

# РАССЕЯНИЕ СВЕТА ОДНОМЕРНЫМ ПОГЛОЩАЮЩИМ СЛОЕМ С НЕПРЕРЫВНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ПРЕЛОМЛЕНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ДИЭЛЕКТРИКАМИ

*Н. А. Ванюшкин<sup>\*</sup>, А. А. Геворгян, С. С. Голлик*

*Дальневосточный федеральный университет  
690922, Владивосток, Россия*

Поступила в редакцию 26 февраля 2022 г.,

после переработки 12 марта 2022 г.

Принята к публикации 12 апреля 2022 г.

Рассмотрено прохождение плоской электромагнитной волны через одномерный поглощающий слой, который зажат между двумя, в общем случае различными, полубесконечными диэлектриками. На основе метода трансфер-матрицы и метода, основанного на решении задачи Коши для системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка, были получены спектры пропускания, отражения и поглощения падающей волны, а также распределения интенсивности электрического поля внутри поглощающего слоя.

DOI: 10.31857/S0044451022080041

EDN: EFYUUG

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Задача распространения электромагнитных волн в неоднородных слоистых средах часто встречается во многих приложениях. В особенности важную роль она играет при разработке различных слоистых фотонных структур, включая диэлектрические зеркала [1, 2], оптические датчики [3, 4], метаматериалы [5, 6], устройства на основе жидких кристаллов [7, 8] и другие [9, 10]. По этой причине было разработано множество методов решения этой задачи, которые включают в себя прямое решение волнового уравнения [11], классические методы трансфер-матрицы [12, 13] и функции Грина [14, 15], метод инвариантного погружения [16] и другие.

Метод трансфер-матрицы заслуживает особого внимания, поскольку является одним из самых популярных методов, а также используется при выводе многих других методов. Он особенно эффективен при работе со слоистыми средами, поскольку трансфер-матрица, связывающая амплитуды полей на разных границах раздела, может быть легко получена для каждого однородного слоя. В этом случае метод трансфер-матрицы очень удобен как для численных расчетов, так и для аналитического

рассмотрения. Кроме того, этот метод может быть распространен на среды с неоднородными слоями, например, с линейным или параболическим профилем.

Метод функции Грина также часто используется, особенно при решении задач для 2D- и 3D-структур. Он также позволяет вычислить фотонную плотность состояний внутри исследуемого слоя, что является полезным инструментом при анализе различных фотонных структур. Стоит отметить, что каждый из упомянутых методов имеет свои недостатки и ограничения, а потому продолжают появляться новые методы [17–21], которые более оптимизированы с точки зрения численных вычислений или позволяют упростить аналитические выражения для задач с определенными условиями.

Ранее был предложен [22–24] новый метод нахождения коэффициентов пропускания и отражения для неоднородного слоя с непрерывной зависимостью показателя преломления, который основан на решении системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Среди преимуществ можно привести его применимость для среды с произвольной непрерывной зависимостью показателя преломления от координаты. В частности, в методе, разработанном в работе [24], предполагается, что неоднородный слой граничит с двумя диэлектриками, показатели преломления кото-

<sup>\*</sup> E-mail: vaniuschkin.nick@ya.ru

рых совпадают со значениями внутри слоя на соответствующих границах, благодаря чему достигается непрерывность коэффициента преломления  $n$  на обеих границах, а также отсутствие вклада границ в отражение проходящей волны. Это упрощает решение задачи рассеяния и нахождения распределения поля внутри слоя в упомянутых выше условиях, однако часто на практике условие непрерывности показателя преломления на границах слоя не выполняется. Поэтому необходимо дополнительно учитывать рассеяние волн на границах.

Подобная проблема уже рассматривалась другими авторами, например, в работе [25], однако там, в частности, предполагалось отсутствие поглощения и усиления излучения внутри среды, которые требуют отдельного учета при выводе выражений. В настоящей работе мы получим выражения для коэффициентов отражения и пропускания, а также распределения интенсивности электрического поля внутри неоднородного слоя с поглощением (усилением), после чего применим полученные формулы при решении различных задач.

