

# О ГЕНЕРАЦИИ ЧЕТНЫХ ГАРМОНИК ОНДУЛЯТОРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПУЧКАМИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ

*И. А. Федоров\**, *К. В. Жуковский\*\**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 8 февраля 2022 г.,  
после переработки 8 февраля 2022 г.  
Принята к публикации 25 марта 2022 г.

Теоретически исследуется генерация гармоник спонтанного и вынужденного ондуляторного излучения (ОИ) в плоских ондуляторах лазеров на свободных электронах (ЛСЭ). Проводится сравнительный анализ теоретических результатов излучения четных гармоник ОИ, следуя собственным теоретическим расчетам и расчетам других авторов. Анализируется и сравнивается с экспериментом излучение второй гармоники в ондуляторах LCLS, хорошо документированное с учетом всех характеристик ЛСЭ. Исследуется влияние на генерацию гармоник таких характеристик, как сечение пучка, его отклонение от оси, эмиттанс и разброс энергий. Проводится сравнение результатов расчета с имеющимися экспериментальными данными по генерации гармоник. Исследуется также возможность использования и усиления четных гармоник в ЛСЭ SwissFEL и LCLS-II с выделенными каскадами группирователя и усилителя второй и третьей гармоник.

**DOI:** 10.31857/S004445102208003X  
**EDN:** EFWFAZ

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Ондуляторное излучение (ОИ) было предсказано Гинзбургом в середине 20 века [1]. Гинзбург также высказал гипотезу [2], что электроны могут излучать когерентно, если они сгруппированы в банчи размером меньше длины волны. Первый ондулятор был построен Мотцем [3], который продемонстрировал генерацию спонтанного ОИ. Строгую теорию вынужденного излучения электронов в ондуляторе как следствие их группировки из-за взаимодействия электронов с электромагнитной волной, предложил Мадэй [4]; он построил первый лазер на свободных электронах и продемонстрировал генерацию когерентного излучения в миллиметровом диапазоне. Теория ЛСЭ представлена во многих работах, например, [5–13]. В основе группировки электронов в ЛСЭ лежит тот факт, что электроны движутся со скоростью меньше скорости света и немного отстают от фотонов. Когда электроны проходят полпериода ондулятора, фотоны проходят это расстояние и еще

полдлины волны, при этом оба вектора магнитного поля ондулятора и волны меняют свои направления и направление силы Лоренца, действующей на электрон, сохраняется на каждом периоде ондулятора. Таким образом, сила Лоренца ускоряет электроны позади узлов волны и замедляет электроны впереди узлов волны; в результате электроны в ондуляторе группируются на длине волны. Группировка на длинах волн гармоник также происходит, но она слабее, чем группировка на длине волны основного тона. Современные ЛСЭ позволяют генерировать импульсы фемтосекундной длительности в рентгеновском диапазоне на длине волны порядка ангстрем. Из-за отсутствия отражающих элементов на таких длинах волн трудно сделать оптический резонатор. Поэтому в рентгеновском и ультрафиолетовом диапазонах в основном применяют однопроходные ЛСЭ высокого усиления, в которых взаимодействие с пучком электронов происходит за один проход излучения в ондуляторах. Недостатком однопроходных рентгеновских ЛСЭ являются очень большие размеры и стоимость: длина ускорителя доходит до 1 км, энергия электронов до 15 ГэВ, ток — до 5 кА, длина ондуляторов — до 100 м. Уменьшение размеров и стоимости является приоритетной задачей в развитии источников излучения четвертого поколения и

\* E-mail: fedorov.ia15@physics.msu.ru

\*\* E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru

может быть достигнуто, например, путем использования гармоник излучения. Резонансы гармоник ОИ под углом  $\theta$  к оси ондулятора с периодом  $\lambda_u$  и параметром дипольности  $k$  происходят на следующих длинах волн:

$$\lambda_n = \frac{\lambda_u}{2n\gamma^2} \left( 1 + \frac{k_{eff}^2}{2} + (\gamma\theta)^2 \right), \quad (1)$$

$$k_{eff}^2 = k^2 \varpi, \quad \varpi = 1 + (d/h)^2.$$

где  $\gamma$  — релятивистский фактор электронов,  $k = H_0 \lambda_u e / 2\pi m c^2 \approx 0.9337 H_0 [\text{Тл}] \lambda_u [\text{см}]$  — параметр дипольности, а  $\varpi > 1$  учитывает возможное присутствие гармоник магнитного поля с амплитудой  $d$  и номером гармоники  $h$ . В ондуляторах период обычно составляет несколько сантиметров; значительно уменьшить его не представляется возможным. Получить более коротковолновое излучение с электронами меньшей энергии можно, используя излучение гармоник [14–17]. Однако, чем выше номер гармоники  $n$ , тем больше потери, связанные с конечным эмиттансом пучка, разбросом энергии электронов, дифракцией и другими факторами. Особенно сильно это сказывается на вынужденном излучении, где электрон-фотонное взаимодействие на длинах волн гармоник сильнее подвержено влиянию потерь. В источниках излучения четвертого поколения пучки имеют высокий релятивистский фактор  $\gamma \sim 10^3$ – $10^4$ , низкий разброс энергии  $\sigma_e \sim 10^{-3}$ – $10^{-4}$ , малые эмиттансы  $\epsilon_{x,y} \sim 0.5$  мм · мрад и сечение  $\sigma_{x,y} \sim 10$ – $30$  мкм. Это открывает возможность использовать гармоники излучения в рентгеновском диапазоне.

Целью работы является анализ генерации гармоник, в особенности четных, как спонтанного ОИ, так и вынужденного излучения ЛСЭ, и сравнительный анализ различных методов расчета мощности гармоник путем сравнения соответствующих результатов с данными рентгеновского ЛСЭ LCLS, который выбран в качестве референтной установки ввиду наличия обширной документации по излучению гармоник. Также мы теоретически исследуем возможности усиления и излучения второй гармоники ЛСЭ в выделенных каскадах ондуляторов, настроенных в резонанс.

## 2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОИ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ СПЕТРА

Программа СПЕТРА [18–21] позволяет проводить численное моделирование ОИ; она считает поток фотонов, спектрально-угловое распределение и

другие характеристики излучения. Согласно [18], дифференциальное распределение плотности числа фотонов  $dN_p$  и связанная с этим мощность  $dP$  на единицу площади  $dS$  в спектральном интервале  $d\omega/\omega$  рассчитываются численно с помощью интеграла свертки [18]:

$$\frac{d^2 N_p}{dS d\omega/\omega} = \frac{d^2 P}{hdS d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega_1} N S_N(\omega - \omega') \Phi|_{\omega=\omega'}, \quad (2)$$

где

$$S_N(x) = (\text{sinc } \pi N x)^2 \equiv (\sin \pi N x / \pi N x)^2,$$

$\omega_1$  — основной тон ОИ,  $N$  — число периодов ондулятора,  $\Phi = d^2 N_{p\infty} / dS d\omega/\omega$  — плотность потока фотонов [18]:

$$\Phi = \frac{N}{4\pi\sigma_x\sigma_y} \frac{4\pi\gamma^2 c / \lambda_u}{\omega} \times \sum_{k>\omega/\omega_1}^{\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi f_k [\rho_k(\omega) \cos(\varphi), \rho_k(\omega) \sin(\varphi)] \times G_k(X, Y, \varphi, \omega), \quad (3)$$

$\lambda_u$  — период ондулятора,  $\varphi$  — полярный угол вокруг оси ондулятора [18] и

$$\rho_k(\omega) = Z \left( \frac{4\pi\gamma^2 c k}{\omega \lambda_u} - \langle (\gamma\beta)^2 \rangle - 1 \right)^{1/2},$$

$$G_k(X, Y, \varphi, \omega) = \exp \left( - \frac{(X - \rho_k(\omega) \cos \varphi)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(Y - \rho_k(\omega) \sin \varphi)^2}{2\sigma_y^2} \right), \quad (4)$$

$$f_k(X, Y) = \frac{\alpha}{4\pi^2} |\mathbf{F}_k|^2,$$

$$\mathbf{F}_k = \frac{ik}{cRT} \int_0^{\lambda_u} (\boldsymbol{\beta}(z) - \mathbf{n}) e^{ik\omega_1 t(z)} dz, \quad (5)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y$  — размеры пучка,  $\gamma$  — его релятивистский фактор,  $c$  — скорость света,  $\alpha \simeq 1/137$  — постоянная тонкой структуры,

$$\langle (\gamma\beta)^2 \rangle = \int_0^{\lambda_u} \left( (\gamma\beta_x)^2 + (\gamma\beta_y)^2 \right) \frac{dz}{\lambda_u},$$

$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$  — скорость электрона,  $t = t' + R(t')/c$  — запаздывающее время,  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ ,  $R = |\mathbf{R}|$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  —

вектор от заряда к наблюдателю,  $\mathbf{r} = (X, Y, Z)$ ,  $\mathbf{r}' = (x, y, z)$ . Разброс энергий электронов и эмиттанс учитываются в коде SPECTRA и вычисляются в обеих поперечных плоскостях. Эмиттанс учитывается в свертке для излучения одного электрона с двумерной функцией распределения электронов. Разброс энергий  $\sigma_e$  вызывает уширение линий спектра и учитывается в свертке с гауссовым распределением со средним квадратичным  $2\hbar\omega\sigma_e/E$ , где  $\hbar\omega$  — энергия фотона,  $E$  — энергия электрона. Численный счет ведется, как обычно, в волновой зоне:  $|Z - z| \gg |X - x|, |Y - y|$ . Ближнюю зону можно также включить в расчет, но это существенно замедляет вычисления. Мы использовали во всех численных и аналитических вычислениях приближения волновой (дальней) зоны.

Интегрирование по частотам  $\omega'$  в (2) сводится к взятию свертки с обычной для ОИ функцией sinc линии спектра  $S_N$ , что позволяет осуществить быстрый счет с помощью алгоритмов SPECTRA для преобразований Фурье [18] в свертке. При интегрировании быстроосциллирующих функций по времени движения электрона в ондуляторе, интервал интегрирования разбивается в SPECTRA на несколько отрезков, на каждом из которых проводится аппроксимация функции полиномами третьего порядка. Для функции  $g(t)$  в аппроксимации полиномом порядка  $n$  в области интегрирования,  $n$ -я производная  $d^n g/dt^n$  будет константой. Тогда, интегрируя  $G = \int g(t)e^{i\omega t} dt$  по частям  $n$  раз, получим

$$G = \left(-\frac{1}{i\omega}\right)^n \int \frac{d^n g(t)}{dt^n} e^{i\omega t} dt - \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{i\omega}\right)^k \left[ \frac{d^k g(t)}{dt^{k-1}} e^{i\omega t} \right]. \quad (6)$$

С учетом  $d^n g/dt^n = \text{const}$ , первый член имеет вид

$$\left(-\frac{1}{i\omega}\right)^{n+1} \frac{d^n g(t)}{dt^n} (e^{i\omega t_1} - e^{i\omega t_2}),$$

где  $t \in [t_1, t_2]$  — малый интервал времени, на котором  $g(t)$  аппроксимирована полиномом третьего порядка. В SPECTRA производные до третьего порядка определяются методом интерполяции кубическими сплайнами [22]. Тогда [18] весь интервал интегрирования  $t \in [t_1, t_{m+1}]$  оказывается разбит на  $m$  отрезков, и интегрирование в  $G$  сводится к суммированию:

$$G = \sum_{k=1}^4 \left(-\frac{1}{i\omega}\right)^k \left( g^{(k-1)}(t_1) e^{i\omega t_1} - g^{(k-1)}(t_{m+1}) e^{i\omega t_{m+1}} \right) + \frac{1}{\omega^4} \sum_{j=1}^{m-1} \left( g^{(3)}(t_{j+1}) - g^{(3)}(t_j) \right) e^{i\omega t_{j+1}}, \quad (7)$$

где  $g^{(k)}(x)$  — производная порядка  $k$  от функции  $g(x)$ .

