ЖЭТФ, 2022, том 162, вып. 5 (11), стр. 657–662

КВАНТОВОЕ РАССЕЯНИЕ СВЯЗАННОЙ ПАРЫ НА ТРЕТЬЕЙ ЧАСТИЦЕ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

А. М. Будылин* *, ***С. Б. Левин*****

Физический факультет, Санкт-Петербургский государственный Университет, 199034, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 16 августа 2022 г.,
после переработки 16 августа 2022 г.
Принята к публикации 03 сентября 2022 г.

В рамках дифракционного подхода рассматривается задача рассеяния $2 \to 2(3)$ трех одномерных квантовых частиц с парными короткодействующими потенциалами притяжения. Решение задачи рассеяния строится в терминах решения модельной неоднородной граничной задачи в круге большого радиуса с условиями излучения на границе. Рассмотрены возможные физические приложения построенной модели.

DOI: 10.31857/S0044451022110050
EDN: KYLNDE

1. ВВЕДЕНИЕ

Идеи дифракционного подхода в задаче рассеяния трех одномерных квантовых частиц были предложены в работах [1–3] и получили дальнейшее развитие в работах [4–7]. В перечисленных выше работах рассматривалась задача рассеяния трех частиц с парными потенциалами отталкивания.

Данная работа посвящена случаю парных потенциалов притяжения, поддерживающих связанные состояния в каждой паре. Решение задачи рассеяния $2 \to 2(3)$ будет построено в два этапа. на первом этапе мы предложим схему, позволяющую установить связь амплитуд рассеяния процессов $2 \to 2$ и $2 \to 3$. Эта связь будет получена в терминах некоторого внешнего объекта – срезающей функции, влияние которой будет нивелировано на втором этапе. На этом (втором) этапе будет предложен численный механизм восстановления полного решения задачи рассеяния во всем конфигурационном пространстве. Будет сформулирована граничная задача для неоднородного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка в круге большого радиуса с условием излучения на границе.

[*] E-mail: a.budylin@spbu.ru
[**] E-mail: s.levin@spbu.ru

В случае задачи рассеяния $3 \to 3$ похожая схема решения была предложена в работе [4] и реализована численно в работах [5, 6].

Отметим, что общая схема построения решения задачи рассеяния $2 \to 2(3)$ для случая трехмерных заряженных частиц была предложена в работе [8] применительно к реакциям, связанным с накоплением антипротонов [9–11]. Предлагаемая нами работа может рассматриваться как первый необходимый шаг для реализации этой схемы в наиболее простой ситуации одномерных частиц и финитных парных потенциалов притяжения. С другой стороны предлагаемая модель является полностью завершенной и имеет независимую ценность, например, при описании рассеяния нуклонов в параллельных пучках.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему трех квантовых частиц, динамика которой описывается оператором Шредингера

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sum_{i=1}^{3} v_i(x_i). \qquad (1)$$

Мы полагаем, что парные потенциалы v_i, $i = 1, 2, 3$, являются финитными, четными, неположительными и поддерживающими одно связанное состояние. Мы полагаемся здесь на критерий Калоджеро [12] (и его обобщение для потенциалов, заданных на оси), определяющий число связанных состояний в системе двух тел. Мы полагаем также, что пара (x, y)

– есть пара координат Якоби, отвечающая системе трех тел. Здесь $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Будем полагать, что массы частиц и парные потенциалы одинаковы.

Мы будем изучать задачу рассеяния $2 \to 2(3)$ трех частиц на оси, то есть координата каждой частицы характеризуется вещественным числом. Точнее, мы будем изучать рассеяние связанной пары на третьей частице, пользуясь формализмом дифракционного подхода, подробно описанным в работах [1,2,4]. В рамках этого формализма конфигурационное пространство задачи есть плоскость Γ, каждая из трех пар координат Якоби образует ориентированную систему координат на Γ, эти системы координат (как и сами пары координат Якоби, отвечающие двум произвольным различным парным подсистемам) связаны преобразованием поворота. Полный носитель потенциала (объединение трех парных носителей потенциала) есть совокупность трех пересекающихся в одной точке лучей-"экранов"l_j с окрестностями. В данном случае финитных парных потенциалов носитель полного потенциала есть объединение трех ориентированных полос на плоскости, причем ширина каждой полосы определяется носителем соответствующего парного потенциала. Каждый из "экранов"с индексом j определяет область в конфигурационном пространстве, в которой частицы в паре j совпадают, то есть выполняется равенство $x_j = 0$. Таким образом, вдоль "экрана"с индексом j меняется координата Якоби y_j, а ортогонально экрану меняется координата Якоби x_j. Знак координаты x_j определяется четностью перестановки частиц в паре j, а знак координаты y_j определяется четностью перестановки частицы j и центра масс пары частиц k и l. Мы полагаем здесь, что тройка индексов (j, k, l) образована перестановкой чисел $(1, 2, 3)$.

