ЖЭТФ, 2022, том 161, вып. 2, стр. 296–300

К ТЕОРИИ ОМИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ В LC-СИСТЕМАХ

Б. Я. Балагуров[*]

Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 22 октября 2021 г.,
после переработки 22 октября 2021 г.
Принята к публикации 25 октября 2021 г.

Рассмотрена низкочастотная проводимость LC-систем — неупорядоченных решеток с индуктивными (L) и емкостными (C) связями в переменном электрическом поле. Выясняются условия, при которых в таких системах возможны реальные (омические) потери энергии.

DOI: 10.31857/S0044451022020146

В ходе исследований электрических свойств двумерных композитов [1] Дыхне, в частности, показал, что для случайно-неоднородных бинарных систем их эффективная проводимость σ_e равна среднему геометрическому от проводимостей компонент, если их концентрации равны. Этот же результат справедлив для системы со структурой шахматной доски, а также для неупорядоченной квадратной решетки с половинным составом. Применение полученной формулы для σ_e к LC-решетке, связи которой представляют собой индуктивность L или электрическую емкость C, привело к неожиданному результату: в системе, состоящей только из недиссипативных элементов, оказались возможны потери энергии. Таким образом система, состоящая из реактивных (L- и C-) сопротивлений, может обладать реальным активным (омическим) сопротивлением.

В настоящей работе проблема существования реальных потерь энергии в LC-системах обсуждается с общих позиций. Показано, что омическим сопротивлением могут обладать как двумерные, так и трехмерные LC-системы. Оказалось, что вещественная часть величины σ_e, отвечающая за потери энергии, непосредственно связана с особенностями σ_e как аналитической функции отношения проводимостей компонент. Поэтому исследование физического явления омических потерь в LC-системах может прояснить некоторые чисто математические вопросы.

1. Сначала рассмотрим двумерную задачу о проводимости изотропного двухкомпонентного композита. Эффективная проводимость σ_e такой системы является функцией трех основных аргументов:

$$\sigma_e = \sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2)\,. \tag{1}$$

Здесь σ_1 и σ_2 — проводимости компонент, p — безразмерная концентрация (доля занимаемой площади) первой компоненты; концентрация второй компоненты равна $1-p$. Для решеток под концентрацией p понимается доля связей с проводимостью σ_1.

В работах [1, 2] для величины σ_e получено так называемое соотношение взаимности:

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2)\,\sigma_e(p; \sigma_2, \sigma_1) = \sigma_1\,\sigma_2\,. \tag{2}$$

Здесь второй сомножитель в левой части равенства относится к взаимной системе, отличающейся от исходной заменой $\sigma_1 \rightleftarrows \sigma_2$. Соотношение (2) было выведено в работе [2] для систем с периодическим расположением включений. Применение преобразования симметрии позволило доказать (см. [1]), что соотношение (2) справедливо для двумерных систем произвольной структуры, в том числе и неупорядоченной.

Следуя работе [1], рассмотрим теперь бинарную модель со случайным распределением компонент. Такая система при замене проводимостей $\sigma_1 \rightleftarrows \sigma_2$ становится взаимной, а при дополнительной замене концентрации ($p \to 1-p$) возвращается в исходное состояние. Поэтому при такой двойной замене эффективная проводимость не меняется, так что

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) = \sigma_e(1-p; \sigma_2, \sigma_1)\,. \tag{3}$$

[*] E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru, byabalagurov@mail.ru

С учетом этого равенства соотношение взаимности (2) для подобных систем принимает вид

$$\sigma_e(p;\sigma_1,\sigma_2)\,\sigma_e(1-p;\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1\,\sigma_2\,. \tag{4}$$

