

# ПУЗЫРИ С ПРИСОЕДИНЕННЫМИ КВАНТОВЫМИ ВИХРЯМИ В ЗАХВАЧЕННЫХ БИНАРНЫХ БОЗЕ-КОНДЕНСАТАХ

*В. П. Рубан\**

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук  
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 4 августа 2021 г.,  
после переработки 4 августа 2021 г.  
Принята к публикации 4 августа 2021 г.

Специфические топологические возбуждения энергетически устойчивых конфигураций типа «ядро»–«мантия» для двухкомпонентных несмешивающихся бозе-конденсатов, захваченных ловушкой, исследуются численно в рамках связанных уравнений Гросса–Питаевского. В численном моделировании впервые наблюдаются нестационарные долгоживущие когерентные структуры, которые состоят из нескольких квантованных вихревых нитей, пронизывающих мантию снаружи вовнутрь и обратно, и при этом демонстрируют весьма нетривиальную динамику. Концы вихревых нитей способны надолго оставаться присоединенными к границе раздела между мантией и ядром, если последнее достаточно велико, а поверхностное натяжение не мало. Форма таких «пузырей» подвержена сильному влиянию вихрей и иногда далека от сферической.

DOI: 10.31857/S0044451021120130

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Многокомпонентные смеси ультрахолодных бозе-конденсированных атомных газов активно изучаются вот уже на протяжении четверти века [1–5]. Такие системы состоят либо из разных химических элементов, либо из разных изотопов одного и того же элемента, либо из одного изотопа в различных внутренних (сверхтонких) квантовых состояниях. Взаимодействия между различными видами атомов приводят к богатому разнообразию уникальных эффектов, которые не существуют для однокомпонентного бозе-конденсата. Что очень важно, параметры нелинейных взаимодействий для волн материи, будучи пропорциональными длинам рассеяния, могут во многих случаях произвольно настраиваться путем привлечения резонансов Фешбаха [6–10]. В частности, при достаточно сильном перекрестном отталкивании между двумя компонентами происходит разделение фаз [11, 12]. Оно лежит в основе многих весьма интересных конфигураций и явлений, таких как доменные стенки и поверхностное натяжение между сегрегированными конденсатами [4, 13], нетривиальная геометрия основного со-

стояния бинарных несмешивающихся конденсатов в ловушках [14–16] (включая оптические решетки [17–19]), динамика пузырей [20], квантовые аналоги классических гидродинамических неустойчивостей (Кельвина–Гельмгольца [21, 22], Рэлея–Тейлора [23–25], Плато–Рэлея [26], параметрическая неустойчивость капиллярных волн на границе раздела [27, 28]), сложные текстуры во вращающихся бинарных конденсатах [29–31], вихри с заполненными сердцевинами [3, 32–37], трехмерные топологические структуры [38–42], капиллярная плавучесть плотных капель в захваченных несмешивающихся бозе-конденсатах [43] и т. д.

Квантовые вихри давно признаны объектами первостепенного интереса и важности среди остальных когерентных структур. Уже для однокомпонентных конденсатов было получено множество выразительных результатов о вихревых конфигурациях и их динамике (см., например, [44–55] и ссылки там). Что касается вихрей в многокомпонентных конденсатах, данная научная область даже еще более велика и содержит обширные неизведанные территории. Многие интересные находки все еще возможны там для исследователя. В данной работе как раз представлен новый вид довольно изящных долгоживущих структур, составленных из пузырей и вихрей и демонстрирующих нетривиальную дина-

\* E-mail: ruban@itp.ac.ru

мику. Чтобы объяснить, что они собой представляют в общих чертах, следует вспомнить, что в двухкомпонентных несмешивающихся конденсатах возможны доменные стенки с присоединенными к ним квантовыми вихрями [41]. По сути, это сильно деформированные вихревые листы особой формы. Авторы работы [41] исследовали подобные комплексы в случае равных коэффициентов самоотталкивания. Численные решения были там получены для бинарных конденсатов в продолговатых ловушках, где равновесная граница раздела между компонентами представляла собой диск с краем на поверхности Томаса – Ферми. Квантовые вихри присутствовали в обоих компонентах и были направлены примерно вдоль оси ловушки.

Здесь будет показано, что существенно новое и интересное свойство возникает в случае, когда имеется неравенство (асимметрия) между коэффициентами. В приблизительно сферической гармонической ловушке это приводит к образованию устойчивой и компактной фоновой равновесной конфигурации типа «ядро»–«мантия». Присутствие устойчиво захваченного безвихревого ядра в центре, в сочетании с поверхностным натяжением между компонентами, стремится стабилизировать возможные вихревые нити, присоединенные к подобному пузырю снаружи и пронизывающие мантию (см. ниже рис. 1 в качестве примера). Конечно же, число (выходящих) вихрей всегда равно числу (входящих) антивихрей. Плотность внешней компоненты при этом настолько пренебрежимо мала внутри ядра, что практически не имеет значения, какой из вихрей является продолжением данного антивихря. Лишь суммарный баланс обычно существенен. Каждый вихрь или антивихрь типично сохраняет свою индивидуальность и направлен приблизительно вдоль локального радиуса. Благодаря взаимодействиям вихри находятся в поперечном движении, простом или сложном. Но иногда два присоединенных вихря (один входящий и один выходящий) могут динамически спариться, затем оторваться от пузыря и, наконец, образовать отдельную вихревую нить. Однако при таком сценарии вихревая пара должна преодолеть «потенциальный барьер», обусловленный поверхностным натяжением. Для относительно больших пузырей и малого числа вихрей такие процессы случаются весьма редко. Поэтому структуры данного типа способны существовать на протяжении тысяч временных единиц ловушки, как показывают наши численные эксперименты. Мы также увидим далее, что динамика становится все более сложной при увеличении числа присоединенных вихрей.

Насколько известно автору, такие трехмерные комплексы в захваченных несмешивающихся бозе-конденсатах до сих пор не обсуждались в литературе. Однако известны их отдаленные аналоги, такие как квантовые вихри в коре нейтронных звезд (см., например, обзор [56]), или топологические структуры  ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ , предложенные в работе [57] (капелька  ${}^4\text{He}$ , погруженная в жидкость  ${}^3\text{He}$ ). Цель данной работы — ввести в рассмотрение пузыри с присоединенными квантовыми вихрями теоретически в контексте ультрахолодных газов и проиллюстрировать на нескольких представительных численных примерах их основные свойства. Научная значимость этих новых структур обусловлена их теоретическим существованием (и, хочется надеяться, экспериментальной реализуемостью) в широких и реалистических диапазонах параметров, а также их достаточно нетривиальной динамикой.

