

О МАССОВОЙ ФУНКЦИИ НА ВНУТРЕННЕМ ГОРИЗОНТЕ РЕГУЛЯРНОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

М.З. Иофа

*Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 23 июня 2022 г.,
после переработки 28 июня 2022 г.
Принята к публикации 28 июня 2022 г.

Пересмотрены и заново проведены расчеты внутренней массовой функции регулярной черной дыры Хейворда с потоками. Представлены подробные расчеты внутренней массовой функции в двух формах подхода Ори (входящий поток непрерывен, исходящий поток моделируется тонкой нулевой оболочкой) и проведено их сравнение с расчетами для черной дыры Рейснера–Нордстрема. Обсуждается формальная причина различия результатов. Вычислена плотность энергии скалярных возмущений, распространяющихся от горизонта событий в черную дыру Хейворда, измеренная свободно падающим наблюдателем вблизи внутреннего горизонта.

DOI: 10.31857/S0044451022110062
EDN: KYQOMT

1. ВВЕДЕНИЕ

Решения для черных дыр в общей теории относительности — Шварцшильда, Рейснера–Нордстрема и Керра–Ньюмена — имеют центральную сингулярность при $r = 0$, что считается нежелательным в моделях астрофизических черных дыр. Регулярные черные дыры были предложены как конфигурации, в которых центральная сингулярность заменяется несингулярным ядром [1–7]. Регулярные черные дыры являются статическими, сферически-симметричными и удовлетворяют слабому энергетическому условию. Они удобны для лучшего понимания процессов образования и испарения черных дыр.

В настоящей работе мы обсуждаем черную дыру Хейворда [3], которая является очень простой реализацией несингулярной черной дыры и может рассматриваться как регуляризация решения Шварцшильда. За пределами горизонта событий обе геометрии имеют одинаковый асимптотический вид при $r \rightarrow \infty$. Важное различие между черными дырами Шварцшильда и Хейворда состоит в том, что черная дыра Хейворда может совсем не иметь горизонта, иметь один двойной горизонт или два гори-

зонта. В последнем случае черной дыры Хейворда с двумя горизонтами ее причинная структура аналогична структуре решений Рейснера–Нордстрема и Керра–Ньюмена. В этих черных дырах внутренний горизонт — это горизонт Коши, нулевая гиперповерхность, за пределами которой предсказательная сила теории теряется.

В процессе коллапса звезды и образования черной дыры возникает исходящий поток излучения, который, после частичного отражения от потенциала вблизи внешнего горизонта, приводит к появлению потока излучения, идущего в черную дыру [8]. Этот поток частично отражается потенциалом вблизи внутреннего горизонта и порождает исходящий поток. Внутренний горизонт представляет собой поверхность бесконечного голубого смещения, и в работах [9–16], а также во многих последующих работах было показано, что свободно падающий наблюдатель вблизи горизонта Коши черных дыр Рейснера–Нордстрема и Керра–Ньюмена увидит неограниченную плотность энергии скалярного, электромагнитного и гравитационного полей. Это интерпретировалось как нестабильность горизонта Коши относительно внешних возмущений.

Эти свойства позволяют ожидать, что присутствие вблизи внутреннего горизонта только входящего потока с голубым смещением (хвост излучения Прайса [8]) приведет к увеличению внутрен-

ней массовой функции. Однако в статье [17] на примере черной дыры Рейснера–Нордстрема (РН) было показано, что одного входящего потока с голубым смещением недостаточно для неограниченного увеличения внутренней массовой функции (т. е. для массовой инфляции). А именно, было показано, что массовая инфляция возникает только как совокупный эффект входящего и исходящего потоков. Массовая инфляция приводит к увеличению кривизны на внутреннем горизонте, и вместо горизонта Коши появляется сингулярность кривизны, экранирующая этот горизонт. В работе [17] входящие и исходящие потоки моделируются входящими и исходящими заряженными решениями Вайдья [18], которые, в свою очередь, моделировались тонкими нулевыми оболочками светоподобных частиц, проходящими друг через друга без взаимодействия. Пространство-время разделено пересекающимися потоками на четыре области, метрика в каждой из которых характеризуется своей массой. Массовая инфляция исходящего потока возникает, когда входящая оболочка находится вблизи горизонта Коши. Решение для внутренней массовой функции было получено с использованием соотношения Дрэй–т Хоофта–Рэдмонда (ДТР) [19, 20] между массами в метриках четырех областей. Сингулярность на горизонте Коши аналитически обсуждалась в работах [21–24] и в ряде других работ, цитируемых в них.

В статье [25] задача массовой инфляции для черной дыры РН с потоками изучалась путем моделирования исходящего излучения нулевой тонкой оболочкой, при этом входящий поток излучения Прайса считался непрерывным (подход Ори). В этой модели из уравнений Эйнштейна с учетом непрерывности проходящего через оболочку потока было получено соотношение, связывающее между собой массы метрик пространства-времени внутри и вне оболочки, которое предсказывало массовую инфляцию вблизи внутреннего горизонта [21, 25, 26].

Поскольку причинная структура черной дыры Хейворда аналогична структуре черной дыры РН, естественно задать вопрос, происходит ли в черной дыре Хейворда с потоками массовая инфляция. Этот вопрос обсуждался в рамках подхода Ори с использованием обобщенной конструкции ДТР [27] в работе [6] для “петлевой черной дыры” и в работах [28–30] для черной дыры Хейворда. Несколько удивительным результатом было то, что, в отличие от черной дыры РН, в случае регулярных черных дыр (петлевых или Хейворда) подход Ори не приводит к массовой инфляции. Однако использование (обоб-

щенного) соотношения ДТР в этих моделях приводит к массовой инфляции.

