ЖЭТФ, 2022, том 161, вып. 2, стр. 189–205

СИНГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ СПИНОРНОГО ПОЛЯ В КЭД С СИЛЬНЫМ ВНЕШНИМ ПОЛЕМ

А. И. Бреев [a*], ***С. П. Гаврилов*** [a,b**], ***Д. М. Гитман*** [a,c,d***]

[a] *Томский государственный университет*
634050, Томск, Россия

[b] *Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена*
191186, Санкт-Петербург, Россия

[c] *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук*
119991, Москва, Россия

[d] *Институт физики, Университет Сан-Паулу*
05508-090, Сан-Паулу, Бразилия

Поступила в редакцию 29 сентября 2021 г.,
после переработки 29 сентября 2021 г.
Принята к публикации 18 октября 2021 г.

Построены и исследованы сингулярные функции в КЭД сильного поля с двумя типами внешних электромагнитных полей, которые принципиально различны. Первый тип относится к классу так называемых t-потенциальных электрических ступеней (электрические поля включаются и выключаются в начальный и конечный моменты времени), а второй — к классу так называемых x-потенциальных электрических ступеней (не зависящие от времени электрические поля постоянного направления, которые сосредоточены в ограниченном пространстве). Первый тип (T-постоянное электрическое поле) представляет собой однородное электрическое поле, которое действует в течение конечного промежутка времени T, а второй (L-постоянное электрическое поле) — постоянное электрическое поле, ограниченное двумя обкладками конденсатора, разделенными большим расстоянием L. Для обоих случаев найдены in- и out-решения уравнения Дирака в терминах переменных светового конуса. При помощи этих решений строятся интегральные представления Фока – Швингера по собственному времени для всех сингулярных функций, которые обеспечивают непертурбативные (по отношению к внешнему полю) вычисления любых амплитуд переходов и средних значений всех физических величин. Рассматривая T-постоянное и L-постоянное поля как различные регуляризации постоянного однородного электрическом поля, можно показать их эквивалентность для достаточно больших T и L.

DOI: 10.31857/S0044451022020055

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая электродинамика (КЭД) идеально описывает процессы с взаимодействующими заряженными частицами и фотонами. КЭД с внешним электромагнитным полем представляет собой удобную модель для рассмотрения процессов с небольшим количеством данных частиц на фоне, создаваемом огромным количеством фотонов, совокупность которых при определенных обстоятельствах может быть описана полуклассически [1] и выглядит в модели как внешнее поле. Таким образом, в данной модели электромагнитное поле проявляется как внешнее классическое поле и фотоны, которые описываются чисто квантовым образом. Такая модель обычно называется КЭД сильного поля.

Внешнее поле в КЭД сильного поля не может трактоваться пертурбативно и должно учитываться точно, тогда как для процессов с заряженными частицами и фотонами можно построить теорию возмущений. В такой теории возмущений возникают процессы нулевого порядка без фотонов и процессы более высокого порядка с фотонами. Существенная и нетривиальная часть КЭД сильного

* E-mail: breev@mail.tsu.ru
** E-mail: gavrilovsergeyp@yahoo.com
*** E-mail: dmitrygitman@hotmail.com

поля связана с процессами нулевого порядка. Рождение частиц из вакуума сильными электрическими внешними полями (эффект Швингера [2], привлекающий внимание уже давно, или, другими словами, нестабильность вакуума), по сути, является проявлением процессов нулевого порядка. Для зависящих от времени внешних электрических полей, которые включаются и выключаются в начальный и конечный моменты времени, теория возмущений с учетом радиационных поправок и с точным учетом взаимодействия с сильным внешним полем была развита в работах [3]. Данные внешние поля постоянного направления называются t-электрическими ступеньками (далее — t-ступеньками). А теория возмущений использует существенно специальные наборы точных решений уравнения Дирака для соответствующих t-ступенек (примеры, когда такие решения могут быть найдены и все вычисления могут быть выполнены аналитически, мы называем точно решаемыми случаями). Она включает в себя технику расчета процессов нулевого порядка, модифицированные правила Фейнмана для расчета амплитуд рассеяния с заряженными частицами и фотонами и теорию возмущений для расчета средних значений. Для простоты эффекты рождения частиц обычно рассматриваются в однородных внешних электрических полях, зависящих от времени.

Подходы к рассмотрению квантовых эффектов в КЭД сильного поля в t-ступеньках не применимы напрямую к КЭД сильного поля в не зависящих от времени электрических внешних полях постоянного направления, которые сосредоточены в ограниченной пространственной области, в так называемых x-ступеньках электрического потенциала (далее — x-ступеньках). В работе [4] был построен непертурбативный подход для расчета процессов нулевого порядка в КЭД сильного поля в x-ступеньках. Соответствующая техника основана на использовании специальных наборов точных решений уравнения Дирака в x-ступеньке. Эти решения представляют собой стационарные плоские волны с заданными продольными импульсами p^{L} и p^{R} в макроскопических областях слева и справа от x-ступеньки, соответственно (см. [4–6]). По аналогии с КЭД сильного поля в t-ступеньках можно построить теорию возмущений для КЭД сильного поля в критических x-ступеньках по радиационным поправкам и с точным учетом взаимодействия с сильным полем.

Сингулярные функции спинорного поля в соответствующих внешних полях (обобщающие известные сингулярные функции в стандартной КЭД, см. [7]) являются ключевыми элементами для построения теорий возмущений в КЭД сильного поля, как в t-ступеньках, так и в x-ступеньках. При этом амплитуды перехода и средние значения физических величин выражаются через причинный пропагатор (in–out-пропагатор) $S^c(X,X')$, так называемый in–in-пропагатор $S^c_{\mathrm{in}}(X,X')$ и out–out-пропагатор $S^c_{\mathrm{out}}(X,X')$. В свою очередь, данные сингулярные функции связаны с in- и out-вакуумом следующим образом:

$$
\begin{gathered}
S^c(X,X') = i\,\langle 0,\mathrm{out}|\,\hat{T}\hat{\Psi}(X)\times \\
\times\,\hat{\Psi}^\dagger(X')\gamma^0\,|0,\mathrm{in}\rangle \Big/ \langle 0,\mathrm{out}|0,\mathrm{in}\rangle\,, \\
S^c_{\mathrm{in}}(X,X') = i\,\langle 0,\mathrm{in}|\,\hat{T}\hat{\Psi}(X)\hat{\Psi}^\dagger(X')\gamma^0\,|0,\mathrm{in}\rangle\,, \\
S^c_{\mathrm{out}}(X,X') = i\,\langle 0,\mathrm{out}|\,\hat{T}\hat{\Psi}(X)\hat{\Psi}^\dagger(X')\gamma^0\,|0,\mathrm{out}\rangle\,.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Здесь $\hat{\Psi}(X)$ — оператор поля в представлении Гейзенберга, удовлетворяющий уравнению Дирака в соответствующем внешнем поле,

$$
X = (X^\mu) = (t,\mathbf{r}), \quad t = X^0, \quad \mathbf{r} = (X^k),
$$
$$
x = X^1, \quad \mu = 0,1,\ldots D, \quad k = 1,\ldots,D,
$$

$\hat{T}$ обозначает операцию хронологического упорядочения; $|0,\mathrm{in}\rangle$ и $|0,\mathrm{out}\rangle$ — начальный и конечный вакуум, соответственно.

Отметим, что, несмотря на то, что формальные представления (1) верны в КЭД сильного поля как в t-ступеньках, так и в x-ступеньках, in- и out-решения строятся по-разному, так же, как и операторы рождения и уничтожения и соответствующие вакуумные состояния.

Уравнение Дирака во внешнем электромагнитном поле заданным потенциалом $A_\mu(X)$ в d-мерном пространстве-времени имеет вид ($\hbar = c = 1$)

$$
(\gamma^\mu P_\mu - m)\,\psi(X) = 0,
$$
$$
P_\mu = i\partial_\mu - qA_\mu(X)\,,
$$

где $\psi(X)$ — $2^{[d/2]}$-компонентный спинор, γ^μ — матрицы Дирака,

$$
[\gamma^\mu,\gamma^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu}, \quad \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\underbrace{(1,-1,\ldots,-1)}_{d},
$$
$$
d = D+1\,,
$$

$q = -e$, $e > 0$ — заряд электрона, m — его масса.

Заметим, что в случае, когда вакуум нестабилен, все сингулярные функции (1) различны. Различия между функциями $S^c_{\mathrm{in}}(X,X')$, $S^c_{\mathrm{out}}(X,X')$ и причинным пропагатором $S^c(X,X')$ обозначаются через $S^p(X,X')$ и $S^{\bar{p}}(X,X')$,

$$
\begin{gathered}
S^p(X,X') = S^c_{\mathrm{in}}(X,X') - S^c(X,X')\,, \\
S^{\bar{p}}(X,X') = S^c_{\mathrm{out}}(X,X') - S^c(X,X')\,.
\end{gathered} \tag{2}
$$

Перестановочная функция

$$
\begin{aligned}
&S(X,X') = i[\hat{\Psi}(X), \hat{\Psi}^{\dagger}(X')\gamma^0]_+,\\
&S(X,X')|_{t=t'} = i\gamma^0\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),
\end{aligned} \tag{3}
$$

является важной характеристикой спинорного поля. Ее вид существенно зависит от структуры внешнего поля. В работах [3] сформулированы правила построения всех необходимых сингулярных функций в виде сумм по соответствующим точным решениям уравнения Дирака для t-ступенек. Те же идеи можно использовать для построения сингулярных функций в КЭД сильного поля в x-ступеньках.

В случае постоянного однородного электромагнитного поля причинный пропагатор электрона $S^c(X,X')$ был найден в явном виде как интеграл по собственному времени Фока – Швингера много лет назад [2]. Этот вид основывается на методе эффективного действия, см. [8]. Очевидно, что постоянное однородное электромагнитное поле — это идеализация, которая полезна для описания эффектов в медленно меняющихся и слабо неоднородных полях. Случай постоянного однородного электромагнитного поля рассматривается как приближение в ведущем порядке теоретико-полевых расчетов [9,10], т. е. приближения локально постоянного поля (см., например, работы [11–17] и ссылки в них).

Постоянное однородное электрическое поле можно рассматривать как предел T-постоянного электрического поля (однородное электрическое поле, которое действует в течение временного интервала T) большой длительности или как предел L-постоянного электрического поля (постоянного электрического поля, заключенного между двумя обкладками конденсатора, разделенными расстоянием L) большого пространственного масштаба. КЭД сильного поля для T-постоянного электрического поля и L-постоянного электрического поля описывает физически разные задачи. В этой работе мы получим явный вид для всех указанных выше сингулярных функций и покажем, что в пределе $T, L \to \infty$ оба подхода приводят к одним и тем же результатам.

В данной работе мы строим и исследуем спинорные сингулярные функции в КЭД сильного поля в T-постоянном электрическом поле и в КЭД сильного поля в L-постоянном электрическом поле. С этой целью в разд. 2 мы находим in- и out-решения уравнения Дирака в T-постоянном электрическом поле, используя переменные светового конуса. С помощью этих решений мы строим интегральные представления Фока – Швингера по собственному времени для всех сингулярных функций, которые обеспечивают непертурбативные (по отношению к внешнему полю) вычисления любых амплитуд переходов и средних значений любых физических величин. Эти представления получены для произвольной ориентации внешнего электрического поля, что нетривиальным образом обобщает результаты работ [18, 19]. В разд. 3 мы находим соответствующие наборы in- и out-решений уравнения Дирака в L-постоянном электрическом полем в переменных светового конуса. При помощи данных наборов мы строим интегральные представления Фока – Швингера для соответствующих спинорных сингулярных функций. Полученные результаты обсуждаются в разд. 4. Рассматривая вычисления в T-постоянном поле и L-постоянном поле как различные регуляризации соответствующих вычислений в постоянном однородном электрическом поле, мы показываем их эквивалентность для достаточно больших значений T и L.

2. СИНГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ В КЭД СИЛЬНОГО ПОЛЯ В T-ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

2.1. In- и out-решения

В данном разделе мы рассмотрим случай t-ступеньки, которая представляет собой T-постоянное электрическое поле, действующее в течение большого промежутка времени. T-постоянное поле является одной из возможных регуляризаций постоянного однородного электрического поля в пределе $T \to \infty$. Для построения спинорных сингулярных функций нам понадобятся два полных набора решений уравнения Дирака, in-решения $\{ {}_\zeta\psi_n(x)\}$ и out-решения $\{ {}^\zeta\psi_n(x)\}$ со специальной асимптотикой при $t \to -\infty$ и $t \to +\infty$, соответственно. Нижний индекс $\zeta = +$ асимптотически соответствует электронам, а $\zeta = -$ асимптотически соответствует позитронам. Поскольку явный вид искомых решений нетривиально зависит от ориентации электрического поля относительно оси x, ниже мы рассмотрим оба случая по отдельности.

Рассмотрим постоянное электрическое поле, которое имеет только одну ненулевую компоненту E_x вдоль оси x. Поле задается зависящим от времени электромагнитным потенциалом $A_\mu(X)$,

$$
A_\mu(X) = E_x t\delta^1_\mu,\ E_x = \kappa E, \quad \kappa = \pm 1, \quad E > 0\,. \tag{4}
$$

Случай $\kappa = -1$ был рассмотрен в работах [18, 19]. Отметим, что в случае $\kappa = +1$ направление поля совпадает с направлением поля в общей формулировке КЭД сильного поля в x-ступеньках, приведенной в [4].

Введем полный набор решений уравнения Дирака, имеющих следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\psi\left(X\right)=\left(\gamma P+m\right)\Phi\left(X\right), \quad X=\left(t,x,\mathbf{r}_{\perp}\right),\\
&\Phi\left(X\right)=\phi\left(t,x\right)\varphi_{\mathbf{p}_{\perp}}\left(\mathbf{r}_{\perp}\right)v_{\chi,\sigma},\\
&\varphi_{\mathbf{p}_{\perp}}\left(\mathbf{r}_{\perp}\right)=(2\pi)^{-(d-2)/2}\exp\left(i\mathbf{p}_{\perp}\mathbf{r}_{\perp}\right),\\
&\mathbf{r}_{\perp}=\left(X^{2},\ldots,X^{D}\right), \quad \mathbf{p}_{\perp}=\left(p^{2},\ldots,p^{D}\right),\\
&\boldsymbol{\gamma}_{\perp}=\left(\gamma^{2},\ldots,\gamma^{D}\right),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $v_{\chi,\sigma}$ — набор постоянных ортонорированных спиноров,

$$
\chi=\pm1, \quad \sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{[d/2]-1}), \quad \sigma_j=\pm1.
$$

Спиноры $v_{\chi,\sigma}$ удовлетворяют соотношениям

$$
\gamma^0\gamma^1 v_{\chi,\sigma}=\chi v_{\chi,\sigma}, \quad v^{\dagger}_{\chi,\sigma}v_{\chi',\sigma'}=\delta_{\chi,\chi'}\delta_{\sigma,\sigma'}.
$$

Фактически, функции (5) соответствуют состояниям с заданными импульсами $\mathbf{p}_{\perp}$ в направлении, перпендикулярном оси x. Квантовые числа χ и σ_j описывают поляризацию спина и обеспечивают удобную параметризацию решений. Поскольку в измерениях $(1+1)$ и $(2+1)$ ($d=2,\,3$) нет спиновых степеней свободы, квантовые числа σ отсутствуют. Заметим, что в размерностях $(2+1)$ существуют два неэквивалентных представления для γ-матриц, которые соответствуют разным сортам фермионов, которые параметризуются параметром $\chi=\pm1$. В d-измерениях для любых заданных импульсов существует только $J_{(d)}=2^{[d/2]-1}$ различных состояний спина. Причем решения (5), которые различаются только значениями χ, линейно зависимы. Без ограничения общности положим $\chi=1$ и введем обозначение $v_{\sigma}=v_{1,\sigma}$.

Скалярные функции $\phi(t,x)$ удовлетворяют уравнению

$$
\Big\{\partial_t^2-\partial_x^2+2ie\kappa Et\partial_x+ \\
+\Big[(eEt)^2-ie\kappa E+\mathbf{p}_{\perp}^2+m^2\Big]\Big\}\phi(t,x)=0. \tag{6}
$$

Рассмотрим решения уравнения Дирака с определенными значениями импульсов,

$$
\begin{aligned}
&\psi_n\left(X\right)=\left(\gamma P+m\right)\,\phi_n\left(t,x\right)\varphi_{\mathbf{p}_{\perp}}\left(\mathbf{r}_{\perp}\right)v_{\sigma},\\
&\phi_n\left(t,x\right)=e^{ip_x x}\phi_n(t), \quad n=\left(p_x,\mathbf{p}_{\perp},\sigma\right),\\
&p_x=p^1, \quad \hat{p}_x\psi_n\left(X\right)=p_x\psi_n\left(X\right), \quad \hat{p}_x=-i\partial_x.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Асимптотики решений (7) для $\kappa=-1$ и $\kappa=+1$ при $t\to\pm\infty$ были исследованы в работах [19] и [20], соответственно. Решения

$$
\begin{aligned}
&{}^{+}_{-}\phi_n\left(t,x\right)=C_n e^{ip_x x}D_{-\rho}\left[\pm(1+i)\xi\right], \ \kappa=+1,\\
&{}^{-}_{+}\phi_n\left(t,x\right)=\check{C}_n e^{ip_x x}D_{\rho-1}\left[\pm(1-i)\xi\right], \ \kappa=+1,\\
&{}^{-}_{+}\phi_n\left(t,x\right)=C_n e^{ip_x x}D_{\rho-1}\left[\pm(1-i)\xi\right], \ \kappa=-1,\\
&{}^{+}_{-}\phi_n\left(t,x\right)=\check{C}_n e^{ip_x x}D_{\rho-1}\left[\pm(1+i)\xi\right], \ \kappa=-1,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
&C_n=\left(4\pi eE\right)^{-1/2}e^{-\pi\lambda/8},\\
&\check{C}_n=\left(2\pi\lambda eE\right)^{-1/2}e^{-\pi\lambda/8},\\
&\rho=\frac{i}{2}\lambda+\frac{\kappa+1}{2},\\
&\xi=\frac{eEt-\kappa p_x}{\sqrt{eE}},\\
&\lambda=\frac{\mathbf{p}_{\perp}{}^2+m^2}{eE},
\end{aligned}
$$

уравнения (6) использованы для построения in-решений и out-решений. Будем говорить, что функции ${}_{\zeta}\phi_n(t,x)$ соответствуют in-решениям $\left\{{}_{\zeta}\psi_n\left(X\right)\right\}$, а функции ${}^{\zeta}\phi_n\left(t,x\right)$ соответствуют out-решениям $\left\{{}^{\zeta}\psi_n\left(X\right)\right\}$. В (8) функции $D_{\nu}(x)$ — функции параболического цилиндра. In- и out-решения ортонормированы относительно стандартного скалярного произведения,

$$
\begin{aligned}
&\left({}_{\zeta}\psi_n,{}_{\zeta}\psi_{n'}\right)=\left({}^{\zeta}\psi_n,{}^{\zeta}\psi_{n'}\right)=\delta(\mathbf{p}_{\perp}-\mathbf{p}'_{\perp})\delta(p_x-p'_x)\delta_{\sigma,\sigma'},\\
&(\psi,\psi')=\int\psi^{\dagger}\left(x\right)\psi'\left(x\right)d\mathbf{r},\\
&d\mathbf{r}=dx^1\ldots dx^D.
\end{aligned}
$$

Удобнее работать с решениями уравнения (6), которые зависят от координат на световом конусе

$$
x_{\pm}=t\pm x.
$$

Данные решения параметризуются набором квантовых чисел $n_-=(p_-,\mathbf{p}_{\perp},\sigma)$ и имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&{}^{+\kappa}_{-\kappa}\phi_{n_-}\left(t,x\right)=C_{n_-}\times\\
&\times\exp\left\{-ie\frac{\kappa E}{2}\left(\frac{1}{2}x_-^2-x^2\right)-\frac{i}{2}p_-x_+-\right.\\
&\left.-\frac{i}{2}\left[\kappa\lambda-2i\right]\ln\left[\frac{\mp\pi_-}{\sqrt{eE}}\exp\left(-\frac{i\pi}{2}\theta(\kappa)\right)\right]\right\},\\
&C_{n_-}=\left(4\pi eE\right)^{-1/2}\times\\
&\times\exp\left\{\frac{i}{4}\left[\left(2\lambda\log2+\pi\right)\kappa+\pi(1+i\lambda)\right]\right\},\\
&\lambda=\frac{\mathbf{p}_{\perp}^2+m^2}{eE}, \ \pi_-=p_-+e\kappa Ex_-.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Для удобства мы ввели следующее обозначение:

$$
{}^{+\kappa}_{-\kappa}\phi=\left\{\begin{array}{ll}{}^{+}_{-}\phi, & \kappa=+1,\\ {}^{-}_{+}\phi, & \kappa=-1,\end{array}\right.
$$

где ${}^{\zeta}\phi$ и ${}_{\zeta}\phi$ — различные наборы функций. Здесь p_- — импульс, принимающий непрерывные значения и являющийся собственным значением оператора $2i(\partial/\partial x_+)$. Знак $\pm\kappa$, отвечающий функциям ${}^{+\kappa}_{-\kappa}\phi_{n_-}(t,x)$, совпадает со знаком кинетического импульса π_- при $x_- \to \pm\infty$. Далее мы покажем, что состояния (9) необходимы для построения специальных асимптотик при $t \to \pm\infty$.

Наборы решений (9) и (8) связаны между собой интегральным преобразованием

$$
\begin{aligned}
&{}^{+\kappa}_{-\kappa}\phi_n(t,x) = \\
&= (2\pi eE)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} M^*(p_x,p_-)\,{}^{+\kappa}_{-\kappa}\phi_{n_-}(t,x)\,dp_-, \\
&M(p_x,p_-) = \\
&= \exp\left\{-\frac{i\kappa}{4eE}\left[(p_-+2p_x)^2 - 2(p_x)^2\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Обратное преобразование имеет вид

$$
\begin{aligned}
&{}^{+\kappa}_{-\kappa}\phi_{n_-}(t,x) = \\
&\quad = (2\pi eE)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} M(p_x,p_-){}^{+\kappa}_{-\kappa}\phi_n(t,x)\,dp_x.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Заметим, что в случае постоянного однородного электрического поля преобразования (10) и (11) были рассмотрены в работе [21].

