что  $\beta = (-1)^M \alpha$ . Сравнение двух разложений для  $a(\lambda)/\sqrt{\lambda^2 + \beta^2}$  дает явные формулы для  $N$  и  $H$  при наличии солитонов и диспергирующих волн в полубесконечной пластине:

$$N = \int_0^{\infty} n(\mu) d\mu + 2 \sum_{k=1}^N \text{Im} \lambda_k + \sum_{s=1}^M \nu_s - \frac{\alpha}{2};$$

$$H = \int_0^{\infty} \mu^2 n(\mu) d\mu + \frac{2}{3} \sum_{k=1}^N \text{Im} \lambda_k^3 - \frac{1}{3} \sum_{s=1}^M \nu_s^3 + \frac{\alpha^3}{6}. \quad (72)$$

Величина

$$n(\mu) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left( 1 - \frac{|b(\mu)|}{\mu^2 + \alpha^2} \right) > 0$$

имеет смысл плотности спин-волновых мод с волновым числом  $\mu$ . Дискретные слагаемые в (72) соответствуют аддитивным вкладам в интегралы движения от разных солитонов.

Покажем, что для полубесконечной пластины с краевыми условиями (6), (7), в отличие от случая

неограниченного образца, спектральная плотность спиновых волн  $b(\lambda)$  в пределе  $\lambda \rightarrow \infty$  имеет не экспоненциальную, а степенную малость. Для этого воспользуемся формулой (42). Вычисления упрощаются, если с помощью соотношения (49) правую часть равенства (42) выразить через те же функции, что были использованы в формуле (41) для коэффициента  $a(\lambda)$ :

$$b(\lambda) = (\lambda + i\beta)[T_+(+0, \lambda^*)]_{12}^*[T_+(+0, -\lambda^*)]_{22}^* + (\lambda - i\beta)[T_+(+0, \lambda^*)]_{22}^*[T_+(+0, -\lambda^*)]_{12}^*, \quad \lambda \in R. \quad (73)$$

Используя соотношения (68)–(70), (73), находим асимптотическое разложение при  $\lambda \gg 1$  для функции  $b(\lambda)$ :

$$b(\lambda) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2k-1}} (\omega_{2k} + i\beta\omega_{2k-1})|_{x=0} \times \exp\left(2i \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \chi^*(z) \omega_{2n}(z) \lambda^{-2n} dz\right). \quad (74)$$

Первый член ряда имеет вид

$$b(\lambda) = \left[\frac{2i}{\lambda^3} (\partial_x^3 \chi - \beta \partial_x^2 \chi + 4\beta |\chi|^2 \chi)\right]_{x=0} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right) \times \exp\left(\frac{2}{\lambda^2} \int_0^{\infty} \chi^*(z) \partial_z \chi(z) dz + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)\right).$$

Разумеется, для чисто солитонных состояний все предэкспоненциальные множители в (74) обращаются в нуль. Для простейшего солитона (58) в справедливости тождества

$$(\partial_x^3 \chi - \beta \partial_x^2 \chi + 4\beta |\chi|^2 \chi)\Big|_{x=0} = 0$$

легко убедиться прямой проверкой.

Таким образом, для мультисолитонов в полубесконечной пластине ( $0 \leq x < \infty$ ) существует серия нетривиальных связей между полем  $\chi(x, t)$  и его пространственными производными на границе  $x = 0$  образца.

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что в полубесконечной пластине при любом локализованном начальном распределении намагниченности кроме серии локальных интегралов движения, каждый из которых

представляет сумму аддитивных вкладов от солитонов и диспергирующих волн, существует серия новых законов сохранения для волнового поля на краю пленки. Последние гарантируют возможность локализации солитоноподобных колебаний намагниченности около границы образца и упругое отражение от нее движущихся солитонов.

Полученные формулы для мультисолитонов могут быть использованы как пробные для аналитического описания солитонных состояний вблизи границ образцов конечных размеров. Они полезны для верификации численных расчетов. Могут стать основой экспериментов по диагностике закрепления спинов на поверхности образца, по измерению сдвига фазы солитонов после их отражения от границы.

