

# ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ УЛЬТРАХОЛОДНЫХ АТОМОВ В КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛАХ

*И. А. Дынников<sup>a</sup>, А. Я. Мальцев<sup>b\*</sup>*

<sup>a</sup> *Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук  
119991, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук  
142432, Черногловка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 28 июля 2021 г.,  
после переработки 8 августа 2021 г.  
Принята к публикации 12 августа 2021 г.

Мы рассматриваем квазипериодические потенциалы на плоскости, которые могут служить «переходным звеном» между упорядоченными (периодическими) и хаотическими (случайными) потенциалами. Практически в любом семействе квазипериодических потенциалов, зависящих от некоторого набора параметров, можно выделить множество (в пространстве параметров), где, согласно определенному критерию, возникают потенциалы, обладающие признаками упорядоченных потенциалов, и множество, где возникают потенциалы, обладающие признаками случайных потенциалов. Эти множества дополняют друг друга в полном пространстве параметров, при этом каждое из них имеет свою специфическую структуру. Различие между «упорядоченными» и «хаотическими» потенциалами будет проявляться, в частности, в транспортных свойствах при различных значениях энергии, которые мы будем рассматривать здесь применительно к системам ультрахолодных атомов. Отметим здесь также, что транспортные свойства частиц в рассматриваемых потенциалах могут сопровождаться явлениями «частичной интегрируемости», свойственными двумерным гамильтоновым системам.

DOI: 10.31857/S0044451021120075

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе мы рассмотрим приложения полученных сравнительно недавно результатов в теории квазипериодических функций на плоскости к динамике ультрахолодных атомов в квазипериодических потенциалах. Общая теория квазипериодических функций представляет в настоящее время классическую область математики и математической физики, истоки которой восходят к исследованиям Бора и Безиковича [1, 2]. В разных источниках можно встретить несколько различающиеся определения квазипериодической функции. Здесь будем называть квазипериодической функцией на плоскости функцию  $f(x, y)$ , полученную ограничением гладкой  $d$ -периодической функции  $F(z^1, \dots, z^d)$  при аффинном вложении  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^d$  общего положения. Размерность  $d$  мы при этом будем называть числом квазипериодов соответствующей квазипериодической функции на плоскости.

Вопросы, рассматриваемые нами здесь, будут главным образом связаны с геометрией областей, задаваемых соотношением

$$f(x, y) \leq \epsilon_0 \quad (1.1)$$

для различных значений энергии  $\epsilon_0$ . Функция  $f(x, y)$  будет играть при этом роль потенциала, в котором рассматривается двумерная динамика частицы. Легко видеть, что если динамика является чисто классической, то такие области играют роль «областей доступности», в которых может оказаться частица с энергией  $\epsilon_0$ . Как мы увидим ниже, сложность движения частицы, свойственная в общем случае любой гамильтоновой динамике, может складываться со сложностью геометрии соответствующих «областей доступности», способных обладать определенными «хаотическими свойствами».

Кроме геометрии «областей доступности» для частицы с заданной энергией нам будет также интересно описание изменений этой геометрии при изменении параметров, задающих функцию  $f(x, y)$  в

\* E-mail: maltsev@itp.ac.ru

реальных системах. В частности, может представлять интерес управление динамикой газа частиц в квазипериодических потенциалах путем изменения таких параметров.

Нетрудно видеть, что геометрия областей (1.1) тесно связана в действительности с геометрией линий уровня

$$f(x, y) = \epsilon_0 \quad (1.2)$$

функции  $f(x, y)$ , ограничивающих эти области при соответствующих значениях  $\epsilon_0$ . Можно также сказать, что каждая из областей (1.1) является объединением линий уровня (1.2) для всех  $\epsilon'_0 \leq \epsilon_0$ .

Общая задача описания геометрии линий уровня квазипериодических функций на плоскости была поставлена Новиковым в начале 1980-х годов [3] и затем активно исследовалась в его топологической школе [4–11]. В своей первоначальной постановке она предполагала исследование геометрии линий уровня функций с тремя квазипериодами, что совпадает в действительности с задачей описания геометрии линий пересечения произвольной 3-периодической двумерной поверхности в  $\mathbb{R}^3$  плоскостями заданного направления. В такой постановке задача Новикова имеет самое непосредственное отношение к задаче описания динамики электронов в металлах со сложными поверхностями Ферми, которая, в свою очередь, играет важнейшую роль при описании гальваномагнитных явлений в металлах [12–18]. Отметим здесь, что результаты, полученные при исследовании задачи Новикова в этом случае, оказались весьма важны для описания гальваномагнитных явлений в металлах в наиболее общей ситуации. В частности, оказалось возможным определить нетривиальные топологические числа, наблюдаемые в проводимости нормальных металлов со сложными поверхностями Ферми в достаточно сильных магнитных полях [19]. Кроме того, полная классификация возможных типов динамики (траекторий) электронов на поверхности Ферми позволила дать также полное описание различных асимптотических режимов поведения проводимости в металлах с произвольными поверхностями Ферми в пределе сильных магнитных полей [20–22].

В целом, задача Новикова для произвольного числа квазипериодов тесно связана с теорией слоев и теорией динамических систем на многообразиях. В частности, эта связь также играет важнейшую роль при исследованиях задачи Новикова для четырех квазипериодов (см. [23, 24]), позволивших получить ряд основополагающих результатов для этого случая.

В данной работе мы постараемся использовать наиболее полным образом результаты, полученные к настоящему времени при исследовании задачи Новикова, для описания главных особенностей динамики частиц в потенциалах, связанных с этой задачей. Кроме того, анализ результатов, полученных для задачи Новикова, позволяет, в действительности, предложить критерий, разделяющий все квазипериодические потенциалы (с тремя и более квазипериодами) на два типа, а именно, потенциалы с топологически регулярными линиями уровня и потенциалы с хаотическими линиями уровня. Если рассматривать квазипериодические потенциалы как модель перехода между периодическими и случайными потенциалами, то потенциалы первого типа можно отнести к потенциалам, динамика в которых сохраняет некоторую топологическую интегрируемость, а потенциалы второго типа — к потенциалам, динамика в которых близка к динамике в случайных потенциалах. В этом смысле, только потенциалы второго типа могут представлять собой модели случайных потенциалов.

В действительности, довольно часто квазипериодические потенциалы возникают некоторыми семействами (и так будет в данной работе), т. е. мы имеем, как правило, целое семейство функций  $V(x, y, \mathbf{U})$ , зависящих гладким образом от ряда дополнительных параметров  $\mathbf{U} = (U^1, \dots, U^N)$ . В этой ситуации важным является то, что потенциалы разных типов возникают, как правило, на множествах, обладающих весьма специфической структурой. Так, потенциалы первого типа, будучи устойчивы по отношению к малым вариациям параметров, возникают на открытых множествах в полном пространстве параметров. Более того, это множество является объединением (конечного или счетного) числа областей (зон устойчивости), каждая из которых определяется своим значением некоторого топологического инварианта (набором целых чисел). Напротив, потенциалы второго типа возникают на множествах фрактального типа, образованных дополнениями к описанному выше множествам.

Можно видеть, таким образом, что для создания квазипериодических потенциалов, наиболее близких к истинно случайным потенциалам, необходимо нахождение довольно сложного множества в пространстве параметров, задающих квазипериодические потенциалы рассматриваемого семейства. Можно отметить здесь также, что с ростом числа квазипериодов такое множество становится все более и более богатым.

Наиболее удобными системами для экспериментального изучения динамики в квазипериодических потенциалах нам представляются системы ультрахолодных атомов в оптических ловушках, где такие потенциалы могут быть легко реализованы путем наложения нескольких стоячих волн. Надо сказать, что, несмотря на специальную методику создания таких потенциалов, они, в действительности, обладают всеми особенностями задачи Новикова в общей постановке, так что такие системы позволяют изучать все существенные аспекты рассматриваемой нами задачи.

Мы будем, как уже сказано выше, заниматься изучением динамики частиц в таких потенциалах при различных энергиях частицы. Приведенные результаты, таким образом, будут иметь прямое отношение к описанию транспортных явлений в пределе почти не взаимодействующих атомов в ловушках с рассматриваемыми потенциалами. Этот предел, в действительности, возникает довольно часто в случае малой концентрации (нейтральных) атомов, захваченных в ловушку, а также малого радиуса их взаимодействия. В нашем случае мы должны потребовать, чтобы средняя длина свободного пробега атомов была больше типичной длины, на которой проявляются глобальные геометрические особенности их траекторий в рассматриваемом потенциале. При этом двумерные гамильтоновы системы обладают, как правило, весьма специальной динамикой [25, 26], будучи интегрируемыми на достаточно низких уровнях энергии и переходя к хаотическим режимам при повышении энергии. В нашем случае, мы будем иметь возможность наблюдать, как данное обстоятельство коррелирует с геометрией линий уровня наших потенциалов.

## 2. ОБЩИЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. РЕГУЛЯРНЫЕ И СЛУЧАЙНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Как хорошо известно, наиболее распространенным методом создания внешних потенциалов для атомов в оптических ловушках является интерференция стоячих волн от дополнительных лазерных источников [27–31]. В главном приближении такие потенциалы имеют обычно конечное число гармоник, т. е. представимы в виде суммы конечного числа синусоидальных потенциалов. Несмотря на это обстоятельство, как мы увидим ниже, в рассматриваемых нами ситуациях такие потенциалы обладают уже достаточной сложностью, и для описания атом-

ной динамики в них необходимо представить полную картину, возникающую при исследовании общей задачи Новикова.

Нетрудно видеть, что рассматриваемая нами задача быстро усложняется с ростом числа квазипериодов. Как мы уже сказали, строгие аналитические результаты существуют на данный момент лишь для случая трех и четырех квазипериодов. Здесь удобно для сравнения кратко рассмотреть также ситуации «одного» и «двух» квазипериодов, отвечающие периодическим потенциалам, зависящим лишь от одной координаты, и двояко-периодическим потенциалам на плоскости соответственно.

В нашей ситуации случай «одного» квазипериода будет соответствовать в действительности наличию весьма простого потенциала, который часто можно приближенно записать в виде

$$V(x, y) = V_0 \sin kx, \quad (2.1)$$

где  $T = 2\pi/k$  представляет собой обычный период потенциала вдоль оси  $x$ . Создание потенциалов такого типа является наиболее простым с технической точки зрения и, конечно, такие потенциалы широко используются в системах холодных атомов.

Линии уровня потенциала (2.1), очевидно, представляют собой вертикальные прямые, а движение атомов в таком потенциале происходит в прямых вертикальных полосах при  $E < V_0$ . В действительности, легко видеть, что в данной ситуации движение атома ограничено вертикальной полосой при условии

$$E - p_y^2/2m < V_0,$$

при этом атом совершает периодические осцилляции по оси  $x$  и движется равномерно вдоль оси  $y$ . При нарушении приведенного выше условия, очевидно, атом движется вдоль периодической траектории, имеющей ненулевой средний наклон по отношению к оси  $y$ . Нетрудно видеть, что аналогичные условия могут быть выписаны также в движущейся равномерно системе отчета, что позволяет также дать аналогичное описание движения атомов в потенциалах вида

$$V(x, y, t) = V_0 \sin k(x - ut).$$

Здесь можно видеть, что при достаточно низких энергиях атомов и значении скорости  $u$  движущийся потенциал осуществляет полную «транспортировку» атомного газа вдоль оси  $x$ . В общем случае, при значительном разбросе энергий движущийся потенциал позволяет осуществлять лишь частичную «транспортировку» атомного газа.

Геометрия линий уровня дважды периодического потенциала на плоскости (с двумя независимыми периодами  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ ) также имеет сравнительно простое описание. Как и в случае «одного» квазипериода, значения потенциала  $V(x, y)$  лежат здесь в некотором замкнутом отрезке  $[V_{min}, V_{max}]$ . Нетрудно видеть при этом, что для потенциалов общего положения линии уровня потенциала являются замкнутыми при значениях  $E$ , достаточно близких к  $V_{min}$  или  $V_{max}$ . В первом случае, однако, замкнутые линии уровня ограничивают области меньших значений потенциала, в то время как во втором случае они ограничивают области больших значений. В случае общего положения при этом имеются два различных значения  $V_1, V_2$ :

$$V_{min} < V_1 < V_2 < V_{max},$$

таких что при всех фиксированных значениях  $V(x, y)$ , лежащих в интервале  $(V_1, V_2)$ , соответствующие уровни содержат открытые (незамкнутые) компоненты. Все открытые компоненты (линии) уровня потенциала  $V(x, y)$  являются в этом случае периодическими кривыми, имеющими одно и то же среднее направление в плоскости (для всех уровней в интервале  $(V_1, V_2)$ ). Среднее направление открытых линий уровня может быть при этом любым целочисленным направлением, т. е. направлением, задаваемым вектором

$$\mathbf{l} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2$$

с некоторыми целыми  $(n_1, n_2)$ . Отметим, что наиболее естественным является при этом определить числа  $(n_1, n_2)$  как несократимую пару целых чисел, заданную с точностью до общего знака.

Все открытые линии уровня при заданном значении потенциала можно разделить на конечное число семейств, таких что все линии одного семейства переходят друг в друга при сдвиге на некоторый период  $V(x, y)$ . Число таких различных семейств всегда является четным (хотя может меняться внутри интервала  $(V_1, V_2)$  для достаточно сложных потенциалов).