Мы будем также полагать, что асимптотика решения уравнения Шредингера

$$(H - E)\Psi = 0,$$

удовлетворяющая условиям излучения на бесконечности в конфигурационном пространстве, устроена следующим образом

$$\Psi \sim e^{-ip_1 y_1}\varphi_1^-(x_1) + \sum_{j=1}^{3}\sum_{\tau_j \in \{+,-\}} a_j^{\tau_j} e^{ip_j y_j}\varphi_j^{\tau_j}(x_j) + A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})\frac{e^{i\sqrt{E}X}}{\sqrt{X}}. \tag{2}$$

Здесь

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad X = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \hat{\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{X}}{X}.$$

Мы используем обозначения $k \in \mathbb{R}$ и $p \in \mathbb{R}$ для моментов, сопряженных по Фурье координатам Якоби x и y.

Будем полагать, что в начальном состоянии частицы пары $j = 1$ находятся в связанном состоянии φ_1^- с энергией $\kappa_j < 0$. Функции $\varphi_j^{\tau_j}$ удовлетворяют условию нормировки

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_j^{\tau_j}(x)|^2 dx = 1, \quad j = 1, 2, 3, \quad \tau_j \in \{+, -\}. \tag{3}$$

Отметим, что первое слагаемое в выражении (2) отвечает падающей волне. При этом выполняются соотношения

$$y_1 < 0, \quad p_1 > 0.$$

Второе слагаемое в выражении (2) отвечает суперпозиции расходящихся волн (процессы $2 \to 2$) с амплитудами $a_j^{\tau_j}$ Здесь индекс $j = 1, 2, 3$ обозначает номер парной подсистемы, а индекс $\tau \in \{+, -\}$ определяет четность перестановки координаты частицы j и центра масс подсистемы с индексом j. Иными словами, индекс τ_j отвечает знаку координаты Якоби y_j и, таким образом, определяет "полуэкран"$l_j^{\tau_j}$. Для расходящихся волн выполняются соотношения

$$y_j > 0, \quad p_j > 0 \quad \text{или} \quad y_j < 0, \quad p_j < 0.$$

Отметим, что каждая расходящаяся волна с амплитудой $a_j^{\tau_j}$ определена лишь на том полуэкране, который соответствует индексу τ_j. На полуэкран с индексом $-\tau_j$ она продолжается нулем.

Наконец, третье слагаемое в выражении (2) отвечает процессу распада $2 \to 3$ и описывает расходящуюся волну с амплитудой $A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$.

Мы собираемся построить теперь набор уравнений, связывающих амплитуды $a_j^{\tau_j}$ процессов рассеяния $2 \to 2$ и амплитуду $A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$ процесса $2 \to 3$. При этом решение уравнения Шредингера нам известно лишь в асимптотической области конфигурационного пространства при $X \gg 1$. Выведем срезающую функцию, которая срежет решение при ограниченных и малых значениях X. Умножая точное решение задачи рассеяния (или его некоторую часть) на такую срезающую функцию, мы получим новую функцию, которая останется точным решением уравнения Шредингера при больших X, а при ограниченных и малых значениях X хотя и не будет уже точным решением уравнения Шредингера, но породит известную отличную от нуля невязку в ограниченной области конфигурационного пространства.