В настоящей работе мы даем обзор предыдущих расчетов внутренней массовой функции и представляем подробные расчеты этой функции в двух вариантах подхода Ори. Мы сравниваем наши результаты с расчетами для черной дыры РН. А именно, мы показываем, что, как и в случае черной дыры РН, в черной дыре Хейворда с входящим потоком плотность энергии вблизи внутреннего горизонта, измеренная свободно падающим наблюдателем, неограниченно возрастает, указывая на то, что как черные дыры Хейворда, так и черные дыры РН нестабильны относительно внешних возмущений.

2. ВНУТРЕННЯЯ МАССОВАЯ ФУНКЦИЯ В МОДЕЛИ ХЕЙВОРДА

Метрика черной дыры Хейворда является решением уравнений Эйнштейна и имеет вид [3]

$$ds^2 = -f(r)dv^2 + 2dvdr + r^2d\Omega^2, \quad (1)$$

где

$$f(r) = 1 - \frac{M(r)}{r} = 1 - \frac{2mr^2}{2ml^2 + r^3}. \quad (2)$$

Параметризация метрики подробно описана в работе [3], включая вид соответствующего тензора энергии-импульса.¹⁾ Метрика может совсем не иметь горизонта, иметь один двойной или два горизонта. Мы обсуждаем случай с двумя горизонтами. Если масса m является функцией запаздывающего или опережающего времени v , $m = m(v)$, метрика принимает вид

$$ds^2 = -f(r, v)dv^2 - 2dvdr + r^2d\Omega^2, \quad (3)$$

и появляется дополнительная компонента тензора энергии-импульса T_v^r .

В случае наличия входящего и исходящего потоков энергии исходящий поток, следуя подходу Ори [25], моделируется тонкой нулевой оболочкой Σ . Эта оболочка делит внутреннюю часть черной дыры на внешнюю V_+ и внутреннюю V_- области. В обеих частях V_{\pm} метрика имеет вид (3) с разными v_{\pm} и m_{\pm} . Переменную r можно считать непрерывной при переходе через оболочку [27, 31].

¹⁾ Отметим, что в используемой нами системе единиц гравитационная постоянная включена в параметр m , который в таком случае имеет размерность длины.

Для метрики (2), (3) уравнения Эйнштейна принимают вид [27, 31]

$$\frac{\partial M_{\pm}}{\partial r} = -4\pi r^2 T_v^v, \quad \frac{\partial M_{\pm}}{\partial v_{\pm}} = 4\pi r^2 T_v^r. \quad (4)$$

Непрерывность метрики при переходе через оболочку приводит к уравнению

$$(f_+ dv_+ = f_- dv_-)|_{\Sigma} = 2dr. \quad (5)$$

Ниже мы будем обозначать

$$v_+ \equiv v, \quad f_+(v_+) = f(v).$$

Непрерывность потока через оболочку

$$[T_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu}] = 0, \quad [A] = A_+ - A_-,$$

где n^{μ} обозначает нормаль к оболочке, записывается как

$$\frac{T_{v_+v_+}}{f_+^2} = \frac{T_{v_-v_-}}{f_-^2} \Big|_{\Sigma}. \quad (6)$$

Переменная v_- определяется из уравнения (5) как функция v :

$$\frac{dv_-(v)}{dv} = \frac{f(v)}{\tilde{f}_-(v)} \Big|_{\Sigma}, \quad (7)$$

где

$$\tilde{f}_-(v) = f_-(v_-(v)).$$

Точно так же

$$\tilde{m}_-(v) = m_-(v_-(v)).$$

Мы также имеем

$$\frac{\partial \tilde{M}_-(v)}{\partial v} = \frac{\partial M_-(v_-)}{\partial v_-} \frac{f(v)}{\tilde{f}_-(v)} \Big|_{\Sigma}. \quad (8)$$

Из уравнений (6) и (8) получаем

$$\frac{1}{f(v)} \frac{\partial M_+}{\partial v} \Big|_{\Sigma} = \frac{1}{\tilde{f}_-(v)} \frac{\partial \tilde{M}_-}{\partial v} \Big|_{\Sigma}. \quad (9)$$

Уравнение (9) будет использоваться для нахождения массовой функции $\tilde{m}_-(v)$.

2.1. Массовая функция из условия непрерывности потока через оболочку

В случае черной дыры с входящим потоком Прайса [8] массовая функция в области V_+ есть $m_+ = m_0 - \delta m_{pr}$, где m_0 — масса без учета потока Прайса, а $\delta m_{pr}(v) = \beta/v^p$, $p \geq 12$. Будем полагать, что $m_0 \gg l$.

Без потока Прайса горизонты черной дыры определяются из уравнения $f(r, m_0) = 0$, или, эквивалентно, из уравнения

$$r^3 - 2m_0(r^2 - l^2) = 0. \quad (10)$$

Внешний горизонт расположен при

$$r_+ \simeq 2m_0 - l^2/2m_0 + \dots,$$

внутренний горизонт находится при

$$\begin{aligned} r_- \simeq l \left(1 + \frac{l}{4m_0} + \frac{5}{2} \left(\frac{l}{4m_0} \right)^2 + \dots \right) \equiv \\ \equiv l(1 + \eta + 5\eta^2/2 + \dots). \end{aligned} \quad (11)$$

В случае с потоками расположение горизонтов следующее:

$$r_+(v) \simeq r_+ - \delta r_+(v), \quad r_-(v) \simeq r_- + \delta r_-(v). \quad (12)$$