Как мы упоминали выше, функциям ${}^{+\kappa}\phi_n(t,x)$ соответствуют out-решения ${}^{+\kappa}\psi_n(X)$, тогда как функциям ${}_{-\kappa}\phi_n(t,x)$ соответствуют in-решения ${}_{-\kappa}\psi_n(X)$. Преобразования (11) позволяют нам построить in- и out-решения ${}_{-\kappa}\psi_{n_-}(X)$ и ${}^{+\kappa}\psi_{n_-}(X)$ с квантовыми числами n_-, соответственно:

$$
{}^{+\kappa}_{-\kappa}\psi_{n_-}(X) = (\gamma P + m)\,{}^{+\kappa}_{-\kappa}\phi_{n_-}(t,x)\,\varphi_{\mathbf{p}_\perp}(\mathbf{r}_\perp)\,v_\sigma\,.
$$

На данном шаге мы введем два различных набора решений:

$$
\begin{aligned}
&\kappa = +1: \\
&\begin{cases}
{}_{+}\phi_{n_-}(t,x) = \theta(+\pi_-)\,{}^{+}\phi_{n_-}(t,x) g\left({}^{+}|_{+}\right), \\
{}^{-}\phi_{n_-}(t,x) = \theta(-\pi_-)\,{}_{-}\phi_{n_-}(t,x)\, g\left({}_{-}|^{-}\right),
\end{cases} \\
&\kappa = -1: \\
&\begin{cases}
{}^{+}\phi_{n_-}(t,x) = \theta(+\pi_-)\,{}_{+}\phi_{n_-}(t,x) g\left({}_{+}|^{+}\right), \\
{}_{-}\phi_{n_-}(t,x) = \theta(-\pi_-)\,{}^{-}\phi_{n_-}(t,x) g\left({}^{-}|_{-}\right),
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где $\theta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Мы можем проверить что выполняются следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
&(2\pi eE)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} M^*(p_x,p_-)\,{}^{-\kappa}_{+\kappa}\phi_{n_-}(t,x)\,dp_- = \\
&\qquad = {}^{-\kappa}_{+\kappa}\phi_n(t,x)\,.
\end{aligned}
$$

Функциям ${}^{-\kappa}\phi_n(t,x)$ соответствуют out-решения ${}^{-\kappa}\psi_n(X)$, тогда как функциям ${}_{+\kappa}\phi_n(t,x)$ соответствуют in-решения ${}_{+\kappa}\psi_n(X)$. Преобразования (11) позволяют нам построить in- и out-решения ${}_{+\kappa}\psi_{n_-}(X)$ и ${}^{-\kappa}\psi_{n_-}(X)$ с квантовыми числами n_-:

$$
{}^{-\kappa}_{+\kappa}\psi_{n_-}(X) = (\gamma P + m)\,{}^{-\kappa}_{+\kappa}\phi_{n_-}(t,x)\,\varphi_{\mathbf{p}_\perp}(\mathbf{r}_\perp)\,v_\sigma\,.
$$

Таким образом, мы построили in- и out-решения для двух различных направлений электрического поля, $\kappa = \pm 1$. Причем имеют место преобразования данных решений друг через друга:

$$
\begin{aligned}
{}^{\zeta}\psi_{n_-}(X) &= {}_{+}\psi_{n_-}(X)\, g\left({}_{+}|^{\zeta}\right) + {}_{-}\psi_{n_-}(X)\, g\left({}_{-}|^{\zeta}\right), \\
{}_{\zeta}\psi_{n_-}(X) &= {}^{+}\psi_{n_-}(X)\, g\left({}^{+}|_{\zeta}\right) + {}^{-}\psi_{n_-}(X)\, g\left({}^{-}|_{\zeta}\right).
\end{aligned}
$$

Здесь g-коэффициенты определяются соотношениями

$$
\begin{aligned}
g\left({}^{\zeta}|_{\zeta}\right) &= \frac{\sqrt{\pi\lambda}\exp(-\pi\lambda/4)}{\Gamma(1 - i\zeta\lambda/2)}, \\
g\left({}^{-}|_{+}\right) &= -g\left({}^{+}|_{-}\right) = \kappa\,\exp(-\pi\lambda/2)\,.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

2.2. Представления собственного времени

Используя представления сингулярных функций в виде некоторых сумм решений уравнения Дирака, построенных в работах [3,19], можно найти их представления по собственному времени. Таким образом, представления по собственному времени для сингулярных функций $S^p(X,X')$ и $S^{\bar p}(X,X')$ следуют из выражений

$$
\begin{aligned}
S^p(X,X') &= i\int_{-\infty}^{\infty} dp_- \times \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^{d-2}} d\mathbf{p}_\perp \sum_{\sigma=\pm 1} {}_{-}\psi_{n_-}(X) \times \\
&\quad \times \left[g\left({}_{+}|^{-}\right) g\left({}_{-}|^{-}\right)^{-1}\right]^{\dagger}\, {}_{+}\bar\psi_{n_-}(X')\,, \\
S^{\bar p}(X,X') &= -i\int_{-\infty}^{\infty} dp_- \times \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^{d-2}} d\mathbf{p}_\perp \sum_{\sigma=\pm 1} {}^{+}\psi_{n_-}(X) \times \\
&\quad \times \left[g\left({}_{+}|^{+}\right)^{-1} g\left({}_{+}|^{-}\right)\right]\, {}^{-}\bar\psi_{n_-}(X')\,.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Заметим, что сингулярные функции (14) в работе [19] были обозначены по-другому, а именно, как $-S^a(X,X')$ и $-S^p(X,X')$, соответственно. Учитывая (13) и (12), получим

$$
\begin{aligned}
&S^p(X,X') = \\
&= -\kappa \int_{-\infty}^{\infty} dp_-\theta(+\kappa\pi'_-)\,{}_+Y(X,X';p_-), \\
&S^{\bar{p}}(X,X') = \\
&= +\kappa \int_{-\infty}^{\infty} dp_-\theta(-\kappa\pi'_-)\,{}^{+\kappa}Y(X,X';p_-), \\
&{}_+Y(X,X';p_-) = \\
&= i\int_{\mathbb{R}^{d-2}} d\mathbf{p}_\perp \sum_\sigma {}_+\psi_{n_-}(X)\,{}_+\bar{\psi}_{n_-}(X'), \\
&{}^{+\kappa}Y(X,X';p_-) = \\
&= i\int_{\mathbb{R}^{d-2}} d\mathbf{p}_\perp \sum_\sigma {}^{+\kappa}\psi_{n_-}(X)\,{}^{+\kappa}\bar{\psi}_{n_-}(X').
\end{aligned}
\tag{15}
$$

В соответствии с работой [19], причинный пропагатор и перестановочная функция могут быть представлены в виде

$$
\begin{aligned}
&S^c(X,X') = (\gamma P + m)\Delta^c(X,X'), \\
&\Delta^c(X,X') = \int_{\Gamma_c} f(X,X';s)\,ds,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
&S(X,X') = (\gamma P + m)\Delta(X,X'), \\
&\Delta(X,X') = \operatorname{sgn}(t-t')\int_{\Gamma} f(X,X';s)\,ds,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где

$$\operatorname{sgn}(t-t') = \theta(t-t') - \theta(t'-t),$$

и функция

$$
\begin{aligned}
&f(X,X';s) = \exp\left(-e\kappa E\gamma^0\gamma^1 s\right) f^{(0)}(X,X';s), \\
&f^{(0)}(X,X';s) = -\left(\frac{-i}{4\pi}\right)^{d/2} \times \\
&\qquad\times \frac{eE}{s^{(d-2)/2}\sinh(eEs)} \times \\
&\times \exp\left[-ism^2 + ie\Lambda + \frac{i}{4s}\left|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp\right|^2 - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{i}{4}eE\coth(eEs)\left(y_0^2 - y_1^2\right)\right]
\end{aligned}
\tag{18}
$$

представляет собой ядро Фока–Швингера [2, 22]. Здесь и далее мы вводим четыре-вектор

$$y_\mu = X_\mu - X'_\mu, \quad y_0 = t - t', \quad y_1 = x' - x.$$

Функция $f(X,X';s)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению с начальным условием:

$$
\begin{aligned}
&-i\frac{d}{ds}f(X,X';s) = \left(P^2 - m^2 + ieE\gamma^0\gamma^1\right) f(X,X';s), \\
&\lim_{s\to\pm 0} f(X,X';s) = \pm i\,\delta(X-X').
\end{aligned}
$$

Заметим что только член Λ в (18) является калибровочно-зависимой величиной, которая может быть представлена в виде интеграла вдоль кривой, проходящей через точки X и X',

$$\Lambda = -\int_{X'}^{X} A_\mu(\tilde{X})\,d\tilde{X}^\mu . \tag{19}$$

В рассматриваемой калибровке электромагнитный потенциал $A_\mu(X)$ задается формулой (4), так что мы имеем

$$\Lambda = \kappa E y_1 (t + t')/2.$$

Контуры интегрирования показаны на рис. 1 и рис. 2. Контуры Γ_c и Γ_1 обходят снизу все особые точки на вещественной оси, кроме начала координат. Функция $f^{(0)}(X,X';s)$ имеет две особые точки $s_0 = 0$ и $eEs_1 = -i\pi$ на комплексной плоскости между контурами $\Gamma_c - \Gamma_1$ и $\Gamma_p - \Gamma_3$.

Контур Γ расположен в нижней части комплексной плоскости s в достаточно малой окрестности точки $s = 0$, а также соединяет точки $s = +0$ и $s = e^{-i\pi}0$. Заметим, что интеграл по контуру Γ в (17) может быть представлен как интеграл по контуру $\Gamma_c - \Gamma_2 - \Gamma_1$. Так как ядро $f(X,X';s)$ не имеет других особенностей в достаточно малой окрестности точки $s = 0$, то замыкание контура интегрирования $\Gamma_c - \Gamma_2 - \Gamma_1$ при $\operatorname{Re} s \to \pm\infty$, дает контур интегрирования Γ.

Заметим что представление (16) имеет форму представления Швингера [2]. Представление (17) обладает универсальной структурой присущей представлению собственного времени для перестановочной функции, см. [18]. Отсюда следует, что интеграл (17) удовлетворяет уравнению Дирака и начальному условию

$$S(X,X')|_{t=t'} = i\gamma^0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

В свою очередь, это показывает полноту двух наборов $\left\{{}_\pm\psi_{n_-}(x)\right\}$ и $\left\{{}^\pm\psi_{n_-}(x)\right\}$ на гиперповерхности $t = \text{const}$.

Следуя процедуре, указанной в работе [19], и учитывая что

$$\mathbf{E}\mathbf{y} = \kappa E y^1,$$

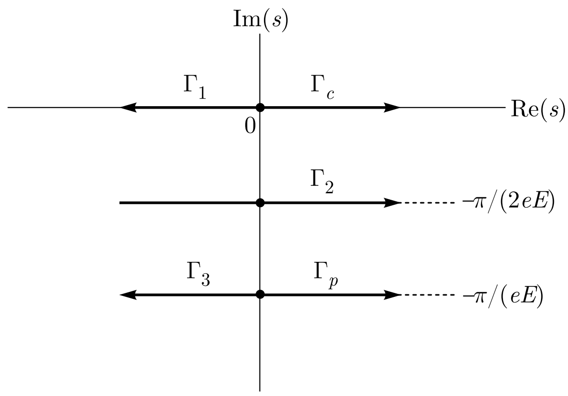

Рис. 1. Контуры интегрирования Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_c, Γ_p

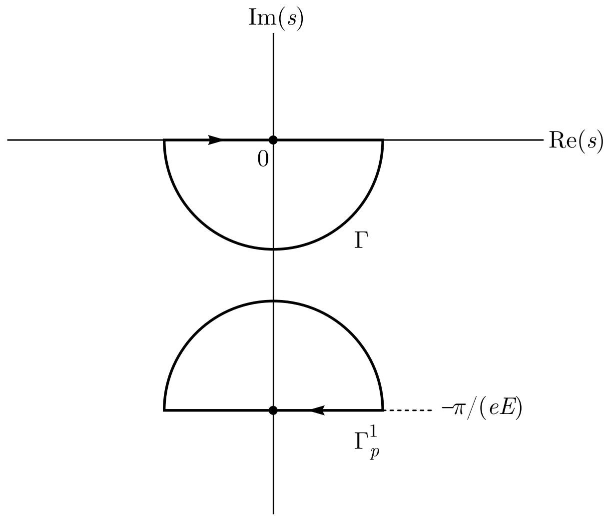

Рис. 2. Контуры интегрирования

мы можем представить сингулярные функции (15) в виде интегралов по собственному времени:

$$\begin{aligned}
&S^p(X,X') = (\gamma P + m)\Delta^p(X,X')\,, \\
&S^{\bar p}(X,X') = (\gamma P + m)\Delta^{\bar p}(X,X')\,, \\
&-\Delta^p(X,X') = \int\limits_{\Gamma_p} f(X,X';s)\,ds + \\
&\qquad + \theta\left(\mathbf{Ey}\right)\int\limits_{\Gamma_p^1} f(X,X';s)\,ds\,, \\
&-\Delta^{\bar p}(X,X') = \int\limits_{\Gamma_p} f(X,X';s)\,ds + \\
&\qquad + \theta\left(-\mathbf{Ey}\right)\int\limits_{\Gamma_p^1} f(X,X';s)\,ds\,.
\end{aligned} \tag{20}$$

Контур интегрирования Γ_p^1 (радиус которого стремится к нулю) соединяет точки

$$s = e^{-i\pi}0 - i\pi/\left(eE\right)$$

и

$$s = +0 - i\pi/\left(eE\right).$$

Заметим, что интеграл по контуру Γ_p^1 в (20) сводится к интегралу по контуру $\Gamma_2+\Gamma_3-\Gamma_p$, так как, замыкая контур интегрирования $\Gamma_2+\Gamma_3-\Gamma_p$ при $\operatorname{Re} s \to \pm\infty$, мы можем преобразовать его в контур Γ_p^1.

