

# ПРОБЛЕМА ПОВЫШЕНИЯ РАБОЧЕЙ ЧАСТОТЫ В ЧЕРЕНКОВСКИХ ПЛАЗМЕННЫХ ИСТОЧНИКАХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

*И. Н. Карташов<sup>\*</sup>, М. В. Кузелев<sup>\*\*</sup>*

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 15 сентября 2021 г.,

после переработки 11 октября 2021 г.

Принята к публикации 11 октября 2021 г.

Исследована возможность повышения рабочей частоты существующих плазменных черенковских СВЧ-излучателей на релятивистских электронных пучках большой плотности. Рассмотрены высокочастотная и низкочастотная поверхностные волны немагнитной трубчатой плазмы большой плотности в волноводе и определены условия их возбуждения электронными пучками. Вычислены коэффициенты пространственного усиления поверхностных волн в режимах одночастичного и коллективного эффектов Черенкова. Получены нелинейные уравнения пространственного усиления волн и рассчитаны эффективности усиления поверхностных волн. Показано, что повышение на порядок рабочей частоты действующих плазменных излучателей вполне реально и достигается всего лишь повышением плотности используемой плазмы.

DOI: 10.31857/S0044451022020134

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В плазменной СВЧ-электронике в качестве электродинамических систем применяются отрезки плазменных волноводов с излучателем на одном из торцов. В успешно реализованных на сегодняшний день плазменных излучателях (усилителях и генераторах) используется замагнитенная плазма трубчатой геометрии. Работают такие излучатели в СВЧ-диапазоне, т.е. на частотах  $\omega$  порядка  $10^{10}$ – $10^{11}$  рад/с. Отличительной особенностью плазменных излучателей является то, что их рабочая частота сопоставима с электронной ленгмюровской частотой плазменного заполнения, т.е.  $\omega_p \sim \alpha \cdot (10^{10}$ – $10^{11})$  рад/с, где  $\alpha$  — несколько единиц [1–3]. По спектру выходного сигнала плазменные СВЧ-источники работают как в режиме генерации [4] и усиления [5] монохроматического сигнала с перестраиваемой частотой, так и в режиме усиления шумов [6, 7].

В настоящее время обсуждается возможность создания существенно более высокочастотных плазменных излучателей с рабочей частотой  $\omega \sim 10^{12}$  рад/с и больше. Повышение рабочей частоты в реализованных на сегодняшний день плазменных излучателях неизбежно влечет за собой использование более плотной плазмы, что приводит к необходимости изменения основных теоретических моделей плазменной СВЧ-электроники. Во-первых, плотную плазму замагнитить сложно, поскольку требуется создание очень сильного внешнего магнитного поля в достаточно большом объеме плазменного волновода. Поэтому приходится исходить из того, что плазма является слабо замагнитенной (или вообще немагнитенной) [8–10]. Традиционно в большинстве теоретических исследований, посвященных расчету конкретных плазменных излучателей, плазма предполагалась замагнитенной полностью [2, 11]. Во-вторых, глубина проникновения поперечного электромагнитного поля в плотную немагнитную плазму может оказаться меньше ее толщины, реализуемой в плазменных излучателях с трубчатой плазмой. Поэтому оказывается неприменимой традиционно и эффективно используемая при расчетах приборов плазменной СВЧ-электроники модель бесконечно тонкой плазмы [11–13]. Электромагнитные

<sup>\*</sup> E-mail: igorkartashov@mail.ru

<sup>\*\*</sup> E-mail: kuzelev@mail.ru

свойства волн в слоистых структурах с изотропной плазмой и в магнитоактивной плазме газового ВЧ-разряда, их возбуждение внешней неоднородной электромагнитной волной и спиральными антеннами рассматривалось в [14, 15]. Настоящее исследование в первую очередь направлено на учет конечности толщины трубчатой плазмы в традиционных схемах плазменной СВЧ-электроники при условии, что плазма является немагнитной.

В любом из известных черенковских плазменных излучателей обязательно имеется некоторое внешнее магнитное поле, необходимое для получения и транспортировки сильноточного релятивистского электронного пучка. Немагнитность плазмы предполагает выполнение неравенств

$$\Omega_e^2 \ll \omega^2, \quad \Omega_e \omega_p^2 \ll \omega^3, \quad (1)$$

второе из которых, с учетом того, что  $\omega$  и  $\omega_p$  одного порядка, фактически эквивалентно первому. Здесь  $\Omega_e$  — электронная циклотронная частота. Чем плотнее плазма, тем выше частота  $\omega$  и тем лучше выполняются неравенства (1). Напротив, плотности используемых в плазменных излучателях электронных пучков малы по сравнению с плотностями плазмы. Поэтому, предполагая выполненными неравенства

$$\Omega_e^2 \gg \omega_b^2 \gamma^{-3}, |\delta k u|^2, \quad \delta_b < c/\omega_b, \quad (2)$$

электронный пучок считаем бесконечно тонким и полностью замагниченным. Здесь  $\omega_b$  — ленгмюровская частота электронов пучка,  $u$  — их скорость,  $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ ,  $\delta_b$  — толщина трубчатого пучка, а  $\delta k$  — пространственный инкремент резонансной черенковской пучково-плазменной неустойчивости.

## 2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим взаимодействие прямолинейного электронного пучка с волной  $E$ -типа волновода кругового поперечного сечения, в котором находится радиально неоднородная плазма. Направим ось  $z$  вдоль оси волновода, совпадающей с направлением движения пучка, и определим продольную составляющую напряженности электрического поля формулой

$$E_z(t, z, r) = \frac{1}{2} [E(r) \exp(-i\omega t + ik_z z + il\varphi) + \text{c.c.}], \quad (3)$$

где  $r, \varphi, z$  — цилиндрические координаты,  $l = 0, 1, \dots$  — номер азимутальной моды. Тензор диэлектрической проницаемости плазмы возьмем в виде [16]

$$\varepsilon_{ij}(\omega, r) = \varepsilon_p(\omega, r) \delta_{ij}, \quad i, j = r, \varphi, z, \quad (4)$$

$\varepsilon_p(\omega, r) = 1 - \omega_p^2(r)/\omega^2$  (столкновениями и тепловым движением электронов пренебрегаем, движение ионов не учитываем). Из уравнений Максвелла с тензором диэлектрической проницаемости (4) следует уравнение для комплексной амплитуды  $E(r)$  в формуле (3):

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\varepsilon_p(\omega, r)}{\chi^2(\omega, r)} \frac{dE}{dr} \right) - \frac{\varepsilon_p(\omega, r)}{\chi^2(\omega, r)} \frac{l^2}{r^2} E - \varepsilon_p(\omega, r) E = 0, \quad (5)$$

где  $\chi^2(\omega, r) = k_z^2 - \varepsilon_p(\omega, r)\omega^2/c^2$ . В дальнейшем рассматривается азимутально симметричный случай  $l = 0$ .

Пусть трубчатая плазма с постоянной плотностью расположена в области  $r \in [r_1, r_2]$ . Уравнение (5) справедливо как в плазме, так и в вакуумных областях волновода  $r \in [0, r_1]$  и  $r \in (r_2, R)$ , где  $R$  — радиус волновода. Непосредственно из уравнения (5) получаются следующие граничные условия на границах трубчатой плазмы:

$$\{E\}_{r=r_{1,2}} = 0, \quad \left\{ \frac{\varepsilon_p(\omega, r)}{\chi^2(\omega, r)} \frac{dE}{dr} \right\}_{r=r_{1,2}} = 0, \quad (6)$$

причем в вакуумных областях  $\varepsilon_p(\omega, r) = 1$ , а в области плазмы  $\varepsilon_p(\omega, r) = \varepsilon_p = 1 - \omega_p^2/\omega^2$  с постоянной  $\omega_p$ . Еще одно граничное условие  $E(R) = 0$  записывается на идеально проводящей границе волновода.

Плотность тока бесконечно тонкого трубчатого замагниченного электронного пучка определим формулой

$$j_z(t, z, r) = \delta_b \delta(r - r_b) j_b(t, z; r_b), \quad (7)$$

где  $j_b(t, z; r_b)$  — функция, для нахождения которой требуются уравнения динамики пучка, а параметрическая зависимость от радиуса трубчатого пучка  $r_b$  обусловлена тем, что на электроны пучка действует поле (3) именно в точке  $r = r_b$ . Наличие в волноводе тока с плотностью (7) приводит к следующему скачку азимутальной составляющей индукции магнитного поля волны:

$$\{B_\varphi(t, z, r)\}_{r=r_b} = \frac{4\pi}{c} \delta_b j_b(t, z; r_b). \quad (8)$$

Азимутальная составляющая индукции магнитного поля определяется формулой вида (3) с комплексной амплитудой

$$B(r) = -i\varepsilon_p(\omega, r) \frac{\omega}{c\chi^2(\omega, r)} \frac{dE}{dr}. \quad (9)$$

Подставляя формулу вида (3) с комплексной амплитудой (9) в (8) и считая, что электронный пучок проходит по одной из вакуумных областей волновода, находим следующие граничные условия для функции  $E(r)$  на электронном пучке:

$$\{E\}_{r=r_b} = 0, \quad \left\{ \frac{dE}{dr} \right\}_{r=r_b} = \frac{4\pi i}{\omega} \delta_b \chi_0^2 \langle j_b(r_b) \rangle, \quad (10)$$

где

$$\langle j_b(r_b) \rangle = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} j_b(t, z; r_b) \exp(i\omega t - ik_z z) dt \quad (11)$$

— пространственно-временная фурье-гармоника плотности тока пучка,  $\chi_0^2 = k_z^2 - \omega^2/c^2$ . В (10) добавлено очевидное условие непрерывности на электронном пучке самой функции  $E(r)$ . В линейном приближении для вычисления функции (11) можно воспользоваться известным выражением для проводимости пучка электронов, полученным в гидродинамической модели [11, 16], что дает

$$\frac{4\pi i}{\omega} \langle j_b(r_b) \rangle = -\frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} E(r_b). \quad (12)$$

Процедура вычисления функции (11) в нелинейной теории будет описана ниже.

### 3. ОСОБЕННОСТИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ВОЛНОВОДА С НЕЗАМАГНИЧЕННОЙ ТРУБЧАТОЙ ПЛАЗМОЙ

Перейдем теперь к выводу дисперсионного уравнения и формулы для собственной функции  $E(r)$  волн плазменного волновода с трубчатой немагнитичной плазмой конечной толщины. Наличие пучка пока не учитываем. Ограниченное при  $r = 0$  решение уравнения (5) запишем в виде

$$E(r) = \begin{cases} AI_0(\chi_0 r), & r < r_1, \\ BI_0(\chi_p r) + CK_0(\chi_p r), & r_1 < r < r_2, \\ DF_0(\chi_0 r), & r_2 < r < R, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$F_0(\chi_0 r) = K_0(\chi_0 r) - I_0(\chi_0 r) \frac{K_0(\chi_0 R)}{I_0(\chi_0 R)}, \quad (14)$$

$\chi_p^2 = k_z^2 - \varepsilon_p \omega^2/c^2$ , а  $A, B, C, D$  — постоянные. Подстановка (13) в граничные условия (6) приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} AI_0(\chi_0 r_1) - BI_0(\chi_p r_1) - CK_0(\chi_p r_1) &= 0, \\ \chi_p AI_1(\chi_0 r_1) - \varepsilon_p \chi_0 (BI_1(\chi_p r_1) - & \\ - CK_1(\chi_p r_1)) &= 0, \\ BI_0(\chi_p r_2) + CK_0(\chi_p r_2) - DF_0(\chi_0 r_2) &= 0, \\ \varepsilon_p \chi_0 (BI_1(\chi_p r_2) - CK_1(\chi_p r_2)) - & \\ - \chi_p DF_1(\chi_0 r_2) &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$F_1(\chi_0 r) = -K_1(\chi_0 r) - I_1(\chi_0 r) \frac{K_0(\chi_0 R)}{I_0(\chi_0 R)}. \quad (16)$$

Равенство нулю определителя системы (15) дает дисперсионное уравнение для определения спектров частот плазменного волновода. Запишем его в виде [16, 17]

$$D_0(\omega, k_z) \equiv \varepsilon_p \chi_0 S_1 I_0(\chi_0 r_1) - \chi_p S_0 I_1(\chi_0 r_1) = 0, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} S_0 &= \varepsilon_p \chi_0 F_0(\chi_0 r_2) \times \\ &\times (I_0(\chi_p r_1) K_1(\chi_p r_2) + K_0(\chi_p r_1) I_1(\chi_p r_2)) + \\ &+ \chi_p F_1(\chi_0 r_2) \times \\ &\times (I_0(\chi_p r_1) K_0(\chi_p r_2) - K_0(\chi_p r_1) I_0(\chi_p r_2)), \\ S_1 &= \varepsilon_p \chi_0 F_0(\chi_0 r_2) \times \\ &\times (I_1(\chi_p r_1) K_1(\chi_p r_2) - K_1(\chi_p r_1) I_1(\chi_p r_2)) + \\ &+ \chi_p F_1(\chi_0 r_2) \times \\ &\times (I_1(\chi_p r_1) K_0(\chi_p r_2) + K_1(\chi_p r_1) I_0(\chi_p r_2)). \end{aligned} \quad (18)$$

Полагая далее  $A = 1$ , из первых трех уравнений системы (15) получаем следующие выражения для постоянных  $B, C, D$ :

$$\begin{aligned} B &= \chi_p r_1 \left( \frac{\chi}{\chi_0 \varepsilon_p} I_1(\chi_0 r_1) K_0(\chi_p r_1) + \right. \\ &\quad \left. + I_0(\chi_0 r_1) K_1(\chi_p r_1) \right), \\ C &= \chi_p r_1 \left( -\frac{\chi}{\chi_0 \varepsilon_p} I_1(\chi_0 r_1) I_0(\chi_p r_1) + \right. \\ &\quad \left. + I_0(\chi_0 r_1) I_1(\chi_p r_1) \right), \\ D &= B \frac{I_0(\chi_p r_2)}{F_0(\chi_0 r_2)} + C \frac{K_0(\chi_p r_2)}{F_0(\chi_0 r_2)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Последние формулы вместе с формулой (13) определяют собственные функции плазменного волновода.

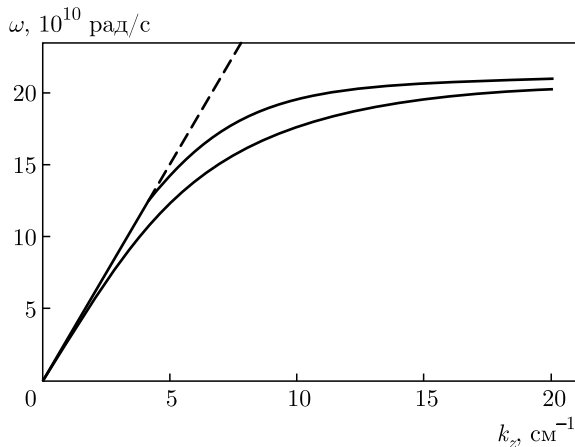


**Рис. 1.** Частоты поверхностных волн трубчатой плазмы «малой» плотности в волноводе. Штриховая линия — световая прямая  $\omega = k_z c$

Рассмотрим характерные численные примеры. Зафиксируем следующие параметры плазменного волновода:  $R = 2$  см,  $r_1 = 1$  см,  $r_2 = 1.2$  см, а плазму сначала возьмем небольшой плотности  $\omega_p = 30 \cdot 10^{10}$  рад/с. Дисперсионные кривые  $\omega(k_z)$  плазменных волн в области  $\omega < k_z c$  представлены на рис. 1. Видны две дисперсионные кривые, соответствующие двум поверхностным волнам трубчатой плазмы. Верхняя кривая в неинтересующую нас область  $\omega > k_z c$  не продолжена.

Поверхностные волны, дисперсионные кривые которых представлены на рис. 1 и которые будем называть низкочастотной и высокочастотной поверхностными волнами, различаются своими собственными функциями  $E(r)$ . Собственная функция высокочастотной поверхностной волны, рассчитанная в точке  $\omega = 17 \cdot 10^{10}$  рад/с и  $k_z = 6.72$  см $^{-1}$  дисперсионной кривой, представлена на рис. 2а. Из приведенного рисунка следует, что поляризованная плазма в высокочастотной поверхностной волне является двойным слоем, в котором заряды на внутренней и внешней границах плазменной трубки противоположны. На следующем рис. 2б изображена собственная функция низкочастотной поверхностной волны в точке  $\omega = 17 \cdot 10^{10}$  рад/с и  $k_z = 8.99$  см $^{-1}$ . Из этого рисунка следует, что в низкочастотной поверхностной волне плазменная трубка поляризована как простой слой.

В интересующем нас случае более плотной плазмы ( $\omega_p = 130 \cdot 10^{10}$  рад/с) наблюдается существенная особенность — разница между частотами высокочастотной и низкочастотной поверхностных волн стала весьма малой (рис. 3), что и понятно. Посколь-

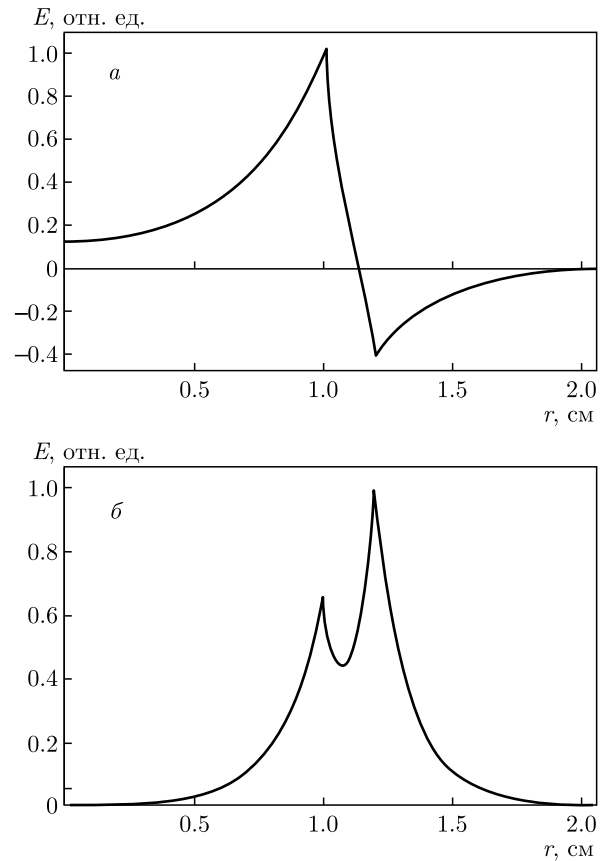


**Рис. 2.** Собственные функции высокочастотной (а) и низкочастотной (б) поверхностных волн в случае плазмы «малой» плотности

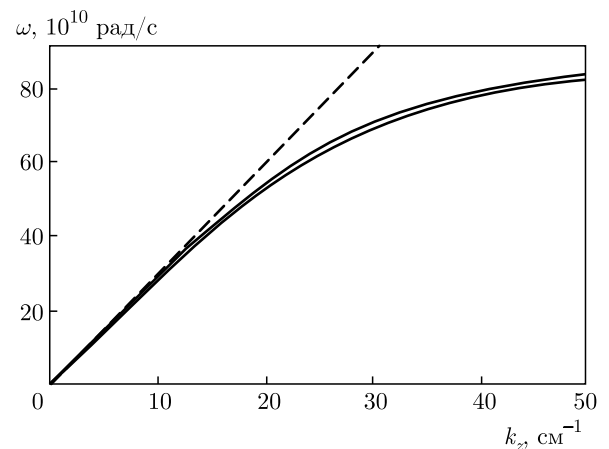


**Рис. 3.** Частоты поверхностных волн трубчатой плазмы «большой» плотности в волноводе

ку в случае плотной плазмы глубина проникновения поля в плазму меньше толщины плазмы ( $c/\omega_p \approx 0.02$  см,  $\delta_p = r_2 - r_1 = 0.2$  см), заряды на противоположных границах плазменной трубки мало влия-