Этот факт позволит нам реализовать следующую схему решения задачи рассеяния. На первом этапе мы воспользуемся формулой Грина на плоскости и найдем, пусть и в терминах некоторой срезающей функции, связь между амплитудами рассеяния процессов $2 \to 2$ и $2 \to 3$. При этом мы выделим часть решения, отвечающую сингулярной части матрицы рассеяния. Иными словами, мы свяжем кластерные решения задачи рассеяния (отвечающие процессам $2 \to 2$) с расходящейся круговой волной (отвечающей процессам $2 \to 3$). На втором этапе решения задачи рассеяния мы построим неоднородную граничную задачу для той части решения, которая дополняет полный набор кластерных решений, до полного решения задачи рассеяния. Асимптотика этой неизвестной части решения ведет себя как расходящаяся круговая волна с гладкой амплитудой и удовлетворяет условиям излучения на бесконечности. В свою очередь, "срезанные"при ограниченных и малых значениях X кластерные волны породят неоднородность краевой задачи, которая во всех кластерных решениях кроме падающей волны оказывается связанной с амплитудой расходящейся волны.

Реализуем теперь описанную выше схему.

3. ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗЫВАЮЩИХ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ПРОЦЕССОВ 2 → 2 И 2 → 3

Введем радиальную срезающую функцию $\zeta(X) \in C^2_{[0,\infty)}$ следующим образом

$$\zeta(X) = \begin{cases} 0, \quad X < R_1, \quad R_1 \gg 1, \\ \text{растет от 0 до 1}, \quad R_1 < X < R_2, \\ 1, \quad X > R_2. \end{cases} \tag{4}$$

Введем также обозначение $\psi_j^{\tau_j}(\mathbf{X}) = e^{ip_j y_j}\varphi_j^{\tau_j}(x_j)$ для рассеянной волны, отвечающей процессу $2 \to 2$, и обозначение $\tilde{\psi}_j^{\tau_j}(\mathbf{X}) \equiv \psi_j^{\tau_j}(\mathbf{X})\zeta(X)$ для рассеянной волны, умноженной на срезающую функцию.

Подействуем оператором $H - E$ на эрмитовски сопряженное точное решение Ψ^* и на функцию $\tilde{\psi}_j^{\tau_j}$:

$$\begin{cases} (H-E)\Psi^* = 0, \\ (H-E)\tilde{\psi}_j^{\tau_j} = -Q_j^{\tau_j}. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь обозначение $Q_j^{\tau_j}$ использовано для невязки функции $\tilde{\psi}_j^{\tau_j}$ в уравнении Шредингера. Домножим первое из уравнений системы (5) на функцию $\tilde{\psi}_j^{\tau_j}$, второе уравнение системы домножим на функцию Ψ^*, вычтем второе уравнение из первого и проинтегрируем результат в круге B_R радиуса $R > R_2$. Воспользовавшись формулой Грина, мы придем к следующему соотношению

$$\int\limits_{\partial B_R} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_j^{\tau_j}}{\partial n}\Psi^* - \frac{\partial \Psi^*}{\partial n}\tilde{\psi}_j^{\tau_j} \right) dl = \int\limits_{B_R} Q_j^{\tau_j}\Psi^*. \tag{6}$$

Отметим, что набор индексов $\{j, \tau_j\}$ описывает один из шести полуэкранов, на каждом из которых реализуется уравнение (6). При этом выделенным является полуэкран, отвечающий падающей волне. Рассмотрим два эти случая отдельно.

Случай $\{j, \tau_j\} \neq \{1, -\}$.

Соотношение (6) с учетом явного вида асимптотики (2) и условия нормировки (3) принимает вид

$$\begin{aligned} &\int_{d_j^{\tau_j}} A^*(\theta, \mathbf{P}) \frac{e^{-i\sqrt{E}R}}{\sqrt{R}} ip_j e^{iRp_j\cos(\theta-\theta_j^{\tau_j})}\varphi_j^{\tau_j}(R\sin(\theta-\theta_j^{\tau_j}))Rd\theta + \\ &\qquad + \int_{d_j^{\tau_j}} A^*(\theta, \mathbf{P}) \frac{e^{-i\sqrt{E}R}}{\sqrt{R}} i\sqrt{E} e^{iRp_j\cos(\theta-\theta_j^{\tau_j})}\varphi_j^{\tau_j}(R\sin(\theta-\theta_j^{\tau_j}))Rd\theta + 2ip_j a_j^{\tau_j *} = \\ &\qquad\qquad = \int\limits_{B_R} Q_j^{\tau_j}(\mathbf{X}) \left(a_j^{\tau_j *} e^{-ip_j y_j}\varphi_j^{\tau_j}(x_j) + A^*(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P}) \frac{e^{-i\sqrt{E}X}}{\sqrt{X}} \right) d\mathbf{X}. \end{aligned} \tag{7}$$

Обозначение $d_j^{\tau_j}$ введено для узкой дуги окружности радиуса R в окрестности пересечения окружности и полуэкрана $l_j^{\tau_j}$. На краях дуги $d_j^{\tau_j}$ функция $\varphi_j^{\tau_j}$ обращается в нуль.