Отсюда при $p=1/2$ получаем [1]

$$\sigma_e(1/2;\sigma_1,\sigma_2)=\sqrt{\sigma_1\,\sigma_2}\,. \tag{5}$$

Этот результат, как следует из его вывода, справедлив для изотропной двумерной бинарной системы со случайным распределением компонент. В то же время для модели со структурой шахматной доски имеем $p=1/2$, а замена $\sigma_1\rightleftarrows\sigma_2$ ее не меняет. Поэтому уже из соотношения взаимности (2) следует, что результат (5) справедлив и для этой упорядоченной модели. Выражение (5) было получено также в ходе непосредственного решения (с определением напряженности электрического поля в каждой ячейке) задачи о проводимости модели со структурой шахматной доски [3]. Можно показать [1] также, что результат (5) справедлив и для квадратной решетки со случайным распределением проводимостей связей при их равной концентрации. Отметим, что во всех трех случаях концентрация $p=1/2$ является критической (порогом протекания), при которой происходит фазовый переход металл–диэлектрик [4].

Рассмотрим квадратную решетку, связи которой содержат не обычные проводимости или сопротивления, а индуктивность (L-связи) или электрическую емкость (C-связи), случайным образом распределенные. Проводимости таких связей чисто мнимые (бездиссипативные) и имеют вид [5]

$$\sigma_1=\sigma_L=i\,\frac{c^2}{\omega L}\,,\quad \sigma_2=\sigma_C=-i\omega C\,, \tag{6}$$

где под частотой ω следует понимать величину $\omega+i0$. В (6) L — индуктивность, C — емкость, c — скорость света.

Эффективная проводимость подобной LC-системы в квазистационарном приближении [5] определяется подстановкой мнимых проводимостей (6) в выражение для σ_e системы той же структуры с обычными проводимостями. Для неупорядоченной квадратной LC-решетки с половинным составом подстановка σ_1 и σ_2 из (6) в формулу (5) дает [1]

$$\sigma_e(1/2;\sigma_L,\sigma_C)=c\sqrt{\frac{C}{L}}\,. \tag{7}$$

Этот результат кажется парадоксальным. Действительно, согласно формуле (7) LC-система с чисто мнимыми (бездиссипативными) элементами обладает вещественной эффективной проводимостью. Это означает, что в ней происходит, как и в системе с обычными (активными) сопротивлениями, диссипация энергии, т. е. имеются омические потери.

Объяснение этого феномена дано в работе [1] и состоит в следующем. В неупорядоченной решетке имеются LC-контуры с различными собственными частотами. Энергия электрического поля затрачивается на резонансное возбуждение колебаний этих контуров. При этом реальная диссипация энергии происходит при наличии в системе сколь угодно малого поглощения. В бесконечной решетке спектр собственных частот непрерывен, так что поглощение энергии происходит в широком диапазоне изменения частоты ω.

Приведенные рассуждения иллюстрируют результат (7), относящийся к квадратной решетке с критической концентрацией. Однако эта аргументация в равной мере применима к любым LC-решеткам (в том числе трехмерным) и не ограничивается критической концентрацией. Поэтому следует ожидать, что существование омического сопротивления в LC-системах является достаточно общим явлением.

2. Существование омической проводимости в LC-системе было установлено в работе [1] на частном примере неупорядоченной квадратной решетки с критической концентрацией. Для исследования этой проблемы в случае произвольной LC-решетки необходимо выяснить некоторые общие свойства эффективной проводимости σ_e из формулы (1) при комплексных значениях аргументов σ_1 и σ_2 [6, 7]. Для этого введем безразмерную эффективную проводимость f согласно выражению

$$\sigma_e(p;\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1\,f(p,h)\,,\quad h=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\,. \tag{8}$$

В трехмерном случае под p следует понимать долю объема, занятого первой компонентой, или долю связей с проводимостью σ_1 в решетке.