Описанная выше схема численного счета дает высокую точность результатов. Учет конечного эмиттанса проводится при интегрировании по радиусу, которое ведется со сверткой по разбросу энергий и при азимутальном интегрировании. В диапазоне энергий фотонов, где доминируют высшие гармоники, свертка с функцией  $S_N$  мало меняет форму спектра, и в этом случае программа SPECTRA не считает свертки и счет ускоряется без существенного ухудшения точности. В расчете использовалась опция “Energy Dependence → Angular Flux Density” для счета интегралов описанным выше способом. Другие детали работы программы SPECTRA содержатся в [18].

### 3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ОИ С ПОМОЩЬЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ БЕССЕЛЯ

Простейшей аппроксимацией магнитного поля по длине ондулятора является чисто синусоидальная зависимость  $H = H_0 \sin(k_\lambda z)$ ,  $k_\lambda = 2\pi/\lambda_u$ , где  $H_0$  — амплитуда поля на оси  $z$ . Поле реального ондулятора более сложное, в нем могут присутствовать гармоники и непериодические компоненты [23–30]; кроме того, пучок имеет конечный размер, и простейшее гармоническое поле не удовлетворяет уравнениям Максвелла во всем зазоре ондулятора [31–35]. Для генерации в рентгеновском и ультрафиолетовом диапазонах используются пучки малого сечения:  $\sigma_e \sim 0.2\text{--}0.5$  мм для UV-ЛСЭ,  $\sigma_e \sim 10\text{--}50$  мкм для рентгеновского ЛСЭ. Вблизи оси поле ондулятора близко к идеально синусоидальному и может быть представлено единственной гармоникой. Поле  $H_0$  на оси ондулятора слабее, чем поле  $H_{max}$  у полюсов магнитов:  $H_0 \simeq H_{max}/\text{ch}(\pi g/\lambda_u)$ , где  $g$  — зазор ондулятора. В пучке конечного сечения происходят бетатронные колебания, которые расщепляют линию излучения  $n$ -й гармоники ОИ на частоте  $\omega_n = 2\pi c/\lambda_n$  на бетатронные гармоники  $p$ , отстоящие друг от друга на частоту, значительно меньшую, чем сам резонанс ОИ [29, 33, 34]:  $\omega_\beta \simeq \omega_n k/\sqrt{2}n\gamma$ . Для релятивистских электронов

$\gamma \ll 1$  и  $\omega_\beta \propto \omega_n/\gamma$ , так что в рентгеновском и ультрафиолетовом диапазонах  $\omega_\beta \ll \omega_n$  и бетатронные гармоники, составляющие линию излучения, расположены очень близко друг к другу. В то же время, поскольку длина волны излучения  $\lambda_n$  мала, уширение расщепленной линии излучения может быть заметно. Бетатронные колебания в пучке конечного размера вызывают четные гармоники ОИ на оси (см. [33, 34] и др.).

Отметим, что возможные непериодические компоненты магнитного поля ондулятора тщательно компенсируются после вычислений интегралов поля, так как они уводят пучок с оси и вызывают расстройку когерентности осцилляций электрона по длине ондулятора. Индуцированный угол изгиба тоже вызывает четные гармоники ОИ на оси [36–39], нечетные гармоники ослабевают, линия спектра искажается и вместо привычной функции  $\text{sinc}(\nu_n/2)$ , где  $\nu_n = 2\pi nN((\omega/\omega_n) - 1)$  — параметр расстройки относительно резонансов ОИ ( $\omega_n = 2\pi c/\lambda_n$ ), получается обобщенная функция Эйри

$$S(\nu_n, \eta, \beta) \equiv \int_0^1 e^{i(\nu_n \tau + \eta \tau^2 + \beta \tau^3)} d\tau$$

(см., например, [40]). Спектрально угловые характеристики ОИ аналитически описываются с помощью коэффициентов Бесселя  $f_{n;x,y}$   $x$ - и  $y$ -поляризаций излучения, которые выражаются через обобщенные функции Бесселя. Интенсивность излучения одного электрона записывается следующим образом:

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \gamma^2 N^2 k^2}{c \left(1 + \left(k_{eff}^2/2\right) + (\gamma\Theta)^2\right)} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \text{sinc}^2\left(\frac{\nu_n}{2}\right) (f_{n;x}^2 + f_{n;y}^2). \quad (8)$$

Влияние разброса энергий в реальном пучке электронов на излучение описывается сверткой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^2 I(\nu_n + 4\pi n N \epsilon) e^{-\epsilon^2/2\sigma_\epsilon^2} d\epsilon/d\omega d\Omega \sqrt{2\pi}\sigma_\epsilon;$$

учет угловых и бетатронных эффектов ведется в коэффициентах Бесселя  $f_{n;x,y}$ . В [41] было показано соответствие аналитического расчета излучения гармоник численному моделированию СПЕКТРА для различных ондуляторов; там же была подтверждена справедливость аналитических результатов и коэффициентов Бесселя для ондуляторов

с гармониками поля. Аналитические выражения для ондулятора с тремя гармониками поля в двух взаимно-ортогональных плоскостях представлены в работе [41], для эллиптического ондулятора — в [26, 27], учет и анализ влияния гармоник поля эллиптического и плоского ондуляторов проведен также в [42–47]. Для плоского ондулятора и узких пучков релятивистских электронов сложные формулы для коэффициентов Бесселя упрощаются до следующих выражений (см. [47, 48]):

$$f_{n;x} = \sum_p \tilde{J}_p \left| (J_{n+1}^n + J_{n-1}^n) + \frac{2}{k} \gamma \theta \cos \varphi J_n^n \right|,$$

$$f_{n;y} = \sum_p \left( \tilde{J}_p \left| \frac{2}{k} \gamma \theta \sin \varphi J_n^n \right| + J_n^n \frac{\sqrt{2}\pi y_0}{\lambda_u} (\tilde{J}_{p+1} - \tilde{J}_{p-1}) \right), \quad (9)$$

где  $y_0$  — расстояние от оси ондулятора,  $p$  — номер бетатронной гармоники расщепления линии ОИ,  $\varphi$  — угол вокруг оси ондулятора,  $J_n^m$  и  $\tilde{J}_p$  — функции Бесселя:

$$J_n^m \equiv J_n^m(\zeta, \xi) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \times \exp[i(n\alpha + m\zeta \sin \alpha + m\xi \sin(2\alpha))], \quad (10)$$

$$\tilde{J}_p \equiv J_p^1(-\kappa, -\eta),$$

$$\zeta = \theta \cos \varphi \frac{\lambda_u k}{n\lambda_n \gamma}, \quad \xi = \frac{\lambda_u k^2}{8n\lambda_n \gamma^2}, \quad (11)$$

$$\kappa = \frac{4\pi\theta y_0 \gamma^2}{\lambda_u (1 + (k^2/2))}, \quad \eta = \frac{\pi^2 \gamma y_0^2 k}{\sqrt{2}\lambda_u^2 (1 + (k^2/2))}.$$

Четные гармоники появляются из-за угловых эффектов и бетатронных колебаний; угловые эффекты и конечный размер пучка учитываются также в аргументах функций Бесселя. Ниже мы сравним вклады бетатронных колебаний и угловых эффектов в рентгеновское излучение плоского ондулятора ЛСЭ LCLS. Выбор установки диктуется обилием информации по излучению гармоник в LCLS. Мы оценим влияние бетатронных и угловых вкладов на излучение четных и нечетных гармоник спонтанного и вынужденного ОИ и сравним с результатами численного моделирования спектра и с данными по ЛСЭ.

#### 4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ МОЩНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ОДНОПРОХОДНОГО ЛСЭ

Когерентное излучение ЛСЭ генерируется электронами в банчах, разделенных длиной волны излучения в точном соответствии с гипотезой Гинзбурга [2]. Группировка электронов в ондуляторе происходит вследствие взаимодействия электромагнитной волны с электронами банча. Строгая теория этого явления была развита Мадейем [4]. Сила Лоренца в ондуляторе группирует электроны около узлов волны в банчи размером менее длины волны, и излучение становится близким к когерентному (детальное описание см. [5–13, 49]). В начале ЛСЭ присутствует сильная некогерентная составляющая излучения и происходит квадратичный рост напряженности поля излучения и мощности. В результате взаимодействия электронов и излучения происходит модуляция энергии электронов и затем развивается модуляция электронной плотности банча. Это приводит к экспоненциальному росту мощности:

$$P(z) \propto P_0 e^{z/L_{g0}}.$$

Длина усиления ЛСЭ  $L_{g0} = 1/\sqrt{3}g_0$  обратно пропорциональна коэффициенту усиления  $g_0$  и входит в безразмерный параметр Пирса  $\rho = (\lambda_u g_0)/4\pi$  [5–7], который является фундаментальным для описания процессов в ЛСЭ. Параметр Пирса зависит от параметров ондулятора и плотности тока (см. [5–9, 49–51]):

$$\rho_n = \frac{1}{2\gamma} \left( \frac{J}{4\pi i} \right)^{1/3} (\lambda_u k_{eff} |f_n|)^{2/3}, \quad (12)$$