Можно видеть, таким образом, что движение атомов в периодических потенциалах общего положения происходит в ограниченных областях при  $V_{min} < \epsilon_0 < V_1$ , в периодических полосах (а также, возможно, и изолированных ограниченных областях) при  $V_1 < \epsilon_0 < V_2$ , в плоскости с исключенными ограниченными областями (и, возможно, изолированными ограниченными областями) при  $V_2 < \epsilon_0 < V_{max}$  и во всей плоскости при  $\epsilon_0 > V_{max}$ . При адиабатиче-

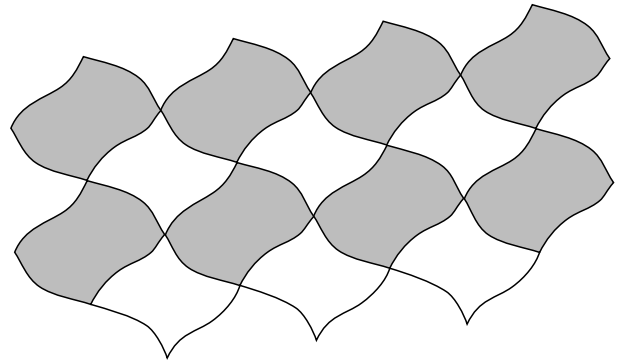


Рис. 1. Периодическая сеть сингулярных линий уровня, отделяющая области меньших значений от областей больших значений периодического потенциала

ских сдвигах потенциала в плоскости атомы, находящиеся в ограниченных областях, сдвигаются вместе с ними, в то время как атомы, находящиеся в периодических полосах, сдвигаются вместе с полосами лишь при движении в направлении, перпендикулярном к полосам. В отличие от случая «одного» квазипериода, однако, здесь сдвиг потенциала вдоль направления полос также оказывает влияние на движение атомов, поскольку полосы имеют теперь нетривиальную форму.

Для периодических потенциалов необщего положения (например, имеющих элементы вращательной симметрии) значения  $V_1$  и  $V_2$  могут совпадать. Открытые линии уровня у таких потенциалов отсутствуют, а на уровне  $V_1 = V_2$  возникает сингулярная сеть (рис. 1), отделяющая области меньших значений  $V(x, y)$  от областей больших значений. Атомы движутся в ограниченных областях при  $V_{min} < \epsilon_0 < V_1 = V_2$  и во всей плоскости с исключенными ограниченными областями (и, возможно, изолированных ограниченных областях) при  $V_1 = V_2 < \epsilon_0 < V_{max}$ .

Методы создания периодических потенциалов в плоскости естественно подразумевают наличие некоторого конечного числа параметров, описывающих такие потенциалы. Например, при формировании потенциала с помощью наложения двух синусоидальных стоячих волн (с генерацией высших гармоник или без нее) такими параметрами могут быть ориентации обеих синусоид, их амплитуды, периоды, положения максимумов, возможно, угол между их поляризациями и относительный сдвиг фаз. Нетрудно видеть, что в этом случае сдвиг максимумов любой из синусоид приводит в действительности к сдвигу результирующего потенциала как цело-

го и не меняет качественно рассматриваемой нами картины.

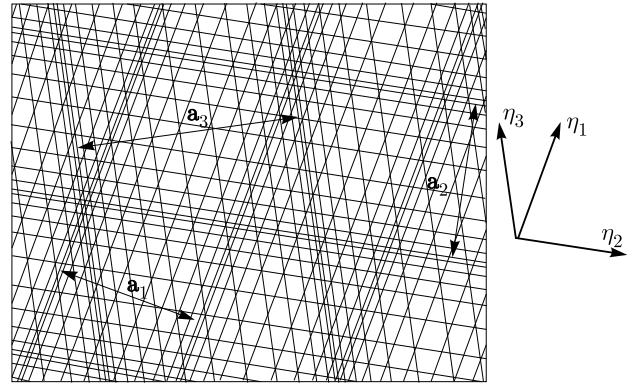
Что касается более общих (непрерывных) вариаций описанных выше параметров, то здесь можно отметить одну общую важную особенность. А именно, потенциалы общего положения образуют открытое множество, т. е. соотношение  $V_2 > V_1$  является устойчивым по отношению к произвольному малому изменению параметров. Напротив, условие  $V_1 = V_2$  является неустойчивым и разрушается при сколь угодно малой вариации параметров общего вида. Кроме этого, локально устойчивыми являются также числа  $(n_1, n_2)$ , связывающие средние направления открытых линий уровня с периодами потенциала (хотя сами  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  могут меняться с изменением параметров), которые могут меняться лишь при переходе потенциала через ситуацию необщего положения ( $V_1 = V_2$ ). Таким образом, можно видеть, что полное пространство параметров можно в общем случае разделить на области, соответствующие различным целочисленным парам  $(n_1, n_2)$  и разделенные границами, на которых имеет место соотношение  $V_1 = V_2$ .

Здесь мы хотели бы также сразу отметить, что несмотря на сравнительно простое описание «областей доступности» в периодических потенциалах при любых значениях энергии, консервативная динамика холодных атомов в таких потенциалах может обладать весьма нетривиальными свойствами [32–34].

Мы перейдем теперь к рассмотрению потенциалов с большим числом квазипериодов, что и будет составлять основное содержание нашей работы.

Создание квазипериодических потенциалов в системах ультрахолодных атомов с помощью интерференции стоячих волн также привлекало интерес как с теоретической, так и с экспериментальной точки зрения. В частности, такие потенциалы рассматривались как в случае трехмерных [35], так и в случае двумерных [36–39] оптических решеток для плененных атомов в магнитооптических ловушках (см. также обзор по созданию, удержанию и мониторингу поведения газов ультрахолодных атомов в том числе в потенциалах различной формы в работе [40]). Можно отметить также, что квазипериодические (квазикристаллические) структуры в двумерных системах взаимодействующих ультрахолодных атомов могут возникать и при отсутствии специальной внешней модуляции [41].

Как мы уже сказали выше, нас здесь будут интересовать квазипериодические потенциалы для двумерных систем ультрахолодных атомов. Мы рас-



**Рис. 2.** Наложение трех стоячих волн в плоскости с образованием потенциала с тремя квазипериодами (схематично). (Векторы  $\eta_i$  указывают направления фронтов волн, а векторы  $\mathbf{a}_i$  — сдвиги между максимумами их амплитуд)

смотрим здесь случаи трех и четырех квазипериодов, для которых на данный момент имеются глубокие аналитические результаты. В данном разделе мы просто сформулируем строгие аналитические результаты, полученные для таких потенциалов к настоящему времени. В следующем разделе мы более детально рассмотрим особенности возникающей здесь геометрии на конкретных примерах.

Как мы отметили, наиболее глубоко исследованной является на данный момент задача Новикова с тремя квазипериодами, которую мы и рассмотрим здесь наиболее подробно. В рассматриваемой нами методике создания потенциалов в плоскости эта ситуация соответствует потенциалам, получаемым наложением трех синусоидальных стоячих волн, ориентированных под разными углами (с появлением высших гармоник или без него) (рис. 2).

Наложение трех (и более) стоячих волн в решетках холодных атомов может использоваться не только для создания квазипериодических, но и интересных периодических потенциалов в двумерных системах (в частности, такая схема была предложена в работе [42] для создания шестиугольных (сотовых) решеток и в работе [43] для создания тришестиугольных (Кагоме) решеток). В этом случае волновые числа соответствующих волн должны, вообще говоря, удовлетворять ряду специальных дополнительных условий. В нашей ситуации мы будем предполагать, что волновые числа являются независимыми параметрами на пространстве рассматриваемых потенциалов. В случае общего положения рассматриваемые нами потенциалы не будут иметь точ-

ных периодов в плоскости, которые могут возникать лишь для специальных значений параметров.

Как мы уже говорили, приводимые ниже результаты будут основываться лишь на квазипериодических свойствах возникающих при этом потенциалов, поэтому многие дополнительные детали их возникновения не будут, в действительности, играть какой-либо роли.

Нетрудно видеть, что потенциал, порожденный тремя синусоидальными волнами (и высшими гармониками),

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^3 V_i \cos(\mathbf{k}_{(i)}\mathbf{r} + \delta_i) + \dots,$$

является ограничением периодической в  $\mathbb{R}^3$  функции

$$V(X^1, X^2, X^3) = \sum_{i=1}^3 V_i \cos X^i + \dots$$

при аффинном вложении  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , задаваемом формулами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k_{(1)}^1 x + k_{(1)}^2 y + \delta_1 \\ k_{(2)}^1 x + k_{(2)}^2 y + \delta_2 \\ k_{(3)}^1 x + k_{(3)}^2 y + \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{(1)}\mathbf{r} + \delta_1 \\ \mathbf{k}_{(2)}\mathbf{r} + \delta_2 \\ \mathbf{k}_{(3)}\mathbf{r} + \delta_3 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Можно отметить при этом, что потенциалам, различающимся лишь сдвигами максимумов стоячих волн ( $\delta_i$ ), отвечает одна и та же функция  $V(X^1, X^2, X^3)$  в  $\mathbb{R}^3$ , и их различие обусловлено лишь изменением аффинного вложения  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , при котором плоскость  $\mathbb{R}^2$  сдвигается в  $\mathbb{R}^3$ , сохраняя свое направление.

Как мы уже сказали, даже квазипериодические потенциалы, содержащие небольшое число гармоник, обладают уже достаточной сложностью, позволяющей наблюдать все аспекты общей задачи Новикова для трех квазипериодов, поэтому мы будем проводить рассмотрение описанной нами задачи исходя из общих результатов для функций с тремя квазипериодами. Ниже мы сформулируем в наиболее удобной для нас здесь форме ряд основополагающих результатов для общей задачи Новикова, следующих из результатов работ [4–11]. Аналогичные утверждения для искусственно создаваемых потенциалов в

плоскости, в действительности, приводились в работе [44], где изучались электронные транспортные явления в таких потенциалах в присутствии сильного магнитного поля. Отметим, однако, что в работе [44] главную роль играла геометрия линий уровня квазипериодических потенциалов, а не геометрия областей их меньших значений, которую мы будем рассматривать здесь.

Нам будет удобно начать с замечания, что, хотя этого и не происходит в случае общего положения, потенциалы, полученные описанным нами способом, могут быть и периодическими. Такая ситуация возникает всякий раз, когда соответствующая плоскость  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$  является целочисленной (рациональной), т. е. содержит два независимых целочисленных вектора в  $\mathbb{R}^3$ . Нетрудно видеть, что соответствующие потенциалы являются всюду плотными среди всех рассматриваемых нами потенциалов, при этом их периодические свойства определяются значениями параметров  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ . Для описания линий уровня таких потенциалов могут быть использованы все сделанные ранее утверждения о периодических потенциалах, однако, здесь надо сразу отметить, что подавляющее большинство этих потенциалов будут иметь весьма большие (по абсолютной величине) периоды  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ . Как следствие этого, описанные выше свойства линий уровня таких потенциалов будут наблюдаться лишь на очень больших масштабах, при этом на меньших масштабах их линии уровня могут обладать совсем другими нетривиальными свойствами, более важными для описания наблюдаемых экспериментальных данных. В результате, для потенциалов с большими периодами, как правило, более информативными оказываются более общие утверждения о линиях уровня квазипериодических потенциалов, приводимые нами ниже.

Вместе с тем, как оказывается, роль всюду плотного множества периодических потенциалов в пространстве параметров является, в действительности, чрезвычайно важной при исследовании задачи Новикова для рассматриваемых нами квазипериодических потенциалов. Ниже мы сформулируем чрезвычайно важное утверждение, касающееся малых деформаций периодических потенциалов и вытекающее из результатов работ [4, 5]. Отметим здесь, что в работах [4, 5] предполагается в действительности выполнение некоторых условий регулярности (общего положения), которые мы не приводим здесь подробно, предполагая, что они всегда выполняются для реально возникающих физических потенциа-

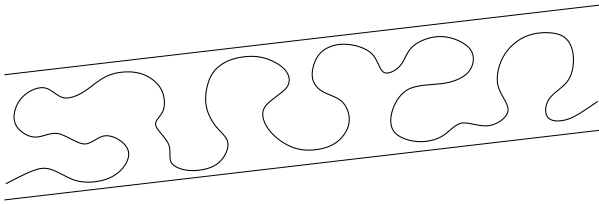


Рис. 3. Открытая линия уровня квазипериодического потенциала, лежащая в прямой полосе конечной ширины и проходящая ее насквозь (схематично)

лов<sup>1)</sup>. В этом случае в наиболее простой форме нужны нам следствия из [4, 5] могут быть сформулированы следующим образом.

Пусть некоторый полный набор параметров

$$\mathbf{U}_0 = (\mathbf{k}_{(1)}^0, \mathbf{k}_{(2)}^0, \mathbf{k}_{(3)}^0, V_1^0, V_2^0, V_3^0, \dots)$$

отвечает некоторому периодическому потенциалу в плоскости. Тогда в пространстве параметров существует открытая окрестность  $\Omega$  точки  $\mathbf{U}_0$  («зона устойчивости»), такая что для любых  $\mathbf{U} \in \Omega$ :

A1. Все открытые линии уровня соответствующего двумерного потенциала  $V(x, y, \mathbf{U})$  лежат в прямых полосах конечной ширины, проходя их насквозь (рис. 3);

A2. Среднее направление  $\mathbf{l}(\mathbf{U})$  полос, содержащих открытые линии уровня потенциала  $V(x, y, \mathbf{U})$ , определяется во всей области  $\Omega$  некоторой (несократимой) целочисленной тройкой  $(m^1, m^2, m^3)$  из соотношения

$$(m^1 \mathbf{k}_{(1)} + m^2 \mathbf{k}_{(2)} + m^3 \mathbf{k}_{(3)}, \mathbf{l}(\mathbf{U})) = 0. \quad (2.3)$$

Отметим здесь, что для вложений (2.2) максимальной иррациональности соотношения (2.3) определяют однозначно (с точностью до знака) тройку  $(m^1, m^2, m^3)$ .