## 2. МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Основная математическая модель в нашем исследовании — хорошо известные и широко применяемые связанные уравнения Гросса – Питаевского для двух комплексных волновых функций,  $A(\mathbf{r}, t)$  (первая компонента — мантия) и  $B(\mathbf{r}, t)$  (вторая компонента — ядро). Эта консервативная модель применима в пределе нулевой температуры для достаточно разреженных бозе-газов. Для простоты здесь рассматриваются равные массы  $m_1 = m_2 = m$  атомов обоих видов (либо близкие по массе изотопы, как, например,  ${}^{85}\text{Rb}$  и  ${}^{87}\text{Rb}$ , и тогда небольшой разницей в массах можно пренебречь [8]). Пусть осесимметричная ловушка с гармоническим потенциалом характеризуется поперечной частотой  $\omega_\perp$  и анизотропией  $\lambda = \omega_\parallel/\omega_\perp$ . С использованием характерных для ловушки единиц времени  $\tau = 1/\omega_\perp$ , длины  $l_{tr} = \sqrt{\hbar/\omega_\perp m}$  и энергии  $\varepsilon = \hbar\omega_\perp$  уравнения движения записываются в безразмерном виде:

$$i\dot{A} = -\frac{1}{2}\nabla^2 A + [V(x, y, z) + g_{11}|A|^2 + g_{12}|B|^2] A, \quad (1)$$

$$i\dot{B} = -\frac{1}{2}\nabla^2 B + [V(x, y, z) + g_{21}|A|^2 + g_{22}|B|^2] B, \quad (2)$$

где  $V = (x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2)/2$  — потенциал ловушки, а  $g_{\alpha\beta}$  — симметричная  $2 \times 2$ -матрица нелинейных взаимодействий. Физически взаимодействия определяются длинами рассеяния  $a_{\alpha\beta}$  [2]:

$$g_{\alpha\beta}^{phys} = 2\pi\hbar^2 a_{\alpha\beta} (m_\alpha^{-1} + m_\beta^{-1}). \quad (3)$$

Нас интересует случай всех положительных  $g_{\alpha\beta}$ . Без потери общности первый коэффициент самооттал-

кивания может быть нормирован на единицу,  $g_{11} = 1$ , поскольку в данной работе величины  $g_{\alpha\beta}$  рассматриваются как постоянные во времени параметры. При таком выборе сохраняющиеся числа захваченных атомов даются формулами

$$N_1 = \frac{l_{tr}}{4\pi a_{11}} \int |A|^2 d\mathbf{r} = \frac{l_{tr}}{a_{11}} n_1, \quad (4)$$

$$N_2 = \frac{l_{tr}}{4\pi a_{11}} \int |B|^2 d\mathbf{r} = \frac{l_{tr}}{a_{11}} n_2. \quad (5)$$

В реальных экспериментах отношение  $l_{tr}/a_{11}$  находится в диапазоне примерно от нескольких сотен до нескольких тысяч.

Хорошо известно, что система (1), (2) в режиме разделения фаз подобна потенциальным течениям в классической гидродинамике двух несмешивающихся сжимаемых жидкостей, за исключением окрестности доменных стенок и сердцевин вихрей, где «квантовые давления» вступают в игру. Гидродинамические давления первой и второй «жидкостей» волн материи есть соответственно  $g_{11}|A|^4/2$  и  $g_{22}|B|^4/2$ , причем по обе стороны от границы раздела они приблизительно равны (разница, вызванная поверхностным натяжением и медленными течениями, относительно невелика). При равных давлениях более плотной оказывается та компонента, у которой коэффициент самоотталкивания меньше. Поэтому, чтобы обеспечить относительно более плотное устойчивое ядро, необходимо выполнение неравенства  $g_{22} < g_{11} = 1$ .

Равновесные состояния, как известно, характеризуются двумя химическими потенциалами,  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . В рассматриваемых нами условиях  $\mu_1 \gg 1$  и  $\mu_2 \gg 1$ , так что фоновые профили плотности даются приближением Томаса – Ферми:

$$|A_0|^2 \approx [\mu_1 - V(x, y, z)] \equiv \mu_1 \rho_{1eq}(\mathbf{r}), \quad (6)$$

$$|B_0|^2 \approx [\mu_2 - V(x, y, z)]/g_{22} \equiv \mu_1 \rho_{2eq}(\mathbf{r}), \quad (7)$$

где мы ввели нормированные плотности  $\rho_1 = |A|^2/\mu_1$  и  $\rho_2 = |B|^2/\mu_1$ . Первая формула верна внутри мантии, а вторая – внутри ядра. Эффективный поперечный размер конденсата, таким образом, есть  $R_{\perp} = \sqrt{2\mu_1}$ , тогда как для характерной толщины вихревых линий в мантии справедлива оценка  $\xi \sim 1/\sqrt{\mu_1}$ .

Предполагается выполненным условие

$$g = (g_{12}^2 - g_{11}g_{22}) > 0$$

разделения фаз [11, 12]. Важно, что имеются узкий переходный слой между сегрегированными конденсатами (его ширина примерно пропорциональна величине  $1/\sqrt{g}$ ; он также виден на рис. 1) и связанное с

этим слоем поверхностное натяжение, грубо пропорциональное величине  $\sqrt{g}$  [11, 13]. Проведенные здесь численные эксперименты были ориентированы на экспериментально реализуемые смеси  $^{85}\text{Rb}$ – $^{87}\text{Rb}$  [8], где  $a_{12}/a_{22} \approx 2$ , тогда как величина  $a_{11}$  может задаваться достаточно произвольно с помощью резонанса Фешбаха. Поэтому во всех наших прогонах (*runs*)  $g_{12} = 2g_{22}$ . С другой стороны, оптимальное значение отношения  $g_{22}/g_{11}$  должно обеспечивать большое поверхностное натяжение и одновременно быть не близким к единице для надежной устойчивости ядра в потенциале ловушки. В этой работе мы полагали обычно  $g_{22} = 0.5$  либо  $g_{22} = 0.6$ , но в некоторых прогонах, с целью сравнения, брали  $g_{22} = 0.3$  или  $g_{22} = 0.8$ .