## 2. МОДЕЛЬ И МЕТОДОЛОГИЯ

Сначала рассмотрим задачу рассеяния плоской световой волны на неоднородном одномерном слое (рис. 1), который имеет бесконечную протяженность вдоль осей  $x$  и  $y$  и расположен между плоскостями  $z = 0$  и  $z = L$ , а его показатель преломления  $n$  является произвольной непрерывной функцией только  $z$ . Допустим также, что плоскость падения совпадает с плоскостью  $xz$ , а волна падает под углом  $\alpha$  к нормали границы слоя, которая совпадает с плоскостью  $xy$ . Считаем, что среда слоя изотропная и немагнитная ( $\mu = 1$ ). Также предположим отсутствие поглощения в среде ( $\text{Im } n \equiv 0$ ). Области  $z < 0$  и  $z > L$  заполнены однородными диэлектриками с показателями преломления соответственно  $n_l$  и  $n_r$ .

Напряженность электрического поля падающей, отраженной и прошедшей волн обозначим соответственно  $\mathbf{E}_i$ ,  $\mathbf{E}_r$  и  $\mathbf{E}_t$ . Эти поля представимы в виде

$$\mathbf{E}_{i,r,t} = E_{i,r,t}^s \mathbf{n}_s + E_{i,r,t}^p \mathbf{n}_p = \begin{pmatrix} E_{i,r,t}^s \\ E_{i,r,t}^p \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{n}_s$  и  $\mathbf{n}_p$  — единичные орты  $s$ - и  $p$ -поляризации,  $E_{i,r,t}^s$  и  $E_{i,r,t}^p$  — соответствующие амплитуды падающей, отраженной и прошедших волн. Комплексные

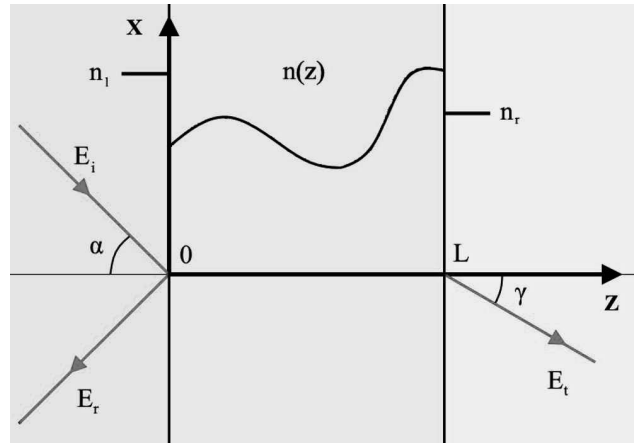


Рис. 1. Прохождение плоской электромагнитной волны через изотропный 1D-слой с произвольной зависимостью показателя преломления

коэффициенты пропускания и отражения для  $s$ - и  $p$ -волн могут быть записаны в виде

$$r^{s,p} = \frac{E_r^{s,p}}{E_i^{s,p}}, \quad t^{s,p} = \frac{E_t^{s,p}}{E_i^{s,p}}. \quad (2)$$

### 2.1. Неоднородный слой с непрерывным показателем преломления на границах

В соответствии с подходом, разработанным ранее [24], комплексные амплитудные коэффициенты  $t^{s,p}$  и  $r^{s,p}$  для слоя с показателем преломления  $n(z)$ , который граничит с обеих сторон с изотропными диэлектриками с показателями преломления  $n_l = n(0)$  и  $n_r = n(L)$ , могут быть представлены в виде

$$t^{s,p} = \frac{2 \exp(-ikL)}{Q^{s,p}(L) + F^{s,p}(L)}, \quad (3)$$

$$r^{s,p} = \frac{(Q^{s,p}(L) - F^{s,p}(L))^*}{Q^{s,p}(L) + F^{s,p}(L)},$$

где символ «\*» обозначает комплексное сопряжение,  $k(z) = (2\pi/\lambda)n(z) \cos \beta(z)$ ,  $\beta(z)$  — угол преломления,  $\lambda$  — длина волны падающего излучения. Функции  $Q^{s,p}$  и  $F^{s,p}$  являются решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dF^{s,p}}{dz} = -ikQ^{s,p} + A^{s,p} \frac{1}{k} \frac{dk}{dz} F^{s,p}, \quad (4)$$

$$\frac{dQ^{s,p}}{dz} = -ikF^{s,p} + B^{s,p} \frac{1}{k} \frac{dk}{dz} Q^{s,p} \quad (5)$$