<sup>1)</sup> Одним из основных условий, накладываемых в [4, 5] на функцию  $V(X^1, X^2, X^3)$  и рациональное направление вложения  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , является отсутствие во всех плоскостях заданного направления сингулярных линий уровня, соединяющих две разные особые точки потенциала, хотя бы на одном из уровней энергии в интервале существования открытых линий уровня. Для морсовских функций  $V(X^1, X^2, X^3)$  и рациональных направлений вложения  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  общего положения это условие выполняется. В некоторых физических примерах это условие может в действительности нарушаться из-за наложения каких-либо дополнительных специальных симметрий. Мы не предполагаем здесь специального наличия таких дополнительных симметрий на рассматриваемых семействах потенциалов. В этом случае нарушение указанного условия может происходить лишь при некоторых специальных рациональных направлениях вложения, что, в действительности, не меняет описываемой картины в соответствующем семействе квазипериодических потенциалов.

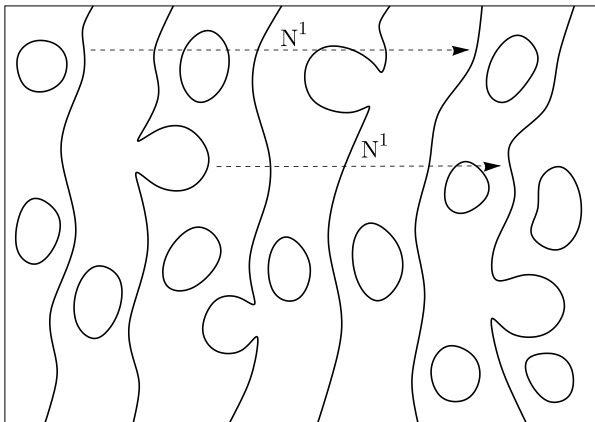
Тройки  $(m^1, m^2, m^3)$  имеют в действительности топологическое происхождение и могут быть введены также другим способом. А именно, вспомним, что среди параметров рассматриваемых нами потенциалов присутствуют, в частности, положения максимумов стоячих волн, используемых при создании потенциала. В рассматриваемой нами теперь картине сдвиг отдельной стоячей волны уже не эквивалентен простому сдвигу результирующего потенциала и представляет собой несколько более сложное преобразование. Легко видеть также, что сдвиг фронта стоячей волны (перпендикулярно самому себе) на период этой волны эквивалентен тождественному преобразованию. В целом, совокупность всех таких преобразований образует трехпараметрическую группу  $(\mathbb{T}^3)$ , содержащую простые сдвиги в качестве алгебраической подгруппы. Вместе с тем, простые сдвиги образуют всюду плотное множество в рассматриваемой группе преобразований для потенциалов общего положения, поэтому все такие потенциалы, связанные описанными преобразованиями, являются, в некотором смысле, родственными. В частности, такие потенциалы имеют схожие линии уровня при любом значении энергии  $\epsilon_0$ .

Если теперь мы рассмотрим потенциал  $V(x, y, \mathbf{U})$  (общего положения) для некоторых значений  $\mathbf{U} \in \Omega$  и зафиксируем значение  $\epsilon_0$ , отвечающее появлению открытых линий уровня, то мы можем проследить за изменением любой из таких линий при каждом из трех непрерывных сдвигов фронтов стоячих волн (в направлении роста фазы) на соответствующие периоды. Каждому из непрерывных сдвигов при этом будет соответствовать движение открытой линии уровня в плоскости (возможно, со слиянием с ней и отделением от нее замкнутых линий уровня в процессе движения), в результате которого она в конечном итоге перейдет в некоторую другую линию того же потенциала при сдвиге волны на полный период (рис. 4). Можно показать, что количество позиций  $N$ , на которое при этом сместится линия, одинаково для всех открытых линий уровня, и определяется лишь выбранным преобразованием.

Тройка чисел  $(N^1, N^2, N^3)$ , определенная при трех последовательных сдвигах соответственно первой, второй и третьей волн может быть при этом представлена в виде

$$(N^1, N^2, N^3) = M(m^1, m^2, m^3),$$

где  $M \in \mathbb{Z}$  и  $(m^1, m^2, m^3)$  — несократимая целочисленная тройка. Число  $M$  при этом всегда является четным и также имеет топологическое про-

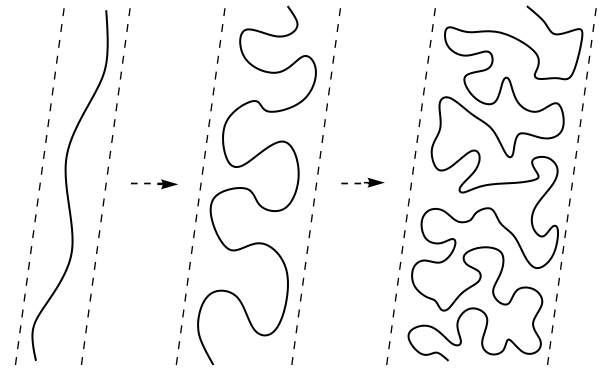


**Рис. 4.** Сдвиг регулярных открытых линий уровня квазипериодического потенциала при сдвиге максимумов одной из стоячих волн на полный период в направлении роста фазы

исхождение (количество «классов эквивалентности» открытых линий уровня в плоскости), а тройка  $(m^1, m^2, m^3)$  совпадает с введенной ранее с точностью до знака.

Таким образом, можно видеть, что в пространстве параметров рассматриваемых нами потенциалов можно выделить совокупность «зон устойчивости»  $\Omega_{\mathbf{m}, M}$ , параметризуемых введенными выше целочисленными тройками  $\mathbf{m} = (m^1, m^2, m^3)$  (а также числами  $M$ ). Числа  $(m^1, m^2, m^3)$ , вообще говоря, не пробегают всего множества целочисленных (несократимых) троек, однако их число в общем случае бесконечно, и они могут принимать сколь угодно большие значения. Каждая «зона устойчивости» представляет собой в действительности некоторую открытую область в пространстве параметров, обладающую кусочно-гладкой границей (границы различных зон могут примыкать друг к другу). Множество «зон устойчивости» представляет собой довольно богатую структуру в пространстве параметров, в частности, «зоны устойчивости» содержат все значения параметров, отвечающие появлению периодических потенциалов  $V(x, y, \mathbf{U})$  (см. сноску 1).

Можно видеть, что приведенное выше описание открытых линий уровня потенциалов, возникающих в зонах  $\Omega_{\mathbf{m}, M}$ , является весьма простым и очень информативным (особенно, в случае небольших значений  $(m^1, m^2, m^3)$ ). В частности, оно дает гораздо больше информации о поведении линий уровня принадлежащих  $\Omega_{\mathbf{m}, M}$  периодических потенциалов с большими периодами, чем может быть получено из факта их периодичности. С ростом значений  $(m^1, m^2, m^3)$  размеры зон устойчивости  $\Omega_{\mathbf{m}, M}$



**Рис. 5.** Усложнение геометрии «топологически регулярных» открытых линий уровня квазипериодического потенциала с ростом значений  $(m^1, m^2, m^3)$  (схематично)

уменьшаются, при этом также увеличивается оценка снизу на ширину полос, содержащих открытые линии уровня (и соответствующие области меньших значений). В этом случае приведенное выше описание также начинает относиться ко все большим и большим масштабам в плоскости  $\mathbb{R}^2$  и не дает подробной информации о геометрии линий уровня на меньших масштабах (рис. 5). Как мы увидим ниже, в этой ситуации поведение линий уровня (на небольших масштабах) уже не может быть описано столь же простым образом и обладает гораздо более сложными (хаотическими) свойствами. Как мы увидим также, в предельных случаях такое поведение может приводить к полностью хаотическому поведению линий уровня квазипериодических потенциалов, обладающему сложными хаотическими свойствами на всех масштабах.

Исходя из описанных выше свойств линий уровня квазипериодических потенциалов в зонах устойчивости, можно видеть, что весьма схожими свойствами должны обладать в этом случае также и области  $V(x, y, \mathbf{U}) < \epsilon_0$ , если линии уровня  $V(x, y, \mathbf{U}) = \epsilon_0$  являются открытыми (рис. 6).

А именно, если на уровне  $\epsilon_0$  имеются незамкнутые линии уровня, то любая открытая связная область  $V(x, y, \mathbf{U}) < \epsilon_0$  также лежит в прямой полосе конечной ширины, проходя ее насквозь. Среднее направление такой полосы, очевидно, совпадает со средним направлением открытых линий уровня и задается уравнением (2.3). Отметим здесь сразу, что теперь как линии уровня, так и области меньших значений потенциала, уже не являются периодическими для общих значений параметров. Свойства (A1), (A2), однако, как можно видеть, дают определенную аналогию со случаем периодических потенциалов.



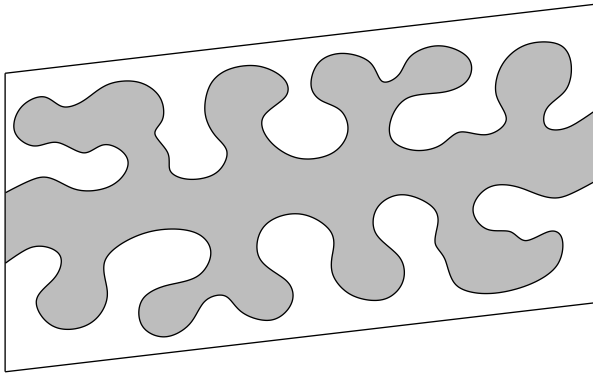


Рис. 6. Область меньших значений квазипериодического потенциала, лежащая в прямой полосе конечной ширины и проходящая ее насквозь (схематично)

Легко видеть, что транспортные явления в потенциале с параметрами, лежащими в одной из зон устойчивости, могут обладать резко выраженной анизотропией. Это свойство должно, как правило, наблюдаться в том случае, если в ансамбле частиц, помещенных в такой потенциал, присутствуют частицы с энергиями, отвечающими появлению открытых линий уровня потенциала. Можно видеть, в действительности, что подобная анизотропия может наблюдаться также и при более общих предположениях, в частности, в системах сильно взаимодействующих частиц или в гидродинамическом приближении.

Здесь надо сделать важное замечание относительно транспортных явлений в рассматриваемом нами случае. А именно, в зонах устойчивости с большими значениями чисел  $(m^1, m^2, m^3)$  ширина полос, содержащих области  $V(x, y, \mathbf{U}) < \epsilon_0$  при наличии открытых линий уровня при  $V(x, y, \mathbf{U}) = \epsilon_0$ , становится довольно большой, а сама форма таких областей все более и более сложной, что (весьма схематично) показано на рис. 6. Как следствие этого, движение частиц в таких областях становится все более и более сложным, постепенно приобретая признаки блуждания в случайном потенциале.

Отметим здесь также, что описанное нами выше движение открытых линий уровня (и ограничиваемых ими «областей доступности») при сдвигах максимумов каждой из стоячих волн зависит самым существенным образом от значений  $(m^1, m^2, m^3)$ . В частности, скорость перемещения «областей доступности» при больших значениях  $(m^1, m^2, m^3)$  может значительно превышать скорость движения максимумов стоячих волн. Последнее обстоятельство может, в действительности, играть существенную роль

для многих вопросов транспортировки атомов в оптических решетках (см. [45] и приводимые там ссылки). Такое движение, вообще говоря, осуществляет неполную транспортировку атомов в соответствующем направлении из-за отделения от «областей доступности» одних замкнутых областей и присоединения к ним других в процессе их перемещения.

Отметим здесь также еще одно важное обстоятельство. А именно, как мы уже сказали, наличие зоны устойчивости в пространстве параметров рассматриваемых нами потенциалов означает, естественно, сохранение определяемой ею картины при достаточно малых вариациях таких параметров. В действительности, как следует из топологических рассуждений, эта картина является устойчивой и по отношению к гораздо более общим вариациям потенциала, в частности, вариациям, возникающим на конечных масштабах, если они достаточно малы. Можно видеть, таким образом, что приведенное описание геометрии областей  $V(x, y, \mathbf{U}) < \epsilon_0$ , а также особенностей транспортных явлений, является устойчивым по отношению к возмущениям или «дефектам» достаточно малой величины. Отмеченное обстоятельство является важным также при наличии дополнительных (неквазипериодических) медленно меняющихся потенциалов, которые также нередко присутствуют в экспериментальных постановках. Приведенное выше описание (с теми же самыми числами  $(m^1, m^2, m^3)$ ) сохраняется в этом случае в областях, где максимальное изменение таких потенциалов не превышает энергетического интервала существования открытых линий уровня потенциала  $V(x, y, \mathbf{U})$ . Надо сказать, что оценка допустимых вариаций потенциала  $V(x, y, \mathbf{U})$  здесь также быстро уменьшается с ростом чисел  $(m^1, m^2, m^3)$ .

Несмотря на то, что совокупность всех зон устойчивости  $\Omega_{m,M}$  образует открытое покрытие всюду плотного множества в пространстве параметров, она, вообще говоря, не покрывает его целиком, и квазипериодические потенциалы с тремя квазипериодами могут обладать, как мы уже сказали, линиями уровня, более сложными по сравнению с описанными выше [6, 10]. Можно сказать, тем не менее, что описанная выше «регулярная» ситуация является, в некотором смысле, основной для случая трех квазипериодов, в то время как более сложное поведение линий уровня требует специального построения соответствующего потенциала. Для более полного описания возникающей в общем случае картины мы приведем здесь, основываясь на результатах работ [7, 11], ряд важных утверждений о структуре линий уровня потенциалов с тремя квазиперио-

дами самого общего вида. В действительности, вместе с приведенными выше утверждениями, приводимые ниже результаты представляют в определенном смысле полную теорию линий уровня потенциалов с тремя квазипериодами на плоскости.