где  $i = 4\pi\epsilon_0 m c^3 / e \simeq 1.7045 \cdot 10^4$  — размерная постоянная тока Альфвена [A],  $\lambda_u$  — период ондулятора,  $f_n$  — коэффициент Бесселя  $n$ -й гармоники ОИ,  $J = I_0/\Sigma$  — плотность тока,  $I_0$  — ток,  $\Sigma = 2\pi\sqrt{\beta_x \epsilon_x \beta_y \epsilon_y}$  — сечение пучка,  $\epsilon_{x,y} = \sigma_{x,y} \theta_{x,y}$  — эмиттансы,  $\sigma_{x,y} = \sqrt{\epsilon_{x,y} \beta_{x,y}}$  — поперечные размеры,  $\beta_{x,y} = \epsilon_{x,y} / \theta_{x,y}^2$  — параметры Твисса,  $\theta_{x,y}$  — расходимости пучка; в ЛСЭ обычно применяется фокусировка квадрупольными магнитными линзами, которые задают фокусные расстояния  $\beta_{x,y}$  и эмиттансы  $\epsilon_{x,y}$ . Параметр Пирса ЛСЭ  $\rho_n$  определяет максимально возможную мощность излучения гармоники  $P_{F,n} \approx \sqrt{2}\rho_n P_{beam}$ , где  $P_{beam} = EI_0$  — мощность электронного пучка, а также длину усиления  $L_{n,g} \simeq \lambda_u / (4\pi\sqrt{3}n^{1/3}\rho_n)$  и длину насыщения ЛСЭ:  $L_s \sim \lambda_u / \rho \sim 10\text{--}20 L_g$ . Отметим, что начальная мощность в ЛСЭ с самоусилением спонтанного излучения SASE задается когерентной составляющей шума электронного банча:  $P_{noise} \approx 1.6\rho^2 e 4\pi c P_e / (I_0 \lambda)$  [49, 50]. Начальная

мощность ЛСЭ может также происходить от затравочного когерентного излучения, которое стабилизирует фазу и временные характеристики излучения. Разного рода потери, связанные с дифракцией, разбросом энергии, эмиттансом и др., уменьшают мощность излучения ЛСЭ, увеличивают длину усиления и насыщения. Дифракция может быть учтена с помощью поправки  $\kappa$  к параметру Пирса, предложенной в работах [14, 38, 39, 52–54]:

$$\rho_n \rightarrow \frac{\rho_n}{\kappa}, \quad \kappa = \sqrt[3]{1 + \frac{\lambda_u \lambda_n}{16\pi\rho_n \Sigma}}. \quad (13)$$

Влияние разброса энергий и эмиттанса пучка на длину усиления и мощность излучения описывается феноменологически с помощью следующих коэффициентов:

$$\begin{aligned} \Phi_n &\simeq (\zeta^n + 0.165\mu_{\epsilon,n}^2) e^{0.034\mu_{\epsilon,n}^2}, \\ \mu_{\epsilon,n} &\simeq 2\sigma_\epsilon / n^{1/3} \tilde{\rho}_n, \\ \eta_n &\simeq 0.942 \left( e^{-\Phi_n(\Phi_n-0.9)} + 1.57(\Phi_n-0.9)/\Phi_n^3 \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\sigma_\epsilon$  — разброс энергий, а эмиттанс учитывается в  $\zeta$  [52, 53]; для согласованного пучка  $\zeta \approx 1\text{--}1.1$ , а в рентгеновском диапазоне  $\zeta \approx 1$ . Коэффициенты (14) были выверены в ходе сравнительного анализа теоретических результатов, численных симуляций (см. [43, 55, 56]) и экспериментальных данных ЛСЭ в диапазоне от видимого до рентгеновского [41, 42, 47, 48]. Длина усиления  $L_{n,g}$  и мощность насыщения  $P_{n,F}$  гармоник в режиме их независимого роста в однопроходном ЛСЭ записываются с учетом потерь и соответствующих им коэффициентов (13), (14) следующим образом [52, 53]:

$$L_{n,g} \rightarrow L_{n,g} \kappa \Phi_n, \quad (15)$$

$$P_{n,F} \simeq \sqrt{2}\rho_n P_{beam} \left( \eta_n \frac{1}{\kappa^2} \right). \quad (16)$$

Независимый рост мощности гармоник обычно происходит медленнее роста мощности основного тона. В то же время,  $n$ -я гармоника может быть индуцирована основным тоном в режиме нелинейной генерации. Тогда ее мощность растет быстрее, как  $n$ -я степень основного тона, пропорционально  $e^{nz/L_g}$  [5–7, 14, 15]. Насыщение  $n$ -й гармоники в режиме нелинейной генерации определяется насыщением основного тона. Соответствующая мощность насыщения приближенно записывается следующим образом [52, 53]:

$$P_{n,F} \simeq \eta_n \frac{P_{1,F}}{\sqrt{n}} \left( \frac{f_n}{n f_1} \right)^2. \quad (17)$$

Экспоненциальный рост мощности излучения в конце ЛСЭ переходит в осцилляции около мощности насыщения. Насыщение гармоник в режиме нелинейной генерации начинается несколько раньше насыщения основного тона и развивается постепенно. Приближенное аналитическое описание этого процесса дано в [57].

Влияния разного рода потерь на излучение ЛСЭ было учтено в работах [58, 59] посредством феноменологической коррекции  $\Lambda$  к длине усиления  $L_g$ :  $L_g = L_{g0}(1 + \Lambda)$ , где  $\Lambda$  описывает влияние дифракции, разброса энергий и эмиттанса пучка. Формулы (13)–(15) проще, а результаты хорошо согласуются с высокоточной аппроксимацией  $\Lambda$  [58, 59]. Выражение для  $\Lambda$  представляет полином нецелой степени из семи слагаемых с девятнадцатью различными численными коэффициентами (не приводим для краткости). Коррекция длины усиления также корректирует мощность и длину насыщения ЛСЭ.

Аналитическое описание мощности гармоник ЛСЭ в режиме нелинейной генерации было предложено, например, в работе [60]; для отношения мощности третьей гармоники  $P_3$  к мощности основного тона  $P_1$ , в [60] предложена следующая формула:

$$P_3 = \Theta \rho P_{beam} \left( \frac{P_1}{\rho P_{beam}} \right)^3, \quad (18)$$

где численный множитель  $\Theta$  определяется сложным интегральным выражением и имеет порядок около  $10^{-1}$ . Отметим, что оценки мощности нечетных гармоник (18) дают результаты, сильно отличающиеся от экспериментальных. Однако основные вопросы вызывает генерация четных гармоник, так как на оси плоского ондулятора в идеальном пучке четные гармоники практически не излучаются: излучение на их длинах волн идет в противофазе с соседних периодов ондулятора. Авторы [60] оценивают мощность насыщения  $P_2$  второй гармоники ЛСЭ на основе мощности  $P_n$  соседней первой или третьей гармоники, банчинга  $b_n$  и коэффициентов Бесселя  $f_n$  вовлеченных гармоник; формула учитывает также сечение пучка  $\sigma_{x,y}$  и записывается следующим образом:

$$P_{2,[60]} \approx P_n \left( \frac{\lambda_u k f_2}{\gamma 2\pi \sigma_{x,y} f_n} \frac{b_2}{b_n} \right)^2. \quad (19)$$

Отметим, что в идеале, мощности всех гармоник согласованы, но в реальности расчетные результаты для мощности гармоник могут отличаться от измеренных величин на порядок и более. Расчетные результаты для  $n = 2$  будут сильно зависеть от того,

значения какой гармоники  $n$ , первой или третьей, используются в (19), и используются ли измеренные или вычисленные значения. Мы продемонстрируем это на примере ЛСЭ LCLS. В работах [61, 62] аналитически рассчитаны мощность второй гармоники  $P_2$  в терминах мощности основного тона  $P_1$  следующим образом:

$$P_{2,[61]} \approx \frac{P_1}{450\pi} \frac{1}{\Xi} \frac{A^2 + B^2}{F^2} \times \frac{\ln(1 + 1/(4\Gamma^2))}{\arctg(1/\Gamma) + (\Gamma/2) \ln(\Gamma^2/(1 + \Gamma^2))}, \quad (20)$$

где  $\Xi = k^2/(2 + k^2)$ ,  $A = 2\Xi(J_0(\Xi) - J_2(\Xi)) + J_1(\Xi)$ ,  $B = J_1(\Xi)$ ,  $F = J_0(\Xi/2) - J_1(\Xi/2)$  [61],  $J_i$  — обычные функции Бесселя,  $\Gamma = 4\pi\sigma_{x,y}^2/N\lambda_u\lambda_1$  — число Френеля электронного пучка с сечением  $\sigma_{x,y}$  на длине ондулятора  $N\lambda_u$ . Мы проведем сравнительный анализ мощности гармоник ЛСЭ LCLS по формуле (17) и результатов, полученных на основе теорий других авторов: по формулам (18), (19) из работы [60] и по формуле (20) из работы [61]. Выбор ЛСЭ LCLS объясняется тем, что, в отличие от других рентгеновских ЛСЭ, на этой установке наиболее полно и хорошо документировано излучение гармоник, например, в работах [63–65].

## 5. СПОНТАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОНДУЛЯТОРА LCLS

Первый рентгеновский лазер на свободных электронах был построен в США в 2009 г. на установке Linac Coherent Light Source (LCLS). Излучение ЛСЭ LCLS формируется в 33 ондуляторах с постоянными магнитами; длина каждого ондулятора 3.4 м [63–65], период  $\lambda_u = 3$  см, параметр дипольности фиксированный,  $k = 3.5$ , электронный ток достигает 1 кА с пучком энергии  $E = 4.3$  ГэВ и 3.5 кА с  $E = 13.6$  ГэВ; некоторые данные собраны в табл. 1.

ЛСЭ LCLS излучает в жестком и мягком рентгеновском диапазоне на длине волны  $\lambda_1 = 0.15$  нм с энергией электронов  $E = 13.6$  ГэВ и на длине волны  $\lambda_1 = 1.5$  нм с  $E = 4.3$  ГэВ. В спектре ЛСЭ зарегистрированы и измерены вторая и третья гармоники, зарегистрирована также пятая гармоника. Рассмотрим ОИ в ондуляторе LCLS, например, с пучком энергии  $E = 4.3$  ГэВ. Результаты моделирования представлены на рис. 1, 2 с учетом сечения пучка, разброса энергии и других характеристик (см. табл. 1). Спектр ОИ на оси в дальней зоне рассчитан аналитически и численно с помощью SPECTRA

Таблица 1. Параметры электронного пучка и плоского ондулятора LCLS

Параметр	Значение	Параметр	Значение
$\gamma$	8400	$I_{peak}$	1 кА
$\gamma\epsilon_{x,y}$	0.4 мкм · рад	$\theta_{div} = \sqrt{\sigma/\beta}$	2.2 мкрад
$\sigma_{x,y}^{exp}$	20–25 мкм	$\sigma_e$	$0.3 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_{x,y}^{model}$	23 мкм	$\beta_{x,y}$	10 м

Примечание. Пучок электронов LCLS энергии  $E = 4.3$  ГэВ, где  $\sigma_{x,y}^{exp}$  — сечение в эксперименте,  $\sigma_{x,y}^{model}$  — сечение, использованное в модели,  $I_{peak}$  — ток,  $\sigma_e$  — разброс энергий,  $\beta_{x,y}$  — параметр Твисса.

Параметр	Значение	Параметр	Значение
$\gamma$	26600	$I_{peak}$	3.5 кА
$\gamma\epsilon_{x,y}$	0.4 мкм · рад	$\theta_{div} = \sqrt{\sigma/\beta}$	0.9 мкрад
$\sigma_{x,y}^{exp}$	20–40 мкм	$\sigma_e$	$0.1 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_{x,y}^{model}$	30 мкм	$\beta_{x,y}$	25 м

Примечание. Пучок электронов LCLS энергии  $E = 13.6$  ГэВ.

