

# НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ В РЕЗКО КОНТРАСТНОЙ СРЕДЕ В ПРИСУТСТВИИ ОДИНОЧНОЙ КРУПНОМАСШТАБНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

*П. С. Кондратенко\**, *К. В. Леонов*

*Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук  
115191, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 11 июля 2021 г.,

после переработки 11 июля 2021 г.

Принята к публикации 12 июля 2021 г.

Проанализированы неклассические режимы переноса примеси в статистически однородной резко контрастной среде в присутствии одиночной крупномасштабной неоднородности в форме адвективного канала. В основной среде на пути от источника примеси к каналу реализуются различные режимы переноса (классические и неклассические), включая быструю и медленную адвекцию–диффузию, квазидиффузию и субдиффузию. Распределение концентрации в канале состоит из экспоненциально малого многоступенчатого предвестника и основного концентрационного сигнала, форма и длительность которого зависят от соотношения между характеристиками основной среды.

DOI: 10.31857/S0044451021120117

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Уже давно неклассические процессы переноса примеси являются предметом интенсивных исследований (см. [1–9]). Одним из характерных признаков, которые их выделяют, является зависимость основной области локализации примеси от времени,

$$R(t) \propto t^\gamma, \quad (1)$$

в которой, в отличие от классической диффузии,  $\gamma \neq 1/2$ . Физическими предпосылками для неклассических процессов могут быть дальнедействующие корреляции или долговременные релаксации характеристик среды, формирующих механизмы переноса. В первом случае возникает тенденция к супердиффузии, когда в соотношении (1) имеет место  $\gamma > 1/2$ , а во втором — к субдиффузии, когда  $\gamma < 1/2$ . Примером, относящимся ко второй категории сред, является резко контрастная двупористая среда, неравновесная модель переноса в которой была разработана в [10, 11].

Большинство исследований неклассических процессов переноса касаются сред, которые в среднем

являются однородными. Между тем большой практический интерес представляет перенос в средах, содержащих резкие крупномасштабные неоднородности. Настоящая работа посвящена исследованию переноса примеси в резко контрастной двупористой среде в присутствии одиночной крупномасштабной неоднородности в форме адвективного канала. Задача актуальна для проведения оценок надежности захоронений радиоактивных отходов в геологических средах.

Дальнейшая структура статьи следующая. В разд. 2 сформулирована постановка задачи. Раздел 3 посвящен анализу режимов переноса в резко контрастной двупористой среде при наличии удаленного адвективного канала. В заключительном разделе кратко подведены итоги.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Начнем раздел с краткой формулировки модели резко контрастной двупористой среды. Среда в модели [10, 11] представлена в виде совокупности двух подсистем: быстрой — набора пронизываемых каналов, пронизывающих всю среду, и медленной — набора изолированных слабопроницаемых пористых блоков. И каналы, и блоки пропитаны влагой. Средняя ширина канала намного меньше, чем средний

\* E-mail: kondrat@ibrae.ac.ru

размер блока,  $a \ll b$ . Механизм переноса примеси — это адвекция и диффузия в каналах и диффузия внутри пористых блоков. На стенках каналов и порах в блоках происходит сорбция примеси. Прямой перенос между блоками отсутствует. Примесь, сконцентрированную в каналах, будем называть активной. Длина корреляции в распределении транспортных характеристик среды имеет порядок размера блока  $b$ . Уравнение переноса для концентрации активной примеси, усредненное по объему с характерным размером порядка корреляционной длины, и начальное условие имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [c(\mathbf{r}, t) + \int_0^t dt' \varphi(t-t') c(\mathbf{r}, t')] + \\ + \mathbf{u} \nabla c(\mathbf{r}, t) - D \Delta c(\mathbf{r}, t) = 0, \\ c(\mathbf{r}, 0) = N \delta(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $\mathbf{u}$  — средняя скорость адвекции,  $D$  — коэффициент диффузии, учитывающий вклад дисперсии ( $\sim ub$ ), возникающей из-за извилистости каналов, и молекулярную диффузию. Второй член в квадратных скобках в левой части уравнения (2) отвечает за обмен примесью между каналами и блоками. Концентрация  $n(\mathbf{r}, t)$  обозначает количество частиц примеси в единице объема и имеет размерность обратного объема,  $N$  — полное число частиц примеси. Начало координат выбрано совпадающим с положением источника примеси, размер которого предполагается много меньше других линейных масштабов задачи, и потому он считается точечным;  $\delta(\mathbf{r})$  — трехмерная функция Дирака. Скорость адвекции удовлетворяет условию несжимаемости:  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ . Интегральное ядро зависит от распределения блоков по размеру и форме, поэтому при его поиске в общем виде возникают трудности. В пределе малых и больших значений аргумента оно может быть определено и согласно [10, 11] дается выражениями