Используя (20), получаем представление по собственному времени для сингулярных функций $S^c_{\mathrm{in/out}}(X,X')$:

$$S^c_{\mathrm{in/out}}(X,X') = S^{p/\bar p}(X,X') + S^c(X,X')\,. \tag{21}$$

Представления (16), (17) и (20) могут быть записаны в ковариантной форме при помощи тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$, см. работы [18,19]. Например, для $d=4$ получим

$$\begin{aligned}
&f(X,X';s) = \\
&\quad = \exp\left(-\frac{e}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}s\right) f^{(0)}(X,X';s), \\
&f^{(0)}(X,X';s) = \frac{e^2 EB\exp\left(-ie\Lambda'\right)}{(4\pi)^2\sinh(eEs)\sin(eBs)} \times \\
&\qquad \times \exp\left[-im^2 s - i\frac{1}{4}yqF\coth(qFs)y\right], \\
&\Lambda' = -\int\limits_{X'}^{X}\left(A^E_\mu(\tilde X) + A^B_\mu(\tilde X)\right)d\tilde X^\mu\,,
\end{aligned} \tag{22}$$

где E и B — электрические и магнитные поля в $F_{\mu\nu}$, $A^E_\mu + A^B_\mu$ — потенциалы электрических (E) и магнитных (B) компонент тензора $F_{\mu\nu}$, соответственно. Интеграл в (22) берется вдоль кривой соединяющей точки X и X'.

Как следует из (18) и (20), для функций $S^{p,\bar p}(X,X')$ (а также для $S^c_{\mathrm{in/out}}(X,X')$), замена $E_x = E \to E_x = -E$ эквивалентна замене

$$x \to -x, \quad x' \to -x', \quad \gamma^1 \to -\gamma^1.$$

Причем проекция

$$\mathbf{Ey}/E = (E_x/E)y^1$$

вектора смещения

$$\mathbf{y} = (y^2,\ldots,y^D)$$

на направление поля и функция $f(X,X';s)$ не меняются. Это означает, что средний ток созданных частиц остается направленным вдоль электрического поля.

Заметим, что контуры интегрирования в представлениях собственного времени для причинного пропагатора и перестановочной функции нечувствительны к направлению электрического поля. Однако контуры интегрирования в представлениях собственного времени для сингулярных функций $S^{p,\bar{p}}(X,X')$ зависят от проекции $\mathbf{Ey}$. Это естественно, поскольку именно эти сингулярные функции определяют влияние внешнего электрического поля на электрические токи создаваемых частиц. Такое наблюдение невозможно было сделать из представлений, полученных в работах [18,19] для конкретного выбора системы координат.

3. СИНГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ В КЭД В L-ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

3.1. In- и out-решения

В этом разделе мы построим спинорные сингулярные функции в КЭД в L-постоянном электрическом поле. Данное поле имеет только одну ненулевую компоненту E_x вдоль оси x,

$$E_x\,(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -L/2] \cup [L/2, \infty), \\ E, & x \in S_{\rm int} = (-L/2, L/2), \end{cases} \quad L > 0.$$

Будем предполагать, что соответствующая потенциальная ступенька имеет достаточно большую высоту, $eEL \gg 2m$ (такая ступенька называется критической). В этом случае поле $E_x\,(x)$ и ведущие вклады в вакуумные средние можно рассматривать как макроскопические физические величины. В этом смысле L-постоянное электрическое поле является слабо неоднородным, и характеристики вакуумной нестабильности имеют некоторые универсальные особенности, см. [15]. Эффект рождения пар связан с наличием зоны Клейна. Подчеркнем, что в пределе $L \to \infty$ L-постоянное электрическое поле является одной из возможных регуляризаций постоянного однородного электрического поля.

Некоторые характеристики вакуумной нестабильности, в частности, деформации спинорных сингулярных функций в КЭД в L-постоянном электрическом полем при больших L, могут быть приближенно вычислены в КЭД с постоянным однородным электрическим полем. Последняя задача важна сама по себе, и ее решение в рамках последовательной формулировки КЭД [4] дается ниже, см. также результаты, полученные в работе [5] для L-постоянного электрического поля.

Выберем электромагнитные потенциалы, описывающие постоянное однородное электрическое поле E, направленное вдоль оси x, следующим образом:

$$A_0(X) = -Ex, \quad A_k(X) = 0\,. \tag{23}$$

Рассмотрим полный набор стационарных решений уравнения Дирака в электромагнитном поле (23) вида

$$\begin{gathered} \psi_{n_0}\,(X) = (\gamma P + m)\,\Phi_{n_0}\,(X)\,, \\ \Phi_{n_0}\,(X) = \varphi_{n_0}\,(t,x)\,\varphi_{\mathbf{p}_\perp}\,(\mathbf{r}_\perp)\,v_{\chi,\sigma}, \\ n_0 = (p_0, \mathbf{p}_\perp, \sigma), \\ \varphi_{n_0}\,(t,x) = (2\pi)^{-1/2}\exp\left(-ip_0 t\right)\varphi_{n_0}\,(x)\,, \end{gathered} \tag{24}$$

где $\varphi_{\mathbf{p}_\perp}\,(\mathbf{r}_\perp)$ и $v_{\chi,\sigma}$ даны в (5). В силу причин, описанных выше в разд. 2, выберем $\chi = 1$. Скалярные функции $\varphi_{n_0}\,(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка

$$\begin{gathered} \left\{\hat{p}_x^2 - iU'\,(x) - [p_0 - U\,(x)]^2 + \mathbf{p}_\perp^2 + m^2\right\} \times \\ \times\,\varphi_{n_0}\,(x) = 0, \\ U(x) = -eA_0(x)\,. \end{gathered} \tag{25}$$

Решения уравнения Дирака с хорошо определенными левыми и правыми асимптотиками обозначим как ${}_\zeta\psi_{n_0}\,(X)$ и ${}^\zeta\psi_{n_0}\,(X)$,

$$\begin{gathered} \hat{p}_x\ {}_\zeta\psi_{n_0}\,(X) = p^{\rm L}\ {}_\zeta\psi_{n_0}\,(X)\,,\ x \to -\infty,\ \zeta = \mathrm{sgn}(p^{\rm L}), \\ \hat{p}_x\ {}^\zeta\psi_{n_0}\,(X) = p^{\rm R}\ {}^\zeta\psi_{n_0}\,(X)\,,\ x \to +\infty\ ,\ \zeta = \mathrm{sgn}(p^{\rm R})\,. \end{gathered}$$

Решения ${}_\zeta\psi_{n_0}\,(X)$ и ${}^\zeta\psi_{n_0}\,(X)$ описывают асимптотически частицы с определенными импульсами $p^{\rm L}$ при $x \to -\infty$ и $p^{\rm R}$ при $x \to +\infty$, соответственно. Мы видим, что решения ${}_\zeta\psi_{n_0}\,(X)$ и ${}^\zeta\psi_{n_0}\,(X)$ имеют вид (24), при этом функции $\varphi_{n_0}\,(x)$ обозначены как ${}_\zeta\varphi_{n_0}\,(x)$ и ${}^\zeta\varphi_{n_0}\,(x)$, соответственно. Они имеют следующие асимптотики:

$$\begin{gathered} {}_\zeta\varphi_{n_0}\,(x) = {}_\zeta C\exp\left[ip^{\rm L}x\right], \quad x \to -\infty\,, \\ {}^\zeta\varphi_{n_0}\,(x) = {}^\zeta C\exp\left[ip^{\rm R}x\right], \quad x \to +\infty\,. \end{gathered}$$

Здесь ${}_\zeta C$ и ${}^\zeta C$ — нормировочные множители.

Решения ${}_\zeta\psi_{n_0}\,(X)$ и ${}^\zeta\psi_{n_0}\,(X)$ удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности на гиперповерхности $x = \mathrm{const}$:

$$\begin{gathered} \left({}_\zeta\psi_{n_0},\ {}_{\zeta'}\psi_{n'_0}\right)_x = \zeta\delta_{\zeta,\zeta'}\delta_{n_0,n'_0}, \\ \left({}^\zeta\psi_{n_0},\ {}^{\zeta'}\psi_{n'_0}\right)_x = -\zeta\delta_{\zeta,\zeta'}\delta_{n_0,n'_0}\,, \\ (\psi,\psi')_x = \int \psi^\dagger\,(X)\,\gamma^0\gamma^1\psi'\,(X)\;dt\,d\mathbf{r}_\perp\,, \\ \delta_{n_0,n'_0} = \delta_{\sigma,\sigma'}\delta\left(p_0 - p'_0\right)\delta\left(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{p}'_\perp\right)\,. \end{gathered} \tag{26}$$

Они выражаются друг через друга следующим образом:

$$\begin{aligned}
&{}^{\zeta}\psi_{n_0}(X) = \\
&= {}_{+}\psi_{n_0}(X)\tilde{g}\left({}_{+}\middle|{}^{\zeta}\right) - {}_{-}\psi_{n_0}(X)\tilde{g}\left({}_{-}\middle|{}^{\zeta}\right), \\
&{}_{\zeta}\psi_{n_0}(X) = \\
&= {}^{-}\psi_{n_0}(X)\,\tilde{g}\left({}^{-}|_{\zeta}\right) - {}^{+}\psi_{n_0}(X)\,\tilde{g}\left({}^{+}|_{\zeta}\right),
\end{aligned} \qquad (27)$$

где коэффициенты разложения определяются из соотношений

$$\left({}_{\zeta}\psi_{n_0},\ {}^{\zeta'}\psi_{n_0'}(X)\right)_x = \tilde{g}\left({}_{\zeta}\middle|{}^{\zeta'}\right)\delta_{n_0,n_0'},$$
$$\tilde{g}\left({}^{\zeta'}|_{\zeta}\right) = \tilde{g}\left({}_{\zeta}\middle|{}^{\zeta'}\right)^{*}.$$

Заметим, что коэффициенты $\tilde{g}$ отличаются от коэффициентов g, которые имеют место в КЭД в t-ступеньках, см. разд. 2. Коэффициенты $\tilde{g}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
&\left|\tilde{g}\left({}_{-}|^{+}\right)\right|^2 = \left|\tilde{g}\left({}_{+}|^{-}\right)\right|^2, \\
&\left|\tilde{g}\left({}_{+}|^{+}\right)\right|^2 = \left|\tilde{g}\left({}_{-}|^{-}\right)\right|^2, \\
&\frac{\tilde{g}\left({}_{+}|^{-}\right)}{\tilde{g}\left({}_{-}|^{-}\right)} = \frac{\tilde{g}\left({}^{+}|_{-}\right)}{\tilde{g}\left({}^{+}|_{+}\right)}, \\
&\left|\tilde{g}\left({}_{+}|^{-}\right)\right|^2 - \left|\tilde{g}\left({}_{+}|^{+}\right)\right|^2 = 1.
\end{aligned} \qquad (28)$$