Связанные уравнения Гросса – Питаевского (1), (2) решались численно с использованием стандартного метода Фурье с расщепленным шагом по времени второго порядка точности. Пространственное и временное разрешения были достаточными для сохранения соответствующего функционала Гамильтона и чисел частиц  $n_1$  и  $n_2$  до пятого десятичного знака на протяжении интервала времени  $T_{run} = 2000$ .

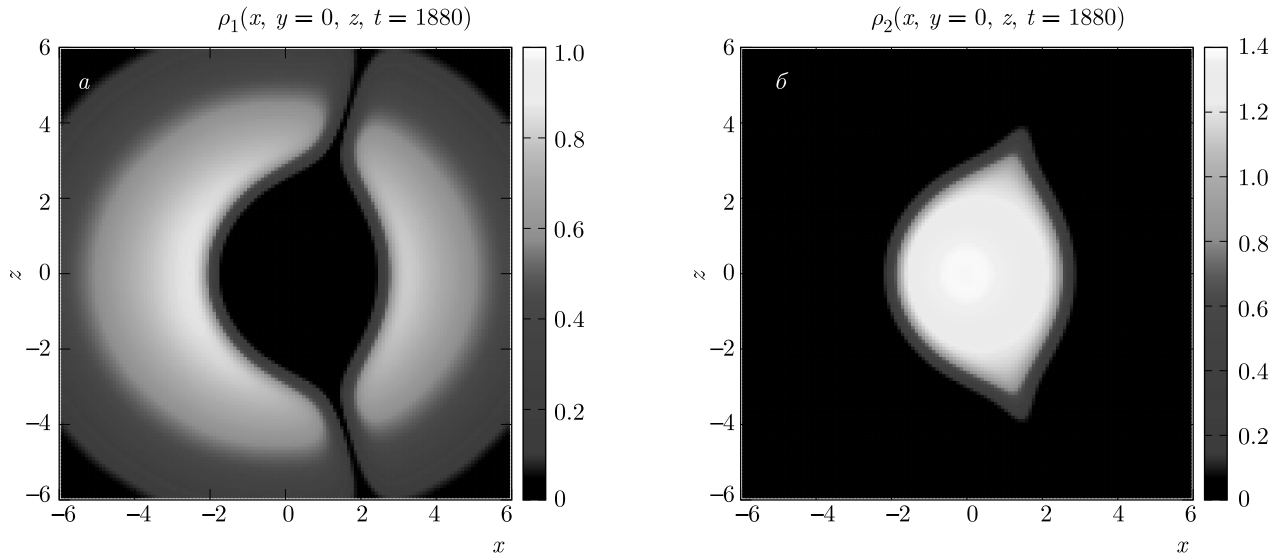
Начальные состояния, содержащие лишь мягкие возбуждения, были приготовлены с применением процедуры градиентного спуска, что в данном случае эквивалентно распространению в мнимом времени (*imaginary-time propagation*) на некотором отрезке вспомогательной квазивременной переменной. На вход этой диссипативной процедуры подавалась «затравожная» конфигурация первой компоненты в виде  $A_{inp} = \tilde{A}_0(\mathbf{r})C_0(\mathbf{r})$  с действительной величиной  $\tilde{A}_0(\mathbf{r})$ . Несколько вихревых нитей вводились путем использования комплексного множителя

$$C_0(\mathbf{r}) = \prod_j \frac{w_j}{\sqrt{|w_j|^2 + \epsilon}}, \quad (8)$$

где явный вид  $w_j(\mathbf{r})$  зависел от желаемой «входной» формы нити. В частности, ориентированная близко к  $z$ -направлению нить вводилась выражением вида

$$w_j = [x - X_j(z)] \pm i[y - Y_j(z)] \quad (9)$$

с относительно малыми произвольными функциями  $X_j(z)$  и  $Y_j(z)$ . Соответственно, переменная  $x$  либо  $y$  параметризовала вихревые нити, ориентированные близко к направлению соответственно  $x$  либо  $y$ . Малая положительная величина  $\epsilon$  применялась, чтобы избежать нуля в знаменателях. Выбор знака « $\pm$ » определял направление вращения  $j$ -го вихря. Каждая такая нить на выходе диссипативной процеду-



**Рис. 1.** Численный пример долгоживущего захваченного конденсатного пузыря с одной парой присоединенных вихревых нитей. Показаны отнормированные плотности обеих компонент конденсата в сечении  $y = 0$  (заметьте разницу в диапазонах цветной шкалы):  $a$  — мантия;  $b$  — ядро. Переходный слой между облаками довольно резкий. Конфигурация медленно вращается вокруг оси  $z$ , с наложенными колебаниями поверхности раздела, и показана в тот момент времени, когда оба вихря лежат в плоскости  $y = 0$ . В этом численном эксперименте  $\lambda = 1.1$ ,  $g_{11} = 1.0$ ,  $g_{22} = 0.6$ ,  $g_{12} = 1.2$ ,  $n_1 = 1521.8$ ,  $n_2 = 175.8$  и  $\mu_1 = 30$

ры давала один вихрь и один антивихрь в указанном ранее смысле. «Затравка» второй компоненты  $B_{inp} = \vec{B}_0(\mathbf{r})$  не содержала вихрей.