Отметим, что все потенциалы, получаемые из 3-периодических функций при вложении  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$  можно в действительности разделить на три типа. А именно, прежде всего, как мы уже видели, при определенных значениях  $(\mathbf{k}_{(1)}, \mathbf{k}_{(2)}, \mathbf{k}_{(3)})$  соответствующий потенциал  $V(x, y, \mathbf{U})$  может оказаться в действительности двоякопериодическим. Назовем здесь такие потенциалы потенциалами типа I. Вторая возможность заключается в том, что потенциал  $V(x, y, \mathbf{U})$ , не являясь двоякопериодическим, все-таки имеет один (с точностью до множителя) период в плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Такие потенциалы можно назвать потенциалами типа II. Как и потенциалы типа I, они возникают на всюду плотном множестве в пространстве параметров  $(\mathbf{k}_{(1)}, \mathbf{k}_{(2)}, \mathbf{k}_{(3)})$ , имеющем меру нуль. Наконец, к потенциалам типа III мы можем отнести потенциалы, не имеющие точных периодов в плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Только потенциалы типа III при этом являются потенциалами общего положения и соответствуют множеству полной меры в пространстве параметров. В формулируемых ниже утверждениях о линиях уровня квазипериодических потенциалов мы будем предполагать, что соответствующие потенциалы являются потенциалами типа II или III, поскольку потенциалы типа I уже были в действительности рассмотрены выше. При сделанных предположениях можно сформулировать следующие утверждения.

Пусть  $V(x, y, \mathbf{U})$  — потенциал с тремя квазипериодами, принимающий значения в интервале  $[V_{min}(\mathbf{U}), V_{max}(\mathbf{U})]$ . Тогда:

B1. Открытые линии уровня  $V(x, y, \mathbf{U})$  существуют в связном интервале  $[V_1(\mathbf{U}), V_2(\mathbf{U})]$ ,

$$V_{min}(\mathbf{U}) < V_1(\mathbf{U}) \leq V_2(\mathbf{U}) < V_{max}(\mathbf{U}),$$

который может вырождаться в единственную точку  $V_0(\mathbf{U}) = V_1(\mathbf{U}) = V_2(\mathbf{U})$ .

B2. Всякий раз, когда открытые линии уровня возникают в конечном интервале  $[V_1(\mathbf{U}), V_2(\mathbf{U})]$ , они обладают сформулированными выше свойствами (A1), (A2).

B3. В случае, когда интервал  $[V_1(\mathbf{U}), V_2(\mathbf{U})]$  стягивается в единственную точку  $V_0(\mathbf{U}) = V_1(\mathbf{U}) = V_2(\mathbf{U})$ , возникающие на соответствующем уровне открытые линии уровня могут как удовлетворять условиям (A1), (A2) (это происходит на границах зон устойчивости  $\Omega_{m,M}$ ), так и обладать бо-

лее сложным хаотическим поведением (это возникает в точках накопления бесконечного числа зон  $\Omega_{m,M}$  с неограниченно возрастающими значениями  $(m^1, m^2, m^3)$ ).

Можно видеть, таким образом, что появление открытых линий уровня в «зонах устойчивости» совершенно не соответствует аналогичному явлению для истинно случайных потенциалов, где, как правило, открытые линии уровня возникают на единственном уровне энергии (если рассматривать случайные потенциалы с точки зрения теории перколяции [46, 47]). Также потенциалы, возникающие на границах «зон устойчивости», хотя и имеют открытые линии уровня лишь при одном значении  $\epsilon_0$ , не очень подходят на роль случайных потенциалов в силу «слишком регулярного поведения» их открытых линий уровня. Поэтому можно видеть, что в качестве моделей случайного потенциала естественно рассматривать лишь потенциалы с хаотическими линиями уровня. Как мы уже сказали, в случае трех квазипериодов такие потенциалы всегда возникают в точках накопления «зон устойчивости» со все более сложной геометрией открытых линий уровня потенциалов, так что здесь всегда имеется предельный переход от «регулярного» случая к «хаотическому».

Необходимо отметить также, что хаотические линии уровня, возникающие у потенциалов типа II сильно отличаются от хаотических линий уровня, возникающих у потенциалов типа III. Так, хаотические линии уровня потенциалов типа II всегда представляют собой кривые, имеющие асимптотическое направление в плоскости  $\mathbb{R}^2$  [10]. Такие линии уровня напоминают в некоторой степени описанные выше «регулярные» линии уровня, проходя через плоскость в целом вдоль некоторого фиксированного направления. Их отличие заключается в том, что отклонения такой линии в перпендикулярном направлении не обязательно являются ограниченными, и она не может быть заключена ни в какой прямой полосе конечной ширины. То же самое можно сказать и о соответствующих областях меньших значений потенциала

$$V(x, y, \mathbf{U}) \leq V_0,$$

а именно, они представляют собой некоторые «полосы», проходящие всю плоскость в некотором фиксированном направлении. Ширина этих полос, однако, может варьироваться неограниченно на разных участках, и они не могут быть заключены в прямые полосы фиксированной ширины. При сдвиге граничного значения  $\epsilon_0$  вниз на сколь угодно малую величину область меньших значений соответствующе-

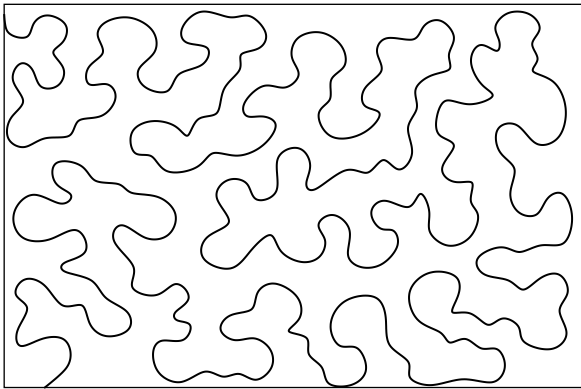


Рис. 7. «Хаотическая» открытая линия уровня потенциала с тремя квазипериодами (схематично)

го потенциала состоит из сильно вытянутых ограниченных областей, а при сдвиге  $\epsilon_0$  вверх эта область представляет собой всю плоскость, из которой исключены сильно вытянутые ограниченные области (а также, возможно, добавлены не связанные с главной компонентой дополнительные ограниченные области, лежащие внутри исключенных областей).

Можно задаться вопросом, насколько потенциалы типа II с хаотическими линиями уровня могут рассматриваться в качестве модели случайного потенциала. В некотором смысле, их можно считать промежуточным случаем между «регулярными» и «хаотическими» потенциалами.

Хаотические линии уровня, возникающие у потенциалов типа III, являются гораздо более сложными и «заматают» всю плоскость  $\mathbb{R}^2$  хаотическим образом (рис. 7). Аналогичное поведение проявляют при этом и соответствующие таким потенциалам области меньших значений  $V(x, y, \mathbf{U}) \leq V_0$ . При сдвиге граничного значения  $\epsilon_0$  вниз на сколь угодно малую величину область меньших значений соответствующего потенциала состоит из довольно сложных ограниченных областей, а при сдвиге  $\epsilon_0$  вверх эта область представляет собой всю плоскость, из которой исключены ограниченные области сложной формы (а также, возможно, добавлены не связанные с главной компонентой дополнительные ограниченные области, лежащие внутри исключенных областей). Важным обстоятельством здесь является то, что линейные размеры таких областей растут при приближении к значению  $\epsilon_0$  по степенному закону с некоторыми дробными показателями ( $\sim |\epsilon - \epsilon_0|^{-\alpha}$ ), что объединяет такие потенциалы со случайными потенциалами [48, 49]. Надо отметить, однако, что здесь в общем случае может наблюдаться определенная анизотропия, а именно, наличие двух показателей роста,  $\alpha$  и  $\beta$ , в одном опре-

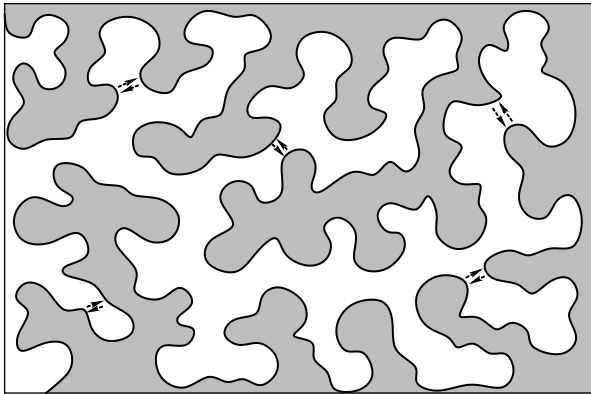
деленном направлении в плоскости и ему перпендикулярном ( $0 < \alpha, \beta < 1$ ). В целом стохастические свойства таких линий уровня довольно сложны и в настоящее время являются объектом интенсивных исследований (см., например, [10, 11, 50–65]).

Хаотичность линий уровня потенциала, образованного тремя стоячими волнами, инвариантна относительно сдвигов фаз  $\delta_i$  (т. е. положения максимумов стоячих волн) при фиксированных остальных параметрах. При таких сдвигах сохраняется значение  $V_0$ , а также геометрические особенности хаотических линий уровня (в частности, показатели  $\alpha$  и  $\beta$ ). Изменение «областей доступности»  $V(x, y) \leq V_0$  при сдвигах максимумов стоячих волн сопровождается здесь их довольно сложным движением, а также многочисленными перестройками на их границах. Вообще говоря, транспортировка атомного газа при адиабатическом изменении положений максимумов стоячих волн в этой ситуации должна вычисляться отдельно для каждого такого потенциала.

В данной работе мы постараемся представить такие линии уровня и соответствующие им области меньших значений потенциала наиболее наглядным образом. Кроме того, как мы уже говорили, нам будет интересна динамика ультрахолодных атомов в описанных нами областях. Особенно интересным при этом, на наш взгляд, является наложение свойств хаотической динамики как таковой на хаотические свойства «областей доступности» для этой динамики.

Здесь мы хотели бы отметить еще одно важное свойство «хаотических» линий уровня потенциалов  $V(x, y, \mathbf{U})$  с тремя квазипериодами, а именно, наличие на них участков, где такая линия уровня (а также соответствующая область меньших значений  $V(x, y, \mathbf{U}) \leq V_0$ ) «очень близко» подходит к самой себе (рис. 8). Говоря точнее, рассматривая все большие и большие области в плоскости, мы можем найти на такой линии уровня участки, сколь угодно близко подходящие друг к другу. Как следствие этого, при рассмотрении квазиклассической динамики атомов с энергиями, близкими к соответствующему уровню  $V_0$ , необходимо всегда рассматривать также эффекты туннелирования из одной части «области доступности» в другую вблизи таких участков.

Еще одним следствием указанного выше обстоятельства является то, что, в отличие от ситуации в зонах устойчивости, здесь глобальная геометрия областей  $V(x, y, \mathbf{U}) \leq V_0$  является неустойчивой по отношению к сколь угодно малым локальным вариациям потенциала  $V(x, y)$  и может сильно изменяться (на больших масштабах) при наличии сколь



**Рис. 8.** Эффекты туннелирования между различными частями классических «областей доступности» при их сближении для потенциалов с тремя квазипериодами

угодно малых возмущений или дефектов. Как следствие этого, транспортные свойства частиц в таких потенциалах могут также сильно зависеть от наличия таких дефектов в плоскости потенциала. При наличии дополнительных медленно меняющихся потенциалов, например, типа

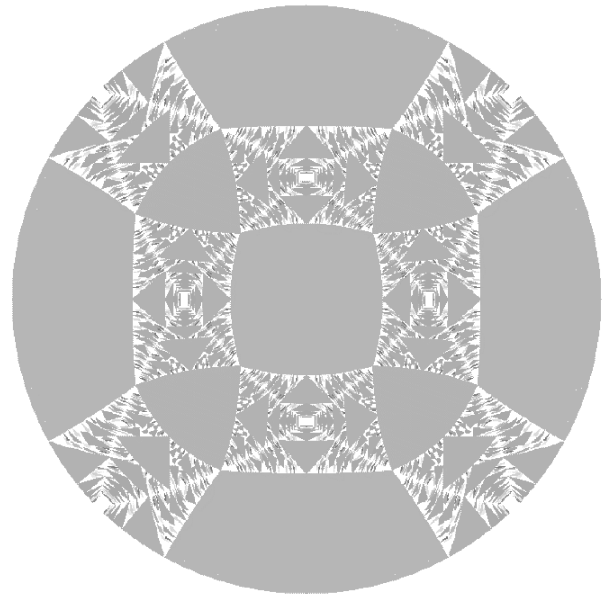
$$V(x, y) = ax^2, \quad a \rightarrow 0,$$

глобальная геометрия открытых линий уровня и соответствующих им областей меньших значений суммарного потенциала чаще всего будет повторять соответствующую геометрию для плавного потенциала на больших масштабах и вести себя типичным «хаотическим» образом на малых масштабах.

Согласно общей гипотезе Новикова, в случае трех квазипериодов появление потенциалов с хаотическими линиями уровня может происходить лишь на множестве меры нуль и, более того, фрактальной коразмерности строго больше единицы, в полном пространстве параметров. Можно видеть, таким образом, что для экспериментальной реализации потенциала с тремя квазипериодами, близкого по свойствам к случайному в описанном выше смысле, необходим весьма специальный подбор параметров, задающих такой потенциал. На рис. 9 приведен пример расположения зон устойчивости в пространстве существенных параметров при ограничении потенциала

$$\cos X^1 + \cos X^2 + \cos X^3$$

на двумерные плоскости при всевозможных аффинных вложениях  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . В данном случае существенным является лишь направление вложения, которое может быть задано единичным вектором в  $\mathbb{R}^3$ , ортогональным вложенным в него плоскостям



**Рис. 9.** Зоны устойчивости для квазипериодических потенциалов в плоскости, получаемых ограничением потенциала  $\cos X^1 + \cos X^2 + \cos X^3$  при всевозможных аффинных вложениях  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  [54, 55]. Зоны представляют собой области на единичной сфере, образованной концами единичных векторов, ортогональных направлению вложения

$\mathbb{R}^2$ . Концы таких векторов лежат на единичной сфере  $\mathbb{S}^2$  и, таким образом, все зоны устойчивости могут быть представлены как области на единичной сфере. Можно видеть, что объединение (бесконечного числа) таких областей задает довольно сложное множество на сфере, а дополнение к нему обладает фрактальными свойствами. Отметим здесь также, что гипотеза Новикова пока не доказана строго, хотя была подтверждена в ряде серьезных численных экспериментов.