с начальными условиями

$$F^{s,p}(0) = 1, \quad Q^{s,p}(0) = 1.$$

В системе уравнений (4), (5)

$$\frac{dk}{dz} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{\cos\beta} \frac{dn}{dz}, \quad (6)$$

$$A^s = 1, \quad B^s = 0, \quad A^p = \cos^2\beta, \quad B^p = \sin^2\beta.$$

Полное поле в каждой из сред может быть представлено следующим образом:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r, \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{in}, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t, \quad (7)$$

где индексы «0», «1» и «2» обозначают поля, соответствующие средам слева от 1D-слоя фотонного кристалла, внутри слоя и справа от слоя. Полное поле  $E_{in}$  внутри 1D-слоя связано с остальными полями (1) через граничные условия. Для  $E_{in}$  имеем

$$E_{in}^{s,p}(z) = \frac{k(0)}{k(L)} [(F^{s,p}(z))^* + r^{s,p} F^{s,p}(z)] E_i^{s,p}. \quad (8)$$

Наконец, интенсивность электрического поля в слое определяется как

$$I_{in}^{s,p}(z) = |E_{in}^{s,p}(z)|^2. \quad (9)$$

Теперь предположим, что внутри слоя присутствует поглощение (усиление) излучения ( $\text{Im } n \neq 0$ ). В соответствии с результатами работы [26], чтобы правильно учесть поглощение (или усиление) излучения, необходимо во всех формулах заменить комплексное сопряжение на инверсию волнового вектора  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ . Тогда выражения (3) и (8) примут вид

$$\begin{aligned} t_k^{s,p} &= \frac{2 \exp(-ikL)}{Q_k^{s,p}(L) + F_k^{s,p}(L)}, \\ r_k^{s,p} &= \frac{Q_{-k}^{s,p}(L) - F_{-k}^{s,p}(L)}{Q_k^{s,p}(L) + F_k^{s,p}(L)}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$E^{s,p}(z) = \frac{k(0)}{k(L)} [F_{-k}^{s,p}(z) + r_k^{s,p} F_k^{s,p}(z)] E_i^{s,p}. \quad (11)$$

Здесь функции  $Q_k^{s,p}$  и  $F_k^{s,p}$  являются решением системы (4), (5), а функции  $Q_{-k}^{s,p}$  и  $F_{-k}^{s,p}$  — решениями системы уравнений, которая получается из (4), (5) после замены  $k \rightarrow -k$ .

## 2.2. Учет отражения на границах слоя

Напомним, что до сих пор мы рассматривали ситуацию, когда показатель преломления непрерывен на границах слоя, т.е.  $n_l = n(0)$  и  $n_r = n(L)$ . Это условие зачастую не выполняется на практике, например, когда слой граничит с обеих сторон с воздухом ( $n_l = n_r = 1$ ). Поэтому важно обобщить данный метод на случай произвольных сред слева

и справа от неоднородного слоя. Сделать это можно, например, при помощи метода сложения слоев Амбарцумяна [27, 28] или метода трансфер-матрицы [12, 13]. Приведем здесь выкладки для метода трансфер-матрицы.