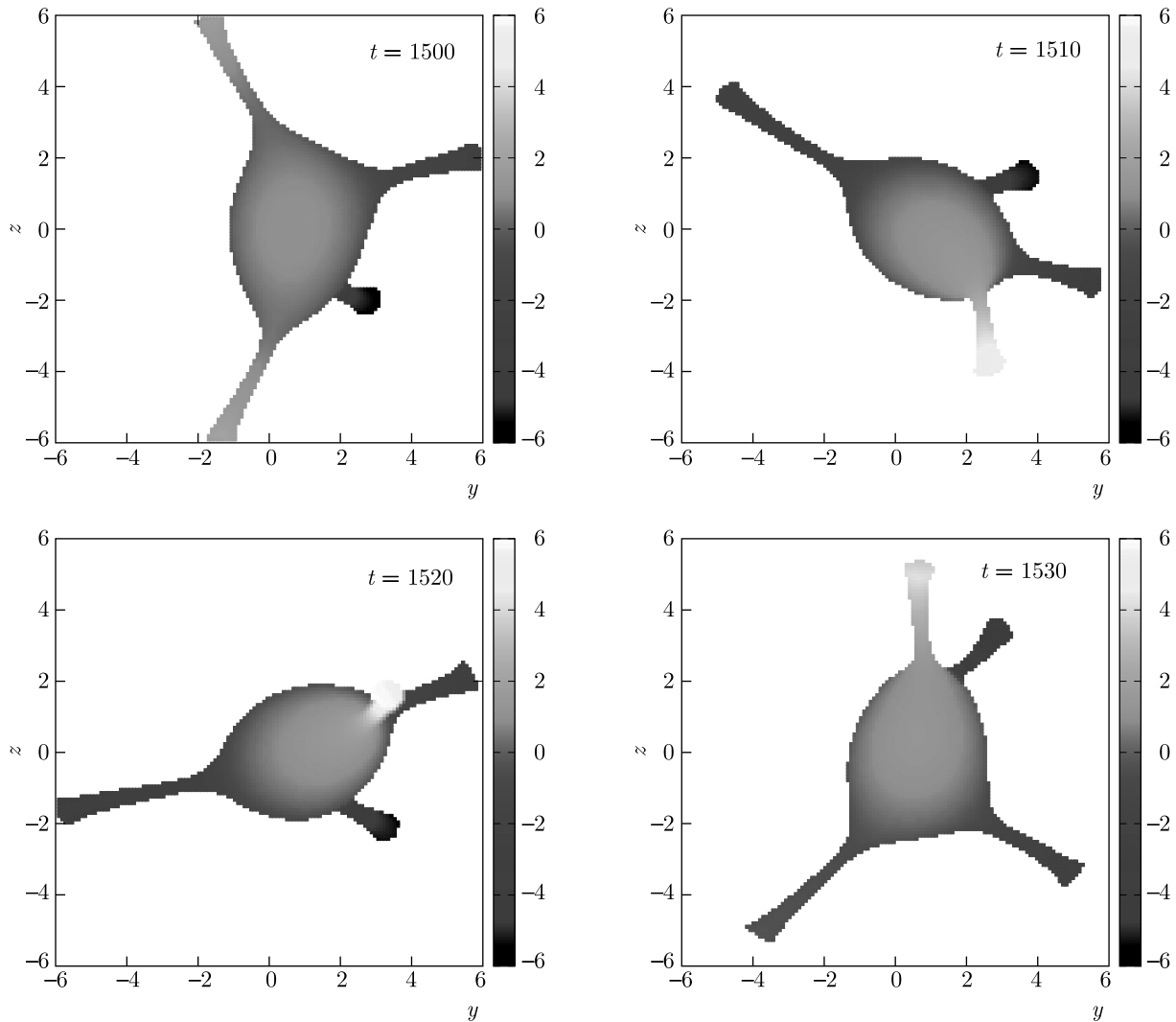
Данная диссипативная процедура «отфильтровывала» быстрые потенциальные возмущения и приводила систему близко к ее фоновой равновесной конфигурации (6), (7), включая специфический узкий профиль стенки между мантией и ядром. При этом также формировались правильные поперечные сечения вихрей в соответствии с фоновой плотностью. Медленные же возмущения — позиции вихрей — не успевали достичь минимума своей энергии за относительно короткое распространение в мнимом времени, и этот факт обеспечивал последующую нетривиальную вихревую динамику на основной — консервативной — стадии численного эксперимента. Выбирая различные значения для  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , различные вихревые конфигурации  $X_j(z)$  и  $Y_j(z)$  на входе диссипативной процедуры и различные периоды для распространения в мнимом времени, можно получить различные значения для  $n_1$  и  $n_2$ , а также различные начальные расположения присоединенных вихрей.

Анизотропия ловушки выбиралась близкой к единице, типично  $\lambda = 1.1$ . Это делалось, чтобы нарушить сферическую симметрию, но лишь слегка.

Необходимо также сказать, что никакие короткомасштабные неустойчивости не наблюдались в нашем моделировании. Структуры никогда не распались при наличии малого возмущения. На данный факт можно смотреть как на косвенное свидетельство их динамической устойчивости. Некоторые из полученных численных результатов представлены и обсуждаются в следующем разделе.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Простейший случай захваченного пузыря всего лишь с одной парой присоединенных вихревых нитей представлен на рис. 1. Там ясно видно, что ядро далеко не сферическое по форме, поскольку концы вихрей оттягивают поверхность раздела. В частности, граница ядра имеет резкие конические особенности вблизи концов вихрей. В данном примере начальная вихревая конфигурация была приблизительно симметричной относительно экваториальной плоскости  $z = 0$ , так что движение представляет собой медленное вращение вокруг оси  $z$ , сопровождаемое колебаниями пузыря из-за «несовершенства» начальных условий (см. видео [58]). В другом прогоне, без экваториальной симметрии, движение было несколько менее монотонным, поскольку мгно-