Сформулируем теперь аналитические результаты, известные к настоящему времени для потенциалов с четырьмя квазипериодами. Надо сразу сказать, что задача Новикова для случая четырех квазипериодов является еще более сложной по сравнению со случаем трех квазипериодов. Вместе с тем, случай четырех квазипериодов может оказаться весьма важным в рассматриваемой нами постановке в связи с проблемой модулирования двумерных квазикристаллов в системах холодных атомов.

В рассматриваемой нами постановке потенциалы с четырьмя квазипериодами получаются в результате наложения четырех независимых синусоидальных стоячих волн (возможно, с генерацией высших гармоник, рис. 10) и могут быть записаны в следующей общей форме:

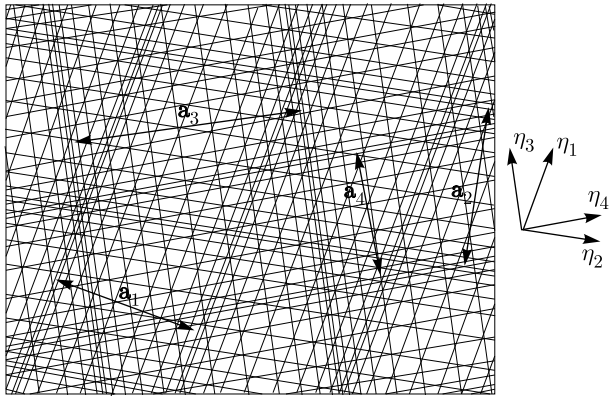


Рис. 10. Наложение четырех стоячих волн в плоскости с образованием потенциала с четырьмя квазипериодами (схематично). Векторы  $\eta_i$  указывают направления фронтов волн, а векторы  $a_i$  — сдвиги между максимумами их амплитуд

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^4 V_i \cos(\mathbf{k}_{(i)}\mathbf{r} + \delta_i) + \dots$$

Квазипериодические свойства потенциала определяются при этом параметрами  $(\mathbf{k}_{(1)}, \mathbf{k}_{(2)}, \mathbf{k}_{(3)}, \mathbf{k}_{(4)})$ , задающими аффинное вложение  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , согласно формулам

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k_{(1)}^1 x + k_{(1)}^2 y + \delta_1 \\ k_{(2)}^1 x + k_{(2)}^2 y + \delta_2 \\ k_{(3)}^1 x + k_{(3)}^2 y + \delta_3 \\ k_{(4)}^1 x + k_{(4)}^2 y + \delta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{(1)}\mathbf{r} + \delta_1 \\ \mathbf{k}_{(2)}\mathbf{r} + \delta_2 \\ \mathbf{k}_{(3)}\mathbf{r} + \delta_3 \\ \mathbf{k}_{(4)}\mathbf{r} + \delta_4 \end{pmatrix}.$$

Мы приведем несколько упрощенные следствия из результатов работ [23, 24], являющиеся аналогом первого из утверждений, сформулированных выше для случая трех квазипериодов. Как и ранее, мы не будем подробно рассматривать все условия регулярности (общего положения), накладываемые на рассматриваемые потенциалы в работах [23, 24], и будем предполагать, что они всегда выполняются для реальных потенциалов. Тогда из результатов работ [23, 24] следует утверждение:

полное пространство параметров

$$\mathbf{U}_0 = (\mathbf{k}_{(1)}^0, \mathbf{k}_{(2)}^0, \mathbf{k}_{(3)}^0, \mathbf{k}_{(4)}^0, V_1^0, V_2^0, V_3^0, V_4^0, \dots),$$

задающих потенциалы с четырьмя квазипериодами, содержит всюду плотное множество открытых обла-

стей («зон устойчивости»  $\Omega$ ), таких что в каждой из областей  $\Omega$ :

C1. Открытые линии уровня  $V(x, y, \mathbf{U})$  существуют в конечном связном интервале энергий  $[V_1(\mathbf{U}), V_2(\mathbf{U})]$ :

$$V_{min}(\mathbf{U}) < V_1(\mathbf{U}) \leq V_2(\mathbf{U}) < V_{max}(\mathbf{U}).$$

C2. Все открытые линии уровня соответствующего двумерного потенциала  $V(x, y, \mathbf{U})$  лежат в прямых полосах конечной ширины, проходя их насквозь (рис. 3);

C3. Среднее направление  $\mathbf{I}(\mathbf{U})$  полос, содержащих открытые линии уровня потенциала  $V(x, y, \mathbf{U})$ , определяется во всей области  $\Omega$  некоторой (несократимой) целочисленной четверкой  $(m^1, m^2, m^3, m^4)$  из соотношения

$$(m^1 \mathbf{k}_{(1)} + m^2 \mathbf{k}_{(2)} + m^3 \mathbf{k}_{(3)} + m^4 \mathbf{k}_{(4)}, \mathbf{I}(\mathbf{U})) = 0.$$

Как и в случае трех квазипериодов, четверки  $(m^1, m^2, m^3, m^4)$  имеют в действительности топологическое происхождение и могут быть определены аналогичным описанному ранее способом, опирающимся на преобразованиях сдвигов параметров  $\delta_i$ .

Так же, как и в случае трех квазипериодов, объединение зон устойчивости (в общем случае) не покрывает здесь всего пространства параметров. Дополнение к этому объединению образует сложное множество, отвечающее возникновению потенциалов с хаотическими линиями уровня. Надо сказать, что как особенности хаотического поведения линий уровня, так и структура соответствующего множества в пространстве параметров к настоящему времени почти не изучены. В частности, можно предположить, что множество параметров, отвечающих потенциалам с хаотическими линиями уровня, имеет здесь ненулевую меру. Таким образом, в пространствах потенциалов с четырьмя квазипериодами построение потенциалов со свойствами истинно случайных потенциалов может быть более простым с экспериментальной точки зрения. Отметим, что, как и в случае трех квазипериодов, каждый «хаотический» потенциал является пределом усложняющихся «регулярных» потенциалов из-за накопления бесконечного числа «зон устойчивости» вблизи точки  $\mathbf{U}_0$ , определяющей такой потенциал.

Переходя к потенциалам с большим числом квазипериодов, задаваемым вложениями

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k_{(1)}^1 x + k_{(1)}^2 y + \delta_1 \\ \vdots \\ k_{(d)}^1 x + k_{(d)}^2 y + \delta_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{(1)}\mathbf{r} + \delta_1 \\ \vdots \\ \mathbf{k}_{(d)}\mathbf{r} + \delta_d \end{pmatrix},$$

отметим, что никаких строгих аналитических результатов для случая  $d > 4$  на данный момент нет. Можно, однако, видеть, что и в этом случае квазипериодические потенциалы могут обладать «регулярным» поведением открытых линий уровня. В общем случае мы будем говорить, что потенциал с  $d$  квазипериодами имеет регулярные открытые линии уровня, если выполняются следующие условия:

D1. Открытые линии уровня  $V(x, y)$  существуют в конечном связном интервале энергий

$$V_{min} < V_1 \leq V(x, y) \leq V_2 < V_{max}.$$

D2. Все открытые линии уровня потенциала  $V(x, y)$  лежат в прямых полосах конечной ширины, проходя их насквозь (рис. 3);

D3. Среднее направление  $\mathbf{l}$  полос, содержащих открытые линии уровня потенциала  $V(x, y)$ , определяется некоторым (несократимым) целочисленным вектором  $(m^1, \dots, m^d)$  из соотношения

$$(m^1 \mathbf{k}_{(1)} + \dots + m^d \mathbf{k}_{(d)}, \mathbf{l}) = 0.$$

Потенциалы с  $d$  квазипериодами с регулярным поведением открытых линий уровня возникают, в частности, всегда, когда они образуются с помощью достаточно малых (квазипериодических) добавок к потенциалам с меньшим числом квазипериодов (и регулярным поведением открытых линий уровня). Но в действительности, этим такие ситуации не ограничиваются и можно построить огромное количество примеров весьма сложных потенциалов с большим числом квазипериодов и регулярным поведением открытых линий уровня в описанном выше смысле.

Можно показать, что в самом общем случае существует огромное множество ситуаций, когда для потенциала общего положения на некотором семействе квазипериодических потенциалов  $V(x, y, \mathbf{U})$  имеют место свойства (D1)–(D3) и, более того, такая ситуация является локально устойчивой. При этом в пространстве параметров возникает зона устойчивости  $\Omega_{(m^1, \dots, m^d)}$ , содержащая исходную точку  $\mathbf{U}_0$ , такая что условия (D1)–(D3) выполняются во всех ее точках с некоторыми значениями  $V_1(\mathbf{U})$  и  $V_2(\mathbf{U})$  и неизменными  $(m^1, \dots, m^d)$ . Границы зоны  $\Omega_{(m^1, \dots, m^d)}$  в действительности определяются при этом условием  $V_1(\mathbf{U}) = V_2(\mathbf{U})$ .

Возвращаясь к рассмотренной нами методике создания квазипериодических потенциалов в системах холодных атомов (суперпозиция стоячих волн), можно показать, как и ранее, что числа  $(m^1, \dots, m^d)$

могут быть определены и чисто топологическим образом (путем последовательных сдвигов максимумов стоячих волн на период и наблюдения соответствующих сдвигов открытых линий уровня).

В общем случае можно констатировать, что при создании квазипериодических потенциалов поведению их линий уровня их естественно разделить на потенциалы, сохраняющие определенные свойства упорядоченных потенциалов, и потенциалы, приближающиеся к случайным потенциалам. Потенциалы первого типа при этом устойчивы и возникают на некоторых открытых областях в пространстве задающих их параметров, при этом каждая из таких областей определяется своим значением топологического инварианта — целочисленного вектора  $(m^1, \dots, m^d)$ . Потенциалы второго типа неустойчивы и возникают на достаточно сложных множествах фрактального типа (дополнениях к объединению областей  $\Omega_{(m^1, \dots, m^d)}$ ). Для построения потенциалов со свойствами случайных потенциалов необходимо, таким образом, выделить совокупность областей  $\Omega_{(m^1, \dots, m^d)}$  из пространства параметров. Рассматривая потенциалы на полученном дополнении, можно предположить, что соответствующие потенциалы с большим числом квазипериодов могут служить, в действительности, одной из моделей случайных потенциалов, поскольку сложность поведения их открытых линий уровня очень быстро нарастает с ростом числа квазипериодов. В заключение данного раздела отметим, что возникновение случайных потенциалов также рассматривалось в системах оптических решеток для ультрахолодных атомов [66, 67].

### 3. ДИНАМИКА ЧАСТИЦ В ПОТЕНЦИАЛАХ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

Главным объектом изучения в данном разделе будет динамика ультрахолодных атомов в двумерной плоскости в присутствии квазипериодического потенциала  $V(x, y)$ . В главном приближении такая динамика может рассматриваться классическим образом, когда предполагается, что атомы обладают достаточно хорошо определенными траекториями в  $\mathbb{R}^2$ . Исключение при этом может представлять движение атомов на специальных участках траекторий, где важную роль может играть квантовое туннелирование с одного участка траектории на другой. Как мы уже неоднократно говорили, нам, прежде всего, будет интересна динамика атомов с энергиями, соответствующими появлению открытых линий

уровня рассматриваемых потенциалов. Для применения квазиклассического описания мы должны, таким образом, предполагать выполнение соотношения  $h/\sqrt{2MV} \ll a$ , где  $a$  — типичная величина периодов используемых нами стоячих волн. В рассматриваемой ситуации мы предполагаем, что распределение атомов по энергии таково, что достаточно большое количество атомов в ансамбле имеют энергии, отвечающие появлению открытых линий уровня потенциала, что предполагает также соотношение  $T \simeq V$ . Таким образом, в нашем случае надо положить также  $h/\sqrt{2MT} \ll a$ . В общем случае, силы, действующие на атомы в оптических ловушках, могут содержать как консервативную, так и диссипативную части [68, 71]. Мы будем рассматривать здесь классическую динамику невзаимодействующих атомов в бездиссипативном пределе, который дает хорошее приближение к реальной динамике тяжелых атомов во многих важных ситуациях.

Как можно видеть, особенности геометрии квазипериодических потенциалов должны проявляться более всего в динамике частиц при энергиях, лежащих в интервалах появления открытых линий уровня потенциала. Мы сосредоточимся именно на исследовании такой динамики. Как легко видеть, особенности этой динамики должны естественным образом проявляться в транспортных свойствах ультрахолодного газа при наличии частиц соответствующих энергий в ансамбле.

Как мы видели в предыдущем разделе, квазипериодические потенциалы могут быть в действительности разделены на два типа в соответствии с поведением их открытых линий уровня. Такое разделение имеет при этом самое непосредственное отношение к динамике частиц в таких потенциалах, поскольку определяет геометрию «областей доступности» при движении частиц с определенными энергиями. Как следствие этого, можно ожидать различие в динамике частиц в потенциалах этих двух типов, наблюдаемого при исследовании систем ультрахолодных атомов.