Параметр	Значение	Параметр	Значение
$\lambda_u$	3 см	$N$	113
$L$	3.4 м	$k$	3.5

Примечание. Ондулятор LCLS,  $\lambda_u$  — период,  $L$  — длина,  $N$  — число периодов,  $k$  — параметр ондулятора.

и показан соответственно на рис. 1 и рис. 2. Отметим большое количество высших нечетных гармоник и малое содержание четных гармоник в спектре (см. рис. 1а, 2а). Для сравнения на рис. 1б, 2б показан спектр ОИ ондулятора LCLS под углом  $\gamma\theta = 0.07$ , который соответствует углу электрон-фотонного взаимодействия на длине усиления ЛСЭ; четные гармоники ОИ под углом  $\gamma\theta = 0.07$  на порядок сильнее, чем на оси.

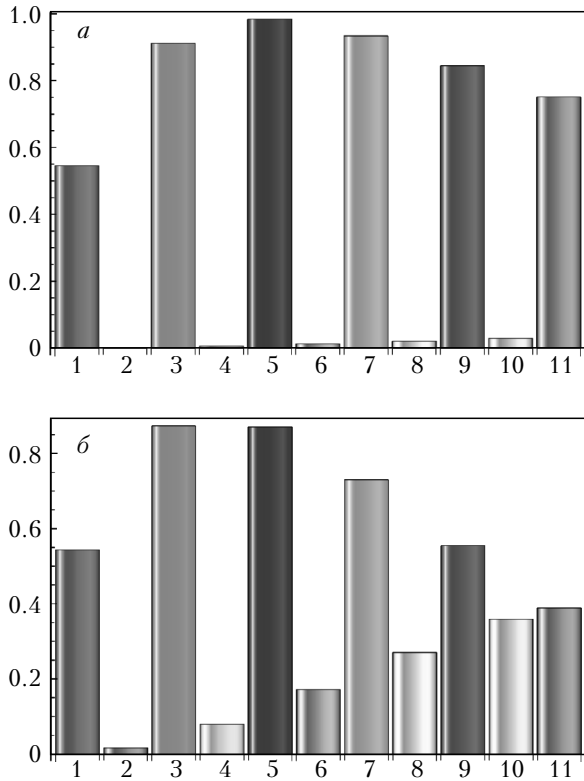
На оси ондулятора коэффициенты Бесселя для гармоник  $n = 1, 2, \dots, 9$  таковы:

$$f_{n=1,2,\dots,9}^{emittance} = \{0.74, 0.02, 0.34, 0.02, 0.23, 0.02, 0.18, 0.02, 0.14\}. \quad (21)$$

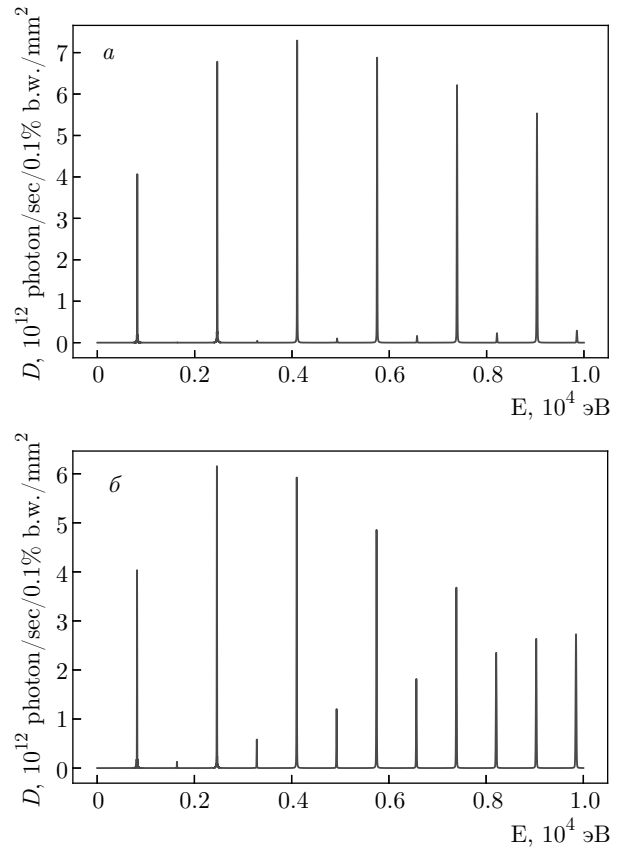
В LCLS вклад бетатронных колебаний в коэффициенты Бесселя нечетных гармоник ничтожен: около  $10^{-18}$ . Для четных гармоник в LCLS вклад бетатронных колебаний больше и составляет  $f_2^{beta} \sim 0.002$ , однако это значение на порядок меньше вклада угловых эффектов; коэффициенты Бесселя первых четных гармоник таковы:  $f_{2,4,6} \sim 0.02$ .

Спектр ОИ, полученный нами с учетом только эмиттанса пучка и без учета бетатронных эффектов, практически ничем не отличается от спектра на рис. 1; мы не приводим его для краткости. Таким образом, аналитически выделив вклады различных физических эффектов, мы получили, что излучение четных гармоник происходит главным образом из-за конечного эмиттанса и угловых эффектов, а не за счет бетатронных колебаний в пучке конечного размера. Вклад бетатронных колебаний в мощность гармоник ОИ пренебрежимо мал.

Бетатронные колебания могут влиять на ширину линии излучения, расщепляя ее на бетатронные гармоники (см. (9)). Мы провели теоретическую оценку этого эффекта для ондулятора LCLS. Основной вклад дают пять бетатронных гармоник с  $p = -2, \dots, 2$  на расстоянии  $\delta\lambda \simeq k\lambda/n\sqrt{2}\gamma|_{n=1} \simeq 0.45$  пм друг от друга. Ширине бетатронного расщепления равной примерно 1.8 пм соответствует спектральная плотность  $4\delta\lambda/\lambda \approx 0.1\%$ ; в то же время естественная спектральная плотность ОИ та-



**Рис. 1.** Аналитическое моделирование с помощью программы SPECTRA: *a* — спектр ОИ ондулятора LCLS с  $E = 4.3$  ГэВ на оси с учетом эмиттанса пучка, *б* — спектр ОИ ондулятора LCLS под углом  $\gamma\theta = 0.07$  электрон-фотонного взаимодействия ЛСЭ



**Рис. 2.** Численное моделирование с помощью программы SPECTRA: *a* — спектр ОИ ондулятора LCLS с  $E = 4.3$  ГэВ на оси с учетом эмиттанса пучка, *б* — спектр ОИ ондулятора LCLS под углом  $\gamma\theta = 0.07$  электрон-фотонного взаимодействия ЛСЭ

кова:  $1/N|_{N=113} = 0.9\%$ . Таким образом, ширина бетатронного расщепления почти на порядок меньше естественной ширины линии спектра ОИ.

### 6. ИЗЛУЧЕНИЕ РЕНТГЕНОВСКОГО ЛСЭ LCLS

Излучение ЛСЭ LCLS хорошо документировано в работах [63–65], которые мы используем для сравнительного анализа с теоретическими результатами, полученными в рамках различных подходов к исследованию мощности гармоник. Последние представлены на рис. 3*a* для LCLS с пучком энергии  $E = 4.3$  ГэВ и на рис. 3*б* для излучения с пучком энергии  $E = 13.6$  ГэВ. Мощность основного тона обозначена красной областью на рис. 3*a*, согласно результатам серии экспериментов с длиной волны  $\lambda = 1.5$  нм, где энергия излучения составляла 1–2 мДж при длительности банчей около 100–250 фс. Исходя из измеренной энергии фотонного импульса  $E_\gamma = 1$  мДж при длине электрон-

ного банча  $\tau_e = 0.2$  пс, получаем мощность ЛСЭ  $P \approx 8.5$  ГВт, что в точности соответствует значению, полученному нами аналитически. Измеренное на ЛСЭ LCLS содержание третьей гармоники: около 2% [63]; в некоторых случаях отмечалось уменьшение ее содержания до 0.2%. На рис. 3*a* зеленая область соответствуют диапазону измеренных значений мощности третьей гармоники без учета этих флуктуаций, т. е. представлен наиболее узкий диапазон значений согласно [63]. Непосредственные измерения пятой гармоники на LCLS не проводилось, ее содержание было оценено авторами [63] как приблизительно 10% мощности третьей гармоники. Соответствующий диапазон мощности пятой гармоники обозначен синей областью на рис. 3*a*. Измеренное содержание второй гармоники составляло около 0.04–0.1%, и оно показано оранжевой областью на рис. 3*a*. Вторая гармоника измерялась только в диапазоне мягкого рентгеновского излу-



чения ввиду технических особенностей детекторов; на рис. 3б оранжевая область показывает предполагаемую мощность второй гармоники для жесткого рентгеновского излучения LCLS с электронным пучком энергии  $E = 13.6$  ГэВ, где содержание второй гармоники предполагается схожим: около 0.04–0.1 %.

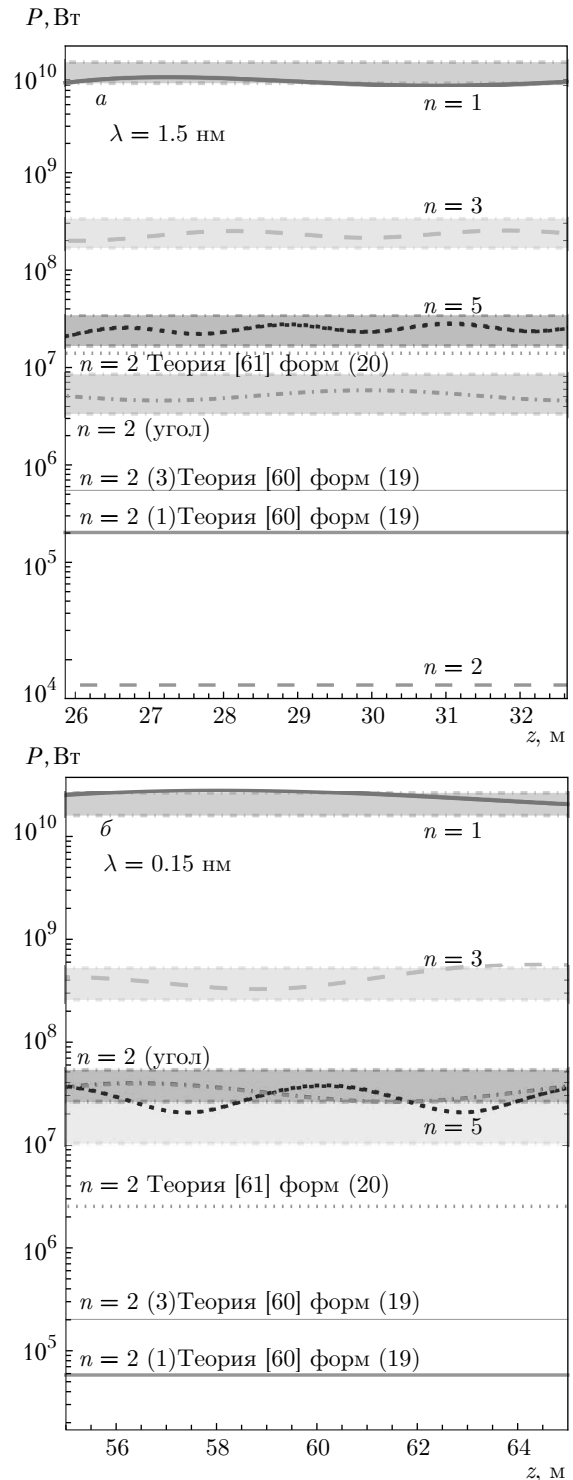
Результаты теоретического расчета также представлены на рис. 3: красная сплошная линия показывает мощность основного тона ЛСЭ, зеленая штриховая линия — мощность третьей гармоники, синяя пунктирная линия — пятой гармоники. Мощность второй гармоники рассчитана с учетом эффективного угла электрон-фотонного взаимодействия на длине усиления ЛСЭ — оранжевый штрихпунктир. Все рассчитанные нами значения хорошо согласуются с экспериментом, что подтверждает правильный учет физических явлений и параметров установки в нашем расчете.