Отметим, что невязка $Q_j^{\tau_j}$ отлична от нуля в окрестности полуэкрана $l_j^{\tau_j}$, в которой срезающая функция $\zeta(X)$ меняется от $\zeta = 0$ до $\zeta = 1$, а именно, $R_1 < X < R_2$. Ширина этой окрестности определяется шириной носителя парного потенциала v_j. Таким образом $Q_j^{\tau_j} \sim O\Big(\frac{1}{R_2-R_1}\Big)$, а площадь области интегрирования в интеграле в правой части уравнения (7) также имеет порядок $R_2 - R_1$. Значение интегралов в левой части уравнения (7) определяется методом стационарной фазы.

Окончательно,

$$
\begin{gathered}
i\sqrt{\frac{2\pi}{|p_j|}}A^*(\theta_j^{\tau_j},\mathbf{P})(p_j+\sqrt{E})e^{iR(p_j-\sqrt{E})}\varphi_j^{\tau_j}(0)+ \\
+2ip_j a_j^{\tau_j *} = a_j^{\tau_j *}\int\limits_{B_R} Q_j^{\tau_j}(\mathbf{X})e^{-ip_j y_j}\varphi_j^{\tau_j}(x_j)d\mathbf{X}. \qquad (8)
\end{gathered}
$$

Угловая переменная θ, определяющая точку на границе круга B_R, меняется на промежутке $[0, 2\pi)$. Стационарные точки $\theta_j^{\tau_j}$, дающие основной вклад в интегралы по границе круга B_R, совпадают с шестью значениями, определяющими пересечения полуэкранов $l_j^{\tau_j}$ с окружностью ∂B_R. Мы учли также, что, в свете сказанного выше, второе слагаемое под интегралом в правой части уравнения (7) имеет следующий порядок малости по сравнению с главным вкладом.

Связь между амплитудами $a_j^{\tau_j}$ процессов рассеяния $2 \to 2$ и амплитудой $A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$ процесса рассеяния $2 \to 3$ согласно уравнению (8) принимает вид

$$
a_j^{\tau_j *} = A^*(\theta_j^{\tau_j},\mathbf{P})\frac{i\sqrt{\frac{2\pi}{|p_j|}}(p_j+\sqrt{E})e^{iR(p_j-\sqrt{E})}\varphi_j^{\tau_j}(0)}{\int\limits_{B_R} Q_j^{\tau_j}(\mathbf{X})e^{-ip_j y_j}\varphi_j^{\tau_j}(x_j)d\mathbf{X}-2ip_j}. \qquad (9)
$$

Случай $\{j, \tau_j\} = \{1, -\}$.

Повторяя описанные в предыдущем разделе выкладки, нетрудно видеть, что уравнение связи (9) будет модифицировано. А именно, соотношение (6) с учетом явного вида асимптотики (2) и условия нормировки (3) приводит в этом случае к следующему уравнению

$$
\begin{gathered}
\int_{d_1^-} A^*(\theta,\mathbf{P})\frac{e^{-i\sqrt{E}R}}{\sqrt{R}}ip_1 e^{iRp_1\cos(\theta-\theta_1^-)}\times \qquad (10) \\
\times\varphi_1^-(R\sin(\theta-\theta_1^-))Rd\theta+ \\
+\int_{d_1^-} A^*(\theta,\mathbf{P})\frac{e^{-i\sqrt{E}R}}{\sqrt{R}}i\sqrt{E}e^{iRp_1\cos(\theta-\theta_1^-)}\times \\
\times\varphi_1^-(R\sin(\theta-\theta_1^-))Rd\theta+2ip_1 a_1^{-*} = \\
=\int\limits_{B_R} Q_1^-(\mathbf{X})\Big(a_1^{-*}e^{-ip_1y_1}\varphi_1^-(x_1)+e^{ip_1y_1}\varphi_1^-(x_1)+ \\
+A^*(\hat{\mathbf{X}},\mathbf{P})\frac{e^{-i\sqrt{E}X}}{\sqrt{X}}\Big)d\mathbf{X}.
\end{gathered}
$$