Как мы уже упоминали выше, динамика в двумерных гамильтоновых системах обладает еще одной особенностью, а именно, она является интегрируемой на низких уровнях энергии и хаотизируется при большой энергии [25, 26]. На промежуточных энергетических уровнях фазовое пространство системы разделяется на области, где имеет место интегрируемый случай, и множества, где возникает хаотическая динамика. В частности, можно наблюдать эффекты постепенной хаотизации динамики, когда частица может надолго «прилипнуть» к инвариант-

ным двумерным торами, совершая редкие «прыжки» (полеты Леви) между различными торами, а также другие подобные эффекты. Эта особенность динамики исследовалась в системах холодных атомов как для свободных атомов, движущихся в периодических потенциалах [33, 34], так и при наличии дополнительного взаимодействия движения атома с внутренними степенями свободы [72, 73].

В данной работе мы не будем рассматривать внутренних степеней свободы атомов и сосредоточимся лишь на движении атома как целого. Как мы уже говорили, мы будем интересоваться здесь динамикой атомов с энергиями, отвечающими появлению открытых линий уровня у соответствующих потенциалов. Именно в этой области нам будет особенно интересно наблюдать сочетание различных режимов (интегрируемость, ее усложнение и переход к хаотической динамике) в различных областях фазового пространства. Можно сразу отметить, что поскольку открытые линии уровня квазипериодического потенциала также возникают при некоторых «промежуточных» (между минимальным и максимальным) его значениях, часто описанная выше «постепенная хаотизация» динамики будет возникать именно вблизи таких линий уровня. Можно также при этом сказать, что такая хаотизация должна, конечно, коррелировать с нетривиальной геометрией «областей доступности» движения атомов в рассматриваемых нами потенциалах. В частности, для развитой хаотизации движение атомов должно быть близко к диффузионному, так что транспортные свойства атомного газа определяются диффузией атомов в областях заданной геометрии. В условиях «промежуточной» хаотизации можно ожидать, что геометрия областей доступности влияет существенным образом на полеты Леви между двумерными торами, что, конечно, также является определяющим при рассмотрении транспортных свойств атомного газа. Кроме того, в рассматриваемой ситуации двумерные торы, отвечающие интегрируемой динамике, могут разделять (трехмерные) многообразия постоянной энергии нетривиальным образом, так что мы можем наблюдать также неинтегрируемую динамику, локализованную в различных участках «областей доступности». Геометрия таких участков и их расположение при этом, конечно, также связана с общей геометрией «областей доступности» при заданной энергии частицы. В целом, как нетрудно видеть, в рассматриваемой нами модели именно режимы диффузии или полетов Леви определяют те транспортные свойства атомного газа, которые могут позволять наблюдать различия

между введенными выше «регулярными» и «хаотическими» квазипериодическими потенциалами.

Ниже мы приводим результаты численного исследования классической динамики частиц в описываемых нами потенциалах. В качестве модели мы рассмотрим здесь потенциалы с тремя квазипериодами, получаемые ограничением потенциала

$$V(\cos X^1 + \cos X^2 + \cos X^3)$$

на плоскости, задаваемые различными (изометрическими) вложениями (2.2). Надо сказать, что в этом семействе потенциалов возникают абсолютно все ситуации, возможные для потенциалов с тремя квазипериодами с точки зрения задачи Новикова, а именно, мы найдем здесь как устойчивые «регулярные» потенциалы с самыми различными особенностями геометрии открытых линий уровня, так и богатую совокупность «хаотических» потенциалов. Можно отметить лишь единственную особенность потенциалов данной совокупности, которая заключается в следующем. Именно, для любого «регулярного» потенциала, возникающего в описанном семействе, интервал существования открытых линий уровня симметричен относительно нуля, т. е. мы всегда имеем соотношение  $V_1(\mathbf{U}) = -V_2(\mathbf{U})$  для введенных выше величин  $V_1(\mathbf{U})$  и  $V_2(\mathbf{U})$ . Точно также, для всех «хаотических» потенциалов данного семейства открытые линии уровня возникают в точности на нулевом уровне энергии ( $V_0 = 0$ ). Данная особенность свойственна приведенному нами семейству потенциалов и, вообще говоря, не имеет места в самом общем случае. Во всем остальном геометрические свойства линий уровня потенциалов рассматриваемого нами семейства отражают самую общую ситуацию. Поскольку, как мы уже сказали, нам интересна динамика частиц в областях появления открытых линий уровня потенциала, мы часто будем исследовать здесь такую динамику при значении  $\epsilon = 0$ .

Все потенциалы, таким образом, будут иметь вид

$$V(x, y) = \cos(a_1x + b_1y + c_1) + \cos(a_2x + b_2y + c_2) + \cos(a_3x + b_3y + c_3) \quad (3.1)$$

с некоторыми коэффициентами  $a_i$ ,  $b_i$  и  $c_i$ . В действительности, поскольку выбор направления координатных осей в плоскости  $\mathbb{R}^2$  не будет иметь для нас большого значения, мы будем полагать, что ось  $x$  совпадает с линией пересечения  $\mathbb{R}^2$  с плоскостью  $(X^1, X^2)$  в  $\mathbb{R}^3$ . Таким образом, мы можем всегда положить здесь  $a_3 = 0$ .

Как мы уже отмечали выше, тип потенциала определяется в нашем случае лишь направлением

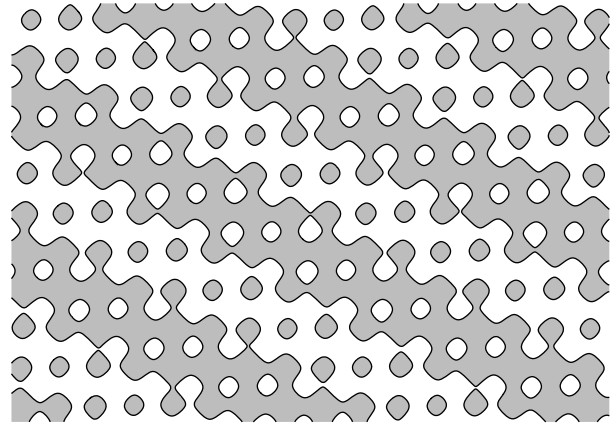


Рис. 11. Потенциал (3.2), обладающий «регулярными» открытыми линиями уровня, из самой крупной зоны устойчивости на рис. 9. Закрашенные области отвечают значениям  $V(x, y) \leq 0$

вложения  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  и описывается диаграммой, представленной на рис. 9. Можно видеть, что, подбирая параметры вложения, мы легко можем реализовать любую из интересующих нас ситуаций.

Для сравнения динамики в потенциалах различного типа мы приведем здесь результаты для трех потенциалов, первые два из которых обладают «регулярными» открытыми линиями уровня и принадлежат довольно крупным зонам устойчивости на рис. 9, а третий — «хаотическими» открытыми линиями уровня, возникающими лишь при нулевом значении энергии.

Наша первая серия вычислений будет относиться к потенциалу

$$\begin{aligned} a_1 &= -0.12251993420338196, \\ b_1 &= -0.2250221718850486, \\ c_1 &= 1.5505542426422338, \\ a_2 &= 0.9924660526802913, \\ b_2 &= -0.02777898711920925, \\ c_2 &= 0.12374024573075965, \\ a_3 &= 0, \\ b_3 &= 0.9739575709622912, \\ c_3 &= 3.1548761694687415 \end{aligned} \quad (3.2)$$

(рис. 11), лежащему внутри самой крупной зоны на рис. 9 с топологическими числами  $(m^1, m^2, m^3) = (1, 0, 0)$ . Надо сказать, что мы специально проводим здесь отдельное рассмотрение потенциала из этой зоны, поскольку она в действительности несколько отличается от остальных зон. А именно, кроме упомянутой нами выше «частичной» инте-



грируемости, свойственной двумерным гамильтоновым системам, здесь имеется дополнительная близость к интегрируемой ситуации, связанная с тем, что центру данной зоны отвечает интегрируемый при всех энергиях потенциал

$$V(x, y) = \cos x + \cos y.$$

Как следствие этого, интегрируемая динамика может здесь возникать на более богатых множествах начальных условий по сравнению с потенциалами из других зон. Как мы в действительности увидим, это предположение подтверждается, в частности, нам не удалось здесь найти хорошо выраженной диффузионной динамики на уровне  $\epsilon = 0$ , которая возникает лишь при заметном увеличении энергии частицы. Вместе с тем, возникновение потенциалов именно из этой зоны является наиболее вероятным по сравнению с другими в эксперименте в силу значительных размеров этой зоны.

Как мы уже говорили, мы сразу ограничиваемся здесь рассмотрением трехмерных многообразий в фазовом пространстве, фиксируя полную энергию частицы. Рассматриваемый нами потенциал имеет открытые линии уровня в весьма широком интервале энергий

$$-0.7493 \leq V \leq 0.7493$$

(приблизительно), мы вначале рассмотрим динамику частиц с энергией  $\epsilon = 0$ . Как мы уже сказали выше, мы можем ожидать здесь появления целых областей, где динамика в действительности является интегрируемой и происходит на двумерных торах, вложенных в фазовое пространство. Именно это и происходит на уровне  $\epsilon = 0$ , более того, подбирая специально начальные данные, можно обнаружить области их значений, где динамика на торах отвечает довольно простому движению в координатном пространстве (рис. 12).

При изменении начальных данных на уровне  $\epsilon = 0$  (и том же самом потенциале) можно, однако, обнаружить (меньшие) области, в которых геометрия инвариантных торов все более усложняется, что приводит также к усложнению движения частиц в координатном пространстве (рис. 13).

Подбирая начальные данные еще более специальным образом (на уровне  $\epsilon = 0$ ), можно увидеть также еще более сложные перестройки инвариантных торов, где происходит «прилипание» частиц на довольно длительное время к более простым инвариантным торам и «прыжки» с одного из таких торов на другой (полеты Леви), совершаемые в определенные моменты времени (рис. 14).

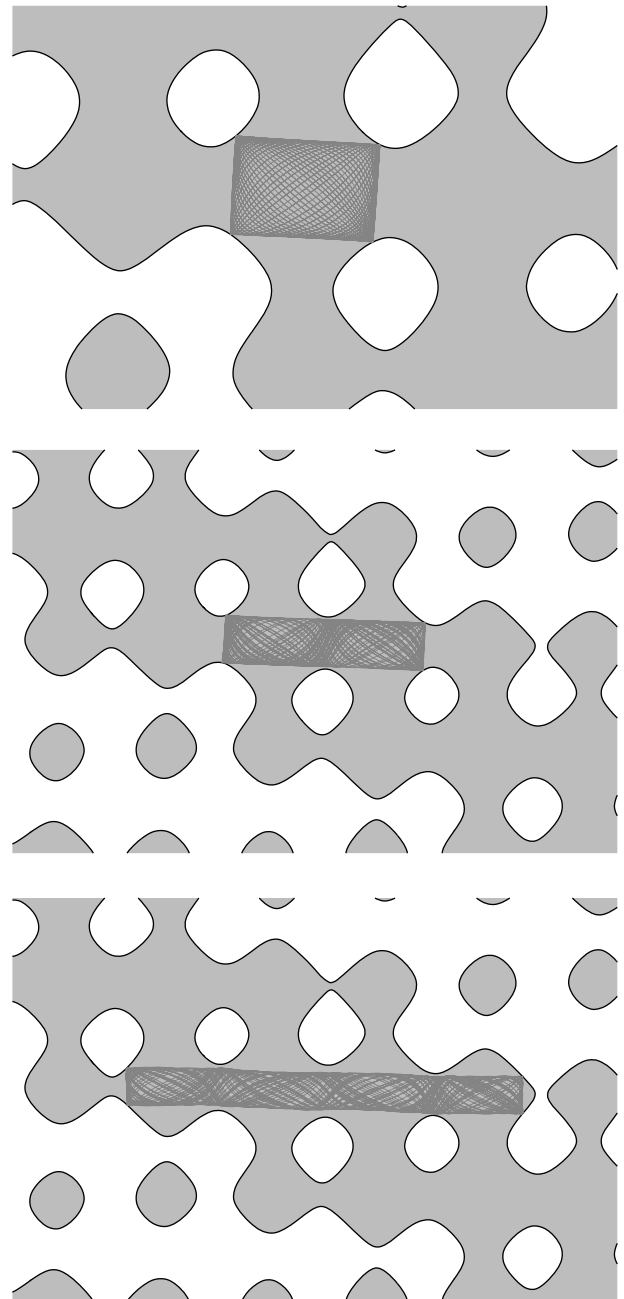
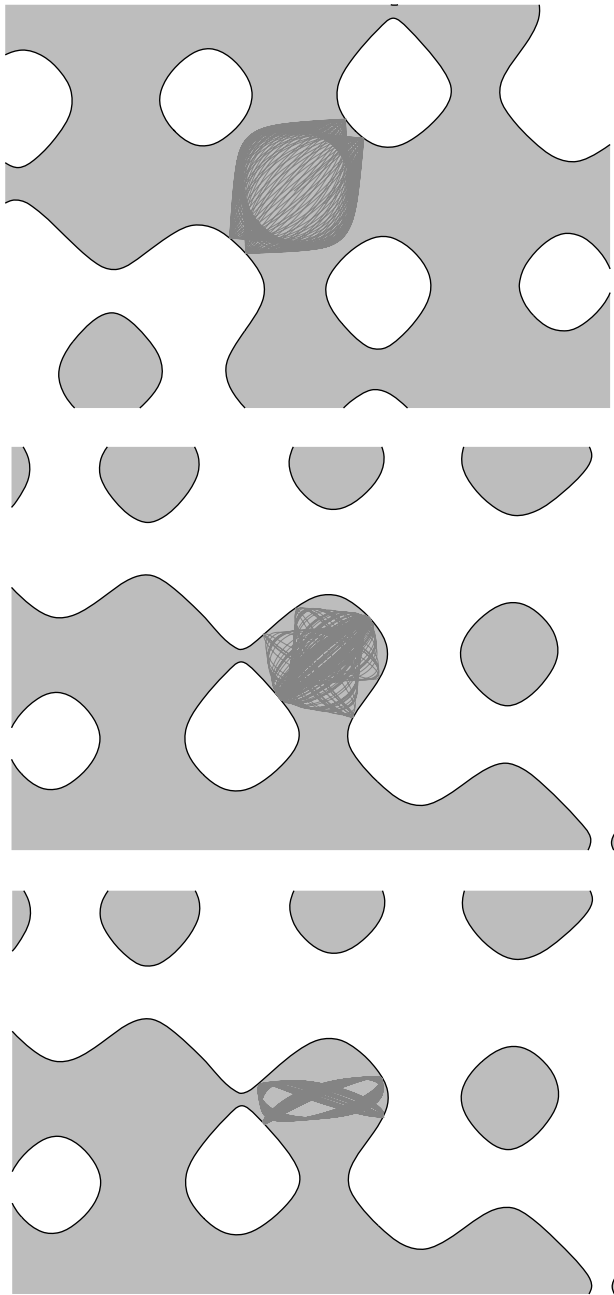