Трансфер-матрица  $M^{s,p}$  всей структуры, которая связывает между собой амплитуды падающей, отраженной и прошедшей волн, может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} M^{s,p} &= \frac{k_l}{k_r} \begin{pmatrix} 1/t_r^{s,p} & -r_r^{s,p}/t_r^{s,p} \\ -r_r^{s,p}/t_r^{s,p} & 1/t_r^{s,p} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1/t_{-k}^{s,p} & -r_{-k}^{s,p}/t_{-k}^{s,p} \\ -r_{-k}^{s,p}/t_{-k}^{s,p} & 1/t_{-k}^{s,p} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1/t_l^{s,p} & -r_l^{s,p}/t_l^{s,p} \\ -r_l^{s,p}/t_l^{s,p} & 1/t_l^{s,p} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Вторая матрица определяет изменение амплитуды поля при распространении внутри неоднородного слоя, а первая и третья — изменения амплитуды поля при отражении соответственно от правой и левой границ. Коэффициенты в первой и третьей матрицах легко получаются с помощью формул Френеля:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_l^s} &= \frac{k_l + k(0)}{2k_l}, & \frac{r_l^s}{t_l^s} &= \frac{k_l - k(0)}{k_l + k(0)}, \\ \frac{1}{t_r^s} &= \frac{k(L) + k_r}{2k(L)}, & \frac{r_r^s}{t_r^s} &= \frac{k(L) - k_r}{k(L) + k_r}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $k_l = (2\pi/\lambda)n_l \cos \alpha$  и  $k_r = (2\pi/\lambda)n_r \cos \gamma$ . Выражения для  $p$ -поляризации получаются аналогично. С другой стороны, матрица  $M^{s,p}$  может быть выражена через коэффициенты отражения и пропускания всей структуры:

$$M^{s,p} = \frac{k_l}{k_r} \begin{pmatrix} 1/T_{-k}^{s,p} & -R_{-k}^{s,p}/T_{-k}^{s,p} \\ -R_{-k}^{s,p}/T_{-k}^{s,p} & 1/T_{-k}^{s,p} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Таким образом, вычислив матрицу (12) и приравняв ее матрице (14), мы можем получить искомые величины  $T_k^{s,p}$  и  $R_k^{s,p}$ . Приведем здесь явные выражения для  $s$ -поляризации:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_k^s} &= \frac{(k_l - k(0)) Q_{-k}^s(L) + (k_l + k(0)) Q_k^s(L)}{2k_l} + \\ &+ \frac{k_r (k(0) - k_l) F_{-k}^s(L) + k_r (k(0) + k_l) F_k^s(L)}{2k(L) k_l}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} R_k^s &= 1 - \left[ \frac{k(0) k_r F_k^s(L) - k_l k_r F_{-k}^s(L)}{k(L) k_l} + \right. \\ &\left. + \frac{k(0)}{k_l} (Q_k^s(L) - Q_{-k}^s(L)) \right] T_k^s. \end{aligned} \quad (16)$$

Схожим образом можно получить выражение для распределения поля внутри неоднородного слоя. Для этого выразим амплитуды волны в точке  $z$  внутри слоя ( $0 < z < L$ ) через поле в точке  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_+^{s,p}(z) \\ E_-^{s,p}(z) \end{pmatrix} &= \\ &= \frac{k_l}{k(z)} \begin{pmatrix} 1/t_{-k}^{s,p}(z) & -r_{-k}^{s,p}(z)/t_{-k}^{s,p}(z) \\ -r_k^{s,p}(z)/t_k^{s,p}(z) & 1/t_k^{s,p}(z) \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1/t_l^{s,p} & -r_l^{s,p}/t_l^{s,p} \\ -r_l^{s,p}/t_l^{s,p} & 1/t_l^{s,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ R_k^{s,p} \end{pmatrix} E_i^{s,p}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $t_k^{s,p}(z)$  и  $r_k^{s,p}(z)$  — коэффициенты пропускания и отражения для части слоя толщиной  $z$ ,  $E_i^{s,p}$  — амплитуда поля падающей волны в точке  $z = 0$ ,  $E_+^{s,p}(z)$  и  $E_-^{s,p}(z)$  — амплитуды волн, распространяющиеся внутри слоя соответственно вправо и влево. Амплитуда полного поля в точке  $z$  определяется как сумма волн,  $E^{s,p}(z) = E_+^{s,p}(z) + E_-^{s,p}(z)$ :

$$\begin{aligned} E^s(z) &= \frac{(k(0)+k_l) F_{-k}^s(z) + (k(0) - k_l) F_k^s(z)}{2k(z)} + \\ &+ \frac{(k(0) - k_l) F_{-k}^s(z) + (k(0) + k_l) F_k^s(z)}{2k(z)} R_k^s. \end{aligned} \quad (18)$$