$$\varphi(t) \cong \begin{cases} (\pi t t_a)^{-1/2}, & t \ll t_b, \\ \sqrt{\frac{t_b}{t_a}} \delta(t - \varepsilon), \varepsilon \rightarrow +0, & t \gg t_b, \end{cases} \tag{3}$$

где  $d$  — коэффициент диффузии в блоках,  $t_a \sim \sim a^2/4d$  — характерное время, за которое примесь проникла в блоки на расстояние порядка размера канала  $a$ ;  $t_b \sim \sim b^2/4d$  — характерное время, за которое примесь из каналов почти заполнила весь объем блоков и находится в обменном равновесном состоянии,  $t_a \ll t_b$ .

Адвективный канал расположен на значительном расстоянии от источника. По форме он представляет собой прямой цилиндр, вдоль оси которого

течет жидкость (вода) с постоянной скоростью  $U$ , удовлетворяющей условию

$$U \gg u. \tag{4}$$

Обозначим зависящую от координаты  $x$ , направленной вдоль оси канала, и времени одномерную (проинтегрированную по поперечному сечению канала) концентрацию  $C(x, t)$  — отнесенное к единице длины вдоль оси  $x$  количество примеси в канале. Благодаря неравенству (4) перенос в канале оказывается значительно быстрее в сравнении с переносом в основной (двупористой) среде. Отсюда вытекают три следствия. Первое — это то, что характерный размер основной области локализации примеси в основной среде значительно меньше продольного размера концентрационного сигнала в канале. Второе — источник примеси для канала на его границе с основной средой можно считать точечным, и третье — задачу о переносе примеси в основной среде, как и в адвективном канале, можно считать одномерной с координатой  $\xi$ , направленной вдоль скорости  $\mathbf{u}$  с нулевым граничным условием для концентрации в точке пересечения координаты  $\xi$  с каналом:

$$n(\xi, t)|_{\xi=h} = 0. \tag{5}$$

Здесь

$$n(\xi, t) = \int d^2 r_{\perp} c(\mathbf{r}, t), \tag{6}$$

$\mathbf{r}_{\perp}$  — двумерная координата в плоскости, перпендикулярной скорости  $\mathbf{u}$ ,  $h$  — расстояние по координате  $\xi$  от источника примеси в основной среде до пересечения с адвективным каналом.

Таким образом, концентрация примеси в канале удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = q(t) \delta(x), \tag{7}$$

где

$$q(t) = \left( u - D \frac{d}{d\xi} \right) n(\xi, t)|_{\xi=h} \tag{8}$$

— полный поток частиц примеси из основной среды в адвективный канал.

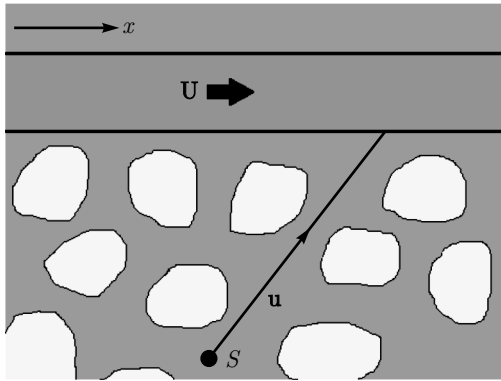
Решение уравнения (7) имеет вид

$$C(x, t) = \frac{1}{U} q(\tilde{t}) \theta(x), \quad \tilde{t} = t - \frac{x}{U}, \tag{9}$$

где  $\theta(x)$  — функция Хевисайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Геометрия задачи, сведенной нами к одномерной версии, схематически изображена на рисунке.