В первом порядке по δm_{pr} величина δr_- определяется из уравнения

$$f_{,r}(r_-, m_0) \delta r_- - f_{,m}(r_-, m_0) \delta m_{pr} = 0,$$

что дает

$$\delta r_- = \delta m_{pr} f_{,m}(r_-, m_0) / f_{,r}(r_-, m_0). \quad (13)$$

Оболочка, моделирующая исходящий поток, расположена на радиусе

$$r_{shell} = r_s,$$

а вблизи внутреннего горизонта мы можем написать

$$r_s = r_- + y(v), \quad r_- > y(v).$$

Расположение оболочки определяется уравнением нулевой геодезической (5)

$$\begin{aligned} 2\dot{r}_s(v) = f(r_s, m_+(v)) = \\ = f(r_- + y(v), m_0 - \delta m_{pr}(v)). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь точка обозначает производную по переменной v . В первом порядке по y и δm_{pr} получаем

$$2\dot{y} = f_{,r}(r_-, m_0)y - f_{,m}(r_-, m_0)\delta m_{pr}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} f_{,r}(m_0, r_-) = 2m_0 r_- \frac{r_-^3 - 4m_0 l^2}{(r_-^3 + 2m_0 l^2)^2} \simeq \\ \simeq -\frac{2}{l}(1 - 4\eta), \end{aligned} \quad (16)$$

$$f_{,m}(m_0, r_-) = -\frac{2r_-^5}{(r_-^3 + 2m_0 l^2)^2} \simeq -\frac{l}{2m_0^2}(1 + \eta). \quad (17)$$

Решая уравнение (15), получаем

$$y(v) = e^{-v|f_{,r}|/2} \left(C - \int^v dv e^{v|f_{,r}|/2} \delta m_{pr} \frac{f_{,m}}{2} \right). \quad (18)$$

В пределе $v \rightarrow \infty$ величина $y(v)$ примерно равна

$$y(v) \simeq \frac{l^2}{4m_0^2} \delta m_{pr} (1 + 5\eta) - \delta \dot{m}_{pr} \frac{l^3}{4m_0^2} (1 + 9\eta). \quad (19)$$

Если положение оболочки определяется относительно зависящего от v горизонта $r_-(v)$, $r_s = r_-(v) + z(v)$, то $z(v)$ определяется из уравнения геодезической

$$2(\dot{z} + \delta \dot{r}_-) = f_{,r}(r_-, m_0)(\delta r_- + z) - f_{,m}(r_-, m_0) \delta m_{pr}, \quad (20)$$

где

$$\delta r = \delta m_{pr} (l^2/4m_0^2)(1 + 5\eta).$$

Асимптотическое решение уравнения (20) имеет вид

$$z(v) = e^{-v|f_{,r}|/2} \left(C - \int^v dv e^{v|f_{,r}|/2} \delta m_{pr} \frac{l^2}{4m_0^2} (1 + 5\eta) \right) \simeq -\delta \dot{m}_{pr} \frac{l^3}{4m_0^2} (1 + 9\eta). \quad (21)$$

Члены, пропорциональные δm_{pr} , сокращаются. Положение оболочки в обоих расчетах есть

$$r_s(v) \simeq r_- + \frac{l^2}{4m_0^2} \delta m_{pr} (1 + 5\eta) - \frac{l^3}{4m_0^2} \delta \dot{m}_{pr} (1 + 9\eta). \quad (22)$$

Используя уравнение (9), найдем внутреннюю массовую функцию $\tilde{m}_-(v)$. Сначала мы вычислим

$$R_+ \equiv \frac{1}{f(v)} \frac{\partial M_+}{\partial v} = \frac{r_s^6 \dot{m}_+}{(r_s^3 + 2l^2 m_+)(r_s^3 - 2m_+(r_s^2 - l^2))} = \frac{r_s^6 \dot{m}_+}{2\dot{r}_s(2m_+ l^2 + r_s^3)}. \quad (23)$$

Здесь мы использовали уравнение геодезической для оболочки, записанное в виде

$$r_s^3 - 2m_+(r_s^2 - l^2) = 2\dot{r}_s(2m_+ l^2 + r_s^3).$$

Используя уравнение (22) и сохраняя в (23) ведущие члены по δm_{pr} , имеем

$$R_+ \simeq -\frac{r_s^6}{2l^6(1 + 9\eta)}. \quad (24)$$

Уравнение для внутренней массовой функции \tilde{m}_- имеет вид

$$R_- \equiv \frac{1}{\tilde{f}_-(v)} \frac{\partial \tilde{M}_-}{\partial v} = \frac{r_s^6 \dot{\tilde{m}}_-}{-4\tilde{m}_-^2 l^2 (r_s^2 - l^2) + 2\tilde{m}_- r_s^3 (2l^2 - r_s^2) + r_s^6} = -\frac{r_s^6}{2l^6(1 + 9\eta)}. \quad (25)$$

Используя соотношения

$$r_s^2 - l^2 \simeq l^2[(1 + \eta + 5\eta^2/2 + \dots)^2 - 1] \simeq \frac{l^3}{2m_0}(1 + 3\eta),$$

$$2l^2 - r_s^2 \simeq l^2(1 - 2\eta), \quad (26)$$

перепишем уравнение (25) как

$$\dot{\tilde{m}}_- = \frac{1}{1 + 9\eta} \left[\frac{\tilde{m}_-^2}{2m_0 l} (1 + 3\eta) - \frac{\tilde{m}_-}{l} (1 + \eta) - \frac{1}{2} (1 + 6\eta) \right], \quad (27)$$

а затем преобразуем его к виду

$$\dot{\tilde{m}}_- = \frac{1 - 6\eta}{m_0 l} \times \left[\left(\tilde{m}_- - \frac{m_0}{2} (1 - 2\eta) \right)^2 - \frac{m_0^2}{4} (1 - 2\eta)^2 - \frac{m_0 l}{2} (1 + 3\eta) \right] \simeq \frac{1 - 6\eta}{m_0 l} \left[\left(\tilde{m}_- - \frac{m_0}{2} (1 - 2\eta) \right)^2 - \left(\frac{m_0}{2} (1 + 2\eta) \right)^2 \right]. \quad (28)$$