Вернемся к решению уравнения (25), которое мы можем записать в виде

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 + i - \lambda\right]\varphi_{n_0}(x) = 0, \qquad (29)$$

$$\xi = \frac{eEx - p_0}{\sqrt{eE}},$$
$$\lambda = \frac{\mathbf{p}_\perp^2 + m^2}{eE}.$$

Общее решение уравнения (29) полностью определяется подходящей парой линейно независимых функций параболического цилиндра. А именно, парой

$$D_\rho[(1-i)\xi], \quad D_{-1-\rho}[(1+i)\xi]$$

или парой

$$D_\rho[-(1-i)\xi], \quad D_{-1-\rho}[-(1+i)\xi],$$

где

$$\rho = -i\lambda/2 - 1.$$

Учитывая асимптотические разложения функций параболического цилиндра, мы можем классифицировать решения по знаку импульсов p^{L} и p^{R}. В результате получим четыре набора решений уравнения (29):

$$\begin{aligned}
&{}_{+}\varphi_{n_0}(x) = \\
&= {}_{+}CD_{-1-\rho}[-(1+i)\xi] \propto e^{-i\xi^2/2}, \quad \xi \to -\infty, \\
&{}_{-}\varphi_{n_0}(x) = \\
&= {}_{-}C\,D_\rho[-(1-i)\xi] \propto e^{i\xi^2/2}, \quad \xi \to -\infty;
\end{aligned} \qquad (30)$$

$$\begin{aligned}
&{}^{+}\varphi_{n_0}(x) = \\
&= {}^{+}C\,D_\rho[(1-i)\xi] \propto e^{i\xi^2/2}, \quad \xi \to \infty, \\
&{}^{-}\varphi_{n_0}(x) = \\
&= {}^{-}C\,D_{-1-\rho}[(1+i)\xi] \propto e^{-i\xi^2/2}, \quad \xi \to \infty, \\
&{}^{-\zeta}C = {}_{\zeta}C = (eE)^{-1/2}\,e^{\pi\lambda/8} \times \\
&\qquad \times \left[\frac{\lambda}{2}(1+\zeta) + 1 - \zeta\right]^{-1/2}.
\end{aligned} \qquad (31)$$

Что позволяет нам построить соответствующие дираковские спиноры, которые являются in- и out-решениями:

$$\begin{aligned}
&\text{in-solutions:} \quad {}_{-}\psi_{n_0}(X),\ {}^{-}\psi_{n_0}(X), \\
&\text{out-solutions:} \quad {}_{+}\psi_{n_0}(X),\ {}^{+}\psi_{n_0}(X).
\end{aligned} \qquad (32)$$

Коэффициенты $\tilde{g}$ имеют вид

$$\tilde{g}\left({}_{-}|^{+}\right) = \tilde{g}\left({}_{+}|^{-}\right) = e^{\pi\lambda/2}. \qquad (33)$$

Согласно общей теории [4], дифференциальные средние числа рожденных пар определяются соотношением

$$N_{n_0}^{\mathrm{cr}} = \left|\tilde{g}\left({}_{+}|^{-}\right)\right|^{-2} = e^{-\pi\lambda}.$$

Действуя тем же образом, как и в разд. 2 при вычислении спинорных сингулярных функций (1) и (2), построим полные наборы решений уравнения Дирака с корректно определенными левыми и правыми асимптотиками в терминах переменных светового конуса $x_\pm = t \pm x$. С этой целью мы рассмотрим спиноры $\tilde{\psi}_{n_-}(X)$, параметризованные квантовыми числами $n_- = (p_-, p_\perp, \sigma)$:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\psi}_{n_-}(X) = (\gamma P + m)\,\Phi_{n_-}(X), \\
&\Phi_{n_-}(X) = \varphi_{n_-}(t,x)\,\varphi_{\mathbf{p}_\perp}(\mathbf{r}_\perp)\,v_\sigma,
\end{aligned} \qquad (34)$$

где функции $\varphi_{n_-}(t,x)$ удовлетворяют уравнению

$$\left\{\hat{p}_x^2 - iU'(x) - [\hat{p}_0 - U(x)]^2 + \mathbf{p}_\perp^2 + m^2\right\} \times$$
$$\times\,\varphi_{n_-}(t,x) = 0. \qquad (35)$$

Построим нестационарные решения уравнения (35). Заметим, что данное уравнение допускает интегралы движения $\hat{Y}_\alpha$, $\alpha = 0,1,2,3$, в классе линейных дифференциальных операторов первого порядка:

$$\hat{Y}_0 = ie, \quad \hat{Y}_1 = \partial_t, \quad \hat{Y}_2 = \partial_x + ieEt\,,$$
$$\hat{Y}_3 = x\partial_t + t\partial_x + \frac{ieE}{2}(t^2 + x^2)\,.$$

Операторы $\hat{Y}_\alpha$ образуют четырехмерную алгебру Ли $\mathcal{L}$, заданную ненулевыми коммутационными соотношениями:

$$[\hat{Y}_1, \hat{Y}_2] = E\,\hat{Y}_0, \quad [\hat{Y}_1, \hat{Y}_3] = \hat{Y}_2, \quad [\hat{Y}_2, \hat{Y}_3] = \hat{Y}_1\,.$$

Уравнение (35) представляет собой уравнение на собственные функции оператора Казимира

$$\hat{K} = 2E\,\hat{Y}_0\hat{Y}_3 - \hat{Y}_1^2 + \hat{Y}_2^2,$$

а именно,

$$\hat{K}\varphi_{n_-}(t,x) = \left(\mathbf{p}_\perp^2 + m^2\right)\varphi_{n_-}(t,x), \quad [\hat{K}, \hat{Y}_a] = 0\,.$$

Для построения полных наборов решений такого рода уравнений эффективно применение метода некоммутативного интегрирования [23–25], основанного на алгебре симметрии уравнения Дирака. Сначала определим неприводимое λ-представление алгебры Ли в пространстве функций от переменной $p_- \in (-\infty, +\infty)$ при помощи операторов

$$\ell_a(p_-, \partial_{p_-}, j), \quad \alpha = 0,1,2,3; \quad j \in (0,\infty),$$

получим

$$\ell_0(p_-, \partial_{p_-}, j) = ie\,,$$
$$\ell_1(p_-, \partial_{p_-}, j) = -eE\partial_{p_-} + \frac{i}{2}p_-\,,$$
$$\ell_2(p_-, \partial_{p_-}, j) = eE\partial_{p_-} + \frac{i}{2}p_-\,,$$
$$\ell_3(p_-, \partial_{p_-}, j) = -p_-\partial_{p_-} + ij - 1\,,$$
$$\ell_1^2(p_-, \partial_{p_-}, j) - \ell_2^2(p_-, \partial_{p_-}, j) -$$
$$- 2E\ell_0(p_-, \partial_{p_-}, j)\ell_3(p_-, \partial_{p_-}, j) = (2eE)j\,.$$

Интегрируя систему уравнений

$$\left[\hat{Y}_a + \ell_a(p_-, \partial_{p_-}, j)\right]\varphi_{n_-}(t,x) = 0$$

вместе с уравнением (35), получим алгебраическое уравнение $j = -\lambda/2$ и два его полных набора решений ${}_-\varphi_{n_-}$ и ${}^+\varphi_{n_-}$. Данные решения параметризуются набором квантовых чисел n_-:

$$\begin{aligned}{}^+_-\varphi_{n_-}(t,x) = C' \exp\Bigg[ie\frac{E}{2}\left(\frac{1}{2}x_-^2 - t^2\right) - \\ - \frac{i}{2}(\lambda - 2i)\ln\frac{\pm i\pi_-}{\sqrt{eE}} - \frac{i}{2}p_- x_+\Bigg]\,,\end{aligned} \quad (36)$$

$$\pi_- = p_- + eEx_-\,.$$

Квантовое число p_- является собственным значением оператора симметрии $i(\hat{Y}_1 + \hat{Y}_2)$:

$$i(\hat{Y}_1 + \hat{Y}_2)\,{}^+_-\varphi_{n_-}(t,x) = p_-\,{}^+_-\varphi_{n_-}(t,x)\,.$$

В этом случае решения уравнения Дирака имеют вид (34) с функциями (36):

$$\begin{aligned}{}^+_-\tilde{\psi}_{n_-}(X) &= (\gamma P + m)\,{}^+_-\Phi_{n_-}(X)\,,\\ {}^+_-\Phi_{n_-}(X) &= {}^+_-\varphi_{n_-}(t,x)\varphi_{\mathbf{p}_\perp}(\mathbf{r}_\perp)\,v_\sigma\,,\end{aligned} \quad (37)$$

Построим прямое и обратное интегральные преобразования, которые связывают функции (36) с функциями (30) и (31). Посмотрим на решения уравнения (25) вида

$$\begin{aligned}{}^+_-\varphi_{n_0}(t,x) = (2\pi eE)^{-1/2} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}^*(p_0, p_-)\,{}^+_-\varphi_{n_-}(t,x)\,dp_-,\end{aligned} \quad (38)$$

которые удовлетворяют уравнению

$$\hat{p}_0\,{}^+_-\varphi_{n_0}(t,x) = p_0\,{}^+_-\varphi_{n_0}(t,x)\,. \quad (39)$$

Подставляя (38) в (39) с учетом условия

$$\left[\partial_t - eE\partial_{p_-} + \frac{i}{2}p_-\right]\varphi_{n_-}(t,x) = 0\,,$$

видим, что функция $\tilde{M}(p_0, p_-)$ определяется как решение уравнения

$$-i\left(-eE\partial_{p_-} + \frac{i}{2}p_-\right)\tilde{M}(p_0, p_-) = p_0\tilde{M}(p_0, p_-)\,.$$

Выберем частное решение

$$\tilde{M}(p_0, p_-) = \exp\frac{i}{4eE}\left(p_-^2 - 4p_-p_0 + 2p_0^2\right)\,,$$

которое удовлетворяет условию ортогональности

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}^*(p_0, p_-)\tilde{M}(p_0, p_-')\,dp_0 = \\ = 2\pi eE\,\delta(p_- - p_-')\,.\end{aligned} \quad (40)$$

Запишем обратное преобразование

$$\begin{aligned}{}^+_-\varphi_{n_-}(t,x) = (2\pi eE)^{-1/2} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}(p_0, p_-)\,{}^+_-\varphi_{n_0}(t,x)\,dp_0\,.\end{aligned} \quad (41)$$

Для совместности преобразований (38) и (41), в выражениях (30), (31) положим

$$C' = 2^{i\lambda/4} e^{\pi\lambda/4} (4\pi eE)^{-1/2} .$$

Обратное преобразование (41) показывает, что функции ${}^{+}_{-}\varphi_{n_-}(t,x)$ выражаются через функции ${}^{+}_{-}\varphi_{n_0}(t,x)$ с хорошо определенными левыми и правыми асимптотиками.

Из преобразований (38) и (41) следуют соответствующие соотношения между решениями уравнения Дирака:

$$\begin{aligned} {}^{+}_{-}\psi_{n_0}(X) &= (2\pi eE)^{-1/2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}^*(p_0,p_-)\, {}^{+}_{-}\tilde{\psi}_{n_-}(X)\, dp_- , \\ {}^{+}_{-}\tilde{\psi}_{n_-}(X) &= (2\pi eE)^{-1/2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}(p_0,p_-)\, {}^{+}_{-}\psi_{n_0}(X)\, dp_0 , \end{aligned} \tag{42}$$

где ${}^{+}_{-}\psi_{n_0}(X)$ даны в (24) с функциями $\varphi_{n_0}(x)$, обозначенными как ${}^{+}_{-}\varphi_{n_0}(x)$, функции ${}^{+}_{-}\tilde{\psi}_{n_-}(X)$ даются выражением (37). Из второго преобразования в (42) и соотношения (40) следует, что спиноры ${}^{+}_{-}\tilde{\psi}_{n_-}(X)$ удовлетворяют условию ортогональности на гиперповерхности $x = \mathrm{const}$:

$$\left({}^{+}_{-}\tilde{\psi}_{n_-}, {}^{+}_{-}\tilde{\psi}_{n'_-}\right)_x = -\delta_{n_-,n'_-} .$$

В соответствии с (32), функции ${}^{+}\tilde{\psi}_{n_-}(X)$ описывают out-решения, а функции ${}_{-}\tilde{\psi}_{n_-}(X)$ — in-решения. Коэффициенты $\tilde{g}\left({}_{-}|{}^{+}\right)$ даны в (33) и не зависят от p_0 и p_-, а также связывают между собой наборы решений ${}^{+}_{-}\tilde{\psi}_{n_-}$.