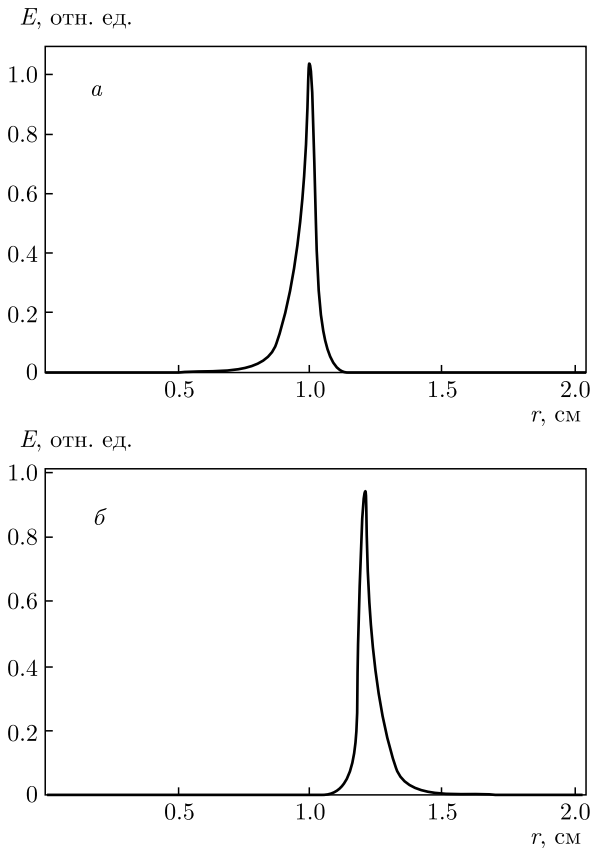


Рис. 4. Собственные функции высокочастотной (а) и низкочастотной (б) поверхностных волн в случае плазмы «большой» плотности

ют друг на друга. Поэтому характер поляризации плазмы не имеет большого значения.

Существенные изменения при большой плотности плазмы наблюдаются и в структуре собственной функции  $E(r)$ . На рис. 4а функция  $E(r)$  представлена в случае высокочастотной поверхностной волны ( $\omega = 70 \cdot 10^{10}$  рад/с и  $k_z = 29.8$  см $^{-1}$ ). Видно, что поле сосредоточено вблизи внутренней границы плазменной трубки, а значит, именно на этой границе локализованы поверхностные поляризационные заряды. Поле низкочастотной поверхностной волны, рассчитанное в точке  $\omega = 70 \cdot 10^{10}$  рад/с и  $k_z = 30.78$  см $^{-1}$  дисперсионной кривой, представлено на рис. 4б. Видно, что поле поверхностной волны сосредоточено вблизи внешней границы плазменной трубки.

Если в дисперсионном уравнении (17) положить  $k_z = \omega/u$ , то получится уравнение относительно частоты  $\omega$ , решения которого определяют возможные рабочие частоты плазменного излучателя на электронном пучке малой плотности (режим одно-

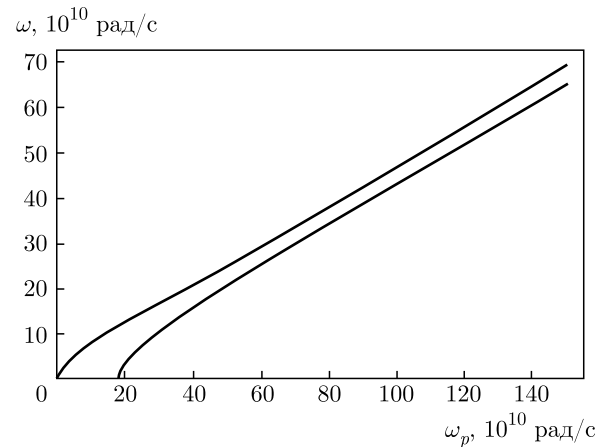


Рис. 5. Частоты одночастичного черенковского резонанса пучка с поверхностными волнами волновода с немагнитной трубчатой плазмой

частичного вынужденного эффекта Черенкова [18]). На рис. 5 приведены зависимости  $x$  этих частот для волновода с указанными выше радиусами и пучка со скоростью  $u = 2.6 \cdot 10^{10}$  см/с от плазменной частоты.

Из рис. 5 следует, что с точки зрения выполнимости условий черенковского резонанса различий между высокочастотной и низкочастотной поверхностными волнами волновода с плотной трубчатой плазмой фактически нет. Однако считать, что при увеличении плотности плазмы неустойчивости на этих волнах сливаются в некую единую неустойчивость, нельзя. Дело в том, что у высокочастотной и низкочастотной поверхностных волн существенно различаются собственные функции (рис. 4). Поэтому возбуждается электронным пучком всегда только какая-то одна волна. Если пучок проходит внутри плазменной трубки, причем достаточно близко к внутренней границе плазмы, то возбуждаться будет высокочастотная поверхностная волна. Если же пучок проходит вне плазменной трубки, то будет возбуждаться низкочастотная поверхностная волна.

#### 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНКРЕМЕНТОВ ПРОСТРАНСТВЕННОГО УСИЛЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НЕЗАМАГНИЧЕННОЙ ТРУБЧАТОЙ ПЛАЗМЫ

Рассмотрим геометрию плазменно-пучковой системы уже реализованную в экспериментах [19, 20]: бесконечно тонкий трубчатый электронный пучок проходит внутри плазменной трубки, т. е.  $r_b < r_1 < r_2 < R$ . Запишем решение уравнения (5) в виде

$$E(r) = \begin{cases} AI_0(\chi_0 r), & r < r_b, \\ BI_0(\chi_0 r) + CK_0(\chi_0 r), & r_b < r < r_1, \\ PI_0(\chi_p r) + QK_0(\chi_p r), & r_1 < r < r_2, \\ DF_0(\chi_0 r), & r_2 < r < R. \end{cases} \quad (20)$$

Подстановка решения (20) в граничные условия (6) и (10) приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} AI_0(\chi_0 r_b) - BI_0(\chi_0 r_b) - CK_0(\chi_0 r_b) &= 0, \\ AI_1(\chi_0 r_b) - BI_1(\chi_0 r_b) + CK_1(\chi_0 r_b) &= \\ &= -\frac{4\pi i}{\omega} \delta_b \chi_0 \langle j_b(r_b) \rangle, \\ BI_0(\chi_0 r_1) + CK_0(\chi_0 r_1) - \\ - PI_0(\chi_p r_1) - QK_0(\chi_p r_1) &= 0, \\ \chi_p (BI_1(\chi_0 r_1) - CK_1(\chi_0 r_1)) - \\ - \varepsilon_p \chi_0 (PI_1(\chi_p r_1) - QK_1(\chi_p r_1)) &= 0, \\ PI_0(\chi_p r_2) + QK_0(\chi_p r_2) - DF_0(\chi_0 r_2) &= 0, \\ \varepsilon_p \chi_0 (PI_1(\chi_p r_2) - QK_1(\chi_p r_2)) - \\ - \chi_p DF_1(\chi_0 r_2) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Из первых двух уравнений системы (21) находим

$$\begin{aligned} B &= A + \frac{4\pi i}{\omega} \delta_b r_b \chi_0^2 K_0(\chi_0 r_b) \langle j_b(r_b) \rangle, \\ C &= -\frac{4\pi i}{\omega} \delta_b r_b \chi_0^2 I_0(\chi_0 r_b) \langle j_b(r_b) \rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

Из последних двух уравнений системы (21) имеем

$$\begin{aligned} P &= D \frac{\chi_p r_2}{\varepsilon_p \chi_0} (\varepsilon_p \chi_0 K_1(\chi_p r_2) F_0 + \chi_p K_0(\chi_p r_2) F_1), \\ Q &= D \frac{\chi_p r_2}{\varepsilon_p \chi_0} (\varepsilon_p \chi_0 I_1(\chi_p r_2) F_0 - \chi_p I_0(\chi_p r_2) F_1). \end{aligned} \quad (23)$$

Подставляя далее (22) и (23) в третье и четвертое уравнения системы (21), получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} AI_0(\chi_0 r_1) - D \frac{\chi_p r_2}{\varepsilon_p \chi_0} S_0 &= -\frac{4\pi i}{\omega} \delta_b r_b \chi_0^2 T_0 \langle j_b(r_b) \rangle, \\ AI_1(\chi_0 r_1) - D r_2 S_1 &= -\frac{4\pi i}{\omega} \delta_b r_b \chi_0^2 T_1 \langle j_b(r_b) \rangle, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} T_0 &= I_0(\chi_0 r_1) K_0(\chi_0 r_b) - K_0(\chi_0 r_1) I_0(\chi_0 r_b), \\ T_1 &= I_1(\chi_0 r_1) K_0(\chi_0 r_b) + K_1(\chi_0 r_1) I_0(\chi_0 r_b). \end{aligned} \quad (25)$$

Окончательно из (24) находим выражение для амплитуды  $A$ , определяющее по формулам (20) и (3) поле в месте нахождения пучка:

$$A = \frac{W_0(\omega, k_z)}{D_0(\omega, k_z)} \frac{4\pi i}{\omega} \delta_b r_b \chi_0^2 \langle j_b(r_b) \rangle, \quad (26)$$

где

$$W_0(\omega, k_z) = \chi_p S_0 T_1 - \varepsilon_p \chi_0 S_1 T_0, \quad (27)$$

а  $D_0(\omega, k_z)$  — дисперсионная функция, определенная в (17).

Соотношение (26) можно рассматривать как уравнение возбуждения плазменного волновода электронным пучком. Если нет пучка (например,  $\delta_b = 0$ ), то не возбуждается и волновод, т. е.  $A = 0$ . Исключением является случай  $D_0(\omega, k_z) = 0$ , что как раз и является дисперсионным уравнением (17), определяющим собственные частоты волн плазменного волновода.