Интегрируя уравнение (28), найдем

$$\frac{1}{m_0(1 + 2\eta)} \times \ln \left| \frac{(\tilde{m}_- - m_0(1 - 2\eta)/2) - m_0(1 + 2\eta)/2}{(\tilde{m}_- - m_0(1 - 2\eta)/2) + m_0(1 + 2\eta)/2} \right| = Cv/2l. \quad (29)$$

В пределе $v \rightarrow \infty$ получим

$$\tilde{m}_- = -2m_0\eta = -\frac{l}{2}. \quad (30)$$

Отрицательное значение для m_- обсуждалось в работе [6] для петлевой черной дыры и в работе [29] для черной дыры Хейворда, и, в частности, было отмечено, что внутренняя массовая функция $m_-(v)$ не является непосредственно измеряемой величиной, так что результат может быть артефактом параметризации.

2.2. Массовая функция в дважды нулевых координатах

Вычислим внутреннюю массовую функцию, следуя первоначальному подходу Ори [25]. Как и выше, оболочка разделяет внутреннюю часть черной дыры на две области V_{\pm} с разными v_{\pm} и m_{\pm} ; координата r непрерывна при переходе через оболочку. В дважды нулевых координатах метрика имеет вид

$$ds^2 = -2e^{\sigma} dU dV + r^2 d\Omega.$$

Координата U полагается равной нулю на оболочке. Поскольку в оболочке нет давления, можно ввести аффинный параметр λ с обеих ее сторон [27, 31]. Координата V равна λ вдоль оболочки. Координата положения оболочки $r_s = r_- + y(v)$ (см. (22)) теперь записывается как $r_s = R(\lambda) = r(V = \lambda, U = 0)$. Предполагается, что оболочка достигает внутреннего горизонта при $v \rightarrow \infty$ или, эквивалентно, при $\lambda = 0$. Далее мы пишем $v_+ = v$.

Уравнение геодезической для оболочки имеет вид

$$R'/v'_{\pm} = \frac{1}{2} f_{\pm}(m_{\pm}(v), R), \quad (31)$$

где штрих обозначает производную по λ . Определим

$$z_{\pm} = R/v'_{\pm}. \quad (32)$$

Дифференцируя уравнение (32),

$$z'_{\pm} = R'/v'_{\pm} - Rv''_{\pm}/v'^2_{\pm},$$

и используя уравнение геодезической для $v(\lambda)$

$$v''_{\pm} + \frac{1}{2} f_{\pm,r} v'^2_{\pm} = 0, \quad (33)$$

получим уравнение

$$2z'_{\pm} = f_{\pm} + Rf_{\pm,r}. \quad (34)$$

Со стороны (+) оболочки уравнение (34) принимает вид

$$z'_+ = \frac{1}{2} \left(1 - 12 \frac{m_+^2 R^2 l^2}{(R^3 + 2m_+ l^2)^2} \right), \quad (35)$$

или

$$z'_+ \simeq -1 - 2(l/4m_0 + \delta m_{pr}/m_0 + \delta y/l). \quad (36)$$

Здесь мы положили $R(\lambda) = r_- + y(R, v)$ и $m_+ = m_0 - \delta m_{pr}$. Интегрируя уравнение (35), получаем $z_+ \simeq Z_+ - \lambda$. Из уравнения (32) следует, что

$$v_+ = \int^{\lambda} d\lambda \frac{R}{z_+} \simeq r_- \ln \frac{1}{\lambda}. \quad (37)$$

В уравнении (37) Z_+ положено равным нулю, чтобы иметь $v_+ \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Дифференцируя (31) по λ , имеем

$$v''_{\pm} = 2(R'' f_{\pm} - R' f'_{\pm})/f^2_{\pm}.$$

Подставляя v'' в уравнение (33), получаем уравнение для f (см. также [29])

$$f(R) \frac{R''}{R'} = f'(R) - f_{,r}(R) R'. \quad (38)$$

В случае $f = f_-$,

$$f_-(\tilde{m}_-(v), R) = 1 - \frac{2\tilde{m}_-(v)R^2}{R^3 + 2\tilde{m}_-(v)l^2},$$

преобразуя уравнение (38), мы получаем

$$\frac{R''}{2R'} f_-(\tilde{m}_-(v), R) = -\frac{\tilde{m}'_- R^5}{(R^3 + 2\tilde{m}_- l^2)^2}. \quad (39)$$

Подставляя

$$R(v(\lambda)) = r_s \simeq r_- + \delta m(v) l^2 / 4m_0^2,$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{R''}{R'} &= \frac{p(p+1)v^{-p-2}v'^2 - pv^{-p-1}v''}{-pv^{-p-1}v'} = \\ &= -(p+1)\frac{v'}{v} + \frac{v''}{v'} \simeq -\frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Уравнение (39) принимает вид

$$\tilde{m}'_- = -\frac{1}{2\lambda R^5} [4\tilde{m}_-^2 l^2 (R^2 - l^2) - 2\tilde{m}_- R^3 (2l^2 - R^2) - R^6]. \quad (40)$$

Замечая, что

$$\tilde{m}'_- = \frac{d\tilde{m}_-(v)}{dv} \left(-\frac{r_-}{\lambda} \right),$$

находим

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{m}}_- &= \frac{2l^2(r_-^2 - l^2)}{r_-^6} \times \\ &\times \left[\tilde{m}_-^2 - 2\tilde{m}_- \frac{r_-^3(2l^2 - r_-^2)}{4l^2(r_-^2 - l^2)} - \frac{r_-^6}{4l^2(r_-^2 - l^2)} \right]. \quad (41) \end{aligned}$$

В уравнении (41) мы узнаем структуру уравнения (25). С помощью (26) уравнение (41) принимает ту же форму, что и (28).