Теперь в интегральном члене в правой части уравнения возникло дополнительное слагаемое, отвечающее падающей волне. Повторяя вычисления, проведенные в случае $\{j, \tau_j\} \neq \{1, -\}$ и учитывая этот дополнительный член, получаем окончательное выражение

$$
\begin{gathered}
a_1^{-*} = A^*(\theta_1^-,\mathbf{P})\frac{i\sqrt{\frac{2\pi}{|p_1|}}(p_1+\sqrt{E})e^{iR(p_1-\sqrt{E})}\varphi_1^-(0)}{\int\limits_{B_R} Q_1^-(\mathbf{X})e^{-ip_1y_1}\varphi_1^-(x_1)d\mathbf{X}-2ip_1}- \qquad (11) \\
-\frac{\int\limits_{B_R} Q_1^-(\mathbf{X})e^{ip_1y_1}\varphi_1^-(x_1)d\mathbf{X}}{\int\limits_{B_R} Q_1^-(\mathbf{X})e^{-ip_1y_1}\varphi_1^-(x_1)d\mathbf{X}-2ip_1}
\end{gathered}
$$

Отметим, что вклад второго слагаемого оказывается пренебрежимо малым вследствие оценки

$$
\begin{gathered}
\left|\int\limits_{B_R} Q_1^-(\mathbf{X})e^{ip_1y_1}\varphi_1^-(x_1)d\mathbf{X}\right| \le \\
\le \frac{C}{R_2-R_1}\left|\int_{R_1}^{R_2} e^{2ip_1y}dy\right| = O\left(\frac{1}{R_2-R_1}\right).
\end{gathered}
$$

Таким образом, с точностью до величин следующего порядка малости справедливо уравнение связи

$$
a_1^{-*} = A^*(\theta_1^-,\mathbf{P})\frac{i\sqrt{\frac{2\pi}{|p_1|}}(p_1+\sqrt{E})e^{iR(p_1-\sqrt{E})}\varphi_1^-(0)}{\int\limits_{B_R} Q_1^-(\mathbf{X})e^{-ip_1y_1}\varphi_1^-(x_1)d\mathbf{X}-2ip_1}. \qquad (12)
$$

Полученные уравнения связи (9) и (12) оказываются достаточными при построения граничной задачи для полного решения задачи рассеяния.

4. ПОСТРОЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПОЛНОГО РЕШЕНИЯ

Построим теперь граничную задачу для полного решения Ψ задачи рассеяния $2 \to 2(3)$, опираясь на полученную выше систему связей (9) между амплитудами рассеяния $a_j^{\tau_j}$ процессов рассеяния $2 \to 2$ и амплитудой $A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$ процесса рассеяния $2 \to 3$.

Запишем полное решение задачи рассеяния Ψ в следующем виде

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \chi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) + \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}), \tag{13}$$

где первое слагаемое в выражении (13) содержит падающую волну и набор рассеянных волн, отвечающих процессам рассеяния $2 \to 2$, срезанные функцией $\zeta(X)$ (4) на внешность круга большого радиуса с центром в начале координат

$$\chi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \equiv \Big[e^{-ip_1 y_1} \varphi_1^-(x_1) + . \\ + \sum_{j=1}^{3} \sum_{\tau_j \in \{+,-\}} a_j^{\tau_j} e^{ip_j y_j} \varphi_j^{\tau_j}(x_j) \Big] \zeta(X).$$

Неизвестная функция $\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ дополняет первое слагаемое $\chi(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ до полного решения. Аналогичный подход был использован, например, в работе ([5]). Мы будем следовать аналогичным идеям. Согласно выражению (2) асимптотика функции $\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ при $X \to \infty$ имеет вид

$$\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \sim A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P}) \frac{e^{i\sqrt{E}X}}{\sqrt{X}}, \tag{14}$$

где $A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$ – гладкая функция на окружности.