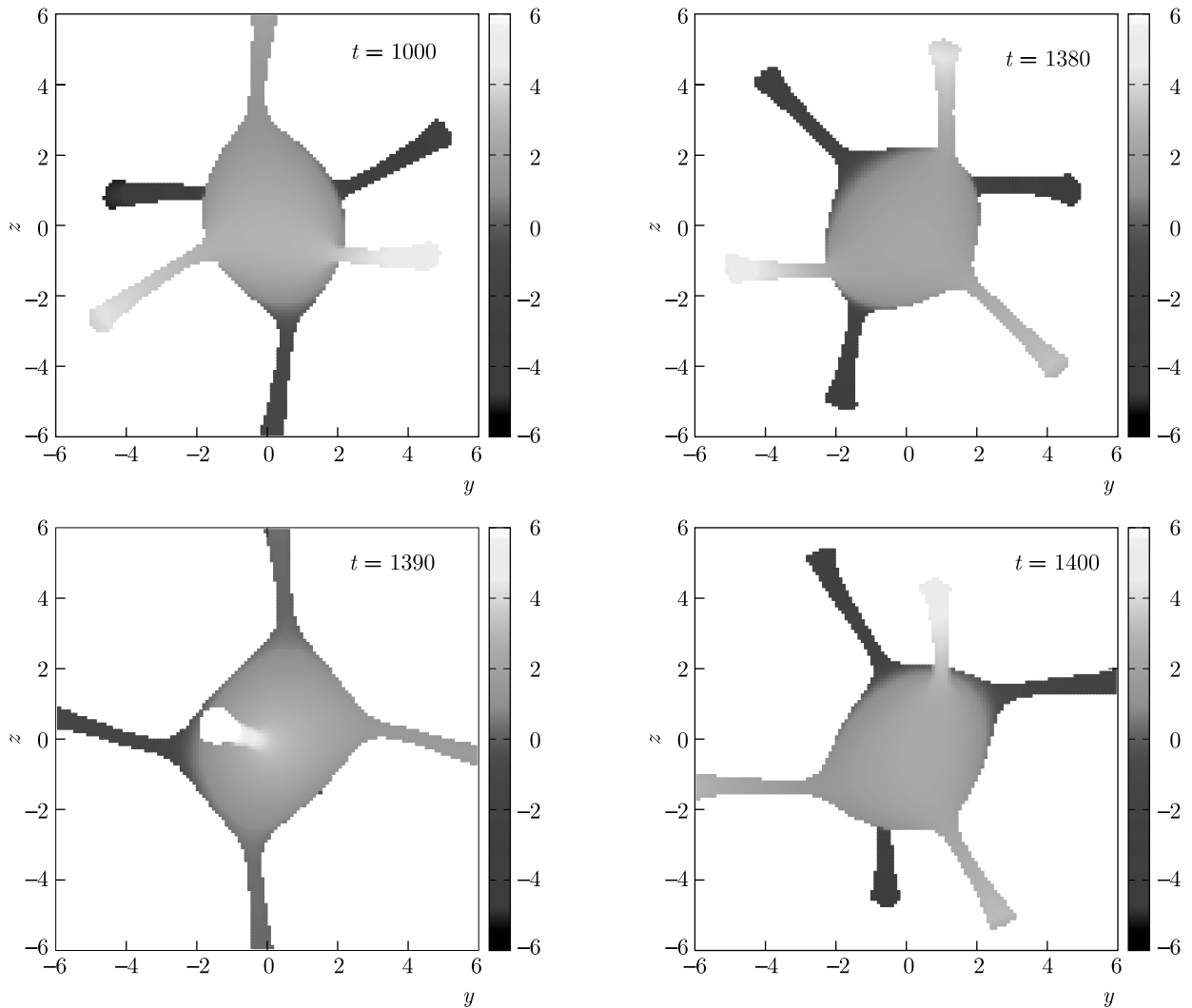
**Рис. 2.** Долгоживущий нестационарный пузырь с двумя парами присоединенных вихрей. Цветная шкала соответствует  $x$ -координате тех точек численной решетки, которые являются ближайшими к поверхности, определяемой уравнением  $\rho_1(\mathbf{r}, t) = 0.5\rho_{1eq}(\mathbf{r})$ . Показаны только точки внутри области  $\rho_{1eq}(\mathbf{r}) > 0.2$ , и поэтому внешние концы нитей «отсечены». В этом численном эксперименте структура не просто вращается вокруг зависящей от времени мгновенной оси (не сонаправленной с осью  $z$ ), но также подвержена медленным деформациям. В целом, это напоминает кувырки. Параметры:  $\lambda = 1.1, g_{11} = 1.0, g_{22} = 0.6, g_{12} = 1.2, n_1 = 1552.2, n_2 = 117.9, \mu_1 = 30$

венная ось вращения зависела от времени (не показано).

Поведение становится нетривиальным, начиная с двух пар присоединенных вихрей. Пример показан на рис. 2, где форма эффективной (внутренней) границы первой компоненты представлена для нескольких моментов времени. В данном случае движение напоминает какое-то гимнастическое представление с кувырками либо вращающегося в воздухе парашютиста-скайдайвера (см. видео [59]). Разумеется, более «спокойные» режимы также возможны,

когда приблизительно стационарная конфигурация вращается вокруг оси  $z$  аналогично предыдущему примеру.

В проведенных вычислениях наблюдалось, что, в зависимости от параметров и начальных условий, три и более пары присоединенных вихрей демонстрируют как регулярную динамику, так и весьма драматичную и неустойчивую. Регулярная динамика соответствует простейшему случаю, когда симметричный пучок из нескольких вихрей находится в примерно стационарном вращении вокруг оси  $z$ ,