3. ЧЕРНАЯ ДЫРА ХЕЙВОРДА В СРАВНЕНИИ С ЧЕРНОЙ ДЫРОЙ РН

Сравним черную дыру Хейворда и черную дыру РН с потоком Прайса. Для дыры РН функция $f(v)$ в уравнении (1) есть

$$f(v) = 1 - \frac{2m(v)}{r} + \frac{e^2}{r^2}. \quad (42)$$

Мы предполагаем, что $m^2(v) \gg e^2$. Масса черной дыры m_+ равна $m_0 - \delta m_{pr}$, $m_0 \gg \delta m_{pr}$. Без потока Прайса положения горизонтов определяются из уравнения $f(r, m_0) = 0$. Внешний и внутренний горизонты расположены в $\tilde{r}_+ = m_0 + \sqrt{m_0^2 - e^2}$ и $\tilde{r}_- = m_0 - \sqrt{m_0^2 - e^2}$. В случае с потоком, положения горизонтов даются соотношениями

$$\begin{aligned} r_+ &= \tilde{r}_+ \left(1 - \frac{\delta m_{pr}}{\sqrt{m_0^2 - e^2}} \right), \\ r_- &= \tilde{r}_- \left(1 + \frac{\delta m_{pr}}{\sqrt{m_0^2 - e^2}} \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Оболочка, моделирующая исходящий поток, находится вблизи внутреннего горизонта в точке $r_s(v) = r_-(v) + y(v)$. Ниже мы используем обозначения предыдущего раздела.

Положение нулевой оболочки определяется уравнением геодезической $2\dot{r}_s = f(r_s, m_+)$. Замечая, что $f(\tilde{r}_-, m_0) = 0$, и разлагая функцию $f(r_s, m(v))$ до первого порядка по y и δm_{pr} , получаем

$$\begin{aligned} 2 \left(\dot{y} + \frac{\delta \dot{m}_{pr}}{\kappa \tilde{r}_-} \right) &= \\ &= f_{,r}(\tilde{r}_-, m_0) \left(y + \frac{\delta m_{pr}}{\kappa \tilde{r}_-} \right) - f_{,m}(\tilde{r}_-, m_0) \delta m_{pr}, \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} r_s &= \tilde{r}_- + y + \frac{\delta m_{pr}}{\kappa \tilde{r}_-}, \quad \kappa = \frac{\sqrt{m_0^2 - e^2}}{\tilde{r}_-^2}, \\ f_{,r}(\tilde{r}_-, m_0) &= -2\kappa, \quad f_{,m}(\tilde{r}_-, m_0) = -\frac{2}{\tilde{r}_-}. \end{aligned} \quad (45)$$

Подставляя выражения (45) в (44), мы перепишем уравнение (44) в виде

$$\dot{y} + \kappa y \simeq -\frac{\delta \dot{m}_{pr}}{\kappa \tilde{r}_-}. \quad (46)$$

Отметим, что, так же как и в уравнении (22), члены, пропорциональные δm_{pr} , сократились. Решение уравнения (46) есть

$$y(v) = e^{-\kappa v} \left(C - \int^v dv e^{+\kappa v} \frac{\delta \dot{m}_{pr}}{\kappa \tilde{r}_-} \right). \quad (47)$$

В пределе $v \rightarrow \infty$ решение уравнения (47) упрощается до

$$y(v) \simeq -\frac{\delta \dot{m}_{pr}}{\tilde{r}_- \kappa^2}.$$

Нулевая оболочка расположена в точке

$$r_s = \tilde{r}_- + \frac{\delta m_{pr}}{\tilde{r}_- \kappa} - \frac{\delta \dot{m}_{pr}}{\tilde{r}_- \kappa^2}. \quad (48)$$

Найдем внутреннюю массовую функцию. С помощью соотношений (4)–(6) условие непрерывности потока через оболочку записывается как

$$\frac{\dot{\tilde{m}}_-(v_-(v))}{\tilde{f}_-(\tilde{m}_-, v)} = \frac{\dot{m}_+(v)}{f(v)}. \quad (49)$$

Используя уравнение геодезической для нахождения положения оболочки, $f(v) = 2\dot{r}_s$, и записывая $f_-(\tilde{m}_-, v) = f(v) + 2(m_+ - \tilde{m}_-)/r_s$, получаем уравнение (49) в виде

$$\frac{\dot{\tilde{m}}_-(v)}{2\dot{r}_s + 2(m_+ - \tilde{m}_-)/r_s} = -\frac{\delta \dot{m}_{pr}}{2\dot{r}_s}, \quad (50)$$

Из уравнения (48) имеем

$$\frac{\delta \dot{m}_{pr}}{2\dot{r}_s} = \frac{\kappa \tilde{r}_-}{2} \left(1 + \frac{p+1}{v\kappa} \right). \quad (51)$$

Пренебрегая в левой части уравнения (50) малым членом \dot{r}_s , получаем

$$\dot{\tilde{m}}_- \simeq (\tilde{m}_- - m_0)\kappa \left(1 + \frac{p+1}{v\kappa} \right). \quad (52)$$

Здесь мы сталкиваемся с принципиальным отличием от черной дыры Хейворда: уравнение (52) имеет первый порядок по \tilde{m}_- , а (28) содержит \tilde{m}_- квадратично. Решая уравнение (51), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{m}_-(v) &= e^{\kappa v + (p+1) \ln v} \times \\ &\times \left(C - \kappa m_0 \int^v dv \left(1 + \frac{p+1}{v\kappa} \right) e^{-\kappa v - (p+1) \ln v} \right) \simeq \\ &\simeq C e^{\kappa v} v^{(p+1)} - m_0. \end{aligned} \quad (53)$$

Чтобы закончить сравнение расчетов внутренней массы в черных дырах РН и Хейворда, мы вычисляем внутреннюю массу черной дыры РН в подходе Ори, как в разделе 2.2.