При помощи (37) мы построили два полных и ортогональных набора решений $\left\{{}_{\pm}\tilde{\psi}_{n_-}(x)\right\}$ и $\left\{{}^{\pm}\tilde{\psi}_{n_-}(x))\right\}$ уравнения Дирака; дополнительные наборы решений выберем следующим образом:

$$\begin{aligned} {}^{-}\tilde{\psi}_{n_-}(X) &= -\theta(\pi_-)\, {}_{-}\tilde{\psi}_{n_-}(X)\, \tilde{g}\left({}_{-}|{}^{-}\right) , \\ {}_{+}\tilde{\psi}_{n_-}(X) &= -\theta(-\pi_-)\, {}^{+}\tilde{\psi}_{n_-}(X)\, \tilde{g}\left({}^{+}|{}_{+}\right) . \end{aligned} \tag{43}$$

Они могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} {}^{-}_{+}\tilde{\psi}_{n_-}(X) &= (\gamma P + m)\, {}^{-}_{+}\Phi_{n_-}(X) , \\ {}^{-}_{+}\Phi_{n_-}(X) &= {}^{-}_{+}\varphi_{n_-}(t,x)\varphi_{\mathbf{p}_\perp}(\mathbf{r}_\perp)\, v_{\chi,\sigma} , \\ {}^{-}_{+}\varphi_{n_-}(t,x) &= (2\pi)^{-1/2}\exp(-ip_0 t)\, {}^{-}_{+}\varphi_{n_-}(x) , \end{aligned} \tag{44}$$

где

$$\begin{aligned} {}^{-}\varphi_{n_-}(t,x) &= -\theta(\pi_-)\, {}_{-}\varphi_{n_-}(t,x)\tilde{g}\left({}_{-}|{}^{-}\right) , \\ {}_{+}\varphi_{n_-}(t,x) &= -\theta(-\pi_-)\, {}^{+}\varphi_{n_-}(t,x)\tilde{g}\left({}^{+}|{}_{+}\right) . \end{aligned} \tag{45}$$

Применяя интегральное преобразование типа (38) к решениям (45), получим

$$(2\pi eE)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}^*(p_0,p_-)\, {}^{-}\varphi_{n_-}(t,x)\, dp_- = \\ = {}^{-}\varphi_{n_0}(t,x) ,$$

$$(2\pi eE)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}^*(p_0,p_-)\, {}_{+}\varphi_{n_-}(t,x)\, dp_- = \\ = {}_{+}\varphi_{n_0}(t,x) .$$

Тогда

$$\begin{aligned} {}^{-}_{+}\psi_{n_0}(X) &= \\ &= (2\pi eE)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}^*(p_0,p_-)\, {}^{-}_{+}\tilde{\psi}_{n_-}(X)\, dp_- , \\ {}^{-}_{+}\tilde{\psi}_{n_-}(X) &= \\ &= (2\pi eE)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}(p_0,p_-)\, {}^{-}_{+}\psi_{n_0}(X)\, dp_0 , \end{aligned} \tag{46}$$

где ${}^{-}_{+}\psi_{n_0}(X)$ даны в (24), а функции $\varphi_{n_0}(x)$ обозначены как ${}^{-}_{+}\varphi_{n_0}(X)$. Функции ${}^{-}_{+}\tilde{\psi}_{n_-}(X)$ даны в (44).

Используя второе преобразование в (46) и соотношения (26), мы видим что выполняются соотношения ортогональности:

$$\left({}_{+}\tilde{\psi}_{n_-}, {}_{-}\tilde{\psi}_{n'_-}\right)_x = 0,$$

$$\left({}^{-}\tilde{\psi}_{n_-}, {}^{+}\tilde{\psi}_{n'_-}\right)_x = 0 .$$

Очевидно, что

$${}_{+}\tilde{\psi}_{n_-}(X) = 0, \quad \pi_- > 0,$$

$${}^{-}\tilde{\psi}_{n_-}(X) = 0, \quad \pi_- < 0 .$$

Используя (42) и (46) и учитывая, что коэффициенты $\tilde{g}'$ не зависят от p_0, из (27), находим

$$\begin{aligned} &{}_{+}\tilde{\psi}_{n_-}(X) = \tilde{g}\left({}_{+}|{}^{-}\right)^{-1} \times \\ &\times \left[{}_{-}\tilde{\psi}_{n_-}(X)\, \tilde{g}\left({}_{-}|{}^{-}\right) + {}^{-}\tilde{\psi}_{n_-}(X) \right] = 0,\ \pi_- > 0 , \\ &{}^{-}\tilde{\psi}_{n_-}(X) = \tilde{g}\left({}^{-}|{}_{+}\right)^{-1} \times \\ &\times \left[{}^{+}\tilde{\psi}_{n_-}(X)\, \tilde{g}\left({}^{+}|{}_{+}\right) + {}_{+}\tilde{\psi}_{n_-}(X) \right] = 0,\ \pi_- < 0 . \end{aligned}$$

Таким образом, соотношения (43) справедливы для всех $\tilde{g}\left({}_{-}|{}^{-}\right)$ и $\tilde{g}\left({}^{+}|{}_{+}\right)$, удовлетворяющих условиям (28).

Заметим, что подобные наборы решений уравнения Клейна–Гордона для скалярных частиц, находящихся между двумя обкладками конденсатора, получены в работе [26]. Эти решения связаны между собой при помощи интегральных преобразований, аналогичных преобразованиям (42) и (46).

3.2. Представления собственного времени

Спинорные сингулярные функции в КЭД в x-ступеньках определяются уравнениями (1), (2) и (3). В случае L-постоянного электрического поля их можно найти как суммы по построенным выше решениям, см. [4]. Отметим, что для $L\to\infty$ достаточно рассматривать суммы только в зоне Клейна. В этой зоне решения (30) и (31) удовлетворяют следующим соотношениям ортонормированности на гиперплоскости $t=\mathrm{const}$:

$$
\begin{aligned}
&\left({}_\zeta\psi_{n_0},\ {}_\zeta\psi_{n_0'}\right)=\left({}^\zeta\psi_{n_0},\ {}^\zeta\psi_{n_0'}\right)=\\
&\qquad=\delta_{\sigma,\sigma'}\delta(p_0-p_0')\delta(\mathbf{p}_\perp-\mathbf{p}'_\perp)\mathcal{M}_{n_0}\,,\\
&\left({}_\zeta\psi_{n_0},{}^\zeta\psi_{n_0'}\right)=0\,,\\
&(\psi,\psi')=\int\psi^\dagger(X)\,\psi'(X)\,d\mathbf{r}\,,\\
&\mathcal{M}_{n_0}=\left|\tilde g\left({}_+|^-\right)\right|^2=e^{\pi\lambda}\,.
\end{aligned}
$$

Тогда сингулярные функции можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
&S^c(X,X')\ =\\
&=\theta(t-t')\,S^-(X,X')-\theta(t'-t)\,S^+(X,X')\,,\\
&S^-(X,X')=i\sum_{n_0}\mathcal{M}_{n_0}^{-1}\times\\
&\quad\times\ {}^+\psi_{n_0}(X)\,\tilde g\left({}^+|_-\right)\tilde g\left({}^-|_-\right)^{-1}\ {}^-\bar\psi_{n_0}(X')\,,
\end{aligned}\tag{47}
$$

$$
\begin{aligned}
&S^+(X,X')=i\sum_{n_0}\mathcal{M}_{n_0}^{-1}\times\\
&\quad\times\ {}_-\psi_{n_0}(X)\,\tilde g\left({}_-|^+\right)\tilde g\left({}_+|^+\right)^{-1}\ {}_+\bar\psi_{n_0}(X')\,;\\
&S(X,X')=S^-(X,X')+S^+(X,X')\,;
\end{aligned}\tag{48}
$$

$$
\begin{aligned}
&S^c_{\mathrm{in/out}}(X,X')\ =\\
&=\theta(t-t')\,S^-_{\mathrm{in/out}}(X,X')-\theta(t'-t)\,S^+_{\mathrm{in/out}}(X,X')\,,\\
&S^-_{\mathrm{in/out}}(X,X')=\\
&=i\sum_{n_0}\mathcal{M}_{n_0}^{-1}\ {}^\mp\psi_{n_0}(X)\ {}^\mp\bar\psi_{n_0}(X')\,,\\
&S^+_{\mathrm{in/out}}(X,X')=i\sum_{n_0}\mathcal{M}_{n_0}^{-1}\ {}_\mp\psi_{n_0}(X)\ {}_\mp\bar\psi_{n_0}(X')\,,\\
&\bar\psi=\psi^\dagger\gamma^0\,.
\end{aligned}\tag{49}
$$

Используя соотношения (27), представим сингулярные функции $S^p(X,X')$ и $S^{\bar p}(X,X')$ в (2) следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&S^p(X,X')\ =\\
&=i\sum_{n_0}\mathcal{M}_{n_0}^{-1}\ {}_-\psi_{n_0}(X)\,\tilde g\left({}^-|_-\right)^{-1}\ {}^-\bar\psi_{n_0}(X')\,,\\
&S^{\bar p}(X,X')\ =\\
&=-i\sum_{n_0}\mathcal{M}_{n_0}^{-1}\ {}^+\psi_{n_0}(X)\,\tilde g\left({}_+|^+\right)^{-1}\ {}_+\bar\psi_{n_0}(X')\,.
\end{aligned}\tag{50}
$$

Подчеркнем, что если вакуум стабилен, то обе функции обращаются в нуль.

Используя (42), (46) и (43), получим следующие интегральные представления:

$$
\begin{aligned}
&S^-(X,X')=-i\sum_\sigma\int dp_-d\mathbf{p}_\perp\times\\
&\times\theta\left(+\pi'_-\right)e^{-\pi\lambda/2}\ {}^+\tilde\psi_{n_-}(X)\ {}_-\bar{\tilde\psi}_{n_-}(X')\,,\\
&S^+(X,X')=-i\sum_\sigma\int dp_-d\mathbf{p}_\perp\times\\
&\times\theta\left(-\pi'_-\right)e^{-\pi\lambda/2}\ {}_-\tilde\psi_{n_-}(X)\ \ {}^+\bar{\tilde\psi}_{n_-}(X')\,,
\end{aligned}\tag{51}
$$

$$
\begin{aligned}
&S^p(X,X')=-i\sum_\sigma\int dp_-d\mathbf{p}_\perp\times\\
&\times\theta\left(+\pi'_-\right)e^{-\pi\lambda}\ {}_-\tilde\psi_{n_-}(X)_-\ \bar{\tilde\psi}_{n_-}(X')\,,\\
&S^{\bar p}(X,X')=i\sum_\sigma\int dp_-d\mathbf{p}_\perp\times\\
&\times\theta\left(-\pi'_-\right)e^{-\pi\lambda}\ {}^+\tilde\psi_{n_-}(X)^+\ \bar{\tilde\psi}_{n_-}(X')\,.
\end{aligned}\tag{52}
$$

Учитывая (37) и (43) и выполнив суммирование по квантовым числам σ,

$$
\sum_\sigma v_{1,\sigma}v_{1,\sigma}^\dagger=\sum_\sigma(v_{1,\sigma}\otimes v_{1,\sigma}^\dagger)=\Xi_+=\frac{1}{2}\left(1+\gamma^0\gamma^1\right)\,,
$$