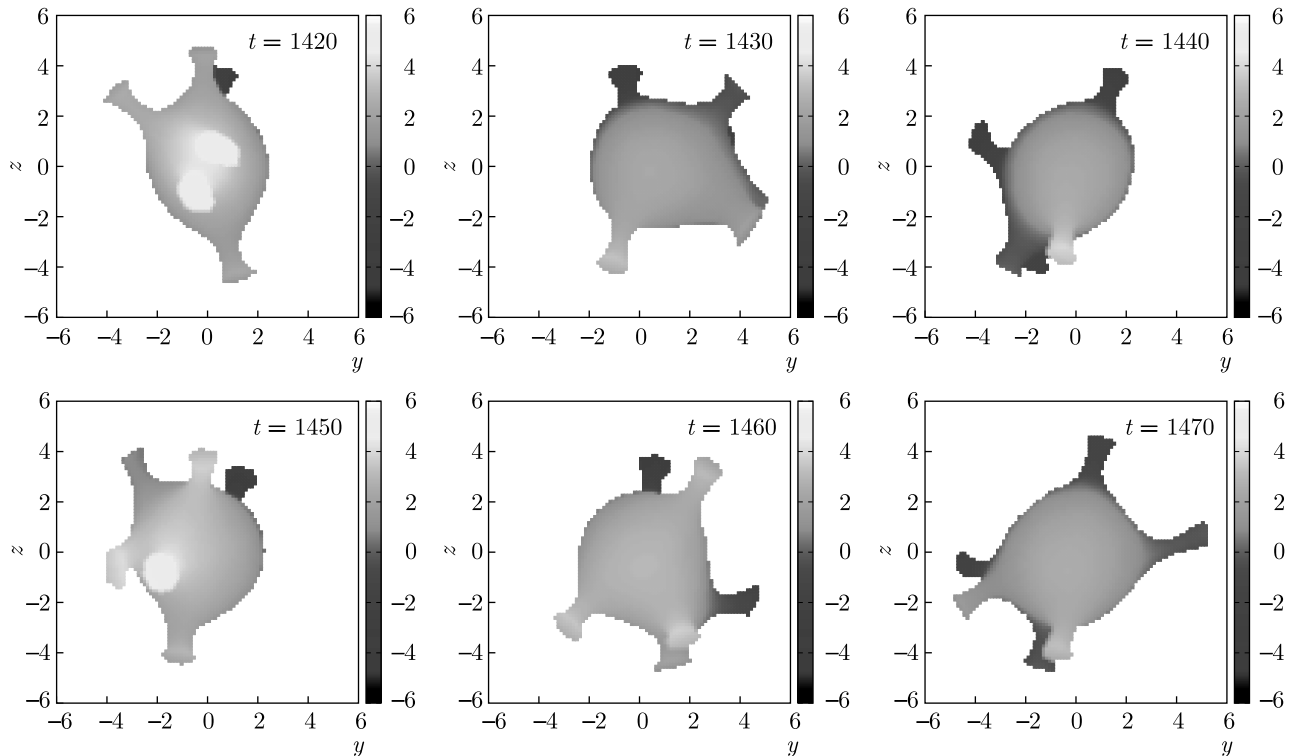


**Рис. 3.** Регулярно вращающийся пузырь с тремя парами присоединенных вихрей. Параметры:  $\lambda = 1.1$ ,  $g_{11} = 1.0$ ,  $g_{22} = 0.8$ ,  $g_{12} = 1.6$ ,  $n_1 = 1503.3$ ,  $n_2 = 141.7$ ,  $\mu_1 = 30$ . Изначально вихри были ориентированы примерно вдоль трех декартовых осей. Мгновенная ось вращения медленно прецессирует вокруг  $z$ -направления

а также чуть более нетривиальному случаю, когда вращение происходит вокруг прецессирующей мгновенной оси (см. рис. 3 и видео [60] как пример). Такие спокойные режимы характерны для достаточно больших значений поверхностного натяжения, например при  $g_{22} = 0.8$ . Напротив, при  $g_{22} = 0.5, 0.6$  пузырь-вихревые комплексы часто ведут себя нерегулярно, так что взаимное расположение вихрей изменяется во времени сложным и, по-видимому, непредсказуемым образом. Используя опять сравнение с атлетическими упражнениями, можно сказать, что подобное представление мог бы дать лишь какой-то фантастический, идеально гибкий клоун, обладающий более чем двумя парами конечностей.

И в самом деле, движения выглядят иногда весьма забавно (см. видео [61]). Пример последовательности изменений для пузыря с тремя парами присоединенных вихрей представлен на рис. 4 (взято из видео [61]). Данный численный эксперимент также показывает, что требующиеся для возможности рассматриваемого явления числа захваченных атомов могут быть относительно небольшими. Так, при реалистичной длине ловушки  $l_{tr}/a_{11} \approx 100$  имеем  $N_1 \approx 3.3 \cdot 10^4$  и  $N_2 \approx 1.5 \cdot 10^4$ .

Здесь надо снова сказать, что при неустойчивой динамике концы двух вихрей с противоположными знаками часто приближаются друг к другу, и в некоторых случаях они способны соединиться и



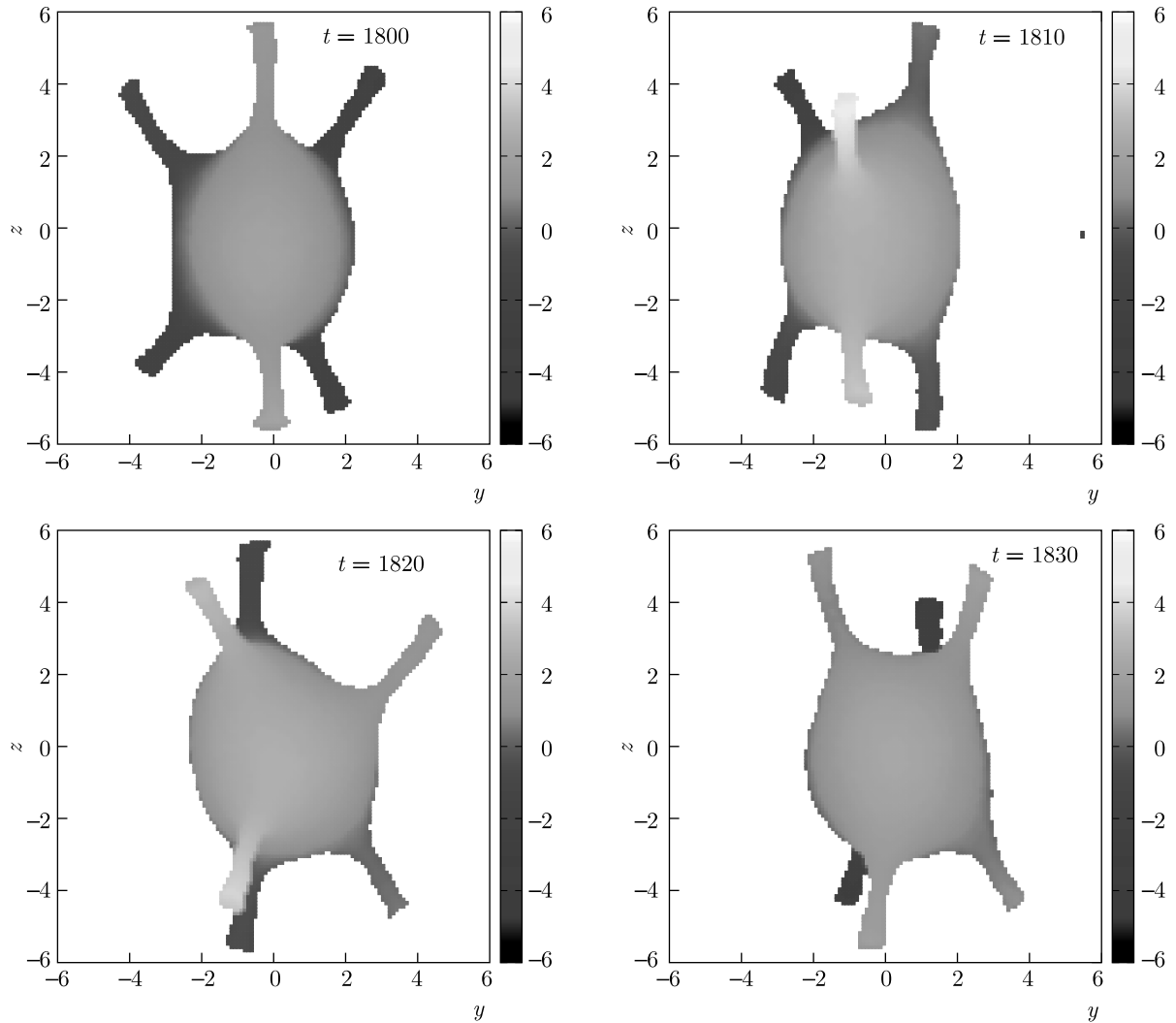
**Рис. 4.** Нестационарный пузырь с тремя парами присоединенных вихрей. Параметры:  $\lambda = 1.1$ ,  $g_{11} = 1.0$ ,  $g_{22} = 0.5$ ,  $g_{12} = 1.0$ ,  $n_1 = 332.5$ ,  $n_2 = 145.7$ ,  $\mu_1 = 18$ . В этом примере динамика вихрей довольно быстрая и драматичная, тогда как числа частиц относительно невелики