Согласно [5] в переменном электрическом поле проводимость $\sigma(\omega)$ наравне с диэлектрической проницаемостью является аналитической функцией комплексной частоты ω при $\operatorname{Im}\omega>0$. Кроме того, $\sigma(\omega)$ не имеет в верхней полуплоскости ω нулей. Поэтому безразмерная проводимость f, равная отношению двух аналитических функций σ_e/σ_1, также аналитична при $\operatorname{Im}\omega>0$. Зависимость функции

$$f=f(p,\zeta) \tag{9}$$

осуществляется через аргумент

$$\zeta=\zeta(\omega)=\frac{\sigma_2(\omega)}{\sigma_1(\omega)}\,. \tag{10}$$

В свою очередь, с помощью этого соотношения верхняя полуплоскость ω конформно отображается на некоторую область комплексной плоскости переменной ζ. В этой области величина $f(p,\zeta)$ аналитична уже как функция аргумента ζ. Наибольшую по площади область дает отображение (10) с проводимостями компонент, по форме совпадающими с σ_L и σ_C из формулы (6):

$$\zeta(\omega) = -\frac{\omega^2}{\Omega^2}, \quad \Omega = \frac{c}{\sqrt{LC}}. \tag{11}$$

Однако здесь, в отличие от (6), величина ω является комплексной переменной, определенной на всей верхней полуплоскости; Ω — томсоновская частота. Соотношением (11) верхняя полуплоскость $\operatorname{Im}\omega > 0$ отображается на всю комплексную плоскость ζ за исключением луча $\operatorname{Im}\zeta = 0$ и $-\infty \leqslant \operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$. Следовательно, безразмерная эффективная проводимость $f(p,\zeta)$ как функция аргумента ζ аналитична на всей комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси. При этом любые особенности функции $f(p,\zeta)$ могут находиться только на этом луче.

Согласно [5]

$$\sigma(-\omega^*) = \sigma_*(\omega), \tag{12}$$

так что

$$f(p,\zeta(-\omega^*)) = f^*(p,\zeta(\omega)), \tag{13}$$

или при

$$\zeta = \xi + i\eta \tag{14}$$

имеем

$$f(p,\xi - i\eta) = f^*(p,\xi + i\eta). \tag{15}$$

Положив в (15) $\xi = -t$ и $\eta = 0$, находим следующие соотношения симметрии:

$$\operatorname{Re} f^{(-)}(p,-t) = \operatorname{Re} f^{(+)}(p,-t), \tag{16}$$

$$\operatorname{Im} f^{(-)}(p,-t) = -\operatorname{Im} f^{(+)}(p,-t), \tag{17}$$

где $0 \leqslant t \leqslant \infty$. Здесь индексы «плюс» и «минус» обозначают принадлежность функции f к верхнему или нижнему берегу разреза вдоль луча — отрицательной действительной полуоси.

Как известно [4], в двумерном случае имеется одна критическая концентрация p_c (порог протекания). При концентрации первой компоненты $p < p_c$ в бинарной двумерной системе имеется протекание только по второй компоненте, а при $p > p_c$ — только по первой. В трехмерном случае ситуация иная — здесь критических концентраций две: p_{c1} и p_{c2} ($p_{c1} < p_{c2}$). При $p < p_{c1}$ есть протекание только по второй компоненте, в диапазоне $p_{c1} < p < p_{c2}$ сосуществуют протекания по обеим компонентам, а при $p > p_{c2}$ отсутствует протекание по второй компоненте.

Если $\sigma_2 = 0$, то при изменении концентрации первой компоненты от $p > p_{c1}$ до $p < p_{c1}$ в точке $p = p_{c1}$ происходит фазовый переход металл–диэлектрик: эффективная проводимость σ_e при всех $p \leqslant p_{c1}$ равна нулю. Если же $\sigma_2 \neq 0$, но мала ($\sigma_2/\sigma_1 \ll 1$), то в окрестности критической концентрации p_{c1} в поведении эффективной проводимости имеются известные аномалии, которые описываются в рамках гипотезы подобия [4]. Ниже понадобится выражение для безразмерной эффективной проводимости f в самой критической точке:

$$f(p_{c1},h) = a_0\, h^s, \quad h \ll 1. \tag{18}$$

Здесь s — критический индекс ($0 < s < 1$), $a_0 \sim 1$ — численный коэффициент. В двумерном случае $s = 1/2$, $a_0 = 1$ и для функции f имеем

$$f(1/2,h) = \sqrt{h} \tag{19}$$

— ср. с формулой (5).