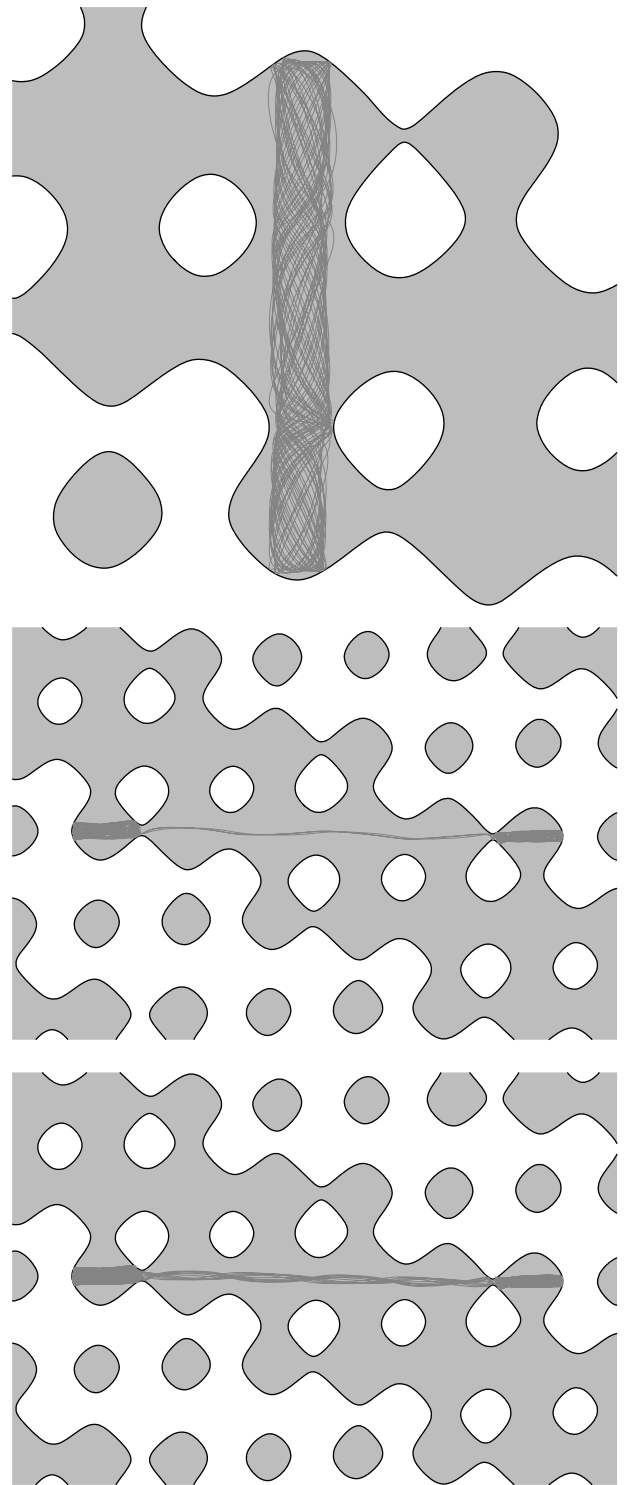
Рис. 12. Примеры инвариантных торов, отвечающих сравнительно простой динамике атомов в «регулярном» потенциале (3.2) при нулевой полной энергии

Режимы, представленные на рис. 12–14, отвечают динамике частиц с нулевой полной энергией. Как мы уже говорили, для этого потенциала нам не удалось обнаружить диффузионных режимов при  $\epsilon = 0$ , однако они появляются при увеличении энергии частиц (рис. 15). В действительности, отчетливо выраженное диффузионное поведение возникает здесь при энергиях, когда открытые линии уров-

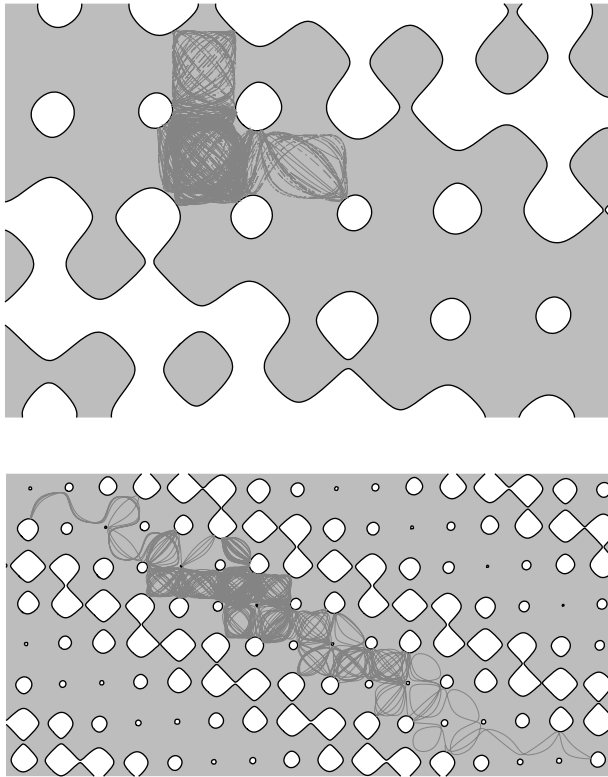


**Рис. 13.** Примеры инвариантных торов, задающих более сложную динамику атомов в «регулярном» потенциале (3.2) при нулевой полной энергии

ния потенциала уже исчезают, а область доступности простирается в обоих направлениях. Интересно, что диффузионная динамика здесь сохраняет, тем не менее, ярко выраженную анизотропию, сохраняя память о среднем направлении открытых линий уровня потенциала. Можно здесь также отметить, что даже на этих уровнях при этом остается довольно много инвариантных торов, а диффузионная дина-



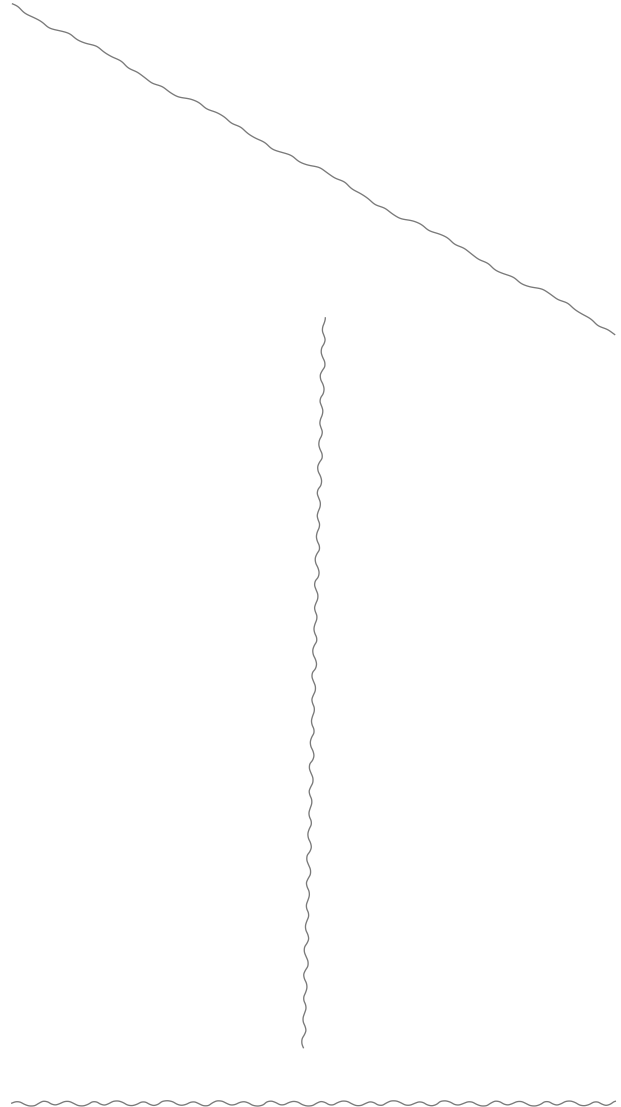
**Рис. 14.** Полеты Леви между «близкими» и «далекими» торами и усложнение инвариантных торов при изменении начальных условий в «регулярном» потенциале (3.2) при нулевой полной энергии частицы



**Рис. 15.** Области доступности и переход к диффузионному режиму в «регулярном» потенциале (3.2) при повышении энергии частицы ( $\epsilon = 0.5$  и  $\epsilon = 0.98$ )

мика имеет одновременно вид полетов Леви с «прилипанием» к инвариантным торам. Как мы уже говорили, такое поведение свойственно, видимо, лишь потенциалам из зоны с  $(m^1, m^2, m^3) = (1, 0, 0)$  (и идентичных с ней зон) в силу упомянутых выше обстоятельств. В частности, мы приведем ниже описание динамики в потенциале из другой крупной зоны устойчивости, которое, по-видимому, свойственно большинству потенциалов с «регулярными» линиями уровня.

При дальнейшем повышении энергии движение частиц в потенциале переходит от диффузионного движения к баллистическому. Мы должны отметить здесь, однако, что баллистическое движение в квазипериодических потенциалах также обладает, по-видимому, весьма существенными особенностями. В частности, для потенциалов рассматриваемого нами семейства даже при довольно высоких энергиях довольно большую часть фазового объема занимают баллистические траектории определенных направлений. Для рассматриваемого нами потенциала можно сразу выделить три основных направления, а именно направления линий уровня трех косинусов в формуле (3.1), вдоль которых баллисти-



**Рис. 16.** Появление баллистических траекторий в «регулярном» потенциале (3.2) при повышении энергии частицы ( $\epsilon = 4$ )

ческое движение возникает уже при достаточно низких энергиях (рис. 16). При повышении энергии число таких направлений возрастает и можно наблюдать также баллистические траектории с направлениями, отличными от указанных трех.

Кроме описанных выше «чисто» баллистических траекторий, можно наблюдать также траектории, состоящие из длинных баллистических участков указанных направлений, соединенных короткими участками «переключения» между двумя направлениями (рис. 17). Как и «чисто» баллистические траектории, такие траектории должны также вносить специфические особенности в транспортные явления при соответствующих энергиях частиц.

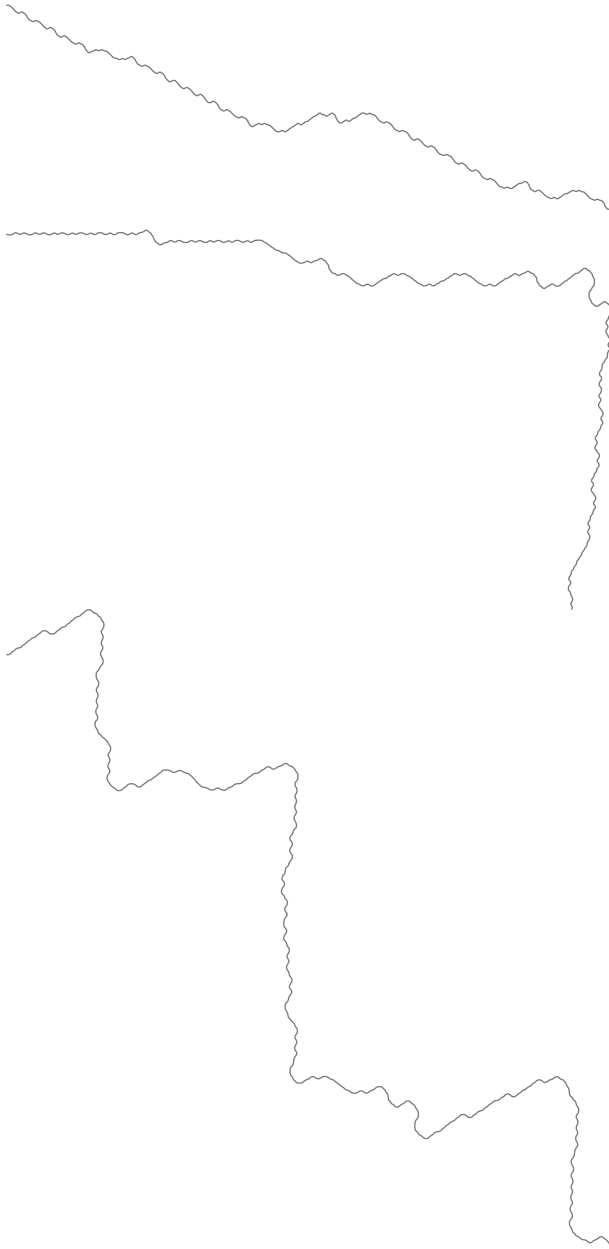


Рис. 17. «Почти» баллистические траектории в «регулярном» потенциале (3.2) ( $\epsilon = 4$ )

Можно видеть, однако, что с увеличением числа соответствующих баллистических направлений, а также усложнением геометрии «квазibalлистических» траекторий, обнаруживать такие свойства будет все сложнее и сложнее.