Поскольку главная неопределенность теоретических расчетов обычно касается четных гармоник, мы исследовали влияние различных параметров на их излучение. В частности, мы рассчитали мощность второй гармоники, аналитически выделив и учтя только влияние эмиттанса и бетатронных колебаний в пучке; соответствующее значение отмечено на рис. 3а штриховой оранжевой линией. Рассчитанная мощность второй гармоники ЛСЭ при этом оказалась почти на три порядка ниже измеренной.

Соответствие расчета эксперименту восстанавливается, если учесть эффективный угол электрон-фотонного взаимодействия в пучке на характерной длине усиления. Он является определяющим, как показывает расчет, для генерации четных гармоник в ЛСЭ. С учетом этого, получаем значения коэффициентов Бесселя гармоник  $n = 1, 2, \dots, 9$ :

$$f_{n=1,2,\dots,9}^{e-\gamma} = \{0.74, 0.07, 0.33, 0.08, 0.22, 0.09, 0.15, 0.09, 0.11\}. \quad (22)$$

Сравнение значений коэффициентов Бесселя (22) с соответствующими значениями в (21), где учтен только эмиттанс пучка, показывает, что для низших нечетных гармоник  $n = 1, 3, 5$  разница невелика, а для высших нечетных гармоник разница становится значимой, что выражается в заметном ослаблении излучения высших нечетных гармоник. Для четных гармоник, напротив, значения коэффициентов Бесселя с учетом угла электрон-фотонного взаимодействия  $f_{n=2,4,6,8}^{e-\gamma} \simeq 0.08$  больше соответствующих значений с учетом только эмиттанса  $f_{n=2,4,6,8}^{emittance} \simeq 0.02$  в четыре раза (!). Спектр ОИ под углом электрон-фо-



**Рис. 3.** Мощность гармоник ЛСЭ LCLS; гармоники показаны цветными линиями и обозначены номерами; диапазоны экспериментальных значений мощности показаны цветными областями: *a* — для пучка энергии  $E = 4.3$  ГэВ, разброс энергий  $\sigma_e = 3 \cdot 10^{-4}$ , ток  $I_0 = 1$  кА, эмиттанс  $\gamma\epsilon_{x,y} = 0.4$  мкм,  $\beta_{x,y} = 10$  м; *б* — для пучка энергии  $E = 13.6$  ГэВ, разброс энергий  $\sigma_e = 1 \cdot 10^{-4}$ , ток  $I_0 = 3$  кА, эмиттанс  $\gamma\epsilon_{x,y} = 0.4$  мкм,  $\beta_{x,y} = 25$  м

тонного взаимодействия выглядел бы как на рис. 1б и содержал бы на порядок больше четных гармоник (ср. с рис. 1а). Поскольку для излучения ЛСЭ существенно электрон-фотонное взаимодействие, спектру ОИ ондуляторов LCLS соответствует рис. 1а, а мощности гармоник ЛСЭ показаны на рис. 3а с учетом значений коэффициентов Бесселя  $J_{n=1,2,\dots,9}^{angle}$  (22); результаты расчета соответствует измерениям на ЛСЭ LCLS [63–65].

Независимые оценки мощности гармоник LCLS были сделаны в различных работах, см., например, [60, 61]. Мощности гармоник  $n = 1, 2, 3, 5$ , рассчитанные нами с учетом основных параметров ЛСЭ, соответствуют экспериментальным значениям, как показано выше. Для сравнения мы рассчитали и показали на рис. 3а мощности гармоник по формуле (19) в соответствии с теорией в [60] и по формуле (20) в соответствии с теорией [61]. В [61] теоретическая мощность ЛСЭ LCLS:  $P_1 = 8$  ГВт, что хорошо соответствует экспериментам [63–65]. Однако оценка мощности третьей гармоники в [60]:  $P_{3,[60]} = 15$  МВт, примерно на порядок меньше, чем в эксперименте [65]. Более того, оценка мощности второй гармоники в [60]:  $P_{2,[60]} = 15$  кВт, соответствует ее содержанию порядка  $2 \cdot 10^{-4}$  %, что на три порядка меньше измеренного в экспериментах около 0.1 % [65]. Мы учли ошибочное значение мощности третьей гармоники в [60] и пересчитали по формуле (19) в соответствии с теорией [60] мощность второй гармоники на основе мощности первой или третьей гармоник; сплошные оранжевые линии — соответственно сплошные толстая и тонкая оранжевые линии на рис. 3. При этом расчете мощность второй гармоники ЛСЭ оказалась на один–полтора порядка ниже измеренной на LCLS. Отметим, что формула и соответствующая теория [60] применительно к ЛСЭ LEUTL также дает мощность второй гармоники на один–два порядка ниже измеренной в экспериментах.

Другой теоретический подход использован в [61, 62]. В нем вычисляются электрическое поле излучения, распространение фронта волны в различных направлениях и другие характеристики; при этом авторы используют специфические параметры, такие как глубина модуляции электронного пучка и др., доступные только разработчикам ЛСЭ. Расчет по формуле дает результат, близкий к диапазону экспериментальных значений: оранжевая пунктирная линия на рис. 3а показывает мощность второй гармоники LCLS, рассчитанную по формуле (20), соответствующей теории в [61]. Однако в жестком

рентгеновском диапазоне по той же формуле (20) получаем мощность второй гармоники  $P_2 \approx 2.5$  МВт (см. рис. 3б), т. е. 0.01 %, что меньше ожидаемого 0.04–0.1 %. С другим подходом [60], вычисляя мощность второй гармоники ЛСЭ LCLS по формуле (19), получаем в жестком рентгеновском диапазоне мощность второй гармоники  $P_2 \sim 100$ –200 кВт, что еще на порядок меньше, чем по теории [61] и на два порядка ниже ожидаемого. Итак, в жестком рентгеновском диапазоне расхождение между экспериментом и расчетом по теории [60] или [61] увеличиваются почти на порядок, в то время как результаты по формулам (с учетом эффективного угла электрон-фотонного взаимодействия на длине усиления ЛСЭ) остаются в пределах экспериментальных значений.

Отметим противоречивые выводы разных авторов о причинах генерации четных гармоник в ЛСЭ. Так, авторы работы [66] заключают, что «угол отклонения увеличивает излучение второй гармоники» в ЛСЭ. Напротив, авторы [61, 62] делают вывод о том, что «полная мощность второй гармоники ЛСЭ не зависит от углов отклонения пучка от оси и даже может уменьшиться, если пучок имеет углы отклонения». Последний вывод представляется нам спорным, так как характеристики ОИ определяются свойствами физической системы зарядов и поля; выше нами аналитически показано, что именно угловые вклады в основном вызывают четные гармоники ОИ. Обсуждение и количественные оценки вкладов различных эффектов в генерацию четных гармоник даны выше. В результате анализа различных вкладов в генерацию гармоник мы приходим к выводу, что мощность четных гармоник в ЛСЭ определяется не только размером пучка и его отклонением, как считается в [60, 66], хотя центровка пучка на оси, конечно, имеет значение; например, принимая во внимание экспериментально зарегистрированное в ЛСЭ LCLS [63, 63] отклонение пучка от оси примерно до 10–15 мкм на длине последних ондуляторных секций, получаем угол отклонения, примерно соответствующий эффективному углу электрон-фотонного взаимодействия, и это дает реалистичную оценку мощности второй гармоники. Однако в других экспериментах не было зарегистрировано отклонения пучка, сравнимого с его сечением. Теоретический результат, соответствующий экспериментам, получается во всех случаях, если учесть углы электрон-фотонного взаимодействия на характерной длине усиления в ЛСЭ. Это вызывает вторую гармонику мощностью, соответствующей измеренной в экспериментах как на ЛСЭ LCLS, так

и на ЛСЭ LEUTL и на других установках. Таким образом, мы в определенном смысле подтверждаем заключение работы [66] о том, что в ЛСЭ «угол отклонения увеличивает излучение второй гармоники», замечая, что нужно учитывать эффективный угол электрон-фотонного взаимодействия, а не только отклонение от оси.

Отметим, что мощность излучения второй гармоники ЛСЭ зависит от параметров пучка и ондуляторов и напрямую не отражает то значение мощности, которое может индуцироваться основным тоном на длине волны второй гармоники, но не излучаться. Эквивалентная мощность второй гармоники за счет индуцированного банчинга может быть большой, но она не излучается, так как для второй гармоники излучение приходит в противофазе с каждого периода ондулятора. Однако если такой пучок электронов с индуцированной группировкой на длине волны второй гармоники подать в следующий ондулятор, у которого основной тон настроен в резонанс со второй гармоникой банчера, то индуцированная и эквивалентная банчингу мощность становится реальной, может быть усилена и излучена в следующих ондуляторах.

Работа ЛСЭ в режимах SASE и HLSS может быть реализована на одной установке, если использовать ондуляторы с изменяемым параметром дипольности. Ондуляторы LCLS имеют фиксированный параметр  $k = 3.5$ , и численное моделирование каскадного усиления второй гармоники на ЛСЭ LCLS проводилось для дополнительных ондуляторов с другим параметром  $k$  в [66]; насколько нам известно, проект не был реализован. Усиление гармоник HLSS возможно в SwissFEL, строящемся ЛСЭ LCLS II и в других установках.