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В данном разделе мы применим наш модифицированный метод для двух задач рассеяния плоской волны на различных структурах. Сначала рассмотрим поглощающий фотонный кристалл (ФК) с меняющейся по длине амплитудой модуляции показателя преломления (аподизированная решетка):

$$n(z) = n_1 + n_2(z) \sin^2 \left( \frac{\pi}{\Lambda} z \right) + i\kappa, \quad (19)$$

где  $\kappa$  — коэффициент поглощения и

$$n_2(z) = n_{02} + \delta n \frac{z}{L}. \quad (20)$$

На рис. 2 показаны спектры пропускания  $|T|^2$  и поглощения  $A = 1 - |T|^2 - |R|^2$  при нормальном падении в случаях без поглощения ( $\kappa = 0$ ) и при поглощении, равном  $\kappa = 0.003$ . На спектре пропускания хорошо виден характерный диапазон 650–800 нм с минимумом пропускания, известный как фотонная запрещенная зона (ФЗЗ). Добавление поглощения приводит к снижению пропускания через структуру во всем спектральном диапазоне, кроме ФЗЗ. Также за счет аподизации длинноволновый край ФЗЗ

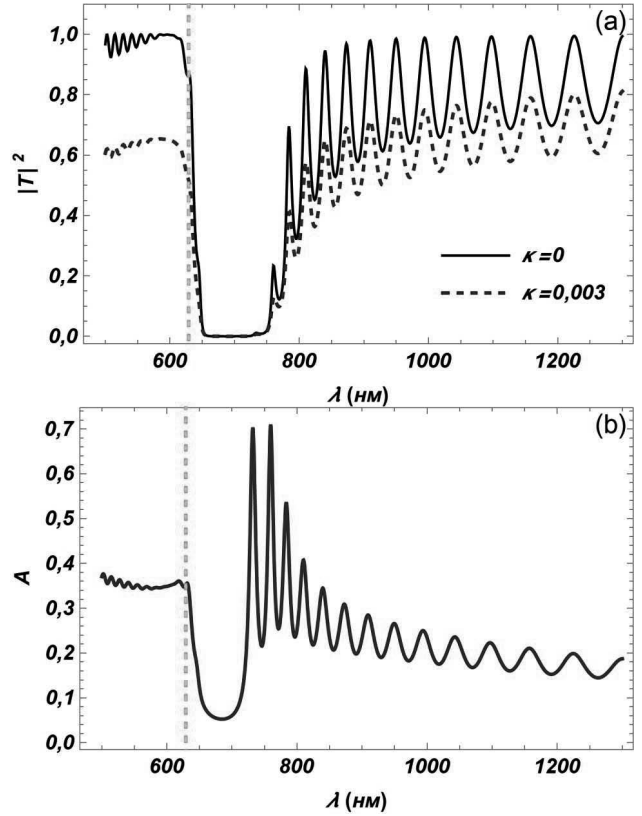


Рис. 2. (В цвете онлайн) Спектры пропускания (а) и поглощения (б) аподизированного ФК с коэффициентом поглощения  $\kappa = 0.003$  (синяя линия) и без поглощения (черная линия). Параметры структуры:  $n_1 = 1.5$ ,  $n_{02} = 0.3$ ,  $\delta n = 0.3$ ,  $L = 6000$  нм,  $\Lambda = 200$  нм,  $n_l = n_r = 1$

имеет более сложную структуру по сравнению с идеальным ФК. Это связано с тем, что на этих длинах волн поле имеет повышенную локализацию внутри ФК, но слабое пропускание. Этим же объясняются и максимумы поглощения на длинноволновой границе ФЗЗ.

На рис. 3а показано распределение поля внутри активного ФК на длине волны  $\lambda = 629$  нм. Видно постепенное уменьшение огибающей распределения по мере распространения в глубь ФК. На рис. 3б показан спектр поглощения в случае падения электромагнитной волны из среды справа от того же самого ФК. Спектры пропускания при падении волны слева и справа от ФК полностью совпадают, однако спектры отражения и поглощения могут проявлять значительную асимметрию. В нашем случае это проявляется в положении мод с большим поглощением: при падении справа они расположены на коротковолновой границе ФЗЗ, а при падении слева — на длинноволновой границе.