Поскольку функция Ψ является точным решением уравнения Шредингера, для функции $\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ получим уравнение

$$(H - E)\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = -S(\mathbf{X}, \mathbf{P}), \tag{15}$$
$$S(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = (H - E)\chi(\mathbf{X}, \mathbf{P}).$$

Отметим, что правая часть уравнения (15) $S(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ определена с точностью до шести коэффициентов $a_j^{\tau_j}$. В свою очередь, эти коэффициенты определены согласно (9) и (14) через определенные значения функции $\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ на окружности радиуса R. Отметим также, что уравнение (15) на функцию Φ является неоднородным, поскольку падающая волна не зависит от коэффициентов $a_j^{\tau_j}$ и, таким образом, не зависит от Φ.

Будем теперь рассматривать неоднородное уравнение (15) в круге большого радиуса R на плоскости Γ с граничным условием вида

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - i\sqrt{E}\Phi \right) |_{X=R} = O(R^{-3/2}). \tag{16}$$

Решение поставленной граничной задачи в сумме с функцией χ дает, согласно (13), полное решение исходной задачи рассеяния.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенная модель может рассматриваться как реализация метода, предложенного в работе [8] для описания механизма накопления антипротонов [13, 14] в более простой ситуации одномерных частиц и короткодействующих парных потенциалов. Являясь необходимым шагом для реализации полной ситуации, описанной в [8], предложенная модель имеет и собственную ценность. В рамках предложенной модели можно рассматривать, например, задачу рассеяния в параллельных пучках [15–17]. В ситуации, когда угол рассеяния продуктов распада оказывается малым, рассеяние двухчастичного кластера на третьей частице в старшем порядке определяется именно изложенной выше схемой.

Отметим также, что предложенная схема решения задачи рассеяния трех частиц на оси открывает возможность аналитического (и численного) изучения задачи одномерного рассеяния $3 \to 2(3)$ с парными потенциалами притяжения, развивая результаты работы [6].

Благодарности. Авторы выражают благодарность Г.В.Розенблюму за полезные обсуждения.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (гранта РНФ 22-11-00046).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С . Буслаев, С. П. Меркурьев, С. П. Саликов, в сб. *Проблемы матем. физики*, т.9, изд-во ЛГУ, Ленинград, (1979), с. 14.

2. В .С .Буслаев, С. П. Меркурьев, С. П. Саликов, Зап. Научн. Сем. ЛОМИ **84**, 16 (1979).

3. M. Gaudin and B .Derrida, J. de Phys. **36**, 1183 (1975).

4. V. S .Buslaev and S. B. Levin, in: *Selected Topics in Mathematical Physics*, Amer.Math.Soc.Transl. **225**, 55 (2008).

5. V. S. Buslaev, S. B. Levin, P. Neittaannmäki, and T. Ojala, J.Phys.A: Math.Theor. **43**, 285205 (2010).

6. В. С. Буслаев, Я. Ю. Коптелов, С. Б. Левин, Д. А. Стрыгина, ЯФ **76**, 23 (2013).

7. С. Б. Левин, Зап. науч. сем. ПОМИ **451**, 79 (2016).

8. А. М. Будылин, Я. Ю. Коптелов, С. Б. Левин, ЖЭТФ **160**, 3722 (2021).

9. W. A. Bertsche, E. Butler, M. Charlton, and N. Madsen, J. Phys. B, **48**, 232001 (2015).

10. M. Ahmadi, B. X. R. Alves, C. J. Baker, W. Bertsche, E. Butler, A. Capra, C. Carruth, C. L. Cesar, M. Charlton, S. Cohen et al., Nat. Commun. **8**, 681 (2017).

11. N. Kuroda, S. Ulmer, D. J. Murtagh, S. Van Gorp, Y. Nagata, M. Diermaier, S. Federmann, M. Leali, C. Malbrunot, V. Mascagna et al., Nat. Commun. **5**, 3089 (2014).

12. F. Calogero, Comm. Math. Phys. **1**, 80 (1965).

13. D. Krasnicky, G. Testera, and N. Zurlo, J. Phys. B **52**, 115202 (2019)

14. D. Krasnicky, R. Caravita, C. Canali, and G. Testera, Phys. Rev. A **94**, 022714 (2016).

15. Г. И. Будкер, УФН **89**, 533 (1966).

16. Б. Я. Зельдович, В. В. Шкунов, КЭ **9**, 393 (1982).

17. N. Cohen and L. Schächter, Phys. Rev. Accelerators and Beams, **23**, 111303 (2020).