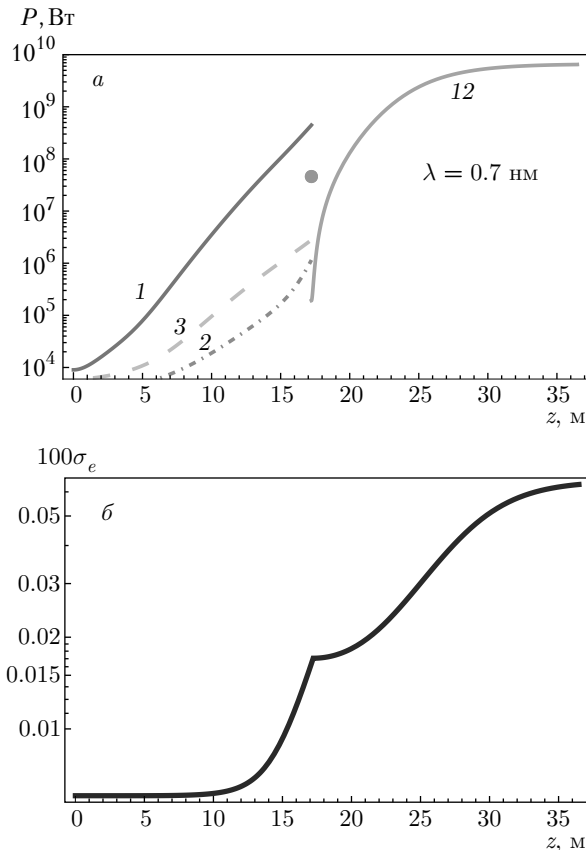
## 7. УСИЛЕНИЕ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В РЕНТГЕНОВСКОМ ЛСЭ SWISSFEL

Использование самозатравочного лазерного излучения гармоник (HLSS) в мягком рентгеновском диапазоне было впервые осуществлено на ЛСЭ FLASH II с ондуляторами с изменяемым параметром дипольности [67, 68]. В жестком рентгеновском диапазоне работают ЛСЭ с изменяемым параметром дипольности SACLA, SwissFEL, European XFEL, вводится в строй LCLS II. Из действующих в настоящее время ЛСЭ SACLA после апгрейда [69–76] является наиболее сильноточным; в нем течет огромный ток,  $I_0 = 27$  кА, но пучок SACLA имеет большой разброс энергий:  $\sigma_e \approx 0.093\%$  с  $E = 6$  ГэВ [73], и  $\sigma_e = 0.1\%$  с  $E = 7.8$  ГэВ [69]. Оцен-

ка параметра Пирса ЛСЭ SACLA для излучения с  $\lambda = 0.1$  нм дает значения  $\rho_1 = 0.00077$  в группирователе и  $\rho_{1 \times 2} = 0.00058$  в усилителе; условие стабильной генерации не удовлетворяется уже с начальным разбросом энергий. Если в группирователе электронов генерация возможна с начала ЛСЭ, то в усилителе второй гармоники она невозможна уже в начале усилителя даже без учета индуцированного разброса энергии. Поэтому усиление второй гармоники в ЛСЭ SACLA в настоящей конфигурации не представляется возможным. Рассмотрим ниже возможность усиления гармоник в современных ЛСЭ с малыми эмиттансом и разбросом энергий и с изменяемым параметром дипольности ондуляторов.

Рентгеновский ЛСЭ SwissFEL [77–81] излучает на длинах волн от 1.5 до 0.1 нм. Пучок имеет малый абсолютный разброс энергий  $\sigma_e = 350$  кэВ; относительный разброс энергией электронов с энергией  $E = 5.8$  ГэВ:  $\sigma_e \approx 0.006\%$ , стандартный эмиттанс  $\gamma_{\epsilon_{x,y}} = 0.4$  мм·мрад. В эксперименте банчи электронов с зарядом  $Q = 0.2$  нКл и энергией  $E = 5.8$  ГэВ генерировали фотонные импульсы длительностью  $\tau_\gamma = 24$  фс с энергией  $E_\gamma = 1$  мДж на длине волны  $\lambda_1 = 0.1$  нм [79]; оценка длительности электронного банча:  $\tau_e = 40$  фс. Мы рассчитали теоретически мощность насыщения:  $P_1 \approx 40$  ГВт; это хорошо согласуется со значением, которое получается с измеренной энергией  $E_\gamma = 1$  мДж импульса длительностью  $\tau_\gamma = 24$  фс. Длина насыщения SwissFEL,  $L_s \approx 30$  м, меньше чем в других ЛСЭ в жестком рентгеновском диапазоне, длина усиления по нашим расчетам:  $L_g \sim 1.4$  м. Из-за малого разброса энергий и эмиттанса получаем высокую мощность третьей гармоники  $P_3 \approx 0.25$  ГВт, ее содержание около 0.7% близко к максимально возможному для ондуляторов с периодом  $\lambda_u = 1.5$  см и параметром дипольности  $k = 1.2$ . Рассчитанное содержание второй гармоники в ЛСЭ SwissFEL около 0.4% определяется сечением пучка и эффективным углом электрон-фотонного взаимодействия  $\bar{\theta} = \sigma_{\text{photon}}/L_{\text{gain}} \sim 6$  мкрад на длине усиления. Рассчитанная нами спектральная плотность излучения  $\Delta\lambda/\lambda \sim 0.1\%$  находится в середине измеренного диапазона 0.05–0.15% [78]. Рассчитанный параметр Пирса  $\rho_1 \approx 0.0005 = \delta\lambda/\lambda \approx \sqrt{\rho\lambda_u/L_s}$  примерно соответствует спектральной плотности SASE. В эксперименте с номинальным током  $I_0 = 2$  кА измеренный эмиттанс пучка  $\epsilon_{x,y} = 0.2$  мм·мрад, был меньше стандартного, а разброс энергий пучка равный 0.0125% больше стандартного [81].

Рассмотрим возможность излучения и усиления второй гармоники на длине волны  $\lambda_2 = 0.07$  нм в



**Рис. 4.** а) Эволюция мощности гармоник ЛСЭ SwissFEL в режиме HLSS с усилением второй гармоники  $\lambda = 0.07$  нм,  $E = 5.8$  ГэВ,  $I_0 = 2.7$  кА,  $\sigma_e = 0.006\%$ ,  $\epsilon_{x,y} = 0.4$  мм · мрад,  $\beta = 15$  м. Банчер:  $\lambda_1 = 0.14$  нм — красная сплошная линия 1,  $\lambda_3 = 0.05$  нм — зеленая штриховая 3,  $\lambda_2 = 0.07$  нм — оранжевая штрихпунктирная линия 2; усилитель второй гармоники:  $\lambda_{1 \times 2} = 0.07$  нм — оранжевая сплошная линия 12. б) Эволюция разброса энергии пучка по длине ондуляторов ЛСЭ

ЛСЭ SwissFEL в режиме HLSS усиления самозатраченного излучения второй гармоники группирователя. Мощность второй гармоники в банчере достигает примерно 1 МВт на длине 17 м (штрихпунктирная оранжевая линия 2 на рис. 4а). Длина банчера  $z_c = 17$  м выбрана, исходя из требования гарантированно стабильного усиления второй гармоники в усилителе, где параметр Пирса  $\rho_{1 \times 2} \approx 0.00033$ ; при этом разброс энергии электронов в конце банчера с учетом индуцированного ЛСЭ вклада составляет половину параметра Пирса в усилителе:  $\sigma_e(z_c) = 0.00017 = \rho_{1 \times 2} / 2$  (см. рис. 4б). Банчинг основного тона индуцирует на длине волны второй гармоники эффективную мощность около 50 МВт на длине ондуляторов 17 м, обозначенную оранжевой точкой на рис. 4а. Она не излучается в банчере, где излу-

чение второй гармоники приходит в противофазе с соседних периодов ондуляторов, а излучается только мощность за счет угловых эффектов, эмиттанса и др., обозначенная штрихпунктирной линией на рис. 4а.

Диапазон изменения параметра дипольности  $k$  позволяет выбрать для ондуляторов в усилителе  $k = 0.7874$ , получив резонанс со второй гармоникой банчера, где  $k = 1.8$ . Мощность в усилителе на длине волны основного тона  $\lambda = 0.07$  нм быстро растет и на чуть большей длине усиления достигает эффективного значения, индуцированного в банчере. Далее рост мощности в усилителе продолжается до насыщения; на длине ондуляторов более 35 м вторая гармоника банчера излучается с мощностью порядка 6 ГВт. Для сравнения, в режиме SASE на длине волны  $\lambda = 0.07$  нм насыщение происходит примерно на 10 м дальше, чем в режиме HLSS. Отметим, что в конце банчера ЛСЭ SwissFEL индуцированная эффективная мощность второй гармоники на порядок превышает мощность третьей гармоники (ср. оранжевую точку с концом зеленой линии на рис. 4а), и это делает предпочтительным выбор второй гармоники для дальнейшего усиления. При этом в режиме усиления второй гармоники HLSS требуется меньшая длина ондуляторов, чем в режиме SASE на той же длине волны, а длина волны излучения,  $\lambda = 0.07$  нм короче, чем стандартная длина волны  $\lambda \sim 0.1$  нм ЛСЭ SwissFEL.

### 8. УСИЛЕНИЕ ГАРМОНИК В РЕНТГЕНОВСКОМ ЛСЭ LCLS-II

В строящемся ЛСЭ LCLS-II используется пучок электронов с энергией  $E = 4$  ГэВ для генерации рентгеновского излучения на длинах волн 6.2–0.25 нм (см. [82]). Для более жесткого излучения с длиной волны менее ангстрема планируется модификация LCLS-II-HE с пучком энергии 4 ГэВ. Численное моделирование LCLS-II проводилось в работах [82–85]. В LCLS-II используются ондуляторы с изменяемым параметром дипольности. Для генерации рентгеновского излучения с длиной волны  $\lambda = 1.2$ –0.25 нм используются ондуляторы с периодом  $\lambda_u = 2.6$  см, полем примерно до 1.1 Тл и минимальным зазором около 7 мм. В ЛСЭ предполагается довольно слабый ток менее 1 кА, и малые эмиттансы и разбросы энергий; с током  $I \sim 400$  А эмиттансы минимальны,  $\epsilon_{x,y} \approx 0.17$  мкм, и  $\sigma_e \approx 0.4$  МэВ, с током  $I \sim 850$  А минимален разброс энергий,  $\sigma \approx 0.36$  МэВ, и  $\epsilon_{x,y} \approx 0.45$  мкм [82–85]. Это обеспечит малые потери и возможность использовать гар-

Таблица 2. Параметры электронного пучка и плоского ондулятора LCLS-II

Параметр	Значение	Параметр	Значение
$\gamma$	7828	$I_{peak}$	850 А
$\gamma\epsilon_{x,y}$	0.45 мкм · рад	$\theta_{div} = \sqrt{\sigma/\beta}$	2 мкрад
$\sigma_{x,y} = \sqrt{\sigma\beta}$	27 мкм	$\sigma_e$	$0.1 \cdot 10^{-3}$
$\theta_{e-\gamma}$	13 мрад	$\beta_{x,y}$	13 м

Примечание. Пучок электронов LCLS-II энергии  $E = 4$  ГэВ.

Параметр	Значение	Параметр	Значение
$\lambda_u$	2.6 см	$k_{amp2harm}$	1.9108
$k_{buncher}$	3.0516	$k_{amp3harm}$	1.3307

Примечание. Ондулятор LCLS-II.