Подставляя в соотношение (26) выражение (12) и учитывая, что  $E(r_b) = AI_0(\chi_0 r_b)$ , получаем следующее дисперсионное уравнение для комплексных спектров исследуемого плазменного волновода с пучком:

$$D_0(\omega, k_z) = -\delta_b r_b \chi_0^2 I_0(\chi_0 r_b) W_0(\omega, k_z) \times \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2}. \quad (28)$$

Имея задачу исследовать пространственное усиление поверхностных волн в плазменном волноводе с пучком, будем решать уравнение (28) относительно комплексного волнового числа  $k_z(\omega)$  при вещественной частоте  $\omega$ . Полагая, как это обычно делается при черенковском взаимодействии пучков с волнами любой природы [11, 18]

$$k_z = \omega/u + \delta k, \quad |\delta k| \ll \omega/u, \quad (29)$$

преобразуем уравнение (28) к кубическому уравнению для комплексного коэффициента усиления  $\delta k$ :

$$\begin{aligned} \left( D_0(\omega, k_{z\omega}) + \frac{\partial D_0(\omega, k_{z\omega})}{\partial k_{z\omega}} \delta k \right) \delta k^2 &= \\ &= -\delta_b r_b \left( W'_0(\omega, k_{z\omega}) + \frac{\partial W'_0(\omega, k_{z\omega})}{\partial k_{z\omega}} \delta k \right) \times \\ &\times \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{u^2}, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $k_{z\omega} = \omega/u$ , а  $W'_0(\omega, k_z) = \chi_0^2 I_0(\chi_0 r_b) W_0(\omega, k_z)$ .

Пусть выполнено условие одночастичного черенковского резонанса (т. е. плазменная волна находится в черенковском резонансе с электроном [18, 21])

$$D_0(\omega, k_{z\omega}) = 0, \quad (31)$$

и плотность пучка настолько мала, что вторым слагаемым в скобках в правой части дисперсионного

уравнения (30) можно пренебречь. Тогда для комплексного коэффициента усиления на частоте одночастичного черенковского резонанса получаем следующее выражение:

$$\delta k(\omega_0) = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \frac{\omega_0}{u} \left| \delta_b r_b \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{\omega_0^2} \times \right. \\ \left. \times W'_0(\omega_0, k_0) \left( k_0 \frac{\partial D_0(\omega_0, k_0)}{\partial k_0} \right)^{-1} \right|^{1/3}, \quad (32)$$

где  $\omega_0$  — решение уравнения (31) (т. е. одна из частот, представленных на рис. 5), а  $k_0 = \omega_0/u$ . Коэффициент усиления (32) имеет обычную для любого одночастичного вынужденного эффекта Черенкова структуру. Условием применимости решения (32), т. е. условием одночастичности усиления, является неравенство

$$\left| \frac{1}{W'_0(\omega_0, k_0)} \frac{\partial W'_0(\omega_0, k_0)}{\partial k_0} \delta k(\omega_0) \right| \ll 1. \quad (33)$$

Последующие расчеты покажут, что левая часть (33) меньше единицы, хотя и незначительно (для тех параметров, которые, исходя из экспериментальных данных, мы выбрали при расчетах).

В принципе, уравнение (28) описывает и коллективный вынужденный эффект Черенкова на высокочастотной и низкочастотной поверхностных плазменных волнах. Действительно, используя выражения (17) и (27), преобразуем это уравнение к виду

$$D_0(\omega, k_z) D_b(\omega, k_z) = -\delta_b r_b \chi_0^2 \omega_b^2 \gamma^{-3} \theta(\omega, k_z), \quad (34)$$

где

$$D_b(\omega, k_z) = (\omega - k_z u)^2 - \Omega_b^2(\omega, k_z) \quad (35)$$

есть дисперсионное уравнение, определяющее частоты волн тонкого замагниченного электронного пучка в волноводе [2], а

$$\Omega_b^2(\omega, k_z) = \delta_b r_b \chi_0^2 \omega_b^2 \gamma^{-3} I_0^2(\chi_0 r_b) \times \\ \times \left( \frac{K_0(\chi_0 r_b)}{I_0(\chi_0 r_b)} - \frac{K_0(\chi_0 R)}{I_0(\chi_0 R)} \right), \\ \theta(\omega, k_z) = I_0^2(\chi_0 r_b) \left( \varepsilon_p \chi_0 S_1 I_0(\chi_0 r_1) \times \right. \\ \times \left( \frac{K_0(\chi_0 r_b)}{I_0(\chi_0 r_b)} - \frac{K_0(\chi_0 r_1)}{I_0(\chi_0 r_1)} + \right. \\ \left. + \frac{K_0(\chi_0 R)}{I_0(\chi_0 R)} \left( \frac{K_0(\chi_0 r_b)}{I_0(\chi_0 r_b)} - 1 \right) \right) + \\ + \chi_p S_0 I_1(\chi_0 r_1) \times \\ \times \left( \frac{K_0(\chi_0 r_b)}{I_0(\chi_0 r_b)} + \frac{K_1(\chi_0 r_1)}{I_1(\chi_0 r_1)} - \right. \\ \left. - \frac{K_0(\chi_0 R)}{I_0(\chi_0 R)} \left( \frac{K_0(\chi_0 r_b)}{I_0(\chi_0 r_b)} - 1 \right) \right) \Bigg). \quad (36)$$

Левая часть дисперсионного уравнения (34) записана в «канонической» форме уравнения связанных волн — волн плазмы и волн пучка [2]. Коэффициент связи волн содержится в величине  $\theta(\omega, k_z)$ , но выделить его аналитическое выражение, так же как и аналитические выражения для частот плазменных волн (аналогов  $\Omega_b$ ), не удастся.

При выполнении неравенства  $\Omega_b^2 \ll \omega^2 \sim |k_z u|^2$  спектр медленной волны плотности заряда пучка можно определить формулой<sup>1)</sup>

$$k_z^b(\omega) = k_{z\omega} \left( 1 + \frac{\Omega_b(\omega, k_{z\omega})}{\omega} \right). \quad (37)$$

Частота резонанса волн  $\omega_0^b$  определяется из уравнения  $D_0(\omega, k_z^b(\omega)) = 0$ . На резонансной частоте решение уравнения (34) ищется в виде

$$k_z(\omega_0^b) = k_0^b + \delta k, \quad (38)$$

где  $k_0^b = k_z^b(\omega_0^b)$ . Подставляя (38) в уравнение (34), находим следующее выражение для резонансного коэффициента усиления в режиме коллективного вынужденного эффекта Черенкова:

$$\delta k(\omega_0^b) = -i \left| \frac{1}{2} \delta_b r_b \chi_0^2 \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{u \Omega_b(\omega_0^b, k_0^b)} \times \right. \\ \left. \times \theta(\omega_0^b, k_0^b) \left( \frac{\partial D_0(\omega_0^b, k_0^b)}{\partial k_0^b} \right)^{-1} \right|^{1/2}. \quad (39)$$

Условием применимости решения (39), т. е. условием коллективности усиления, является неравенство

$$|\delta k(\omega_0^b) u| \ll \Omega_b(\omega_0^b, k_0^b). \quad (40)$$

Неравенство (40), по сути противоположное (33), при использованных в настоящей работе конкретных параметров системы выполнено не было.

Найдем теперь комплексные собственные функции плазменно-пучкового волновода. Эти функции, определяемые формулой (20), можно вычислить при помощи системы (21), полагая одну из амплитуд известной. Продемонстрируем менее громоздкий метод вычисления собственных функций  $E(r)$ . Запишем функцию

$$E(r) = \begin{cases} BI_0(\chi_0 r) + CK_0(\chi_0 r), & r < r_1, \\ PI_0(\chi_p r) + QK_0(\chi_p r), & r_1 < r < r_2, \\ DF_0(\chi_0 r), & r_2 < r < R, \end{cases} \quad (41)$$

<sup>1)</sup> Как известно [18, 22], неустойчивость и усиление имеют место только при резонансе плазменной волны с медленной волной пучка.

частично совпадающую с решением (20). Подстановка (41) в граничные условия на границах плазменной трубки дает следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} BI_0(\chi_0 r_1) + CK_0(\chi_0 r_1) - \\ - PI_0(\chi_p r_1) - QK_0(\chi_p r_1) = 0, \\ \chi_p (BI_1(\chi_0 r_1) - CK_1(\chi_0 r_1)) - \\ - \varepsilon_p \chi_0 (PI_1(\chi_p r_1) - QK_1(\chi_p r_1)) = 0, \\ PI_0(\chi_p r_2) + QK_0(\chi_p r_2) - DF_0(\chi_0 r_2) = 0, \\ \varepsilon_p \chi_0 (PI_1(\chi_p r_2) - QK_1(\chi_p r_2)) - \\ - \chi_p DF_1(\chi_0 r_2) = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Выражая из системы (42) постоянные  $C, P, Q, D$  через  $B$ , имеем

$$\begin{aligned} C &= B\Theta^{-1}[\chi_p I_1(\chi_0 r_1)(UI_0(\chi_p r_1) + \\ &+ VK_0(\chi_p r_1)) + \varepsilon_p \chi_0 I_0(\chi_0 r_1)(-UI_1(\chi_p r_1) + \\ &+ VK_1(\chi_p r_1))], \\ D &= B\Theta^{-1} \frac{\varepsilon_p}{r_1 r_2}, \quad P = D \frac{\chi_p r_2}{\varepsilon_p \chi_0} U, \\ Q &= D \frac{\chi_p r_2}{\varepsilon_p \chi_0} V, \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} U &= \chi_p F_1(\chi_0 r_2) K_0(\chi_p r_2) + \\ &+ \varepsilon_p \chi_0 F_0(\chi_0 r_2) K_1(\chi_p r_2), \\ V &= -\chi_p F_1(\chi_0 r_2) I_0(\chi_p r_2) + \\ &+ \varepsilon_p \chi_0 F_0(\chi_0 r_2) I_1(\chi_p r_2), \\ \Theta &= \chi_p K_1(\chi_0 r_1)(UI_0(\chi_p r_1) + VK_0(\chi_p r_1)) - \\ &- \varepsilon_p \chi_0 K_0(\chi_0 r_1)(-UI_1(\chi_p r_1) + VK_1(\chi_p r_1)). \end{aligned} \quad (44)$$