В противоположном случае $h \gg 1$ с учетом определения величины p_{c2} для функции $f(p,h)$ имеем следующие асимптотики:

$$p > p_{c2}: \quad f(p,h) \approx f(p,\infty) + \ldots, \tag{20}$$

$$p < p_{c2}: \quad f(p,h) \approx hA(p) + B(p) + \ldots \tag{21}$$

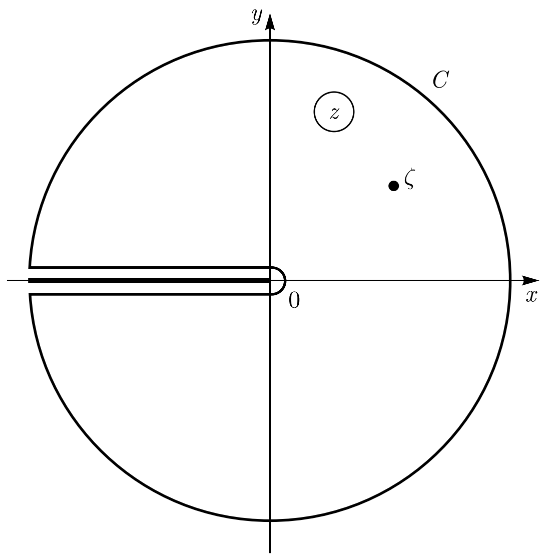
Здесь символ $\approx$ означает асимптотическое выражение. В (21) $A(p)$ и $B(p)$ — некоторые функции концентрации p. Опущенные в (20), (21) члены разложения имеют порядок $1/h$ и выше.

Вычисляя при $p > p_{c2}$ интеграл

$$\int \frac{f(p,z) - f(p,\infty)}{z - \zeta}\,\frac{dz}{2\pi i}, \tag{22}$$

взятый вдоль контура, представляющего собой окружность бесконечного радиуса, дополненную обходом вокруг разреза (см. рисунок), получим следующее дисперсионное соотношение:

$$p > p_{c2}: \quad f(p,\zeta) = f(p,\infty) - \\ - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} f^{(+)}(p,-t)}{t+\zeta}\,dt. \tag{23}$$



Аналогичным образом находим второе дисперсионное соотношение:

$$p < p_{c2}: \quad f(p,\zeta) = \zeta A(p) + B(p) - \\ - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{Im} f^{(+)}(p,-t)}{t+\zeta}\,dt\,. \quad (24)$$

Следовательно, знание величины $\operatorname{Im} f^{(+)}(p,-t)$ как функции действительной переменной t позволяет с помощью этих соотношений находить $f(p,\zeta)$ в любой точке комплексной плоскости ζ. Если безразмерная эффективная проводимость $f(p,h)$ известна во всем интервале $0 \leqslant h \leqslant \infty$, то функцию $\operatorname{Im} f^{(+)}(p,-t)$ можно найти из соотношений (23), (24) при $\zeta = h$, рассматривая их как интегральные уравнения.

3. В рассматриваемом квазистационарном приближении выражение для эффективной проводимости LC-системы следует из общей формулы (8) с заменой $h \to \zeta$ при подстановке величин $\sigma_1 = \sigma_L$ и $\sigma_2 = \sigma_C$ из (6). В результате аргумент ζ примет вид

$$\zeta = \frac{\sigma_C}{\sigma_L} = -\frac{(\omega + i0)^2}{\Omega^2} \quad (25)$$

с Ω из формулы (11). Здесь ω — реальная (вещественная) частота $\omega > 0$. Подстановка (25) вместо h в формулу (8) дает

$$\sigma_e(p;\sigma_L,\sigma_C) = i\frac{c^2}{\omega L}\, f^{(-)}(p,-\omega^2/\Omega^2)\,. \quad (26)$$

Индекс «минус» у функции f означает, что она должна быть взята на нижнем берегу разреза.