Уравнение (34) для стороны (+),

$$2z'_+ = f_+ + Rf_{+,r},$$

дает

$$2z'_+ = 1 - \frac{e^2}{r_s^2} \simeq 1 - \frac{e^2}{\tilde{r}_-^2} = -2\kappa \tilde{r}_-, \quad (54)$$

(определения \tilde{r}_- и κ см. в (43) и (45)) и мы получаем

$$v_+ \equiv v = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{1}{\lambda}. \quad (55)$$

Уравнение (38) для случая черной дыры РН имеет вид

$$-\frac{2\tilde{m}'_-(v(\lambda))}{R} = \frac{R''}{R'} f(R, \tilde{m}_-(v)) \Big|_{R=r_s}. \quad (56)$$

Подставляя в уравнение (56) соотношения

$$-\frac{2\tilde{m}'_-}{r_s} \simeq \frac{2\dot{\tilde{m}}_-}{\tilde{r}_-\kappa\lambda}, \quad \frac{R''}{R'} = \frac{r''_s}{r'_s} = -\frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{p+1}{\ln \lambda}\right)$$

и

$$f(r_s, \tilde{m}_-) = \left(2\dot{r}_s + \frac{2(m_+ - \tilde{m}_-)}{r_s}\right),$$

мы получаем уравнение

$$\dot{\tilde{m}}_- \simeq (\tilde{m}_- - m_0)\kappa \left(1 + \frac{p+1}{v\kappa}\right), \quad (57)$$

которое совпадает с уравнением (52).

4. НЕСТАБИЛЬНОСТЬ ВНУТРЕННЕГО ГОРИЗОНТА ОТНОСИТЕЛЬНО ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В этом разделе мы рассмотрим распространение скалярного поля в окрестности горизонта Коши и покажем, что имеющие степенную зависимость хвосты входящего в черную дыру потока, как их видит свободно падающий наблюдатель, расходятся на внутреннем горизонте.

Проблема внешних возмущений для черной дыры Хейворда обсуждается подобно тому, как это делается в случае черной дыры РН [12–15, 32], потому что причинные структуры обеих метрик схожи.

Для постановки задачи рассмотрим метрику Хейворда

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2,$$

где

$$f(r) = f_{RN} g(r) = -\frac{(r_+ - r)(r - r_-)}{r^2} \frac{r^2(r - \tilde{r})}{r^3 + 2ml^2}. \quad (58)$$

Здесь $\tilde{r} = -r_-(-m)$ — отрицательный корень уравнения

$$r^3 - 2m(r^2 - l^2) = 0 = [(-r)^3 - (-2m)(r^2 - l^2)].$$

$g(r)$ — ограниченная функция без нулей и полюсов при $r > 0$.

В области (r_+, r_-) можно ввести черепашью координату $r_* = -\int dr/f(r)$

$$\begin{aligned} r_* &= \int dr \frac{r^3 + 2ml^2}{(r_+ - r)(r - r_-)(r - \tilde{r})} = \\ &= -r - A_1(r_+^3 + 2ml^2) \ln(r_+ - r) - \\ &= -A_2(r_-^3 + 2ml^2) \ln(r - r_-) - \\ &= -A_3(\tilde{r}^3 + 2ml^2) \ln(r - \tilde{r}) + \text{const}, \end{aligned} \quad (59)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{(r_+ - r_-)(r_+ - \tilde{r})}, \\ A_2 &= \frac{1}{(r_+ - r_-)(\tilde{r} - r_-)}, \\ A_3 &= \frac{1}{(r_+ - \tilde{r})(r_- - \tilde{r})}. \end{aligned} \quad (60)$$

Полагая, как в разд. 2 что $m \gg l$, так что

$$r_+ \simeq 2m, \quad r_- \simeq l, \quad \tilde{r} \simeq -l,$$

и

$$A_1 \simeq 1/(2m)^2, \quad A_2 \simeq -1/4ml, \quad A_3 \simeq 1/4ml,$$

получим

$$r_* \simeq -r - 2m \ln(r_+ - r) + \frac{l}{2} \ln(r - r_-) - \frac{l}{2} \ln(r - \tilde{r}). \quad (61)$$

В пределе $r \rightarrow r_-$ имеем

$$r_* \simeq \frac{l}{2} \ln \frac{r - r_-}{l}. \quad (62)$$

Определив нулевые координаты

$$v = -r_* + t, \quad u = -r_* - t,$$

найдем, что левая и правые ветви горизонта Коши суть гиперповерхности $(r_-, u = \infty)$ и $(r_-, v = \infty)$. Распространение скалярного поля $\Phi(x)$ описывается волновым уравнением $\Phi_{;\mu;\nu} f^{\mu\nu} = 0$, где $f_{\mu\nu}$ — компоненты метрики (58). Чтобы решить уравнение, разложим поле $\Phi(x)$ по сферическим гармоникам:

$$\Phi(x) = \int e^{-ikt} Y_{lm}(\theta, \varphi) H_{lm}(k) \frac{\varphi_{klm}(r)}{r} dk. \quad (63)$$

Функции $\varphi(r_*(r))$ (далее индексы klm опускаются) удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 \varphi(r_*)}{dr_*^2} + [k^2 - V_l(r_*(r))] \varphi(r_*) = 0, \quad (64)$$

где потенциал V_l есть

$$V_l(r_*(r)) = -f(r) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} \right].$$

Функция $H(k)$ в (63) определяется начальными данными $h(v)$, заданными на ветви $(r_+, u = -\infty)$ внешнего горизонта

$$H(k) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ikv} h(v) dv. \quad (65)$$

Решения (64) $\varphi(r_*)$, имеющие асимптотический вид

$$e^{-ikt} \varphi(r_*) \sim e^{-ikv}$$

на горизонте r_+ , на горизонте r_- имеют вид

$$e^{-ikt} \varphi(r_*) \sim A(k)e^{-ikv} + B(k)e^{iku}, \quad r_* \rightarrow -\infty,$$

где $A_{lm}^2 - B_{lm}^2 = 1$.