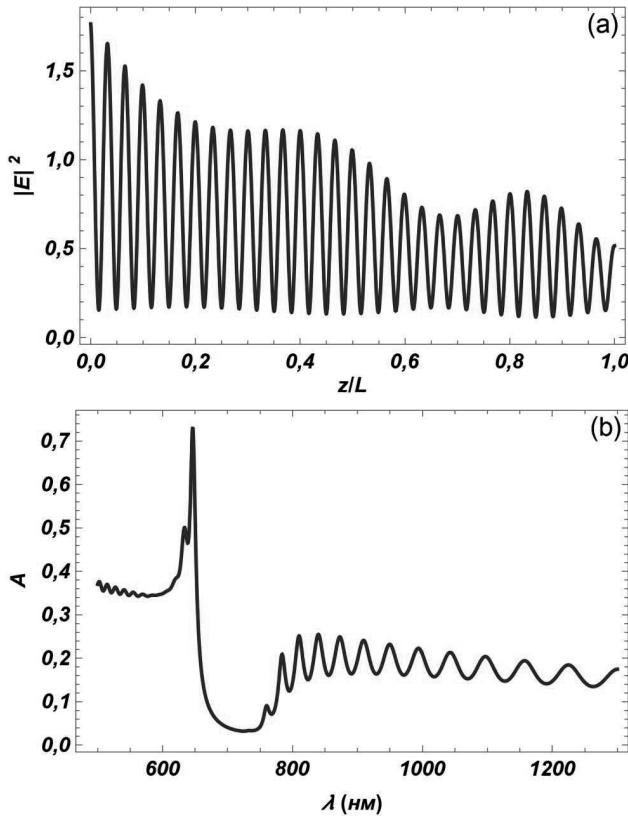


Рис. 3. (а) Распределение поля внутри аподизированного ФК с поглощением  $\kappa = 0.003$  на длине волны  $\lambda = 629$  нм (показано зелеными штрихами на рис. 2). (б) Спектр поглощения аподизированного ФК, как на рис. 2, но при падении излучения в обратном направлении (из среды справа от ФК)

Теперь перейдем к рассмотрению активного ФК с переменным по длине периодом модуляции показателя преломления (чирпированная решетка):

$$n(z) = n_1 + n_2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{\Lambda(z)} z \right) - ig, \quad (21)$$

где  $g$  — коэффициент усиления и

$$\Lambda(z) = \Lambda_0 + \delta\Lambda \frac{z}{L}. \quad (22)$$

На рис. 4 показаны спектры пропускания  $|T|^2$  и отражения  $|R|^2$  в случаях без усиления ( $g = 0$ ) и при усилении, равном  $g = 0.0045$ . Как видно из представленных спектров, активный ФК увеличивает амплитуды отраженной и прошедшей волн. Особенно большое усиление наблюдается для отраженной волны на нескольких длинах волн на длинноволновом краю ФЗЗ. На этих длинах волн данная структура ведет себя как отражающий оптический усилитель.