Если решение (41) справедливо вплоть до оси волновода  $r = 0$ , то должно быть  $C = 0$ , откуда и из (43) следует дисперсионное уравнение (17) плазменного волновода. Если есть пучок, то решение (41) справедливо только при  $r > r_b$ . При  $r < r_b$  решение записывается в виде  $E(r) = AI_0(\chi_0 r)$ , и из граничных условий (10) с учетом (12) следуют соотношения

$$\begin{aligned} AI_0(\chi_0 r_b) &= B(I_0(\chi_0 r_b) + C_1 K_0(\chi_0 r_b)), \\ B(I_1(\chi_0 r_b) - C_1 K_1(\chi_0 r_b)) - AI_1(\chi_0 r_b) &= \\ &= -\delta_b \chi_0 \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} AI_0(\chi_0 r_b), \end{aligned} \quad (45)$$

где  $C_1$  совпадает с первым выражением (43), взятым при  $B = 1$ . Из (45) получается дисперсионное уравнение (28) плазменного волновода с пучком. Если решение дисперсионного уравнения известно, то для

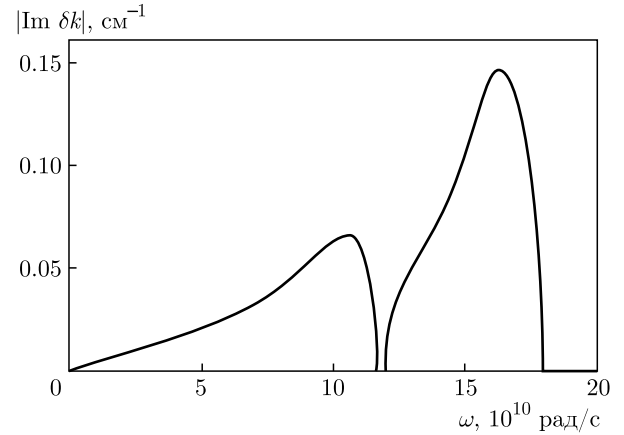


Рис. 6. Коэффициенты усиления поверхностных плазменных волн для случая плазмы «малой» плотности

построения собственной функции достаточно первого соотношения (45). Собственная функция определяется формулой

$$\begin{aligned} E(r) &= AI_0(\chi_0 r), \quad r < r_b, \\ E(r) &= A \frac{I_0(\chi_0 r_b)}{I_0(\chi_0 r_b) + C_1 K_0(\chi_0 r_b)} \times \\ &\times \begin{cases} I_0(\chi_0 r) + C_1 K_0(\chi_0 r), & r_b < r < r_1, \\ P_1 I_0(\chi_p r) + Q_1 K_0(\chi_p r), & r_1 < r < r_2, \\ D_1 F_0(\chi_0 r), & r_2 < r < R. \end{cases} \end{aligned} \quad (46)$$

Здесь  $C_1, P_1, Q_1, D_1$  — величины (43), взятые при  $B = 1$ .

Рассмотрим некоторые примеры вычисления коэффициентов усиления  $\text{Im } \delta k(\omega)$  и соответствующих собственных функций поверхностных волн в плазменных волноводах с пучком. Зафиксируем следующие параметры  $R = 2$  см,  $r_1 = 1$  см,  $r_2 = 1.2$  см,  $r_b = 0.9$  см,  $\delta_b = 0.1$  см,  $u = 2.6 \cdot 10^{10}$  см/с,  $\omega_b = 10^{10}$  рад/с и зададим, как и прежде, два значения плазменной частоты — низкую  $\omega_p = 30 \cdot 10^{10}$  рад/с и высокую  $\omega_p = 130 \cdot 10^{10}$  рад/с.

В случае  $\omega_p = 30 \cdot 10^{10}$  рад/с (рис. 6) наблюдаются две отдельные области усиления — низкочастотная и высокочастотная, в которых происходит усиление соответствующих поверхностных волн. На частотах максимального коэффициента усиления левая часть неравенства (33) была равна 0.64 на низкой частоте и 0.36 на высокой. Очевидно, что при этом говорить о реализации одночастичного вынужденного эффекта Черенкова в «чистом» виде не приходится. Хотя скорее всего механизм усиления преимущественно является одночастичным.

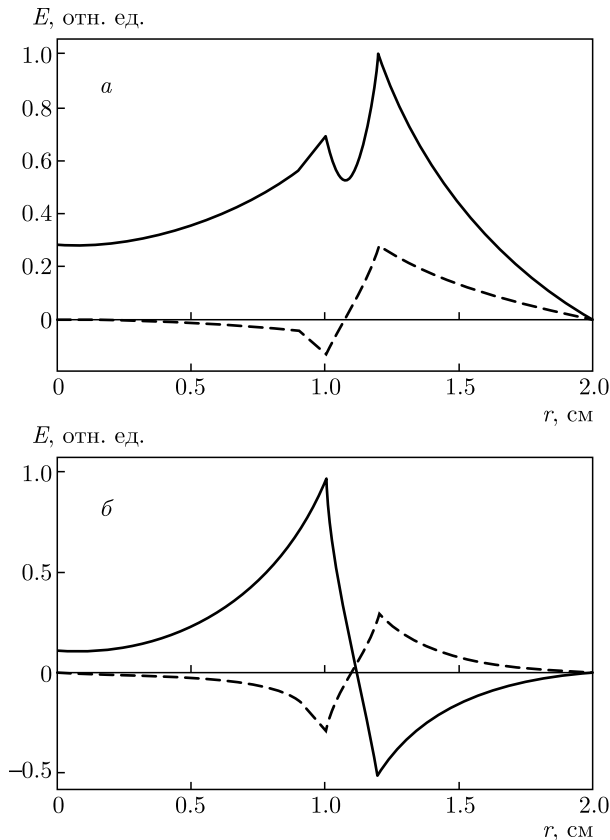


Рис. 7. Структуры поля поверхностных волн для случая «малой» плотности плазмы: *а* — низкочастотная волна, *б* — высокочастотная волна

Для вычисления соответствующих собственных функций необходимо в (46) подставить  $\omega$  и  $k_z$ , связанные дисперсионным уравнением плазменно-пучкового волновода. Пусть вещественная частота  $\omega$  из области усиления задана. Тогда из дисперсионного уравнения определяется комплексная величина  $k_z(\omega)$ . Как видно на рис. 6, максимум усиления в низкочастотной области приходится примерно на  $\omega = 10.3 \cdot 10^{10}$  рад/с, при этом  $k_z(\omega) \approx (3.99 - 0.066i)$  см $^{-1}$ . Результат вычисления собственной функции представлен на рис. 7*а* и вполне соответствует собственной функции низкочастотной поверхностной волны. Небольшой излом графика функции  $E(r)$  (особенно ее мнимой части — штриховая линия) приходится на координату пучка  $r_b = 0.9$  см. Максимум усиления в высокочастотной области приходится примерно на  $\omega = 16.3 \cdot 10^{10}$  рад/с, при этом  $k_z(\omega) \approx (6.55 - 0.149i)$  см $^{-1}$ . Соответствующий результат вычисления собственной функции представлен на рис. 7*б* и вполне соответствует собственной функции высокочастотной поверхностной волны.

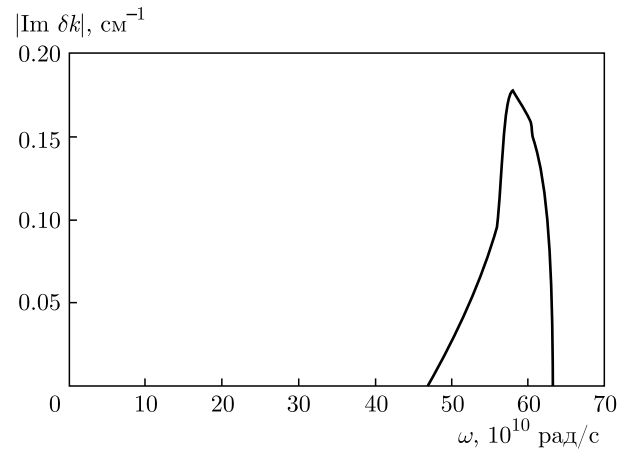


Рис. 8. Коэффициент усиления поверхностной плазменной волны для случая плазмы «большой» плотности

Совершенно иная картина наблюдается в случае плазмы «большой» плотности  $\omega_p = 130 \cdot 10^{10}$  рад/с (рис. 8). Имеется только одна частотная область усиления, причем весьма узкая. Это обусловлено совместным действием двух факторов: слиянием коэффициентов усиления из-за сближения резонансных частот и уменьшением коэффициента усиления одной из волн из-за того, что ее собственная функция в точке прохождения пучка мала. Вторым фактором является определяющим<sup>2)</sup>. Обращает на себя внимание факт достаточно большого коэффициента усиления — порядка  $0.2$  см $^{-1}$  в максимуме. Левая часть неравенства (33) составляет  $0.73$ , т.е. режим усиления, видимо, переходный от одночастичного к коллективному.

Согласно рис. 8 максимум усиления при  $\omega_p = 130 \cdot 10^{10}$  рад/с приходится на  $\omega = 58 \cdot 10^{10}$  рад/с, при этом  $k_z(\omega) \approx (22.4 - 0.18i)$  см $^{-1}$ . Подставляя эти значения в формулы (46), вычислим собственную функцию усиливаемой волны (рис. 9). Сравнивая этот рисунок с рис. 4, видим, что структура поля соответствует собственной функции высокочастотной поверхностной волны плотной плазмы — поле локализовано вблизи внутренней границы плазменной трубки (рис. 4*а*). Результаты расчетов показывают, что для выбранной геометрии плазменно-пучковой системы (пучок внутри плазменной трубки) при большой плотности плазмы всегда усиливает-

<sup>2)</sup> При очень большой плотности электронного пучка определяющим может оказаться фактор близости частот высокочастотной и низкочастотной поверхностных волн. При этом разложения левой части дисперсионного уравнения (28) с точностью до линейных по  $\delta k$  членов будет недостаточно. Требуется более сложное рассмотрение, которому мы предполагаем посвятить отдельную работу.