Входящее поле $\Phi(r_*, t)$ распространяется внутри черной дыры и вблизи r_- рассеивается на потоки $X(v)$ и $Y(u)$:

$$\begin{aligned} \Phi(r_*, t) &\rightarrow X(v) + Y(u) = \\ &= \int dk H(k) (A(k) - 1) e^{-ikv} + \\ &+ \int dk H(k) B(k) e^{iku}. \end{aligned} \quad (66)$$

В пределе $v, u \rightarrow \infty$ основной вклад в $X(v)$ и $Y(u)$ дает интегрирование в окрестности $k = 0$ [12, 13]. Для степенного хвоста Прайса $h(v) = \delta m_{pr} = \beta \theta(v - v_0) v^{-p}$ получаем

$$\begin{aligned} X(v) &= \beta v^{-p} (A(0) - 1), \quad v \rightarrow \infty, \\ Y(u) &= \beta u^{-p} B(0), \quad u \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (67)$$

Поля $X(v)$ и $Y(u)$ конечны на горизонте Коши.

Найдем, какую плотность энергии измеряет свободно падающий наблюдатель вблизи внутреннего горизонта. Компоненты скорости радиально падающего наблюдателя суть [14, 32]

$$U^t = \frac{E}{f(r)}, \quad U^r = -\sqrt{E^2 - f(r)}, \quad (68)$$

и

$$U^{r_*} = \sqrt{E^2 - f(r)}/f(r).$$

Поток, видимый свободно падающим наблюдателем, есть

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= U^i \Phi_i = U^t \Phi_{,t} + U^{r_*} \Phi_{,r_*} = \\ &= \frac{E}{f(r)} (X_{,v} - Y_{,u}) + \frac{\sqrt{E^2 - f(r)}}{f(r)} (-X_{,v} - Y_{,u}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{X_{,v}}{f(r)} (E - \sqrt{E^2 - f(r)}) - \frac{Y_{,u}}{f(r)} (E + \sqrt{E^2 - f(r)}). \quad (69)$$

В пределе $r \rightarrow r_-$ или $r_* \rightarrow -\infty$ функция $f(r)$ обращается в нуль:

$$f(r) \sim 2 \frac{r - r_-}{l} \sim \frac{e^{2r_*/l}}{2}.$$

Если $E > 0$, то поток равен

$$\mathcal{F} \simeq -\frac{f(r)}{2E} X_{,v} - \frac{2E}{f(r)} Y_{,u}. \quad (70)$$

На ветви $(r_-, u \rightarrow \infty)$ первый член конечен, а второй растет. Если $E < 0$, получаем

$$\mathcal{F} \simeq \frac{2|E|}{f(r)} X_{,v} + \frac{f(r)}{2|E|} Y_{,u}. \quad (71)$$

На ветви $(r_-, v \rightarrow \infty)$ первый член возрастает, а второй конечен. Потоки, измеренные свободно падающим наблюдателем

$$E > 0: \mathcal{F}|_{(r_-, u \rightarrow \infty)} = -2E\beta p u^{-p-1} B(0) e^{2u/l}, \quad (72)$$

$$E < 0: \mathcal{F}|_{(r_-, v \rightarrow \infty)} = 2E\beta p v^{-p-1} (A(0) - 1) e^{2v/l}. \quad (73)$$

Видно, что наблюдаемые потоки экспоненциально расходятся на внутреннем горизонте.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящей работе мы изучили внутреннюю массовую функцию в модели Хейворда регулярной черной дыры с потоками и сравнили ее с соответствующей функцией черной дыры РН. Мы предположили, что масса черной дыры без потоков, m_0 , намного больше основного параметра ядра l . Предполагая справедливость классического описания, мы считаем параметр ядра l больше планковской длины l_p .

Мы рассчитали внутреннюю массу двумя способами, первый из которых основан на учете непрерывности потока через оболочку, а второй использует исходный подход Ори [25] (точнее, оба метода находятся в рамках подхода Ори, потому что в обоих методах входящий поток считался непрерывным потоком Прайса, а исходящий поток моделировался нулевой оболочкой без давления). Оба метода дают конечное отрицательное значение для внутренней массовой функции. Внутренняя масса не является непосредственно измеримой величиной, и в работе [6, 29] было высказано предположение, что этот результат является артефактом параметризации. Однако хорошая параметризация неизвестна.

Формально, различное поведение внутренних массовых функций в черных дырах РН и Хейворда восходит к следующему. Схематически в случае дыры РН уравнение для внутренней массы имеет вид

$$\frac{dm}{dv} - cm = -\delta m_{pr},$$

где $c > 0$, что приводит к экспоненциальному росту по v . Для черной дыры Хейворда мы имеем

$$\frac{dm}{dv} = (m - c)^2 - a^2, \quad c, a > 0,$$

что дает

$$\left| \frac{(m - c) - a}{(m - c) + a} \right| = Ce^{2av}.$$

В пределе $v \rightarrow \infty$ решение для $m(v)$ есть $m = c - a$, что для конкретных значений c и a приводит к $m < 0$.