В заключение, обсудим условия зарождения солитонов в полубесконечной пленке. Пусть  $\lambda$ ,  $T$ ,  $A$  — характерный пространственный, временной масштабы модуляции спиновой волны и их амплитуда соответственно. Поскольку при образовании солитонов имеет место баланс эффектов дисперсии и нелинейности, из размерного уравнения НУШ (1) получаем оценки:

$$\lambda^2 \sim \frac{|\partial_k^2 \omega(k)|}{gA^2}, \quad T \sim \frac{1}{gA^2}.$$

Здесь  $\omega(k)$  — зависящая от волнового числа  $k$  частота основной гармоники,  $g$  — постоянная взаимодействия волн. Напомним, что в области возбуждения солитонов выполняется критерий Лайтхилла (4). Пусть формирование солитонов (на границе или внутри пленки) происходит из импульсов продолжительностью  $\tau_{ext}$ . Тогда  $\lambda \sim c_g \tau_{ext}$ , где  $c_g = \partial_k \omega(k)$  — групповая скорость спиновых волн, и для пороговой амплитуды накачки, начиная с которой возможно генерирование солитонов, получаем оценку

$$gA^2 \sim |\partial_k^2 \omega(k)| / (c_g \tau_{ext})^2.$$

При этом для возможности образования солитонов огибающей должно выполняться неравенство  $\lambda \gg k^{-1}$ . Согласно [4, 7], при  $\tau_{ext} = 10\text{--}20$  нс в области существования солитонных состояний  $k > 10^3\text{--}10^4 \text{ см}^{-1}$ . Рассмотрение меньших волновых чисел недопустимо. Дело в том, что закон дисперсии  $\omega(k)$  не дифференцируем в точке  $k = 0$  и в окрестности этой точки нелинейная динамика магнитной пленки описывается другим уравнением с нелокальным дисперсионным членом [25]. Нелокальная часть магнитостатической дисперсии сглаживает неоднородности распределения намагниченности в пленке.

В результате в длинноволновом пределе отсутствуют экспоненциальные солитоны типичные для локального НУШ. Вместо них формируются новые слаболокализованные обменно-дипольные состояния типа алгебраических солитонов.

Генерирование солитонов, локализованных около края пленки, из импульсов внешнего воздействия происходит пороговым образом по амплитуде накачки. Изменение числа таких солитонов должно приводить к появлению дискретных частот резонансных колебаний намагниченности около края образца, проявляться в характерных частотных и амплитудных модуляциях компоненты намагниченности, перпендикулярной к плоскости пленки.

**Финансирование.** Работы выполнены в рамках государственного задания министерства науки и высшего образования РФ, тема «Квант» № АААА-А18-118020190095-4.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б.А. Калиникос, Н.Г. Ковшиков, А.Н. Славин, Письма в ЖЭТФ **38**, 343 (1983).
2. Б.А. Калиникос, Н.Г. Ковшиков, А.Н. Славин, ЖЭТФ **94**, 159 (1988).
3. B.A. Kalinikos, N.G. Kovshikov, and A.N. Slavin, Phys. Rev. B. **42**, 8658 (1990).
4. А.Б. Борисов, В.В. Киселев, *Квазиодномерные магнитные солитоны*, Физматлит, Москва (2014).
5. А.К. Звездин, А.Ф. Попков, ЖЭТФ **84**, 606 (1983).
6. R.E. De Wames and T. Wolfram, J. Appl. Phys. **41**, 987 (1970).
7. В.В. Киселев, А.П. Танкеев, А.В. Кобелев, ФММ **82**, 38 (1996).
8. Б.А. Калиникос, Изв. вузов. Физика **25**, 42 (1981).
9. G.V. Whitham, *Linear and nonlinear waves*, John Willey and Sons, inc. (1974).
10. В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).
11. Л.Д. Фаддеев, Л.А. Тахтаджян, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, Москва (1986).
12. Н.Н. Ахмедиев, А. Анкевич, *Солитоны: нелинейные импульсы и пучки*, Физматлит, Москва (2003). N. Akhmediev and A. Ankiewicz, *Solitons: Non-linear pulses and beams*, Springer US (1997).
13. Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал, *Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам*, Физматлит, Москва (2005). Y. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From fibers to photonic crystals*, Academic Press (2003).
14. Н.Н. Розанов, *Диссипативные оптические солитоны. От микро- к нано- и атто-*, Физматлит, Москва (2011).
15. H. C. Yuen and B. M. Lake, Adv. Appl. Mech. **22**, 67 (1982).
16. П.Н. Бибииков, В.О. Тарасов, ТМФ **79**, 334 (1989).
17. V. O. Tarasov, Inverse Problems **7**, 435 (1991).
18. И.Т. Хабибуллин, ТМФ **86**, 43 (1991).
19. A.S. Fokas, Physica D **35**, 167 (1989).
20. Е.К. Склянин, Функции. ан. прил. **21**, 86 (1987).
21. Г. В. Дрейден, А. В. Порубов, А. М. Самсонов, И. В. Семенова, ЖТФ **71**, 1 (2001).
22. А.Б. Мигдал, *Качественные методы в квантовой теории*, Наука, Москва (1979).
23. А.М. Косевич, Е.А. Иванов, А.С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983).
24. А.М. Kosevich, B.A. Ivanov, and A.S. Kovalev, Phys. Rep. **194**, 117 (1990).
25. V.V. Kiselev and A.P. Tankeyev, J. Phys.: Condens. Matt. **8**, 10219 (1996).