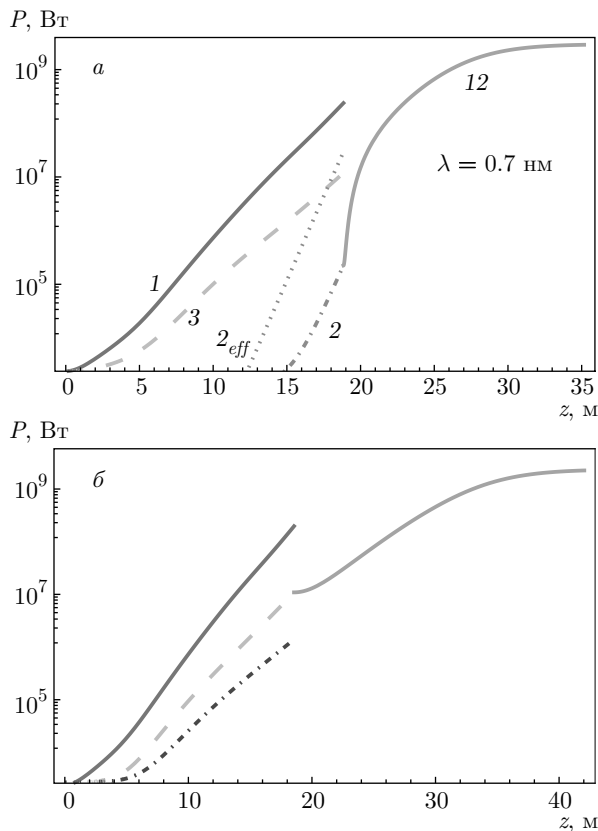
моники как в LCLS-II SASE, так и в режиме усиления HLSS. Исследуем возможное усиление второй и третьей гармоник банчера в выделенном усилителе-излучателе. Некоторые данные для моделирования представлены в табл. 2.

Результаты аналитического расчета эволюции мощности гармоник ЛСЭ HLSS с усилением второй гармоники на длине волны  $\lambda_2 = 0.6$  нм и третьей гармоники на длине волны  $\lambda_3 = 0.4$  нм представлены соответственно на рис. 5а и 5б. Отметим, что реальная мощность излучения второй гармоники банчера (оранжевая штрихпунктирная линия на рис. 5а) гораздо меньше индуцированной эффективной мощности на длине волны второй гармоники (пунктирная оранжевая линия на рис. 5а). Усиление второй гармоники происходит в ондуляторах усилителя, где основной тон резонирует со второй гармоникой банчера и достигает насыщения на длине около 30 м с мощностью около 3 ГВт. Отметим, что на длине ондуляторов 19 м индуцированный банчинг на длине второй гармоники создает эффективное значение мощности (пунктирная оранжевая линия на рис. 5а) только немного больше мощности третьей гармоники (зеленая штриховая линия на рис. 5а, 5б). Вторая или третья гармоники могут быть усилены в следующих ондуляторах, настроенных в резонанс. Основной тон усилителя, например, третьей гармоники  $\lambda_{1 \times 3} = 0.4$  нм достигает насыщения на длине  $L_s = 35$  м с мощностью  $P_{1 \times 3} \approx 3$  ГВт (см. рис. 5б); мощность насыщения второй гармоники  $\lambda_{1 \times 2} = 0.6$  нм на длине  $L_s \approx 30$  м примерно такая же (см. рис. 5а).

Отметим также, что использовать вторую гармонику целесообразно только в самом конце банчера, так как банчинг на ее длине волны индуцируется основным тоном; его значение в начале ЛСЭ очень мало. Более того, укоротив банчер всего на несколько метров максимально возможного и создав тем самым запас для роста индуцированного разброса энергии в следующих ондуляторах для умножения гармоник, получаем на выходе короткого банчера значение мощности третьей гармоники больше, чем эффективное значение мощности второй гармоники за счет банчинга, индуцированного основным тоном на ее длине волны. Это видно на рис. 5а: значения эффективной мощности второй гармоники на длине банчера 15 м (см. оранжевую пунктирную линию) меньше мощности третьей гармоники на той же длине ондуляторов (см. зеленую штриховую линию). Таким образом, если необходимо сократить длину банчера, например, для возможного дополнительного роста разброса энергий, индуцированного ЛСЭ в следующих каскадах, то использование второй гармоники в коротком банчере становится нецелесообразным. Мощность третьей гармоники оказывается выше, чем эффективная мощность второй, и использование третьей гармоники тогда предпочтительно.

## 9. РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В настоящей работе исследована генерация гармоник, в особенности четных, в ондуляторах рентгеновских ЛСЭ. Для спонтанного излучения прове-



**Рис. 5.** Эволюция мощности гармоник ЛСЭ LCLS II в режиме HLSS усиления второй гармоники (а) и третьей гармоники (б); энергия электронов  $E = 4$  ГэВ, разброс энергий  $\sigma_e = 0.009\%$ , ток  $I_0 = 850$  А, эмиттанс  $\epsilon_{x,y} = 0.45$  мм·мрад,  $\beta = 13$  м. Мощность в ондуляторах банчера: основной тон  $\lambda_1 = 1.2$  нм — красная сплошная линия 1, третья гармоника  $\lambda_3 = 0.4$  нм — зеленая штриховая линия 3, реальная мощность второй гармоники  $\lambda_2 = 0.6$  нм — оранжевая штрихпунктирная линия 2, эффективная мощность за счет банчинга, индуцированного основным тоном на длине волны  $\lambda_2 = 0.6$  нм — оранжевая пунктирная линия  $2_{eff}$ , пятая гармоника  $\lambda_5 = 0.24$  нм — синяя штрихпунктирная линия 5; усилитель второй гармоники  $\lambda_{1 \times 2} = 0.6$  нм — оранжевая сплошная линия 12, усиление третьей гармоники  $\lambda_{1 \times 3} = 0.4$  нм — оранжевая сплошная линия 13

ден аналитический расчет и численное моделирование SPECTRA; для излучения однопроходных ЛСЭ проведены расчеты по различным теориям нескольких авторов и аналитический расчет с коэффициентами Бесселя (9), где учтены все основные характеристики ЛСЭ; проведено сравнение результатов с данными хорошо документированных экспериментов ЛСЭ LCLS.

Полученные численные и аналитические спектральные распределения излучения согласуются друг с другом. В аналитических расчетах учте-

ны и отдельно исследованы вклады эффектов дифракции, эмиттанса, бетатронных колебаний и угловых эффектов в пучке конечного сечения, а также их влияние на излучение гармоник на оси и под углом электрон-фотонного взаимодействия ЛСЭ. Полученные результаты показали, что вторая и другие четные гармоники в ондуляторах рентгеновских ЛСЭ происходят в основном из-за угловых эффектов в пучке конечного сечения. Вклад бетатронных колебаний в генерацию четных гармоник ОИ в узких пучках электронов высоких энергий значительно меньше чем вклад расходимости. Рассматривая спектр под эффективным углом электрон-фотонного взаимодействия, находим, что вклад в мощность четных гармоник от эмиттанса в целом примерно на порядок меньше вклада от угла электрон-фотонного взаимодействия, а вкладом бетатронных колебаний можно пренебречь.

В излучении однопроходного ЛСЭ четные гармоники появляются за счет нескольких факторов. Нами аналитически показано, что бетатронные колебания дают ничтожный вклад в мощность четных гармоник ЛСЭ. Конечное сечение пучка и его расходимость дают около процента экспериментально измеренной мощности второй гармоники ЛСЭ. Отклонение пучка электронов от оси ондуляторов ЛСЭ измерено экспериментально и в некоторых случаях может быть сравнимым с сечением пучка; это может вызывать четные гармоники с мощностью, близкой к измеренной. Таким образом, в некоторых случаях существенное отклонение пучка может давать определяющий вклад в генерацию четных гармоник в ЛСЭ. Реальная мощность второй гармоники, рассчитанная с учетом эффективного угла электрон-фотонного взаимодействия на длине усиления ЛСЭ в пучке конечного сечения, во всех случаях соответствует экспериментальным значениям.

Мощность второй гармоники, рассчитанная по формулам работ [60, 66], отличается от измеренной в LCLS на один-два порядка; оценка мощности по формулам работ [61, 62] отличается от экспериментальных данных LCLS не более чем на порядок. Представления о физических причинах генерации четных гармоник ЛСЭ вследствие углов отклонения пучка от оси, данные в [60, 66], являются неполными. Противоречивым представляется вывод авторов работ [61, 62] о том, что углы отклонения пучка могут уменьшить мощность четных гармоник. Нами аналитически показано, что угловые эффекты электрон-фотонного взаимодействия порождают четные гармоники излучения ЛСЭ с мощностью, соответствующей экспериментальным значениям.

Теоретическое исследование генерации гармоник в каскадном рентгеновском ЛСЭ показало, что вторая гармоника может быть усилена почти до мощности основного тона и излучена в следующих каскадах ондуляторов, настроенных в резонанс с ней. Эффективная мощность второй гармоники происходит от банчинга на ее длине волны, индуцированного первой гармоникой в нелинейном режиме; эта мощность не излучается, она значительно больше реальной мощности второй гармоники в банчере за счет угловых и других эффектов. Эффективная мощность, соответствующая банчингу, является затравочной для усилителя на резонирующей длине волны его основного тона. Мы показали, что для усиления второй гармоники в усилителе целесообразно использовать максимально длинный банчер, так как эффективная мощность индуцируется только в нелинейном режиме и растет как квадрат мощности основного тона. В коротком банчере мощность третьей гармоники в режиме ее независимого роста может превышать эффективное значение мощности второй гармоники. В ЛСЭ SwissFEL и LCLS-II нами теоретически продемонстрирована возможность усиления второй и третьей гармоник банчера в каскадах усилителя с самозатравочным лазерным излучением гармоник HLSS с использованием ондуляторов с изменяемым параметром дипольности. Длина волны при этом в ЛСЭ LCLS-II составляет 0.4 нм и 0.6 нм соответственно для второй и третьей гармоник, а в ЛСЭ SwissFEL равна 0.07 нм для второй гармоники. Мощность гармоник на выходе усилителя составляет 3–6 ГВт, полная длина насыщения ондуляторов равна 30–35 м для обоих ЛСЭ.

Проведенное теоретическое исследование объясняет физические причины генерации четных гармоник: для ОИ это конечный эмиттанс, для излучения однопроходного ЛСЭ это угловые эффекты электрон-фотонного взаимодействия и в некоторых случаях отклонение пучка от оси. Продемонстрированы возможности использования, усиления и излучения гармоник ЛСЭ с изменяемым параметром дипольности. Полученные результаты могут использоваться в работающих, строящихся и планируемых ЛСЭ с целью уменьшения размеров и стоимости установок и генерации высокочастотного излучения с более коротким блоком ондуляторов и электронами с меньшей энергией.