оторваться от пузыря, формируя таким образом отдельную нить (два примера отрыва имеются на видео [61, 62]). Весьма легкий отрыв происходит в случае слабого поверхностного натяжения (в частности, когда  $g_{22} = 0.3$ ). Если же поверхностное натяжение достаточно сильное, то подобное поведение типично главным образом для систем с относительно малыми ядрами. Вихревые нити в мантии тогда довольно энергонасыщенны и находятся в полностью трехмерном режиме, и потому они имеют возможность быть наклоненными под большими углами к локальной нормали пузыря, инициируя таким образом процесс отделения.

Напротив, относительно большое тяжелое ядро и тонкая мантия делают вихри короткими (а течения первой компоненты — приблизительно двумерными на сфероиде) и направленными почти строго перпендикулярно к равновесной поверхности пузыря, и тогда их динамика качественно похожа на движение точечных вихрей на сферической поверхности. Однако вопрос о количественной применимости этой аналогии требует дальнейшего тщательного исследования, поскольку взаимодействия вих-

рей с потенциальными осцилляциями мантии могут оставаться все еще важными. В целом, эта ситуация напоминает физику вихрей и антивихрей в обычных бозе-конденсатах, имеющих форму тонкой оболочки [55]. Рисунок 4 соответствует промежуточному режиму между полностью трехмерным и эффективно двумерным режимами.

Из всех приведенных выше примеров становится ясно, что динамика присоединенных вихрей может быть приблизительно конечномерной в том смысле, что в нее эффективно вовлечено лишь конечное число мягких степеней свободы. Очевидно, что движение присоединенных вихрей сильно зависит от их начального расположения. Численно нетрудно приготовить практически любое начальное состояние. Однако здесь необходимо подчеркнуть, что наша численная процедура инициализации не имеет ничего общего с требуемой реальной экспериментальной процедурой приготовления пузырей с присоединенными вихрями в бинарных конденсатах. Но в этом месте можно вспомнить, что «вращающиеся» потенциалы ловушки



**Рис. 5.** Пузырь с тремя парами присоединенных вихрей, сформированных вращающейся ловушкой, у которой угол поворота  $\phi(t) = 0.08 \cdot 2\pi(\sqrt{t^2 + 400^2} - 400)$ , а поперечная анизотропия  $\nu(t) = 0.05t^2/(t^2 + 400^2)$ . Остальные параметры:  $\lambda = 1.0$ ,  $g_{11} = 1.0$ ,  $g_{22} = 0.6$ ,  $g_{12} = 1.2$ ,  $n_1 = 894.7$ ,  $n_2 = 182.5$ ,  $\mu_1 = 24$ . На этом рисунке внешние концы вихрей «отсечены» условием  $\rho_{1eq}(\mathbf{r}) > 0.3$

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2) + \nu(t) \operatorname{Re} [(x + iy)^2 e^{-2i\phi(t)}],$$

как известно, «тянут» вихревые нити от периферии к оси конденсата. Здесь  $\phi(t)$  — угол поворота ловушки, а  $\nu(t)$  — параметр ее анизотропии в плоскости  $xy$ . Предположим, что вначале мы имеем близкое к равновесному состояние с короткой вихревой нитью вблизи внешней поверхности мантии. Когда ловушка начинает вращаться, нить приближается к ядру, присоединяется к нему и затем формирует пару вихрь–антивихрь. Ядро остается безвихревым в этом процессе. По меньшей мере несколько проведенных дополнительных численных экспери-

ментов (не проиллюстрированных здесь) показали действенность подобного сценария для приготовления конфигураций, подобных представленной выше на рис. 1, включая асимметрию относительно оси  $z$ . Угловая скорость вращения ловушки — важный параметр в таких ситуациях. Если сделать вращение достаточно быстрым, то в результате сложного и существенно неравновесного переходного процесса к пузырю могут присоединиться две, три и большее число пар вихрей, ориентированных под не слишком большими углами к оси  $z$  (см. пример на рис. 5). Таким образом, вращающаяся ловушка представляет одним из возможных экспе-



риментальных способов. Что до более общей задачи, как произвести в лаборатории пузырь с несколькими произвольно расположенными присоединенными вихрями, то тут требуется отдельное и глубокое исследование, включающее усилия высококвалифицированных экспериментаторов. Поэтому такая задача выходит за рамки данного чисто теоретического рассмотрения.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем итоги. В этой работе впервые теоретически указана возможность специфических комплексов типа стенка–вихри в двухкомпонентном бозе–конденсате, обусловленных его компактной, устойчиво стратифицированной конфигурацией. Эти комплексы представляют собой долгоживущие пузыри с присоединенными вихрями, существующие в широких параметрических диапазонах и демонстрирующие в численных экспериментах весьма интересное динамическое поведение. Нами наблюдались как регулярные, так и нерегулярные режимы. Поскольку здесь налицо новый пример богатой физики, содержащейся в относительно простой (по крайней мере для численного исследования) структуре, необходимы дальнейшие теоретические усилия в этом направлении, включая развитие аналитических подходов.