Другой подход, используемый в работах [6, 17] для нахождения внутренней массовой функции, основан на соотношении ДТР [19, 20]. При таком подходе потоки внутри черной дыры моделируются тонкими оболочками. Формула ДТР дает связь между массами метрик входящих и исходящих сферических оболочек в областях между оболочками до и после столкновения. В работе [17] в случае черной дыры РН соотношение ДТР было получено из системы уравнений Эйнштейна. Для петлевых черных дыр и дыр Хейворда необходимо использовать обобщенную формулу ДТР [6, 27], которая не требует использования уравнений Эйнштейна. Оказывается, что во всех случаях черных дыр РН, Хейворда и петлевых черных дыр обобщенное соотношение ДТР показывает расходимость массовой функции пространства-времени вблизи горизонта Коши после того, как произошло пересечение оболочек. Было отмечено, что соотношение ДТР, являясь непертурбативным, объясняет нелокальные и нелинейные эффекты [27]. Однако подход ДТР нельзя напрямую сравнивать с подходом Ори, поскольку отсутствует четкая связь между формулой ДТР и подходами типа подхода Ори.

В работе [33] было показано, что в системе с пересекающимися внутри черной дыры потоками, порожденными аккрецией, появляется массовая инфляция. Потоки распространяются на фоне сферически-симметричного пространства-времени, и массовая инфляция возникает, когда 4-скорости потоков увеличиваются при приближении к внутреннему горизонту. Поскольку 4-скорость наблюдаемого потока связана с 4-скоростью наблюдающего потока через лоренцев буст, встречная скорость

потоков экспоненцируется, как и плотность энергии центра масс потоков, что приводит к увеличению внутренней массы. Однако в работе [33] расчеты проводились с помощью специально построенной метрики, и конкретная переформулировка результатов этой работы для моделей с метрикой вида (1) представляет проблему.

Из-за похожей причинной структуры метрик черных дыр Хейворда и РН в обоих случаях распространение внешних возмущений также похоже. Если возмущение представляет собой поток Прайса, то в обоих случаях свободно падающий наблюдатель, приближающийся к внутреннему горизонту, измеряет возрастающий поток энергии. Это свойство интерпретируется как нестабильность внутреннего горизонта. Однако этот эффект напрямую не связан с внутренней массовой инфляцией.

Благодарности. Я благодарен М. Смолякову и И. Волобуеву за обсуждения и полезные замечания. Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики, проект “Физика частиц и космология”.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.M. Bardeen, Proc. 5th Int. conf. on general relativity and gravitation GR5, Tbilisi, USSR, 174 (1968).
2. I. Dymnikova, Class. Quant. Grav. **19**, 725 (2002).
3. S.A. Hayward, Phys. Rev. Lett. **96**, 031103 (2006).
4. A. Bonanno and M. Reuter, Phys. Rev. D **62**, 043008 (2000).
5. S. Ansoldi, ArXiv 0802.0330.
6. E.G. Brown, R.B. Mann and L. Modesto, Phys. Rev. D **84**, 104041 (2011).
7. E. Ayon-Beato, A. Garcia, Phys. Lett. B **493**, 149 (2000).
8. R.H. Price, Phys. Rev. D **5**, 2419 (1972).
9. M. Simpson and R. Penrose, Int. J. Theor. Phys. **7**, 183 (1973).
10. J.M. McNamara, Proc. R. Soc. A **358**, 499 (1978).
11. J.M. McNamara, Proc. R. Soc. A **364**, 121 (1978).
12. Y. Gursel, I.D. Novikov, V.D. Sandberg and A.A. Starobinski, Phys. Rev. D **19**, 413 (1979).
13. Y. Gursel, I.D. Novikov, V.D. Sandberg and A.A. Starobinski, Phys. Rev. D **19**, 1260 (1979).

14. S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press, New York (1983).
15. A. Ori, Phys. Rev. D **55**, 4860 (1997).
16. A. Ori, Phys. Rev. D **57**, 2621 (1998).
17. E. Poisson and W. Israel, Phys. Rev. D **41**, 1796 (1990).
18. P.C. Vaidia, Proc. Ind. Acad. Sci. A **33**, 264 (1951).
19. T. Dray and G. 't Hooft, Commun. Math. Phys. **99**, 613 (1985).
20. I.H. Redmount, Prog. Theor. Phys. **73**, 1401 (1985).
21. A. Bonanno, S. Droz, W. Israel and S.M. Morsink, ArXiv gr-qc/9411050.
22. L.M. Burko, Phys. Rev. Lett. **79**, 4958 (1997).
23. L.M. Burko and A. Ori, Phys. Rev. D **57**, R7084 (1998).
24. P.R. Brady, Prog. Theor. Phys. Suppl. **136**, 29 (1999).
25. A. Ori, Phys. Rev. Lett. **67**, 789 (1991).
26. W.G. Anderson, P.R. Brady, W. Israel and S.M. Morsink, Phys. Rev. Lett. **70**, 1041 (1993).
27. C. Barrabes and W. Israel, Phys. Rev. D **43**, 1129 (1991).
28. R. Carballo-Rubio, F. Di Filippo, S. Liberati, C. Pacilio and M. Visser, JHEP **07**, 23 (2018).
29. R. Carballo-Rubio, F. Di Filippo, S. Liberati, C. Pacilio and M. Visser, ArXiv 2101.05006.
30. A. Bonanno, A.-P. Khosravi and F. Saueressig, Phys. Rev. D **103**, 124027 (2021).
31. E. Poisson, ArXiv gr-qc/0207101.
32. R.A. Matzner, N. Zamorano and V.D. Sandberg, Phys. Rev. D **19**, 2821 (1979).
33. A.J. Hamilton and P.P. Avelino, Phys. Rept. **495**, 1 (2010).