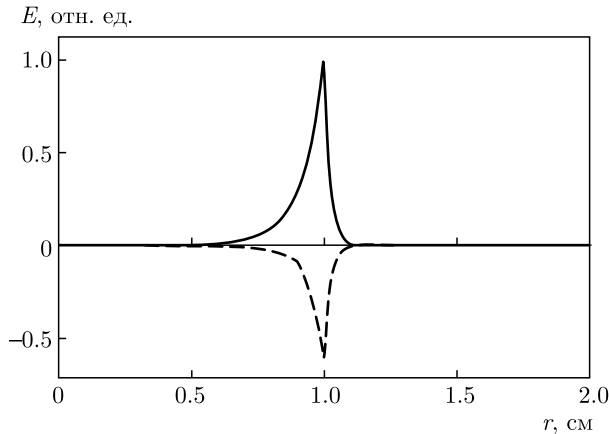


Рис. 9. Структура поля усиливаемой волны для случая «большой» плотности плазмы

ся высокочастотная поверхностная волна. Следует ожидать, что в случае электронного пучка, проходящего вне плазменной трубки, должна усиливаться поверхностная волна с собственной функцией типа представленной на рис. 4б.

### 5. НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЖИМ УСИЛЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ВОЛНОВОДЕ С НЕЗАМАГНИЧЕННОЙ ТРУБЧАТОЙ ПЛАЗМОЙ

В линейном приближении высокочастотная составляющая плотности тока пучка определяется формулой, аналогичной формуле (3) (см. (7) и (11)):

$$j_b(t, z; r_b) = \frac{1}{2} [\langle j_b(r_b) \rangle \exp(-i\omega t + ik_z z) + \text{с.с.}]. \quad (47)$$

Формулу (47) можно записать по-другому:

$$j_b(t, z; r_b) = \frac{1}{2} [\langle j_b(z; r_b) \rangle \exp(-i\omega t + ik_{z\omega} z) + \text{с.с.}], \quad (48)$$

где  $k_{z\omega} = \omega/u$  и введена медленная амплитуда, учитывающая нарастание возмущений за счет развития неустойчивости. В линейном приближении [23]

$$\langle j_b(z; r_b) \rangle = \sum_{n=1}^3 \alpha_n(\omega) \exp[i\delta k_n(\omega)z], \quad (49)$$

где  $\delta k_n(\omega)$  — корни кубического уравнения (30), а  $\alpha_n(\omega)$  — некоторые коэффициенты. Формула (48) справедлива и в нелинейном режиме, но для вычисления функции  $\langle j_b(z; r_b) \rangle$  требуются нелинейные уравнения.

Используя выражение  $E(r_b) = I_0(\chi_0 r_b)A$ , перепишем формулу (26) в виде

$$D_0(\omega, k_z)E(r_b) = \frac{4\pi i}{\omega} \delta_b r_b W'_0(\omega, k_z) \langle j_b(r_b) \rangle, \quad (50)$$

где  $W'_0(\omega, k_z)$  — функция, введенная в (30). Обобщением последней формулы на случай, когда амплитуда плотности тока пучка зависит от координаты  $z$ , является следующее псевдодифференциальное уравнение:

$$D_0(\omega, \hat{k}_z)E(z, r_b) = \frac{4\pi i}{\omega} \delta_b r_b W'_0(\omega, \hat{k}_z) \langle j_b(z; r_b) \rangle, \quad (51)$$

где  $\hat{k}_z = -id/dz$  — оператор волнового числа.

Операторным аналогом (29) являются выражения

$$\hat{k}_z = \frac{\omega}{u} - i \frac{d}{dz}, \quad \hat{k}_z^2 = \frac{\omega^2}{u^2} - 2i \frac{\omega}{u} \frac{d}{dz}, \quad (52)$$

в которых оператор дифференцирования действует только на медленные амплитуды. С использованием (52) псевдодифференциальное уравнение (51) можно свести к следующему дифференциальному уравнению:

$$D_0(\omega, k_{z\omega})E(z, r_b) - i \frac{\partial D_0(\omega, k_{z\omega})}{\partial k_{z\omega}} \frac{dE(z, r_b)}{dz} = \frac{4\pi i}{\omega} \delta_b r_b \times \\ \times \left( W'_0(\omega, k_{z\omega}) - i \frac{\partial W'_0(\omega, k_{z\omega})}{\partial k_{z\omega}} \frac{d}{dz} \right) \langle j_b(z; r_b) \rangle. \quad (53)$$

Уравнение (53) есть уравнение для зависящей от координаты  $z$  амплитуды напряженности поля  $E(z, r_b)$  волны, возбуждаемой током  $\langle j_b(z; r_b) \rangle$ . Плазма в этом уравнении фигурирует через диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_p$ , поэтому плазма описывается в линейном приближении, что общепринято в теории резонансных черенковских неустойчивостей электронных пучков в плазме [11, 24]. Условием применимости линейного приближения для плазмы является неравенство, приведенное в (29) [25–27].

Для вычисления в нелинейном режиме усредненной плотности тока пучка  $\langle j_b(z; r_b) \rangle$  используем метод интегрирования по начальным данным [25, 28], согласно которому функция  $j_b(t, z; r_b)$  в выражении (7) определяется формулой

$$j_b(t, z; r_b) = en_{0b}u \int \delta[t - T(z, t_0)] dt_0, \quad (54)$$

где  $n_{0b}$  — невозмущенная плотность электронов пучка,  $t_0$  — время влета электрона в область взаимодействия через плоскость  $z = 0$ , а  $T(z, t_0)$  — время, за

которое электрон, влетевший в момент времени  $t_0$ , окажется в точке  $z$ . Подставляя (54) в выражение (11), получаем

$$\langle j_b(z; r_b) \rangle = en_0 b u \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \exp \left( i\omega T(z, t_0) - i\frac{\omega}{u} z \right) dt_0. \quad (55)$$

Величина  $T(z, t_0)$  является решением уравнений движения, в которых в качестве независимой переменной выбрана координата  $z$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{1}{V}, \quad V \frac{dP}{dz} = eE_z(T, z, r_b), \quad (56)$$

где  $V(z, t_0)$  — скорость в точке  $z$  электрона, влетевшего в волновод в момент  $t_0$ ,  $P(z, t_0)$  — релятивистский импульс электрона пучка, а  $E_z(T, z, r_b)$  — поле (3) на траектории электрона. Уравнения (56) интегрируются со следующими условиями влета:

$$T(z=0) = t_0, \quad P(z=0) = mu\gamma. \quad (57)$$

Вводя изменение скорости электрона пучка

$$\tilde{V} = u - V, \quad (58)$$

считая, что  $|\tilde{V}| \ll u$  и используя выражение (3), преобразуем уравнения движения (56) к виду

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dz} &= \frac{1}{u} \left( 1 + \frac{\tilde{V}}{u} \right), \\ \frac{dP}{dz} &= \frac{e}{u} \frac{1}{2} \times \\ &\times \left[ E(z, r_b) \exp \left( -i\omega T(z, t_0) + i\frac{\omega}{u} z \right) + \text{c.c.} \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

Введем новую функцию

$$\tau(z, \tau_0) = T(z, t_0) - z/u, \quad \tau_0 = t_0 \quad (60)$$

и выразим импульс электрона пучка через изменение его скорости  $\tilde{V}(z, \tau_0)$ . Тогда выражение (55) преобразуется к виду

$$\langle j_b(z; r_b) \rangle = en_0 b u \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \exp(i\omega\tau(z, \tau_0)) d\tau_0, \quad (61)$$

а уравнения движения (59) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dz} &= \frac{\tilde{V}}{u^2}, \\ \frac{d\tilde{V}}{dz} &= -\frac{e}{mu\gamma^3} \left( 1 + 2\frac{u^2}{c^2} \gamma^2 \frac{\tilde{V}}{u} \right)^{3/2} \times \\ &\times \frac{1}{2} [E(z, r_b) \exp(-i\omega\tau(z, \tau_0)) + \text{c.c.}]. \end{aligned} \quad (62)$$

Граничные условия для уравнений (62) следуют из условий (57) и выражений (58) и (60) и имеют вид

$$\tau(z=0) = \tau_0, \quad \tilde{V}(z=0) = 0. \quad (63)$$

Уравнения (53) и (62) вместе с выражением (61) образуют замкнутую систему, описывающую усиление поверхностных плазменных волн в волноводе с немагнитической линейной трубчатой плазмой и тонким релятивистским электронным пучком. Помимо условий влета электронов пучка (63) система должна быть дополнена условием возбуждения волны на входе усилителя

$$E(z=0, r_b) = E_0. \quad (64)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \delta(\omega) &= \left| \delta_b r_b \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{\omega^2} W'_0(\omega, k_{z\omega}) \times \right. \\ &\times \left. \left( k_{z\omega} \frac{\partial D_0(\omega, k_{z\omega})}{\partial k_{z\omega}} \right)^{-1} \right|^{1/3}, \\ s &= \text{sign} \left[ W'_0(\omega, k_{z\omega}) \left( k_{z\omega} \frac{\partial D_0(\omega, k_{z\omega})}{\partial k_{z\omega}} \right)^{-1} \right], \\ \Delta(\omega) &= D_0(\omega, k_{z\omega}) \left( \delta(\omega) k_{z\omega} \frac{\partial D_0(\omega, k_{z\omega})}{\partial k_{z\omega}} \right)^{-1}, \\ d(\omega) &= \frac{\delta(\omega)}{W'_0(\omega, k_{z\omega})} k_{z\omega} \frac{\partial W'_0(\omega, k_{z\omega})}{\partial k_{z\omega}} \end{aligned} \quad (65)$$