перепишем представление (51) следующим образом:

$$S^{\pm}(X,X') = \int \theta\left(\mp\pi'_-\right) Y^{(\pm)}(X,X';p_-)\,dp_-\,,$$

$$Y^{(\pm)}(X,X';p_-) = \frac{1}{4\pi}\left[\gamma^0 + \frac{(m-\gamma_\perp\hat{\mathbf{p}}_\perp)}{\pi_-}\right]\Xi_+ \times$$
$$\times\left[\gamma^0 + \frac{(m+\gamma_\perp\hat{\mathbf{p}}'^*_\perp)}{\pi'_-}\right]\gamma^0\,{}^-_+F\,,$$

$${}^-_+F = \frac{i}{(2\pi)^{d-2}} I_1 \exp\left\{\frac{i}{2}\left[eE\left(\frac{x_-^2-x_-'^2}{2}-t^2+t'^2\right) -\right.\right.$$
$$\left.\left. -\ p_-(x_+-x'_+)\right] - im^2\,{}^-_+a\right\}\,,$$

$$I_1 = \int \exp\left[-i\,{}^-_+ap_\perp^2 + i(\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}'_\perp)\mathbf{p}_\perp\right]\,d\mathbf{p}_\perp\,,$$

$${}^-_+a = \frac{1}{2eE}\left\{\ln\left(\mp i\tilde{\pi}_-\right) - \left[\ln\left(\pm i\tilde{\pi}'_-\right)\right]^*\right\}\,,$$

$$\tilde{\pi}_- = \pi_-/\sqrt{eE},\quad \tilde{\pi}'_- = \pi'_-/\sqrt{eE}\,.$$

Для комплексной переменной ${}^-_+a$ выберем главную ветвь логарифма:

$$\mathrm{Re}({}^-_+a) = \frac{1}{2eE}\ln\left|\frac{\pi_-}{\pi'_-}\right|,$$
$$\mathrm{Im}({}^-_+a) = \mp\frac{\pi}{2eE}\mathrm{sgn}(\pi_-)\theta(-\pi_-\pi'_-)\,.$$

Вычисляя гауссовый интеграл I_1, получим

$$
\begin{aligned}
&{}^-_+F(X,X';p_-) = i\left(\frac{-i}{4\pi\,{}^-_+a}\right)^{(d-2)/2} \times\\
&\times\exp\left\{-i\frac{\pi_-+\pi'_-}{4}y_+ + \right.\\
&\left. +\ ie\Lambda - i\,{}^-_+am^2 + \frac{i}{4\,{}^-_+a}\left|\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}'_\perp\right|^2\right\}\,,\\
&\Lambda = -Ey_0(x+x')/2\,,\quad y_\pm = x_\pm - x'_\pm.
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Учитывая данный результат, можно записать функции $S^{\pm}(X,X')$ в виде

$$
\begin{aligned}
&S^{\pm}(X,X') = \mp(\gamma P+m)\Delta^{\pm}(X,X')\,,\\
&\Delta^{\pm}(X,X') = \int dp_-\,\theta\left(\mp\pi'_-\right)\,{}^-_+f(X,X';p_-)\,,\\
&{}^-_+f(X,X';p_-) = \exp\left(-eE\gamma^0\gamma^1\,{}^-_+a\right)\,{}^-_+f^{(0)}\,,\\
&{}^-_+f^{(0)} = -\left(\frac{-i}{4\pi}\right)^{d/2}\left({}^-_+a\right)^{(2-d)/2}\times
\end{aligned}
\tag{54}
$$
$$\times\exp\left\{-i\,{}^-_+am^2 + \frac{i}{4\,{}^-_+a}\left|\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}'_\perp\right|^2 - i\frac{\pi_-+\pi'_-}{4}y_+ + \right.$$
$$\left. +\ ie\Lambda - \frac{1}{2}\left\{\ln\left(\mp i\pi_-\right) + \left[\ln\left(\mp i\pi'_-\right)\right]^*\right\}\right\}\,.$$

Полагая $y_-\neq 0$, выполним замену переменной $s = {}^-a$ в интеграле $\Delta^+(X,X')$ и замену переменной $s = {}_+a$ в интеграле $\Delta^-(X,X')$:

$$\Delta^+(X,X') = \int_{-\infty}^{+\infty}\theta\left(-\pi'_-\right)\,{}^-f(X,X';p_-)\,dp_- =$$
$$= \int_{\Gamma_c}\tilde{f}(X,X';s)\frac{eE\,ds}{\sinh(eEs)} -$$
$$-\ \theta(+y_-)\int_{\Gamma_c-\Gamma_2-\Gamma_1}\tilde{f}(X,X';s)\frac{eE\,ds}{\sinh(eEs)}\,,$$

$$\Delta^-(X,X') = \int_{-\infty}^{+\infty}\theta\left(+\pi'_-\right)\,{}_+f(X,X';p_-)\,dp_- =$$
$$= \int_{\Gamma_c}\tilde{f}(X,X';s)\frac{eE\,ds}{\sinh(eEs)} -$$
$$-\ \theta(-y_-)\int_{\Gamma_c-\Gamma_2-\Gamma_1}\tilde{f}(X,X';s)\frac{eE\,ds}{\sinh(eEs)}\,,$$

$$\tilde{f}(X,X';s)\ =$$
$$= -\left(\frac{-i}{4\pi s}\right)^{d/2}\frac{1}{s}\exp\left[-eE\gamma^0\gamma^1\ s + ie\Lambda - ism^2 + \right.$$
$$\left. +\ \frac{i}{4s}\left|\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}'_\perp\right|^2 - \frac{i}{4}eE\coth(eEs)\left(y_0^2-y_1^2\right)\right]\,.$$

Все контуры интегрирования показаны на рис. 1. Замыкая контур интегрирования $\Gamma_c-\Gamma_2-\Gamma_1$ на $\mathrm{Re}\,s\to\pm\infty$, преобразуем его в контур Γ (см. рис. 2).

В итоге получим

$$
\begin{aligned}
&S^{\pm}(X,X') = (\gamma P+m)\Delta^{\pm}(X,X')\,,\\
&\mp\Delta^{\pm}(X,X') = \int_{\Gamma_c} f(X,X';s)\,ds -\\
&\qquad -\theta(\pm y_-)\int_{\Gamma} f(X,X';s)\,ds\,.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

Ядро Фока–Швингера $f(X,X';s)$ дано выражением (18) с калибровочно-зависимым членом Λ в (53). Заметим, что этот член может быть представлен как интеграл по кривой (19), где в нашем случае потенциал $A_\mu(X)$ определяется выражением (23).

В работе [18], было показано что

$$\int_{\Gamma} F(X,X';s)\,ds = 0,\quad y_\mu y^\mu < 0\,,$$

откуда следует, что интегралы $\Delta^{\pm}(X,X')$ в (55) могут быть записаны следующим образом:

$$\mp\Delta^{\pm}(X,X') = \int\limits_{\Gamma_c} f(X,X';s)\,ds - \\ - \theta(\pm y_0)\int_{\Gamma} f(X,X';s)\,ds\,. \quad (56)$$

Таким образом, мы вывели интегральное представление Швингера (16) для причинного пропагатора (47) и продемонстрировали, что перестановочная функция (48) имеет универсальную структуру (17):

$$\begin{aligned} S^c(X,X') &= (\gamma P + m)\Delta^c(X,X'), \\ \Delta^c(X,X') &= \int\limits_{\Gamma_c} f(X,X';s)\,ds\,, \\ S(X,X') &= (\gamma P + m)\Delta(X,X'), \\ \Delta(X,X') &= \mathrm{sgn}(t-t')\int\limits_{\Gamma} f(X,X';s)\,ds\,. \end{aligned}$$

Фактически, приведенный выше результат представляет собой косвенное доказательство полноты построенных выше наборов решений на гиперплоскости t-const. Представление (56) верно для произвольных X и X', несмотря на то, что замена переменных в интеграле (54) проводилась при условии $y_- \neq 0$. Все это подтверждает, что представление (56) эквивалентно представлению (47).

Действуя аналогично, представим сингулярные функции $S^p(X,X')$ и $S^{\bar p}(X,X')$ в (52) следующим образом:

$$\begin{aligned} &S^p(X,X') = \int dp_-\,\theta\left(+\pi'_-\right)\tilde Y^{(-)}(X,X';p_-)\,, \\ &S^{\bar p}(X,X') = \int dp_-\,\theta\left(-\pi'_-\right)\tilde Y^{(+)}(X,X';p_-)\,, \\ &\tilde Y^{(\pm)}(X,X';p_-) = \frac{1}{4\pi}\left[\gamma^0 + \frac{(m-\gamma_\perp\hat{\mathbf p}_\perp)}{\pi_-}\right]\Xi_+\times \\ &\qquad\times\left[\gamma^0 + \frac{(m+\gamma_\perp\hat{\mathbf p}'^{*}_\perp)}{\pi'_-}\right]\gamma^0\,\tilde F^{(\pm)}\,, \\ &\tilde F^{(\pm)} = \frac{\pm i I_2}{(2\pi)^{d-2}}\exp\left\{\frac{i}{2}\left[eE\left(\frac{x_-^2-x_-'^2}{2}-t^2+t'^2\right) - \right.\right. \\ &\qquad\left.\left. - p_-(x_+-x'_+)\right] - i\left(b_\pm - \frac{i\pi}{2eE}\right)m^2\right\}\,, \\ &I_2 = \int\exp\left[-i\left(b_\pm - \frac{i\pi}{2eE}\right)p_\perp^2 + i(\mathbf r_\perp - \mathbf r'_\perp)\mathbf p_\perp\right]d\mathbf p_\perp\,, \\ &b_\pm = \left(\ln(\pm i\,\tilde\pi_-) - \left[\ln\left(\pm i\tilde\pi'_-\right)\right]^*\right)/(2eE)\,. \end{aligned}$$

Полагая $y_- \neq 0$, выполним в интеграле $S^p(X,X')$ замену переменных

$$s = b_- - i\pi/(2eE),$$

так что

$$\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2eE}\log\left|\frac{\pi_-}{\pi'_-}\right|\,, \\ \mathrm{Im}(s) = -\frac{\pi}{2eE}\left[\theta(+\pi_-) + \theta(-\pi_-)\right]\,,$$

а в интеграле $S^{\bar p}(X,X')$ — замену переменных

$$s = b_+ - i\pi/(2eE),$$

так что

$$\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2eE}\log\left|\frac{\pi_-}{\pi'_-}\right|\,, \\ \mathrm{Im}(s) = -\frac{\pi}{2eE}\left[\theta(-\pi_-) + \theta(-\pi'_-)\right]\,.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S^p(X,X') &= -\int\limits_{\Gamma_p} f(X,X';s)\,ds - \\ &\quad - \theta(-y_-)\int\limits_{\Gamma_2+\Gamma_3-\Gamma_p} f(X,X';s)\,ds\,, \\ S^{\bar p}(X,X') &= -\int\limits_{\Gamma_p} f(X,X';s)\,ds - \\ &\quad - \theta(+y_-)\int\limits_{\Gamma_2+\Gamma_3-\Gamma_p} f(X,X';s)\,ds\,. \end{aligned} \quad (57)$$

Замыкая контур интегрирования $\Gamma_2+\Gamma_3-\Gamma_p$ при $\mathrm{Re}\,s \to \pm\infty$ трансформируем его в контур Γ_p^1 (см. рис. 2) с радиусом, стремящимся к нулю:

$$\begin{aligned} S^p(X,X') &= (\gamma P + m)\Delta^p(X,X')\,, \\ \Delta^p(X,X') &= -\int\limits_{\Gamma_p} f(X,X';s)\,ds - \\ &\quad - \theta(-y_-)\int\limits_{\Gamma_p^1} f(X,X';s)\,ds\,; \\ S^{\bar p}(X,X') &= (\gamma P + m)\Delta^{\bar p}(X,X')\,, \\ \Delta^{\bar p}(X,X') &= -\int\limits_{\Gamma_p} f(X,X';s)\,ds - \\ &\quad - \theta(+y_-)\int\limits_{\Gamma_p^1} f(X,X';s)\,ds\,. \end{aligned} \quad (58)$$

Заметим, что в пределе $s \to \pm 0 - i\pi/eE$ мы имеем

$$
\begin{gathered}
\lim_{s\to\pm 0-i\pi/eE} f(X,X';s) = \\
= \pm f_\perp(X,X')\delta(y^0)\delta(y^1)\,, \\
f_\perp(X,X') = -i\left(\frac{eE}{4\pi^2}\right)^{(d-2)/2}\times \\
\times\exp\left(i\pi\gamma^0\gamma^1 - \frac{\pi m^2}{eE} - \frac{eE}{4\pi}\left|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp\right|^2\right).
\end{gathered} \tag{59}
$$

Принимая во внимание (59), можно выделить все особенности в интеграле (58):

$$
\int\limits_{\Gamma_p^1} f(X,X';s)\,ds = \theta(y_1^2 - y_0^2)\Delta_R^p(X,X')\,,
$$

$$
\Delta_R^p(X,X') = \int\limits_{\Gamma_R^p} f(X,X';s)\,ds\,.
$$

Здесь Γ_R^p — контур интегрирования проходящий по часовой стрелке в виде круга с центром $s = -i\pi/eE$ и достаточно малого радиуса R, так что внутри данного контура функция $f(x,x',s)$ не имеет других особенностей.