Геометрия задачи.  $S$  — источник примеси,  $u$  — средняя скорость адвекции в основной среде

### 3. РЕЖИМЫ ПЕРЕНОСА И КОНЦЕНТРАЦИЯ ПРИМЕСИ В АДВЕКТИВНОМ КАНАЛЕ

Одномерная версия уравнения (2) с начальным условием

$$n(\xi, t)|_{t=0} = N\delta(\xi) \tag{10}$$

в условно бесконечной среде в представлении Фурье–Лапласа

$$n_{pk} = \int_0^\infty dt e^{-pt} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-ik\xi} n(\xi, t)$$

имеет вид

$$(\Lambda(p) + iuk + Dk^2)n_{pk} = N. \tag{11}$$

Здесь  $\Lambda(p) = p(1 + \varphi_p)$ ,  $\varphi_p$  — образ Лапласа функции  $\varphi(t)$  из (2). С учетом соотношений (3) имеем следующие предельные выражения для функции  $\Lambda(p)$ :

$$\Lambda(p) \cong \begin{cases} p, & p \gg t_a^{-1}, \\ \sqrt{\frac{p}{t_a}}, & t_b^{-1} \ll p \ll t_a^{-1}, \\ \sqrt{\frac{t_a}{t_b}} p, & p \ll t_b^{-1}. \end{cases} \tag{12}$$

Разрешая алгебраическое уравнение (11) относительно  $n_{pk}$ ,

$$n_{pk} = \frac{N}{\Lambda(p) + iuk + Dk^2},$$

и выполняя с помощью теории вычетов обратное преобразование Фурье

$$n_p(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik\xi} n_{pk}, \tag{13}$$

находим решение одномерной версии уравнения (2) в представлении Лапласа, справедливое в области  $\xi \leq h$  и удовлетворяющее граничному условию (5):

$$n_p(\xi) = \frac{N}{2D\Pi(p)} e^{u\xi/2D} [e^{-|\xi|\Pi(p)} - e^{(\xi-2h)\Pi(p)}]. \tag{14}$$

Здесь

$$\Pi(p) = \sqrt{\frac{t_u^{-1} + \Lambda(p)}{D}}, \quad t_u = \frac{4D}{u^2}. \tag{15}$$

Характерное время  $t_u$  определено таким образом, что на текущих временах  $t \gg t_u$  перенос примеси в основной среде будет происходить главным образом за счет адвекции, а при  $t \ll t_u$  — диффузии. Подставляя (14) в соотношение (8), находим выражение для потока частиц примеси из основной среды в адвективный канал в представлении Лапласа:

$$q_p = N \exp \left[ h \left( \frac{u}{2D} - \Pi(p) \right) \right]. \tag{16}$$

Приступая к анализу распределения концентрации в адвективном канале, сделаем предположение, что расстояние от источника до канала удовлетворяет неравенству

$$h \gg u\sqrt{t_a t_b}. \tag{17}$$

Это условие, с одной стороны, дает возможность проявиться всем режимам переноса, свойственным основной среде, а с другой — представляется практически наиболее реальным.

Дальнейшие вычисления потока частиц примеси в канал

$$q(t) = N \int_{m-i\infty}^{m+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp \left[ h \left( \frac{u}{2D} - \Pi(p) \right) + pt \right], \tag{18}$$

$$\text{Re } m > 0,$$

зависят от соотношения между характерными временами  $t_a$ ,  $t_b$  и  $t_u$ . Приведем результаты для каждого из возможных случаев отдельно, воспользовавшись методом стационарной фазы. Стационарная точка  $p_0$  определяется из уравнения

$$-h \left. \frac{\partial \Pi}{\partial p} \right|_{p=p_0} + t = 0. \tag{19}$$

После каждой формулы будем указывать режим переноса в основной среде, относящийся к соответствующему интервалу времени.