и используем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\omega}{u} \delta(\omega) z, \quad \varepsilon(\xi) = \frac{eE(z, r_b)}{\delta^2(\omega) mu\omega\gamma^3}, \\ y_0 &= \omega\tau_0, \end{aligned} \quad (66)$$

$$y(\xi, y_0) = \omega\tau(z, \tau_0), \quad \eta(\xi, y_0) = \frac{\tilde{V}(z, \tau_0)}{\delta(\omega)u}.$$

В новых переменных нелинейные уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy(\xi, y_0)}{d\xi} &= \eta(\xi, y_0), \\ \frac{d\eta(\xi, y_0)}{d\xi} &= -(1 + \mu(\omega)\eta(\xi, y_0))^{3/2} \times \\ &\times \frac{1}{2} [\varepsilon(\xi) \exp(-iy(\xi, y_0)) + \text{c.c.}], \\ \frac{d\varepsilon(\xi)}{d\xi} + i\Delta(\omega)\varepsilon(\xi) &= -s \left( 1 - id(\omega) \frac{d}{d\xi} \right) \rho(\xi), \\ \rho(\xi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \exp(iy(\xi, y_0)) dy_0, \end{aligned} \quad (67)$$

где

$$\mu(\omega) = 2 \frac{u^2}{c^2} \gamma^2 \delta(\omega) \quad (68)$$

— параметр релятивизма электронного пучка. Уравнения (67) применимы во всем диапазоне частот, как в областях усиления поверхностных волн, так и вне зон усиления, где они описывают волны плотности заряда электронного пучка. Заметим, что частота  $\omega$  в величине  $\delta(\omega)$  из (65) может быть любой. В резонансе, при  $\omega = \omega_0$ , величина  $\delta(\omega_0)$  определяет согласно формуле (32) резонансный коэффициент усиления при одночастичном вынужденном эффекте Черенкова пучка малой плотности. При других частотах уравнения (67) описывают динамику нерезонансной пучковой неустойчивости с пространственным инкрементом, определяемым дисперсионным уравнением (30), и, таким образом,  $\delta(\omega)$  просто обозначение.

Надо иметь в виду, что комплексная амплитуда  $E(z, r)$  не является в «чистом» виде амплитудой плазменной волны. В ней содержится вклад, обусловленный высокочастотным пространственным зарядом пучка. Чтобы разделить в уравнениях (67) вклады от пучка и плазмы в амплитуду поля  $\varepsilon(\xi)$  введем новую функцию:

$$\varepsilon'(\xi) = \varepsilon(\xi) - i s d(\omega) \rho(\xi). \quad (69)$$

После перехода к  $\varepsilon'(\xi)$  второе и третье уравнения системы (67) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\eta(\xi, y_0)}{d\xi} &= -(1 + \mu(\omega)\eta(\xi, y_0))^{3/2} \times \\ &\times (F_b(\xi, y_0) + F_p(\xi, y_0)), \quad (70) \\ \frac{d\varepsilon'(\xi)}{d\xi} + i\Delta(\omega)\varepsilon'(\xi) &= s[\Delta(\omega)d(\omega) - 1]\rho(\xi), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_b(\xi, y_0) &= \frac{1}{2} i s d(\omega) \times \\ &\times (\rho(\xi) \exp[-iy(\xi, y_0)] - \text{c.c.}), \quad (71) \\ F_p(\xi, y_0) &= \frac{1}{2} (\varepsilon'(\xi) \exp[-iy(\xi, y_0)] + \text{c.c.}). \end{aligned}$$

В правой части первого уравнения (70) в явном виде выделены сила высокочастотного пространственного заряда пучка  $F_b(\xi, y_0)$  и сила со стороны поля плазменной волны  $F_p(\xi, y_0)$ .

Из уравнений (70) несложно получить следующий первый интеграл:

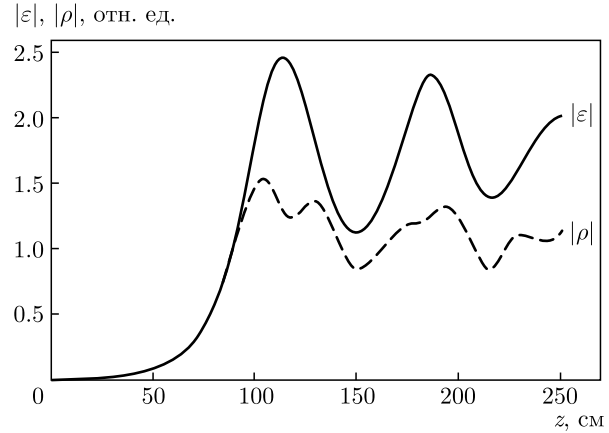


Рис. 10. Пространственная динамика амплитуд при усилении низкочастотной поверхностной волны в плазме «малой» плотности

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dy_0}{\sqrt{1 + \mu(\omega)\eta(\xi, y_0)}} - \\ - \frac{\mu(\omega)}{8} \frac{s}{\Delta(\omega)d(\omega) - 1} |\varepsilon'(\xi)|^2 = \\ = 1 - \frac{\mu(\omega)}{8} \frac{s}{\Delta(\omega)d(\omega) - 1} |\varepsilon'(\xi = 0)|^2, \quad (72) \end{aligned}$$

Определим эффективность пучково-плазменного взаимодействия как относительное изменение средней кинетической энергии электронов пучка

$$\text{КПД} = \frac{\gamma - \langle \gamma(\xi, y_0) \rangle}{\gamma - 1}, \quad (73)$$

где  $\gamma(\xi, y_0)$  — релятивистский фактор электрона, влетевшего в момент времени  $y_0$ , в точке  $\xi$  волновода, а угловые скобки означают усреднение по всем электронам, влетевшим в волновод за период  $2\pi/\omega$ . Выражая скорость электрона через безразмерную величину  $\eta(\xi, y_0)$ , преобразуем (73) к виду

$$\text{КПД} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dy_0}{\sqrt{1 + \mu(\omega)\eta(\xi, y_0)}} \right). \quad (74)$$

Используя далее интеграл (72), получим следующее выражение для эффективности усиления:

$$\begin{aligned} \text{КПД} &= -\frac{1}{8} \mu(\omega) \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{s}{\Delta(\omega)d(\omega) - 1} \times \\ &\times (|\varepsilon'(\xi)|^2 - |\varepsilon'(\xi = 0)|^2). \quad (75) \end{aligned}$$

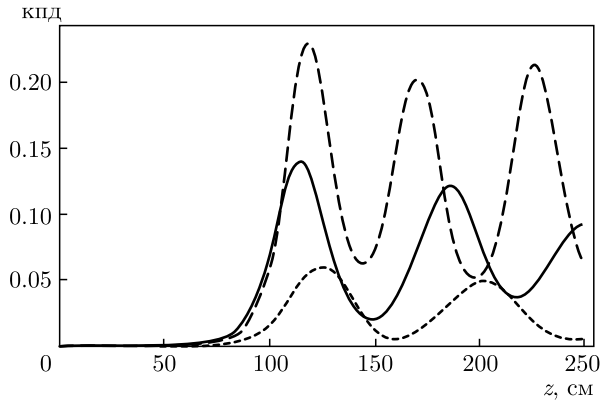


Рис. 11. Эффективности усиления низкочастотной поверхностной волны в случае плазмы «малой» плотности: сплошная кривая — на частоте максимального усиления; штриховая — на несколько большей частоте; пунктирная — на несколько меньшей частоте

Рассмотрим теперь результаты численного моделирования нелинейной динамики усиления. Ограничимся системами с теми же параметрами, что и в линейном приближении. Начнем со случая  $\omega_p = 30 \cdot 10^{10}$  рад/с и усиления низкочастотной поверхностной волны на частоте максимального усиления  $\omega = 10.3 \cdot 10^{10}$  рад/с. На рис. 10 в зависимости от размерной координаты  $z$  показана пространственная динамика безразмерной амплитуды напряженности электрического поля  $|\varepsilon(z)|$  и амплитуды возмущения плотности заряда пучка  $|\rho(z)|$ . Если амплитуда напряженности поля приводится в относительных единицах, то амплитуда возмущения плотности пучка, в силу формул (54) и (55), фактически приведена в абсолютных единицах — абсолютное возмущение плотности есть  $n_{0b}|\rho(z)|$ . Поэтому при  $|\rho(z)| \lesssim 2$  возмущения плотности пучка близки к максимуму (пучок замодулирован полностью).

Динамика амплитуд такая же, как при известном явлении захвата электронов пучка плазменной волной [26], что свидетельствует в пользу того, что механизмом неустойчивости является именно одночастичный вынужденный эффект Черенкова. Заметим, что уравнения (70) в точности перейдут в «классические» уравнения, описывающие захват электронов пучка ленгмюровской волной [11, 27], если в уравнении для  $\eta(\xi, y_0)$  пренебречь силой высокочастотного пространственного заряда пучка  $F_b(\xi, y_0)$ . В нашем случае на стадии насыщения она примерно в четыре раза меньше силы со стороны плазменной волны.