**Благодарности.** Авторы благодарят А. Борисова, В. Багрова и А. Лобанова за советы и обсуждения математических и физических аспектов излучения релятивистских зарядов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Изв. АН СССР, Серия физ. 11, 165 (1947). *Isvestia Akademii Nauk SSSR (Fizika)*, **11N2**, 1651 (1947).
2. H. Motz, *J. Appl. Phys.* **22**, 527 (1951).
3. H. Motz, W. Thon, and R. N. J. Whitehurst, *Appl. Phys.* **24**, 826 (1953).
4. J. M. Madey, *J. Appl. Phys.* **42**, 1906 (1971).
5. B. W. J. McNeil and N. R. Thompson, *Nature Photonics* **4**, 814 (2010).
6. C. Pellegrini, A. Marinelli, and S. Reiche, *Rev. Mod. Phys.* **88**, 015006 (2016).
7. Z. Huang and K. J. Kim, *Phys. Rev. ST-AB* **10**, 034801 (2007).
8. E. L. Saldin, E. A. Schneidmiller, and M. V. Yurkov, *The Physics of Free Electron Lasers*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2000).
9. R. Bonifacio, C. Pellegrini, and L. Narducci, *Opt. Comm.* **50**, 373 (1984), DOI:10.1016/0030-4018(84)90105-6.
10. P. Schmüser, M. Dohlus, J. Rossbach, and C. Behrens, *Free-Electron Lasers in the Ultraviolet and X-Ray Regime*, Springer Tracts in Modern Physics, 258, Cham (ZG), Springer International Publishing (2014).
11. C. Pellegrini, *Phys. Scripta* **169**, 014004 (2017).
12. G. Margaritondo and P. R. Ribic, *J. Synchrotron Rad.* **18**, 101 (2011).
13. G. Margaritondo, *Rivista del Nuovo Cimento* **40**, 411 (2017).
14. G. Dattoli, P. L. Ottaviani, and S. Pagnutti, *J. Appl. Phys.* **97**, 113102 (2005).
15. F. De Martini, in *Laser Handbook*, Vol. 6, ed. by W. B. Colson, C. Pellegrini, and A. Renieri, North-Holland, Amsterdam (1990), p. 195.
16. R. Bonifacio, L. De Salvo, and P. Pierini, *Nucl. Instrum. A* **293**, 627 (1990).
17. Z. Huang and K.-J. Kim, *Phys. Rev. E* **62**, 7295 (2000).
18. T. Tanaka and H. Kitamura, *J. Synchrotron Rad.* **8**, 1221 (2001).
19. T. Tanaka, *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **17**, 060702 (2014).

20. T. Tanaka, *Opt. Lett.* **42**, 1576 (2017).
21. T. Tanaka, *Phys. Rev. Accel. Beams.* **21**, 110704 (2018).
22. J. Stoer and R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York (1991).
23. V. I. Alekseev and E. G. Bessonov, in *Proc. of the 6th All-Union Workshop on Use of Synchrotron Radiation SR-84*, IYaF SO AN SSSR, Novosibirsk (1984), p. 92.
24. A. A. Kolomenskii, I. V. Sinil'shchikova, E. G. Bessonov et al., *Tr. FIAN* **214**, 193 (1993). <http://proceedings.lebedev.ru/0214-1993/>
25. E. G. Bessonov, PhIAS Preprint No. 18, *Phys. Inst. Acad. Sci. USSR, Moscow* (1982).
26. E. G. Bessonov, *Nucl. Instr. Meth. A* **282**, 405 (1989).
27. V. I. Alexeev and E. G. Bessonov, *Nucl. Instr. Meth. A* **308**, 140 (1991).
28. V. G. Bagrov, V. F. Zal'mezh, M. M. Nikitin, and V. Y. Epp, *Nucl. Instr. Meth. A* **261**, 54 (1987).
29. B. Prakash, V. Huse, M. Gehlot, G. Mishra, and S. Mishra, *Optik* **127**, 1639 (2016).
30. F. Bazouband and B. Maraghechi, *J. Plasma Phys.* **81**, 905810305 (2015).
31. D. F. Alferov, Yu. A. Bashmakov, and E. G. Bessonov, *Zh. Tekh. Fiz.* **43**, 2126 (1973) [*Sov. Phys.-Tech. Phys.* **18**, 1336 (1974)].
32. D. F. Alferov, Y. A. Bashmakov, E. G. Bessonov, P. A. Cherenkov, and K. A. Belovintsev, *Part. Accel.* **9**, 223 (1979).
33. D. F. Alferov, Yu. A. Bashmakov, and P. A. Cherenkov, *Sov. Phys. Usp.* **32**, N3 200 (1989).
34. N. A. Vinokurov and E. B. Levichev, *Phys.-Usp.* **58**, 850 (2015).
35. Y. A. Bashmakov and E. G. Bessonov, *Radiation Effects* **66**, 85 (1982).
36. K. Zhukovsky, *J. Electromagn. Waves Appl.* **28**, 1869 (2014).
37. K. V. Zhukovsky, *J. Electromagn. Waves Appl.* **29**, 132 (2015).
38. G. Dattoli, V. V. Mikhailin, and K. Zhukovsky, *J. Appl. Phys.* **104**, 124507 (2008).
39. G. Dattoli, V. V. Mikhailin, and K. V. Zhukovsky, *Mosc. Univ. Phys. Bull.* **64**, 507 (2009).
40. K. V. Zhukovsky, *J. Math. Anal. Appl.* **446**, 628 (2017).
41. K. Zhukovsky and I. Fedorov, *Symmetry* **13**(1), 135 (2021).
42. K. Zhukovsky, *Results in Physics* **13**, 102248 (2019).
43. K. Zhukovsky and A. Kalitenko, *J. Synchrotron Rad.* **26**, 159 (2019).
44. K. V. Zhukovsky, *Russian Phys. J.* **62**, 1043 (2019).
45. K. Zhukovsky, *J. Synchrotron Rad.* **27**, 1648 (2020).
46. А. М. Калитенко, К. В. Жуковский, *ЖЭТФ* **157**, 394 (2020).
47. К. В. Жуковский, *УФН* **191**, 318 (2021).
48. K. Zhukovsky, *Opt. Laser Technol.* **131**, 106311 (2020).
49. L. Giannessi, in *Synchrotron Light Sources and Free-Electron Lasers*, ed. by E. J. Jaeschke et al., Springer International Publishing Switzerland 2016. DOI:10.1007/978-3-319-14394-1\_3.
50. K.-J. Kim, Z. Huang, and R. Lindberg, *Synchrotron Radiation and Free Electron Lasers; Principles of Coherent X-Ray Radiation*, Cambridge University Press, Cambridge CB2 8BS, United Kingdom (2017). DOI:10.1017/9781316677377.
51. R. Bonifacio, C. Pellegrini, and L. M. Narducci, *Opt. Comm.* **50**(6), 373 (1984).
52. G. Dattoli and P. L. Ottaviani, *Opt. Comm.* **204**, 283 (2002).
53. G. Dattoli, L. Giannessi, P. L. Ottaviani, and C. Ronisvalle, *J. Appl. Phys.* **95**, 3206 (2004).
54. G. Dattoli, V. V. Mikhailin, P. L. Ottaviani, and K. Zhukovsky, *J. Appl. Phys.* **100**, 084507 (2006).
55. K. Zhukovsky and A. Kalitenko, *Russ. Phys. J.* **62**, 354 (2019).
56. K. V. Zhukovskiy and A. M. Kalitenko, *Radiophys. Quant. Electr.* **62**, 52 (2019).
57. К. В. Жуковский, *Вестник МГУ Физика Астрономия № 5*, 60 (2019).
58. M. Xie, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A* **445**, 59 (2000).
59. M. Xie, in *Proc. of the 1995 Particle Accelerator-Conference*, IEEE, Piscataway, NJ (1995), p. 183.
60. Z. Huang and K.-J. Kim, *Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A* **475**, 112 (2001).
61. G. Geloni, E. Saldin, E. Schneidmiller, and M. Yurkov, *Opt. Comm.* **271**, 207 (2007).



62. E. Saldin, E. Schneidmiller, and M. Yurkov, Nucl. Instr. and Meth. A **539**, 499 (2005).
63. P. Emma, R. Akre, J. Arthur et al., Nature, Photonics **4**, 641 (2010).
64. P. Emma, *Proc. of PAC09*, Vancouver, BC, Canada (2009).
65. D. Ratner, A. Brachmann, F. J. Decker et al., Phys. Rev. ST-AB **14**, 060701 (2011).
66. Z. Huang and S. Reiche, in: *Proc. of the FEL 2004 Conference*, ed. by R. Bakker et al., Trieste, Italy (2004), p. 201.
67. B. Faatz et al., Appl. Sci. **7**, 1114 (2017).
68. E. A. Schneidmiller et al., Phys. Rev. AB **20**, 020705 (2017).
69. Ichiro Inoue, Nature Photon. **13**, 319 (2019).
70. S. Owada, K. Togawa, T. Inagaki et al., J. Synchrotron Rad. **25**, 282 (2018).
71. I. Tetsuya, A. Hideki, A. Takao, A. Yoshihiro, A. Noriyoshi, B. Teruhiko, E. Hiroyasu, F. Kenji, F. Toru, F. Yukito et al., Nature Photonics **6**, 540 (2012).
72. <http://xfel.riken.jp/eng/users/bml02-11.html>
73. H. Ego, Proc. of IPAC2016, Busan, Korea, MOPMW009.
74. T. Ishikawa et al., Nature Photon. **6**, 540 (2012).
75. K. Tono et al., J. Synchrotron Rad. **26**, 595 (2019).
76. K. Tono et al., New J. Phys. **15**, 083035 (2013).
77. C. J. Milne et al., Appl. Sci. **7**, 720 (2017).
78. R. Abela et al., Struct. Dyn. **4**, 061602 (2017).
79. P. Juranic et al., J. Synchrotron Rad. **26**, 906 (2019).
80. R. Abela et al., J. Synchrotron Rad. **26**, 1073 (2019).
81. E. Prat et al., Nature Photonics **14**, 748 (2020).
82. [https://portal.slac.stanford.edu/sites/lcls\\_public/lcls\\_ii/acc\\_phy/Lists/technotes/Public\\_view.aspx](https://portal.slac.stanford.edu/sites/lcls_public/lcls_ii/acc_phy/Lists/technotes/Public_view.aspx)
83. T. O. Raubenheimer, 60th ICFA Advanced Beam Dynamics Workshop on Future Light Sources FLS2018, Shanghai, China (2018), DOI:10.18429/JACoW-FLS2018-MOP1WA02.
84. G. Marcus and J. Qiang, *LCLS-II SCRF start-to-end simulations and global optimization as of September 2016*, SLAC National Accelerator Lab, LCLS-II TN-17-04, February (2017).
85. G. Marcus and J. Qiang, *LCLS-II SCRF start-to-end simulations as of August 2015*, SLAC National Accelerator Lab, LCLS-II TN-15-33, February (2017).