Отделяя мнимую и действительную части, получим

$$\operatorname{Im}\sigma_e(p;\sigma_L,\sigma_C) = \frac{c^2}{\omega L}\,\operatorname{Re} f^{(-)}(p,-\omega^2/\Omega^2)\,, \quad (27)$$

$$\operatorname{Re}\sigma_e(p;\sigma_L,\sigma_C) = -\frac{c^2}{\omega^2}\,\operatorname{Im} f^{(-)}(p,-\omega^2/\Omega^2)\,. \quad (28)$$

С учетом соотношений симметрии (16), (17) выражения (27), (28) принимают вид

$$\operatorname{Im}\sigma_e(p;\sigma_L,\sigma_C) = \frac{c^2}{\omega L}\,\operatorname{Re} f^{(+)}(p,-\omega^2/\Omega^2)\,, \quad (29)$$

$$\operatorname{Re}\sigma_e(p;\sigma_L,\sigma_C) = \frac{c^2}{\omega L}\,\operatorname{Im} f^{(+)}(p,-\omega^2/\Omega^2)\,. \quad (30)$$

Здесь индекс «плюс» означает верхний берег разреза. Таким образом, омическая проводимость $\operatorname{Re}\sigma_e$ LC-системы выражается через ту же функцию $\operatorname{Im} f^{(+)}(p,-t)$, которая входит в дисперсионные соотношения (23), (24).

Величина $\operatorname{Im} f^{(+)}(p,-t)$ может быть найдена в явном виде для некоторых частных случаев. Так, в двумерном случае из формулы (19) следует

$$f^{(+)}(1/2,-t) = i\sqrt{t}\,, \quad (31)$$

так что

$$\operatorname{Im} f^{(+)}(1/2,-\omega^2/\Omega^2) = \frac{\omega}{\Omega}\,. \quad (32)$$

Соответствующая действительная часть функции $f^{(+)}(1/2,-\omega^2/\Omega^2)$ в этом случае равна нулю. Подстановка выражения (32) в общую формулу (30) приводит, как и следует, к результату (7).

Из формулы (18) находим

$$f^{(+)}(p_{c1},-t) = a_0\, t^s\, e^{is\pi}\,, \quad (33)$$

откуда следует

$$\operatorname{Re} f^{(+)}(p_{c1},-\omega^2/\Omega^2) = a_0\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^{2s}\cos s\pi\,, \quad (34)$$

$$\operatorname{Im} f^{(+)}(p_{c1},-\omega^2/\Omega^2) = a_0\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^{2s}\sin s\pi\,. \quad (35)$$

Подстановка выражения (35) в общую формулу (30) дает

$$\operatorname{Re}\sigma_e(p_{c1};\sigma_L,\sigma_C) = a_0\,\frac{c^2}{L}\,\frac{\omega^{2s-1}}{\Omega^{2s}}\sin s\pi\,. \quad (36)$$

В трехмерном случае $s \approx 0.7$ [7] и $2s-1 \approx 0.4$, так что величина $\operatorname{Re}\sigma_e$ зависит от частоты примерно как $\omega^{1/2}$.