На рис. 11 представлены результаты для эффективности усиления (75). На частоте максималь-

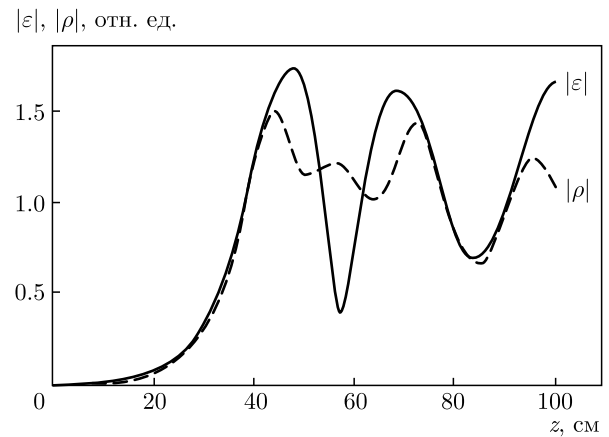


Рис. 12. Пространственная динамика амплитуд при усилении высокочастотной поверхностной волны в плазме «малой» плотности

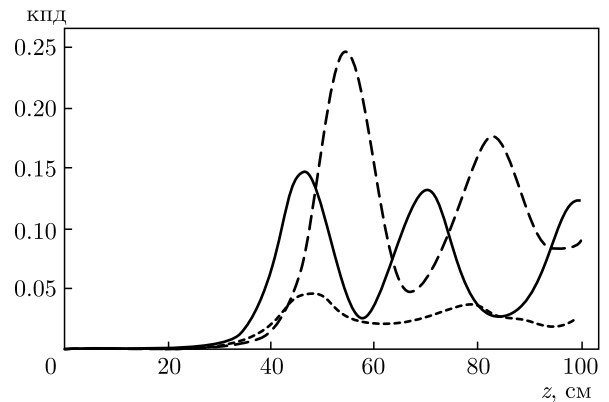


Рис. 13. Эффективности усиления высокочастотной поверхностной волны в случае плазмы «малой» плотности: сплошная кривая — на частоте максимального усиления; штриховая — на несколько большей частоте; пунктирная — на несколько меньшей частоте

ного усиления эффективность достигает 15%. На несколько большей частоте  $\omega = 11 \cdot 10^{10}$  рад/с эффективность существенно выше, что обусловлено большим значением скорости электронов пучка относительно скорости плазменной волны [11]. Однако при дальнейшем увеличении частоты усиление срывается, что обусловлено выходом частоты за верхнюю границу зоны усиления (рис. 6). При уменьшении частоты ( $\omega = 9.5 \cdot 10^{10}$  рад/с) эффективность падает.

Примерно так же выглядит усиление при  $\omega_p = 30 \cdot 10^{10}$  рад/с и высокочастотной поверхностной волны (рис. 12) на частоте максимального усиления  $\omega = 16.3 \cdot 10^{10}$  рад/с. Из-за увеличения коэффициента усиления нелинейное насыщение наступает

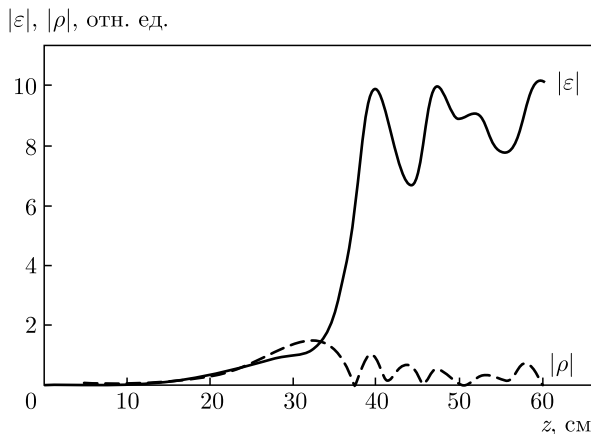


Рис. 14. Пространственная динамика амплитуд при усилении поверхностной волны в плазме «большой» плотности

на меньшем расстоянии при  $z \sim 55$  см. Динамика эффективностей усиления представлена на рис. 13. Прослеживаются примерно те же закономерности, что и при усилении низкочастотной поверхностной волны.

Наконец, рассмотрим усиление поверхностных волн в случае плотной плазмы  $\omega_p = 130 \cdot 10^{10}$  рад/с. В этом случае, как было установлено ранее, имеется всего одна область усиления. Пространственная динамика амплитуд на частоте максимального усиления  $\omega = 58 \cdot 10^{10}$  рад/с представлена на рис. 14. Виден существенно менее регулярный ход амплитуд волн на стадии после насыщения. Более того, после насыщения амплитуда возмущения плотности пучка резко уменьшается, что говорит об ином механизме нелинейного насыщения. Значительно возросла сила высокочастотного пространственного заряда пучка — силы  $F_b$  и  $F_p$  примерно сравнялись. Известно, что если сила пространственного заряда превышает силу со стороны поля излучаемой волны, то механизмом нелинейного насыщения является самозахват [11] или опрокидывание волны плотности заряда пучка. В случае рис. 14 самозахват проявляется несомненно.

Эффективность усиления на частоте  $\omega = 58 \cdot 10^{10}$  рад/с представлена на рис. 15. Отличительной особенностью является то, что при незначительном отклонении частоты  $\omega$  от частоты максимального усиления наблюдается резкое уменьшение эффективности, что связано как с малой шириной зоны усиления, так и с начинающим проявляться изменением механизма взаимодействия пучка с плазменной волной.

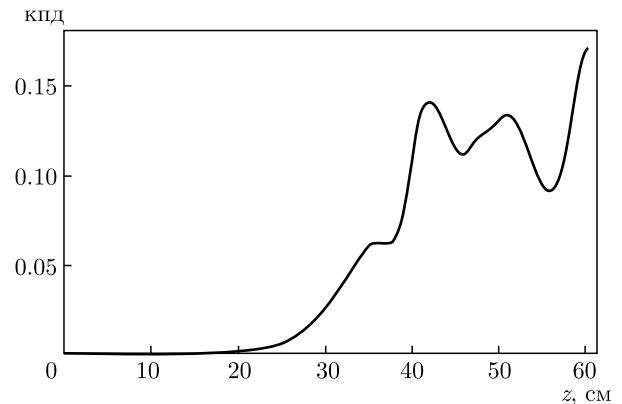


Рис. 15. Эффективность усиления поверхностной волны в случае плазмы «большой» плотности

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основываясь на приведенных выше результатах теоретических исследований, можно сделать следующий важный вывод: экспериментально реализованные на сегодняшний день мощные черенковские плазменные источники СВЧ-излучения могут быть успешно использованы для получения электромагнитного излучения с частотой в несколько раз, а то и на порядок, большей той частоты, на которую они были рассчитаны. Причем потребуются для этого минимальная доработка существующих экспериментальных установок — увеличение плотности плазмы, что легко реализуется технически и не связано с какими-либо дополнительными финансовыми вложениями. Фактически одно и то же устройство может быть одинаково эффективным в очень большом частотном диапазоне. Единственная экспериментальная трудность связана с тем, что при значительном увеличении частоты потребуются кардинальная и весьма затратная перестройка системы диагностики электромагнитного излучения. По-видимому, именно по этой причине на имеющихся экспериментальных установках не проводились исследования с плазмой очень большой плотности.

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность О. Т. Лозе, инициировавшему проведенные теоретические исследования, за полезные обсуждения и интерес к работе.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках Договора № 313/1689-Д от 16.09.2019 г. с ГК Росатом.

## ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Стрелков, УФН **189**, 494 (2019).
2. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, П. С. Стрелков, *Плазменная релятивистская СВЧ-электроника*, ЛЕНАНД, Москва (2018).
3. A. B. Buleyko, N. G. Gusein-zade, and O. T. Loza, Phys. Wave Phen. **26**, 317 (2018).
4. Д. К. Ульянов, Р. В. Баранов, О. Т. Лоза, С. Е. Ернылева, И. Л. Богданкевич, ЖТФ **83**, 113 (2013).
5. П. С. Стрелков, И. Е. Иванов, Е. Д. Диас Михайлова, Д. В. Шумейко, Физика плазмы **47**, 257 (2021).
6. A. B. Buleyko, A. V. Ponomarev, O. T. Loza, D. K. Ulyanov, and S. E. Andreev, Phys. Plasm. **28**, 023303 (2021).
7. A. B. Buleyko, A. V. Ponomarev, O. T. Loza, D. K. Ulyanov, K. A. Sharypov, S. A. Shunailov, and M. I. Yalandin, Phys. Plasmas **28**, 023304 (2021).
8. И. Л. Богданкевич, В. О. Литвин, О. Т. Лоза, Кр. сообщ. по физике **43**, 19 (2016).
9. S. E. Ernyleva and O. T. Loza, Phys. Wave Phen. **25**, 56 (2017).
10. V. O. Litvin and O. T. Loza, Phys. Wave Phen. **25**, 52 (2017).
11. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, *Электродинамика плотных электронных пучков в плазме*, ЛЕНАНД, Москва (2018).
12. М. В. Кузелев, Физика плазмы **28**, 544 (2002).
13. И. Н. Карташов, М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, Физика плазмы **35**, 194 (2009).
14. И. Н. Карташов, М. В. Кузелев, ЖЭТФ **156**, 355 (2019).
15. И. Н. Карташов, М. В. Кузелев, ЖЭТФ **158**, 738 (2020).
16. А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы*, Высшая школа, Москва (1988).
17. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, Труды института общей физики им. А. М. Прохорова **72**, 3 (2016).
18. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, УФН **152**, 285 (1987).
19. I. L. Bogandkevich, S. E. Andreev, N. G. Gusein-zade, and D. K. Ulyanov, J. Russ. Laser Res. **40**, 435 (2019).
20. С. Е. Андреев, И. Л. Богданкевич, Н. Г. Гусейн-заде, Д. К. Ульянов, Физика плазмы **45**, 645 (2019).
21. В. Л. Гинзбург, *Теоретическая физика и астрофизика*, Наука, Москва (1981).
22. М. В. Незлин, *Динамика пучков в плазме*, Энергоиздат, Москва (1982).
23. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, *Методы теории волн в средах с дисперсией*, Наука, Москва (2007).
24. А. А. Иванов, *Физика сильнонеравновесной плазмы*, Атомиздат, Москва (1977).
25. Ю. В. Бобылев, М. В. Кузелев, *Нелинейные явления при резонансных взаимодействиях электронных пучков с плазмой*, Наука, Москва (2008).
26. Р. И. Ковтун, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ **58**, 1709 (1970).
27. В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко, ЖЭТФ **60**, 1023 (1971).
28. Ю. В. Бобылёв, М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, Радиотехника и электроника **47**, 166 (2002).