Параметры наших симуляций вполне реалистичны, так что будущее экспериментальное воплощение таких систем представляется вполне возможным. Трудностью для экспериментаторов, возможно, окажется приготовить бинарный конденсат без мелких капель и разбиения на множество областей, а только лишь с одним ядром в центре. После этого нужно будет внедрить в оболочку несколько вихрей. Возможная методика для этого — вращающаяся ловушка.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Tin-Lun Ho and V. B. Shenoy, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3276 (1996).
2. H. Pu and N. P. Bigelow, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1130 (1998).
3. B. P. Anderson, P. C. Haljan, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2857 (2000).
4. S. Coen and M. Haelterman, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 140401 (2001).
5. G. Modugno, M. Modugno, F. Riboli, G. Roati, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 190404 (2002).
6. J. P. Burke, Jr., J. L. Bohn, B. D. Esry, and C. H. Greene, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2097 (1998).
7. G. Thalhammer, G. Barontini, L. De Sarlo, J. Catani, F. Minardi, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 210402 (2008).
8. S. B. Papp, J. M. Pino, and C. E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 040402 (2008).
9. S. Tojo, Y. Taguchi, Y. Masuyama, T. Hayashi, H. Saito, and T. Hirano, *Phys. Rev. A* **82**, 033609 (2010).
10. C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1225 (2010).
11. E. Timmermans, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5718 (1998).
12. P. Ao and S. T. Chui, *Phys. Rev. A* **58**, 4836 (1998).
13. B. Van Schaeybroeck, *Phys. Rev. A* **78**, 023624 (2008).
14. A. A. Svidzinsky and S. T. Chui, *Phys. Rev. A* **68**, 013612 (2003).
15. S. Gautam and D. Angom, *J. Phys. B* **43**, 095302 (2010).
16. R. W. Pattinson, T. P. Billam, S. A. Gardiner, D. J. McCarron, H. W. Cho, S. L. Cornish, N. G. Parker, and N. P. Proukakis, *Phys. Rev. A* **87**, 013625 (2013).
17. K. Suthar, Arko Roy, and D. Angom, *Phys. Rev. A* **91**, 043615 (2015).
18. K. Suthar and D. Angom, *Phys. Rev. A* **93**, 063608 (2016).
19. K. Suthar and D. Angom, *Phys. Rev. A* **95**, 043602 (2017).
20. K. Sasaki, N. Suzuki, and H. Saito, *Phys. Rev. A* **83**, 033602 (2011).
21. H. Takeuchi, N. Suzuki, K. Kasamatsu, H. Saito, and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **81**, 094517 (2010).
22. N. Suzuki, H. Takeuchi, K. Kasamatsu, M. Tsubota, and H. Saito, *Phys. Rev. A* **82**, 063604 (2010).
23. K. Sasaki, N. Suzuki, D. Akamatsu, and H. Saito, *Phys. Rev. A* **80**, 063611 (2009).
24. S. Gautam and D. Angom, *Phys. Rev. A* **81**, 053616 (2010).

25. T. Kadokura, T. Aioi, K. Sasaki, T. Kishimoto, and H. Saito, *Phys. Rev. A* **85**, 013602 (2012).
26. K. Sasaki, N. Suzuki, and H. Saito, *Phys. Rev. A* **83**, 053606 (2011).
27. D. Kobayakov, V. Bychkov, E. Lundh, A. Bezett, and M. Marklund, *Phys. Rev. A* **86**, 023614 (2012).
28. D. K. Maity, K. Mukherjee, S. I. Mistakidis, S. Das, P. G. Kevrekidis, S. Majumder, and P. Schmelcher, *Phys. Rev. A* **102**, 033320 (2020).
29. K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 150406 (2003).
30. K. Kasamatsu and M. Tsubota, *Phys. Rev. A* **79**, 023606 (2009).
31. P. Mason and A. Aftalion, *Phys. Rev. A* **84**, 033611 (2011).
32. K. J. H. Law, P. G. Kevrekidis, and L. S. Tuckerman, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 160405 (2010); *Erratum*, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 199903 (2011).
33. M. Pola, J. Stockhofe, P. Schmelcher, and P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. A* **86**, 053601 (2012).
34. S. Hayashi, M. Tsubota, and H. Takeuchi, *Phys. Rev. A* **87**, 063628 (2013).
35. A. Richaud, V. Penna, R. Mayol, and M. Guilleumas, *Phys. Rev. A* **101**, 013630 (2020).
36. A. Richaud, V. Penna, and A. L. Fetter, *Phys. Rev. A* **103**, 023311 (2021).
37. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **113**, 539 (2021).
38. K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 250406 (2004).
39. H. Takeuchi, K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Nitta, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 245301 (2012).
40. M. Nitta, K. Kasamatsu, M. Tsubota, and H. Takeuchi, *Phys. Rev. A* **85**, 053639 (2012).
41. K. Kasamatsu, H. Takeuchi, M. Tsubota, and M. Nitta, *Phys. Rev. A* **88**, 013620 (2013).
42. S. B. Gudnason and M. Nitta, *Phys. Rev. D* **98**, 125002 (2018).
43. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **113**, 848 (2021).
44. C. J. Pethick and H. Smith, *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2002).
45. L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose–Einstein Condensation*, Oxford Univ. Press, Oxford (2003).
46. A. L. Fetter, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 647 (2009).
47. A. A. Svidzinsky and A. L. Fetter, *Phys. Rev. A* **62**, 063617 (2000).
48. V. P. Ruban, *Phys. Rev. E* **64**, 036305 (2001).
49. A. Aftalion and I. Danaila, *Phys. Rev. A* **68**, 023603 (2003).
50. T.-L. Horng, S.-C. Gou, and T.-C. Lin, *Phys. Rev. A* **74**, 041603(R) (2006).
51. S. Serafini, L. Galantucci, E. Iseni, T. Bienaime, R. N. Bisset, C. F. Barenghi, F. Dalfovo, G. Lamporesi, and G. Ferrari, *Phys. Rev. X* **7**, 021031 (2017).
52. C. Ticknor, W. Wang, and P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. A* **98**, 033609 (2018).
53. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **108**, 638 (2018).
54. C. Ticknor, V. P. Ruban, and P. G. Kevrekidis, *Phys. Rev. A* **99**, 063604 (2019).
55. K. Padavić, K. Sun, C. Lannert, and S. Vishveshwara, *Phys. Rev. A* **102**, 043305 (2020).
56. N. Chamel and P. Haensel, *Liv. Rev. Relat.* **11**, 10 (2008).
57. G. E. Volovik, *Proc. Natl. Ac. Sci. USA* **97**, 2431 (2000).
58. <http://home.itp.ac.ru/~ruban/12APR2021/v1.avi>
59. <http://home.itp.ac.ru/~ruban/12APR2021/v2.avi>
60. <http://home.itp.ac.ru/~ruban/12APR2021/v3.avi>
61. <http://home.itp.ac.ru/~ruban/12APR2021/v4.avi>
62. <http://home.itp.ac.ru/~ruban/12APR2021/v5.avi>