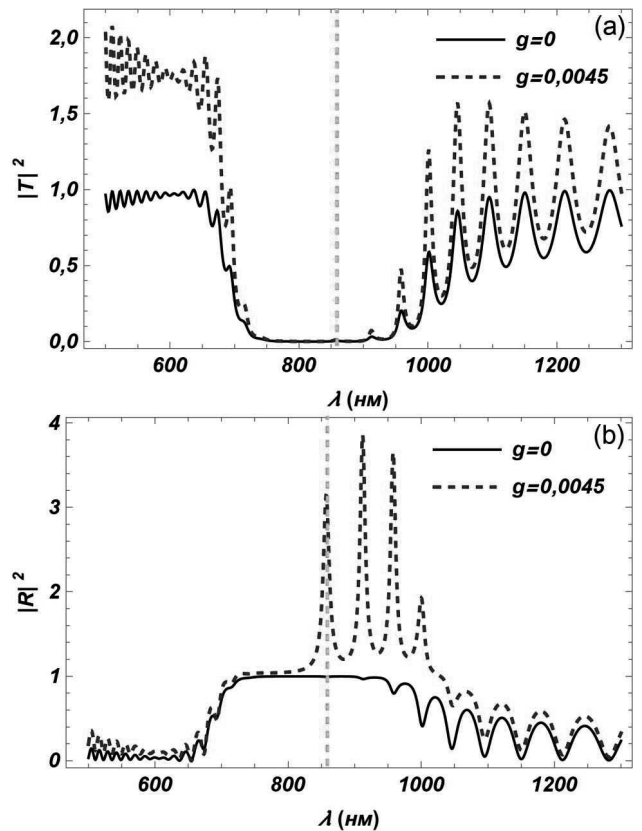


Рис. 4. (В цвете онлайн) Спектры пропускания (а) и отражения (б) чирпированного ФК при нормальном падении с коэффициентом усиления  $g = 0.0045$  (синяя линия) и без усиления (черная линия). Параметры структуры:  $n_1 = 1.5$ ,  $n_2 = 0.6$ ,  $L = 5980$  нм,  $\Lambda_0 = 200$  нм,  $\delta\Lambda = 30$  нм,  $n_l = n_r = 1$

На рис. 5а показано распределение поля внутри активного ФК для одной из этих мод с длиной волны  $\lambda = 859$  нм. На рис. 5b приведен спектр отражения в случае падения электромагнитной волны из среды справа от того же ФК. Аналогично предыдущему случаю с поглощением, мы снова имеем асимметрию спектров отражения для «левой» и «правой» задач. Стоит также отметить, что моды с большим усилением на коротковолновой границе в правой задаче сливаются в относительно широкую полосу.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе нами был модифицирован и обобщен представленный ранее метод решения задачи рассеяния плоской волны на неоднородном поглощающем (усиливающем) слое с произвольной зависимостью показателя преломления, а именно, бы-

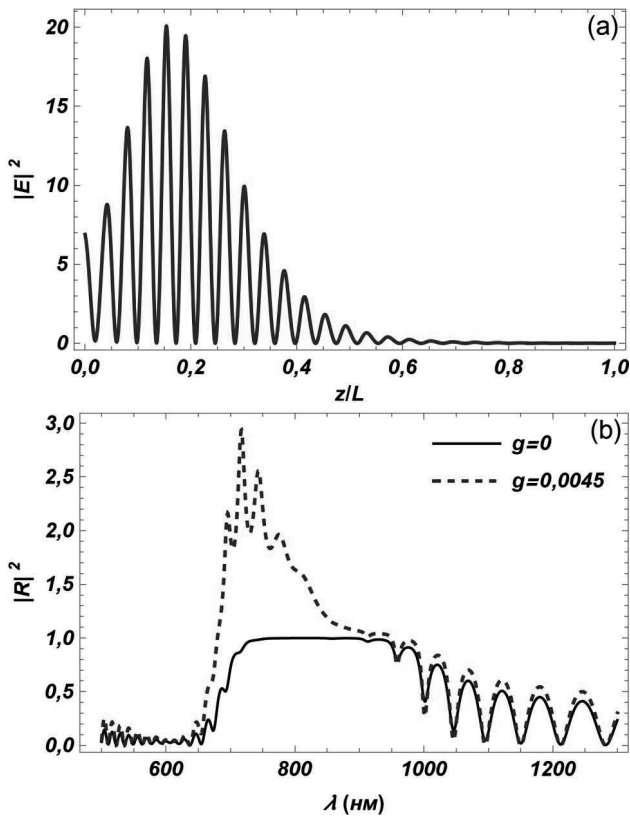


Рис. 5. (а) Распределение поля внутри chirпированного ФК с усилением  $g = 0.0045$  на длине волны  $\lambda = 859$  нм (показано зелеными штрихами на рис. 4). (б) Спектры отражения chirпированного ФК, как на рис. 4, но при падении излучения в обратном направлении (из среды справа от ФК)

ли получены выражения для коэффициентов пропускания и отражения излучения для неоднородного слоя, расположенного между двумя различными диэлектриками, а также выражение для распределения электрического поля внутри такого слоя. Данные коэффициенты выражаются через пару комплексных функций, которые являются решением задачи Коши для системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений, а также параметров слоя и внешней среды. Данный метод имеет преимущество по сравнению с прямым решением волнового уравнения с точки зрения численного решения задачи, так как решить систему из двух уравнений первого порядка легче, чем одно уравнение второго порядка. Наконец, нами было продемонстрировано использование данного метода на примере задачи рассеяния плоской волны на двух фотонных кристаллах с градиентными параметрами.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Фонда содействия развитию теоретической физики и математики «БАЗИС» (грант № 21-1-1-6-1) и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FZNS-2020-0003 № 0657-2020-0003).