Приведем окончательный вид сингулярных функций $S^{p/\bar{p}}$:

$$
\begin{gathered}
S^{p/\bar{p}}(X,X') = (\gamma P + m)\Delta^{p/\bar{p}}(X,X')\,, \\
-\Delta^p(X,X') = \int\limits_{\Gamma_p} f(X,X';s)\,ds + \\
+\theta(y^1)\int\limits_{\Gamma_p^1} f(X,X';s)\,ds\,, \\
-\Delta^{\bar{p}}(X,X') = \int\limits_{\Gamma_p} f(X,X';s)\,ds + \\
+\theta(-y^1)\int\limits_{\Gamma_p^1} f(X,X';s)\,ds\,.
\end{gathered} \tag{60}
$$

Заметим, что контур Γ_p^1 трансформируется в контур $\Gamma_2 + \Gamma_3 - \Gamma_p$. Ступенчатая функция $\theta(\pm y^1)$ может быть представлена как функция $\theta(\mathbf{yE}/E)$ от проекции $\mathbf{yE}/E$ вектора смещения $\mathbf{y}$ на направление электрического поля.

Учитывая (60), мы получаем представление по собственному времени для сингулярных функций $S^c_{\mathrm{in/out}}(X,X')$ и $S^{\mp}_{\mathrm{in/out}}(X,X')$:

$$
\begin{gathered}
S^c_{\mathrm{in/out}}(X,X') = S^{p/\bar{p}}(X,X') + S^c(X,X')\,, \\
S^{\mp}_{\mathrm{in/out}}(X,X') = \mp S^{p/\bar{p}}(X,X') + S^{\pm}(X,X')\,.
\end{gathered} \tag{61}
$$

Заметим, что замена переменных в интеграле (57) была выполнена при условии $y_- \neq 0$. Однако представления (52) справедливы для всех y_-.

Можно проверить, что представления (60) (и следовательно, представления (61)) справедливы для произвольных X и X'. Для этого мы нужно показать, что для всех X и X' представления (60) удовлетворяют тому же самому уравнению Дирака, что и представления (50). Сначала мы должны проверить, что интегралы (60) удовлетворяют уравнению Дирака для всех X и X'. Затем остается убедиться, что при $t = t'$ условия Коши для обобщенных функций (50) совпадают с условиями для выражений (60).

Заметим, что соответствующие скалярные сингулярные функции могут быть получены из представлений для спинорных функций $\Delta^{\pm}(X,X')$, $\Delta^c(X,X')$, $\Delta(x,x')$ и $\Delta^{p/\bar{p}}(X,X')$, если формально положить все γ-матрицы равными нулю.

Мы рассмотрели случай, когда L-постоянное электрическое поле направлено вдоль оси x, $E_x = E$. Ясно, что выбор противоположного направления соответствует отражению $x \to -x$, $x' \to -x'$ и замене $\gamma^1 \to -\gamma^1$. Поэтому достаточно рассмотреть случай одного направления электрического поля. Мы видим, что представления (60) и (61) с точностью до калибровочного слагаемого совпадают с представлениями (20) и (21). Их легко записать в ковариантном виде с помощью тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$, см. (22). Напомним, что выражение (22) было найдено для постоянного электрического поля, задаваемого нестационарным потенциалом в рамках общей формулировки КЭД для такого случая [3].

4. ОБСУЖДЕНИЕ

В данной работе построены и исследованы сингулярные функции в КЭД сильного поля в T-постоянном электрическом поле и в КЭД сильного поля в L-постоянном электрическом поле. Для обоих случаев найдены in- и out-решения уравнения Дирака специального вида в переменных светового конуса. С помощью этих решений построены интегральные представления Фока – Швингера по собственному времени для всех видов сингулярных функций, необходимых для вычисления амплитуд вероятностей процессов и средних значений физических величин. Впервые получены интегральные представления Фока – Швингера для сингулярных функций в КЭД сильного поля в L-постоянном электрическом поле. Получены представления сингулярных функций в КЭД сильного поля в T-постоянном электрическом поле для произвольной ориентации внешнего электрического поля, что нетривиальным образом обобщает результаты работ [18, 19].

После стандартной ультрафиолетовой регуляризации и перенормировки все физические величины, которые могут быть получены при помощи причинного пропагатора $S^c(X, X')$, конечны в пределе $L \to \infty$ и $T \to \infty$. К примеру, это видно для вакуумных матричных элементов тензора энергии-импульса:

$$
\begin{aligned}
&\langle T_{\mu\nu}\rangle^c = \langle 0, \mathrm{out}|\, T_{\mu\nu}\, |0, \mathrm{in}\rangle\, c_v^{-1}\,,\\
&T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(T^{\mathrm{can}}_{\mu\nu} + T^{\mathrm{can}}_{\nu\mu}\right)\,,\\
&T^{\mathrm{can}}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left\{\left[\hat{\Psi}^\dagger(X)\gamma^0, \gamma_\mu P_\nu \hat{\Psi}(X)\right] + \right.\\
&\qquad\left. + \left[P^*_\nu \hat{\Psi}^\dagger(X)\gamma^0, \gamma_\mu \hat{\Psi}(X)\right]\right\}\,,
\end{aligned}
$$

которые могут быть представлены в виде

$$
\begin{aligned}
&\langle T_{\mu\nu}\rangle^c = i\ \mathrm{tr}\left[A_{\mu\nu} S^c(X, X')\right]\big|_{X=X'}\,,\\
&A_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left[\gamma_\mu(P_\nu + P'^*_\nu) + \gamma_\nu(P_\mu + P'^*_\mu)\right]\,.
\end{aligned}
$$

Естественно, что проблемы нестабильности вакуума и ее проявления совершенно различны в L-постоянном поле и T-постоянном поле для конечных интервалов T и L. Однако в пределе $T, L \to \infty$ соответствующие характеристики нестабильности вакуума оказываются одинаковыми. В частности, этот факт можно интерпретировать следующим образом: оба случая представляют собой разные регуляризации в идеализированном случае постоянного однородного электрического поля. Однако эта эквивалентность может отсутствовать для средних значений физических величин, которые могут быть получены с использованием сингулярных функций $S^c_{\mathrm{in/out}}(X, X')$. Например, вакуумные средние тензора энергии-импульса,

$$
\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\mathrm{in/out}} = \langle 0, \mathrm{in/out}|\, T_{\mu\nu}\, |0, \mathrm{in/out}\rangle\,,
$$

могут быть представлены в виде

$$
\langle T_{\mu\nu}\rangle_{\mathrm{in/out}} = i\ \mathrm{tr}\left[A_{\mu\nu} S^c_{\mathrm{in/out}}(X, X')\right]\Big|_{X=X'}\,,
$$

где учтены вклады от $S^{p/\bar{p}}(X, X')$. Такие вклады неограниченно растут в пределах $T \to \infty$ и $L \to \infty$, см. работы [5, 20]. Этот факт связан с неограниченным ростом плотности рождающихся пар электронов и позитронов. Отсюда следует, что в таких случаях существует существенная физическая разница между T-постоянным и L-постоянным полем.

Тем не менее, в случаях, когда соответствующие вклады в диаграммы Фейнмана конечны, можно использовать полученные собственно-временные представления сингулярных функций $S^{p/\bar{p}}(X, X')$. Тогда регуляризация постоянного однородного электрического поля L-постоянным полем эквивалентна регуляризации T-постоянным полем при $T, L \to \infty$.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-12-00042).

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Greiner, B. Müller, and J. Rafelski, *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*, Springer-Verlag, Berlin (1985).
2. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
3. D. M. Gitman, J. Phys. A **10**, 2007 (1977); E. S. Fradkin and D. M. Gitman, Fortschr. Phys. **29**, 381 (1981); E. S. Fradkin, D. M. Gitman, and S. M. Shvartsman, *Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum*, Springer-Verlag, Berlin (1991).
4. S. P. Gavrilov and D. M. Gitman, Phys. Rev. D **93**, 045002 (2016).
5. S. P. Gavrilov and D. M. Gitman,Phys. Rev. D **93**, 045033 (2016).
6. S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, and A. A. Shishmarev, Phys. Rev. D **96**, 096020 (2017).
7. N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, John Willey & Sons. Inc., New York (1980).
8. G. V. Dunne (eds.), *From Fields to Strings*: *Circumnavigating Theoretical Physics*, World Scientific, Singapore (2005).
9. G. V. Dunne and T. Hall, Phys. Rev. D **58**, 10502 (1998).
10. V. P. Gusynin and I. A. Shovkovy, Can. J. Phys. **74**, 282 (1996); V. P. Gusynin and I. A. Shovkovy, J. Math. Phys. **40**, 5406 (1999).
11. H. Gies and F. Karbstein, J. High Energy Phys. **2017**(3), 108 (2017).
12. F. Karbstein, Phys. Rev. D **95**, 076015 (2017).
13. F. Karbstein, Phys. Rev. Lett. **122**, 211602 (2019).
14. S. P. Gavrilov and D. M. Gitman, Phys. Rev. D **95**, 076013 (2017).

15. S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, and A. A. Shishmarev, Phys. Rev. D **99**, 116014 (2019).

16. D. G. Sevostyanov, I. A. Aleksandrov, G. Plunien, and V. M. Shabaev, arXiv:2012.10751 [hep-ph] (2020).

17. G. V. Dunne and Z. Harris, Phys Rev. D **103**, 065014 (2021).

18. S. P. Gavrilov and D. M. Gitman, J. Math. Phys. **37**, 3118 (1996).

19. S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, and Sh. M. Shvartsman, Sov. J. Nucl. Phys. **29**, 567 (1979); S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, and Sh. M. Shvartsman, Sov. J. Nucl. Phys. 715 (1979); S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, and A. E. Gonçalves, J. Math. Phys. **39**, 3547 (1998).

20. S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, and N. Yokomizo, Phys. Rev. D **86**, 125022 (2012).

21. N. B. Narozhnyi and A. I. Nikishov, Theor. Math. Phys. **26**, 9 (1976).

22. V. Fock, Phys. Z. Sowjetunion **12**, 404 (1937).

23. A. V. Shapovalov and I. V. Shirokov, Theor. Math. Phys. **104**, 921 (1995).

24. V. G. Bagrov, M. C. Baldiotti, D. M. Gitman, and I. V. Shirokov, J. Math. Phys. **43**, 2284 (2002).

25. A. I. Breev and A. V. Shapovalov, Symmetry **12**, 1867 (2020).

26. A. I. Breev, S. P. Gavrilov, and D. M. Gitman, Phys. Complex Systems **1**, 30 (2020).