1.  $t_u \ll t_a \ll t_b$ .

$$q(t) \cong N \frac{h}{2\sqrt{\pi D t^3}} \exp\left(-\frac{(h-ut)^2}{4Dt}\right), \quad (20)$$

$$t \ll \frac{h}{u}.$$

В этом интервале времен справедливо неравенство  $p_0 \gg t_a^{-1}$ , которое ведет к режиму быстрой адвекции-диффузии.

$$q(t) \cong N \frac{h}{2\sqrt{\pi D_u t^3}} \exp\left(-\frac{h^2}{4D_u t}\right), \quad (21)$$

$$\frac{h}{u} \ll t \ll \frac{h}{u} \sqrt{\frac{t_b}{t_a}},$$

где  $D_u = u^2 t_a$ . Здесь  $t_b^{-1} \ll p_0 \ll t_a^{-1}$  и реализуется режим квазидиффузии.

$$q(t) \cong N \frac{h}{2\sqrt{\pi \tilde{D} t^3}} \exp\left(-\frac{(h-\tilde{u}t)^2}{4\tilde{D}t}\right), \quad (22)$$

$$t \gg \frac{h}{u} \sqrt{\frac{t_b}{t_a}},$$

где

$$\tilde{u} = u \sqrt{\frac{t_a}{t_b}}, \quad \tilde{D} = D \sqrt{\frac{t_a}{t_b}}, \quad \frac{t_a}{t_b} \ll 1.$$

В этом случае реализуется режим медленной адвекции-диффузии, который в отличие от (20) имеет перенормированные скорость адвекции и коэффициент диффузии.

2.  $t_a \ll t_u \ll t_b$ .

$$q(t) \cong N \frac{h}{2\sqrt{\pi D t^3}} \exp\left(-\frac{h^2}{4Dt}\right), \quad t \ll \frac{h}{u} \sqrt{\frac{t_a}{t_u}}. \quad (23)$$

Здесь выполняется неравенство  $p_0 \gg t_a^{-1} \gg t_u^{-1}$ , которое ведет к режиму быстрой диффузии.

$$q(t) \cong \frac{N}{t\sqrt{6\pi\eta(t)}} \exp\left(-\frac{3}{4}\eta(t)\right), \quad (24)$$

$$\frac{h}{u} \sqrt{\frac{t_a}{t_u}} \ll t \ll \frac{h}{u} \left(\frac{t_u}{t_a}\right)^{1/4},$$

где

$$\eta(t) = \left(\frac{h^4}{4D^2 t_a t}\right)^{1/3}.$$

Реализуется режим субдиффузии.

$$q(t) \cong N \frac{h}{2\sqrt{\pi D_u t^3}} \exp\left(-\frac{h^2}{4D_u t}\right), \quad (25)$$

$$\frac{h}{u} \left(\frac{t_u}{t_a}\right)^{1/4} \ll t \ll \frac{h}{u} \sqrt{\frac{t_b}{t_a}}.$$

Этот случай соответствует квазидиффузии.

$$q(t) \cong N \frac{h}{2\sqrt{\pi \tilde{D} t^3}} \exp\left(-\frac{(h-\tilde{u}t)^2}{4\tilde{D}t}\right), \quad (26)$$

$$t \gg \frac{h}{u} \sqrt{\frac{t_b}{t_a}}.$$

Аналогично (22), реализуется медленная адвекция-диффузия.

3.  $t_a \ll t_b \ll t_u$ .

$$q(t) \cong N \frac{h}{2\sqrt{\pi D t^3}} \exp\left(-\frac{h^2}{4Dt}\right), \quad t \ll \frac{h}{u} \sqrt{\frac{t_a}{t_u}}. \quad (27)$$

Аналогично (23) – быстрая диффузия.

$$q(t) \cong \frac{N}{t\sqrt{6\pi\eta(t)}} \exp\left(-\frac{3}{4}\eta(t)\right), \quad (28)$$

$$\frac{h}{u} \sqrt{\frac{t_a}{t_u}} \ll t \ll \frac{h}{u} \left(\frac{t_b^3}{t_a t_u^2}\right)^{1/4}.$$

Аналогично (24) – субдиффузия.

$$q(t) \cong N \frac{h}{2\sqrt{\pi \tilde{D} t^3}} \exp\left(-\frac{(h-\tilde{u}t)^2}{4\tilde{D}t}\right), \quad (29)$$

$$t \gg \frac{h}{u} \left(\frac{t_b^3}{t_a t_u^2}\right)^{1/4}.$$

Аналогично (22) – медленная адвекция-диффузия.