## ЛИТЕРАТУРА

1. D. M. Calvo-Velasco and R. Sánchez-Cano, *Curr. Appl. Phys.* **35**, 72 (2022).
2. F. Wu, M. Chen, D. Liu et al., *Appl. Opt.* **59**, 9621 (2020).
3. I. M. Efimov, N. A. Vanyushkin, A. H. Gevorgyan et al., arXiv:2202.01509.
4. Z. A. Zaky, A. M. Ahmed, A. S. Shalaby et al., *Sci. Rep.* **10**, 1 (2020).
5. Z. Li, Z. Ge, X. Y. Zhang et al., *Indian J. Phys.* **93**, 511 (2019).
6. L. Ju, X. Xie, W. C. Du et al., *Phys. Stat. Sol. (b)* **256**, 1800382 (2019).
7. A. H. Gevorgyan, S. S. Golik, N. A. Vanyushkin et al., *Materials* **14**, 2172 (2021).
8. V. A. Belyakov, *Liq. Cryst.* **48**, 2150 (2021).
9. N. A. Vanyushkin, A. H. Gevorgyan, and S. S. Golik, *Optik* **242**, 167343 (2021).
10. H. B. Tanaue, E. Reyes-Gómez, and A. Bruno-Alfonso, *Photonics Nanostr.-Fundam. Appl.* **47**, 100958 (2021).
11. L. Ge, *Photonics Res.* **5**, B20 (2017).
12. P. Yeh, *Optical Waves in Layered Media*, Wiley, New York (1988).
13. A. Yariv and P. Yeh, *Optical Waves in Crystals*, Wiley, New York (1984).
14. F. R. Di Napoli and R. L. Deavenport, *J. Acoust. Soc. Amer.* **67**, 92 (1980).
15. G. Barton, *Elements of Green's Functions and Propagation*, Clarendon Press, Oxford (1989).
16. R. Bellman and G. M. Wing, *An Introduction to Invariant Imbedding*, John Wiley & Sons, Inc, New York (1975).
17. J. X. Liu, Z. K. Yang, L. Ju et al., *Plasmonics* **13**, 1699 (2018).

18. M. Sanamzadeh, L. Tsang, J. Johnson et al., *Prog. Electromagn. Res. B* **80**, 1 (2018).
19. K. V. Khmelnytskaya, V. V. Kravchenko, and S. M. Torba, *Lobachevskii J. Math.* **41**, 785 (2020).
20. G. de Nittis, M. Moscolari, S. Richard et al., arXiv: 1904.03791.
21. J. A. Lock, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* **216**, 37 (2018).
22. D. M. Sedrakian, A. H. Gevorgyan, and A. Zh. Khachatryan, *Opt. Comm.* **192**, 135 (2001).
23. A. H. Gevorgyan, *Opt. Mater.* **100**, 109649 (2020).
24. N. A. Vanyushkin, A. H. Gevorgyan, and S. S. Golik, *Opt. Mater.* **127**, 112306 (2022).
25. A. Zh. Khachatryan, D. M. Sedrakian, and N. M. Ispiryan, *Astrophysics* **44**, 518 (2001).
26. A. Z. Khachatryan, A. G. Alexanyan, A. S. Avanesyan, and N. A. Alexanyan, *Optik* **126**, 1196 (2015).
27. В. А. Амбарцумян, *Изв. Акад. Наук Арм. ССР* **1–2**, 31 (1944).
28. А. А. Геворгян, К. В. Папоян, О. В. Пикичян, *Опт. и спектр.* **88**, 647 (2000) [*Opt. Spectrosc.* **88**, 586 (2000)].