Таким образом, согласно формуле (30) действительная часть эффективной проводимости LC-решетки, ответственная за омические потери, выражается через величину $\operatorname{Im} f^{(+)}(p,-t)$, характеризующую математическую особенность функции $f(p,\zeta)$ на разрезе плоскости комплексного аргумента ζ. Эта же величина входит в дисперсионные соотношения (23), (24), из которых следует, что $\operatorname{Im} f^{(+)}(p,-t)$ отлична от нуля при любой концентрации p. С другой стороны, при фиксированном p величина $\operatorname{Im} f^{(+)}(p,-t) \neq 0$ по крайней мере в некотором диапазоне изменения аргумента t. Следует ожидать поэтому, что для неупорядоченных LC-решеток $\operatorname{Re}\sigma_e \neq 0$ в широкой области изменения как концентрации, так и частоты. Отличие $\operatorname{Re}\sigma_e$ от нуля означает наличие омических потерь энергии, так что должно выполняться неравенство

$$\operatorname{Im} f^{(+)}(p,-t) \geqslant 0 \tag{37}$$

при всех $0 \leqslant t \leqslant \infty$. Справедливость этого неравенства подтверждается частными случаями — см. (32) и (35).

Как отмечено в разд. 1, в неупорядоченной LC-решетке имеется множество LC-цепочек с различными собственными частотами ω_ν. Поэтому величина $f(p,-\omega^2/\Omega^2)$ как отклик на внешнее переменное электрическое поле представляет собой сумму резонансных слагаемых типа $1/(\omega^2-\omega_\nu^2)$, чему в функции $f(p,\zeta)$ отвечают слагаемые полюсного вида $1/(\zeta+t_\nu)$, где $t_\nu > 0$. Поэтому при $\zeta = -t + i0$ для мнимой части $f^{(+)}(p,-t)$ получаем

$$\operatorname{Im} f^{(+)}(p,-t) = \sum_\nu F_\nu\, \delta(t-t_\nu), \quad F_\nu > 0. \tag{38}$$

Для LC-решеток конечного размера спектр частот ω_ν, как и величин t_ν, дискретен, так что $\operatorname{Im} f^{(+)}(p,-t)$ представляет собой сумму дельта-функций. При переходе к решеткам бесконечного размера спектр величин t_ν становится непрерывным, сумма в (38) заменяется на интеграл и зависимость $\operatorname{Im} f^{(+)}(p,-t)$ от аргумента t становится «нормальной» — монотонной. Приведенные частные примеры (32) и (35) относятся к бесконечным системам, так как только для них имеет смысл введение понятия критической концентрации.

Ввиду важности величины $\operatorname{Im} f^{(+)}(p,-t)$ для всей задачи о проводимости двухкомпонентных композитов необходимо найти мнимую часть $f^{(+)}(p,-t)$ для неупорядоченных, например, квадратной и кубической LC-решеток. В принципе это можно сделать, вычисляя в ходе обычного компьютерного эксперимента в режиме постоянного тока эффективную проводимость σ_e решетки с проводимостями $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = -t + i\varepsilon$, где $\varepsilon \to +0$. Затем величина $\operatorname{Im} f^{(+)}(p,-t)$ определяется из соотношения

$$\sigma_e(p;1,-t+i\varepsilon) = f(p,-t+i\varepsilon)$$

при достаточно малом ε. Такой подход, однако, весьма трудозатратен, а использование полученной для $\operatorname{Im} f^{(+)}(p,-t)$ «гребенки» не слишком удобно. Более реалистичным представляется определение величины $\operatorname{Im} f^{(+)}(p,-t)$ из дисперсионных соотношений (23), (24) как интегральных уравнений. Аппроксимируя $\operatorname{Im} f^{(+)}(p,-t)$ ступенчатой функцией аргумента t, результат вычислений получим в виде гистограммы. Этот график даст общее представление о зависимости функции $\operatorname{Im} f^{(+)}(p,-t)$ от t при заданной концентрации p.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
2. J. B. Keller, J. Math. Phys. **5**, 548 (1964).
3. Ю. П. Емец, *Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой*, Наукова думка, Киев (1986).
4. A. L. Efros and B. I. Shklovskii, Phys. Stat. Sol. (b) **76**, 475 (1976).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992).
6. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **88**, 1664 (1985).
7. Б. Я. Балагуров, *Электрофизические свойства композитов. Макроскопическая теория*, URSS, Москва (2015).