Отметим, что согласно (15), (16) величина потока  $q(t)$  удовлетворяет естественному соотношению

$$\int_0^\infty dt q(t) = N, \quad (30)$$

представляющему собой закон сохранения числа частиц примеси.

Формулы для распределения концентрации в адвективном канале получаются подстановкой  $q(t)$  из (20)–(29) в выражение (9). Особенностью этого распределения при условии (17) является то, что на временах  $t < h/\tilde{u}$  в канал приходит экспоненциально малый многоступенчатый предвестник и лишь при  $t \sim t_N = h/\tilde{u}$  туда доходит основной концентрационный сигнал, определяемый режимом переноса медленной адвекции-диффузии. Длительность и пространственная протяженность основной части концентрационного сигнала в канале согласно выражениям (9), (22), (29) составляют, соответственно, величины порядка

$$\Delta t \sim \frac{1}{\tilde{u}} \sqrt{\tilde{D} t_N}, \quad \Delta x \sim U \Delta t.$$

Что касается ступеней предвестника, то в соответствии с (9) они определяются модификацией формул (20)–(29) и подчиняются известному [9] правилу: чем более удаленная ступень, тем более ранний режим переноса ее определяет.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы состоят в следующем.

Проанализированы свойства переноса примеси в резко контрастной среде в присутствии одиночной крупномасштабной неоднородности в форме удаленного адвективного канала. С учетом сильного превосходства скорости течения в канале по сравнению со скоростью просачивания жидкости в основной (резко контрастной двупористой) среде,  $U \gg u$ , задача в этой среде сведена к одномерной. Также одномерной оказалась и задача в адвективном канале, поскольку была сформулирована относительно концентрации как количества частиц примеси, отнесенного к единице длины вдоль канала. Передвигающееся со скоростью  $U$  распределение концентрации в канале состоит из экспоненциально малого многоступенчатого предвестника и основного концентрационного сигнала на поздних временах. Основной сигнал определяется самым поздним режимом медленной адвекции–диффузии. Между пространственной протяженностью и временной длительностью основного сигнала в канале имеет место соотношение

$$\Delta x \sim U \Delta t.$$

Совокупность и последовательность режимов переноса в основной среде зависят от соотношения между тремя характерными временами задачи  $t_a$ ,  $t_b$  и  $t_u$ . Выделены три случая:  $t_u \ll t_a \ll t_b$ ,  $t_a \ll \ll t_u \ll t_b$ ,  $t_a \ll t_b \ll t_u$ . В первом случае реализуется последовательность трех режимов: быст-

рая адвекция–диффузия, квазидиффузия и медленная адвекция–диффузия. При  $t_a \ll t_u \ll t_b$  последовательность режимов следующая: быстрая диффузия, субдиффузия, квазидиффузия и медленная адвекция–диффузия. В случае  $t_a \ll t_b \ll t_u$  реализуются режимы: быстрая диффузия, субдиффузия и медленная адвекция–диффузия.

Таким образом, распределение концентрации на расстояниях, много больших размеров основной области локализации примеси, описывается многоступенчатыми экспоненциально убывающими асимптотиками. С увеличением расстояния характер убывания в асимптотиках диктуется все более ранними по времени режимами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Дрейзин, А. М. Дыхне, ЖЭТФ **63**, 242 (1973).
2. H. Sher and M. Lax, Phys Rev. B **7**, 4491 (1973).
3. S. P. Neuman, Water Resources Res. **26**, 1749 (1990).
4. J. P. Bouchaud and A. Georges, Phys. Rep. **195**, 127 (1990).
5. M. Sahimi, Phys. Rep. **306**, 213 (1998).
6. Л. М. Зеленый, А. В. Милованов, УФН **174**, 809 (2004).
7. L. Bolshov, P. Kondratenko, K. Pruess, and V. Semenov, Vadose Zone J. **7**, 1135 (2008).
8. О. Г. Бакунин, УФН **185**, 271 (2015).
9. Л. А. Большов, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев, УФН **189**, 691 (2019).
10. Л. В. Матвеев, ЖЭТФ **142**, 943 (2012).
11. L. V. Matveev, Physica A **406**, 119 (2014).