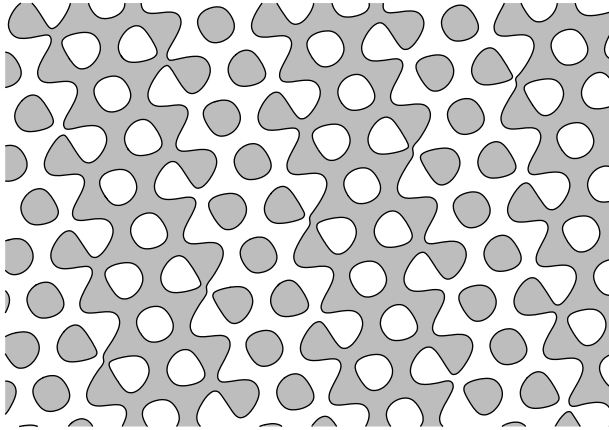
Можно видеть, таким образом, что транспортные явления, обусловленные баллистическим движением атомов, также раскрывают геометрическую структуру квазипериодических потенциалов. По сравнению со структурой, отвечающей геометрии открытых линий уровня потенциала, однако,

эта структура является более простой и непосредственно связана с задающими потенциал гармониками. Как мы увидим дальше, это свойство баллистического движения проявляется в действительности для потенциалов всех типов, и, в этом смысле, соответствующие транспортные явления почти не отличают «регулярных» квазипериодических потенциалов от «хаотических». При этом, в отличие от случая диффузионного движения, дающего хорошо наблюдаемый вклад в процессы переноса, связанный с геометрией открытых линий уровня потенциала, экспериментальное наблюдение транспортных вкладов от баллистических траекторий устойчивых направлений может быть существенно более сложным из-за сложения большого количества таких вкладов при высоких энергиях. С другой стороны, баллистическое движение в квазипериодических потенциалах также, по-видимому, является фундаментальным свойством таких потенциалов, в частности, баллистические направления также играют важную роль в квантовой динамике в потенциалах этого типа (см. [38]).

Как мы уже отмечали выше, диффузионная динамика, а также динамика, содержащая далекие прыжки между различными типами локализованной динамики, которые дают нам более всего информации и типе и топологических параметрах потенциала, в данном примере возникают преимущественно при энергиях, лежащих выше интервала существования открытых траекторий. Однако такая динамика сохраняет «память» о геометрии открытых линий уровня потенциала и дает сильно анизотропный вклад соответствующего направления в транспортные явления при этих энергиях. Такая особенность, как мы уже говорили выше, по-видимому, связана с «дополнительными причинами» появления интегрируемой динамики в соответствующей зоне устойчивости, приводящими к увеличению фазового объема, заполненного такой динамикой.

Вторая серия наших вычислений будет относиться к потенциалу

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -0.6194151736623348, \\
 b_1 &= -0.44502823229775823, \\
 c_1 &= 1.4421279589366298, \\
 a_2 &= 0.7850635914605004, \\
 b_2 &= -0.3511272752829312, \\
 c_2 &= 0.8986352554278761, \\
 a_3 &= 0, \\
 b_3 &= 0.8238079321117983, \\
 c_3 &= 2.3379002628621635,
 \end{aligned} \tag{3.3}$$



**Рис. 18.** Потенциал (3.3), обладающий «регулярными» открытыми линиями уровня, из зоны устойчивости на рис. 9, отвечающей топологическим числам  $(m^1, m^2, m^3) = (1, 1, 1)$ . Закрашенные области отвечают значениям  $V(x, y) \leq 0$

лежащему внутри зоны на рис. 9 с топологическими числами  $(m^1, m^2, m^3) = (1, 1, 1)$  (рис. 18). Как и предыдущий потенциал, потенциал (3.3) обладает достаточно большим интервалом энергий

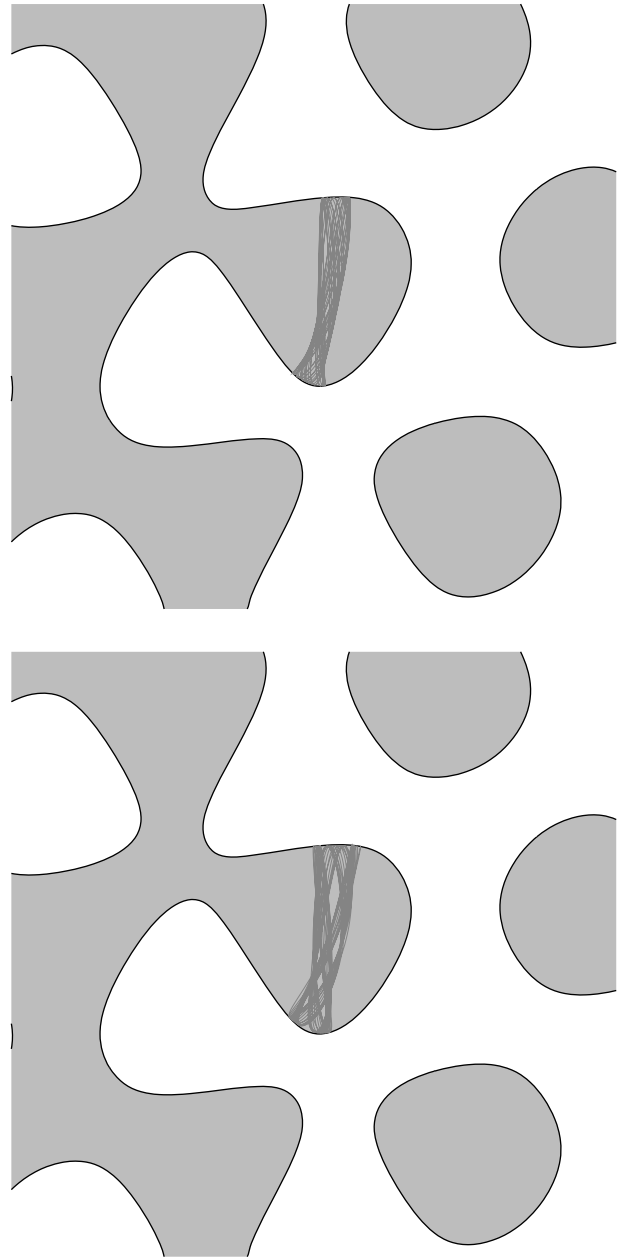
$$-0.7548 \leq V \leq 0.7548,$$

содержащим открытые линии уровня потенциала.

Здесь, в действительности, для наблюдения большинства описанных режимов достаточно исследовать динамику частиц при энергии  $\epsilon = 0$ . В частности, мы также можем наблюдать здесь наличие инвариантных торов различной сложности (рис. 19), а также области в фазовом пространстве, разделяемые такими торами (рис. 20).

Здесь можно также наблюдать такое явление, как неполное разделение инвариантными торами энергетического уровня, когда между торами имеются «зазоры», позволяющие траектории выходить из «почти изолированной» области в определенные моменты времени. Такая ситуация выражается в координатном пространстве длительным блужданием частиц в определенных областях с весьма редкими переходами (полетами Леви) между ними (рис. 21).

Наконец, в определенных областях начальных данных на нулевом уровне энергии здесь можно также наблюдать гораздо более сложные полеты Леви (рис. 22), переходящие в диффузионные режимы (рис. 23). Мы предполагаем, что наличие явно выраженной диффузионной динамики среди прочих режимов в интервале существования открытых линий уровня является в действительности общим явлением для «регулярных» квазипериодических потенциалов, если нет специальных причин, подавляющих



**Рис. 19.** Примеры инвариантных торов, отвечающих динамике атомов в «регулярном» потенциале (3.3) при нулевой полной энергии

такую динамику (как в предыдущем случае). Как нетрудно видеть, геометрия областей доступности для частиц фиксированной энергии оказывает здесь самое непосредственное влияние на геометрию полетов Леви и диффузионной динамики.

Как и в предыдущем случае, дальнейшее повышение энергии приводит к возникновению баллистических траекторий в рассматриваемом потенциале. Главные устойчивые направления таких траекторий (рис. 24) здесь также определяются просто направ-

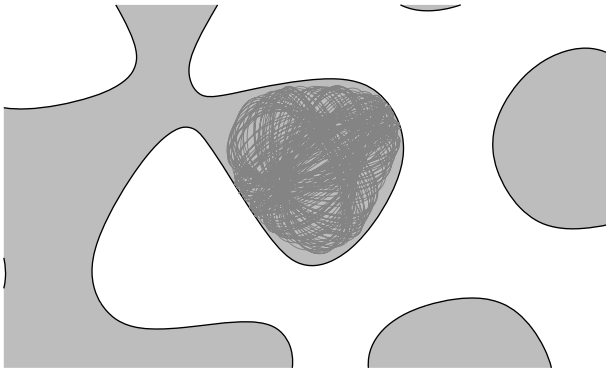


Рис. 20. Неинтегрируемая динамика в области, отделенной от остального фазового пространства в «регулярном» потенциале (3.3) при нулевой полной энергии

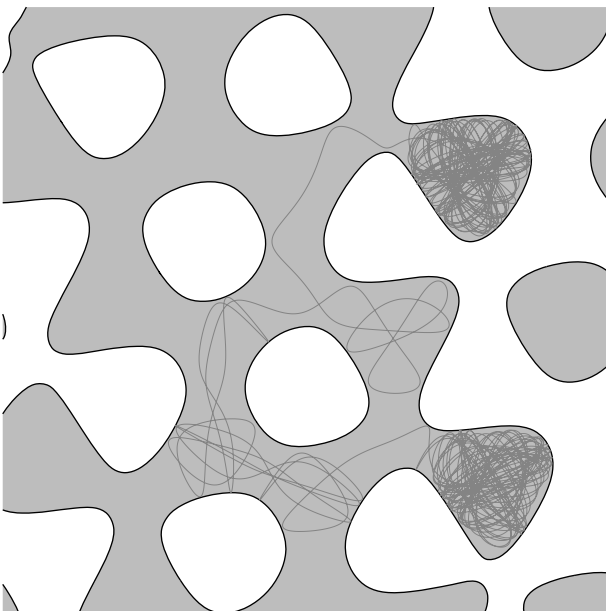


Рис. 21. Редкие полеты Леви в «регулярном» потенциале (3.3) при нулевой полной энергии частицы

лениями линий уровня косинусов, представленных в формуле (3.1), и не связаны, в действительности, с типом возникающего потенциала. Баллистические траектории устойчивых направлений, как мы уже отмечали выше, занимают конечный фазовый объем при фиксированном уровне энергии.

При дальнейшем повышении энергии частиц количество устойчивых направлений баллистических траекторий растет. Кроме того, как и в предыдущем случае, здесь также возникает множество «квазibalлистических» траекторий, имеющих довольно длинные баллистические участки, разделенные короткими переходами между ними (рис. 25). Как и в

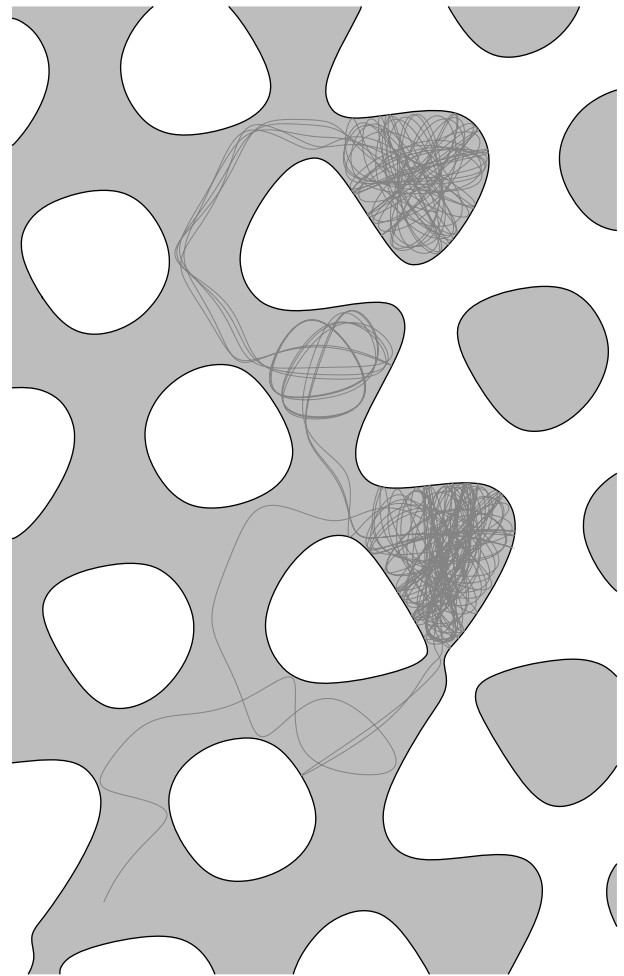


Рис. 22. Частые полеты Леви в «регулярном» потенциале (3.3) при нулевой полной энергии частицы

предыдущем случае, можно отметить, что геометрические особенности вклада баллистических траекторий в транспортные явления становятся все более и более «размытыми» с ростом числа устойчивых направлений таких траекторий, а также с усложнением геометрии «квазibalлистических» траекторий. Что же касается определения типа потенциала, а также его устойчивых топологических параметров (чисел  $(m^1, m^2, m^3)$ ), они, как и в предыдущем случае, лучше всего определяются вкладом диффузионных траекторий, а также траекторий, содержащих длинные «перескоки» (полеты Леви) между участками почти интегрируемой или локализованной динамики. Можно отметить, что в данном примере (в отличие от предыдущего) соответствующая динамика возникает по большей части в интервале существования открытых линий уровня потенциала. Мы предполагаем, что это свойство должно прояв-

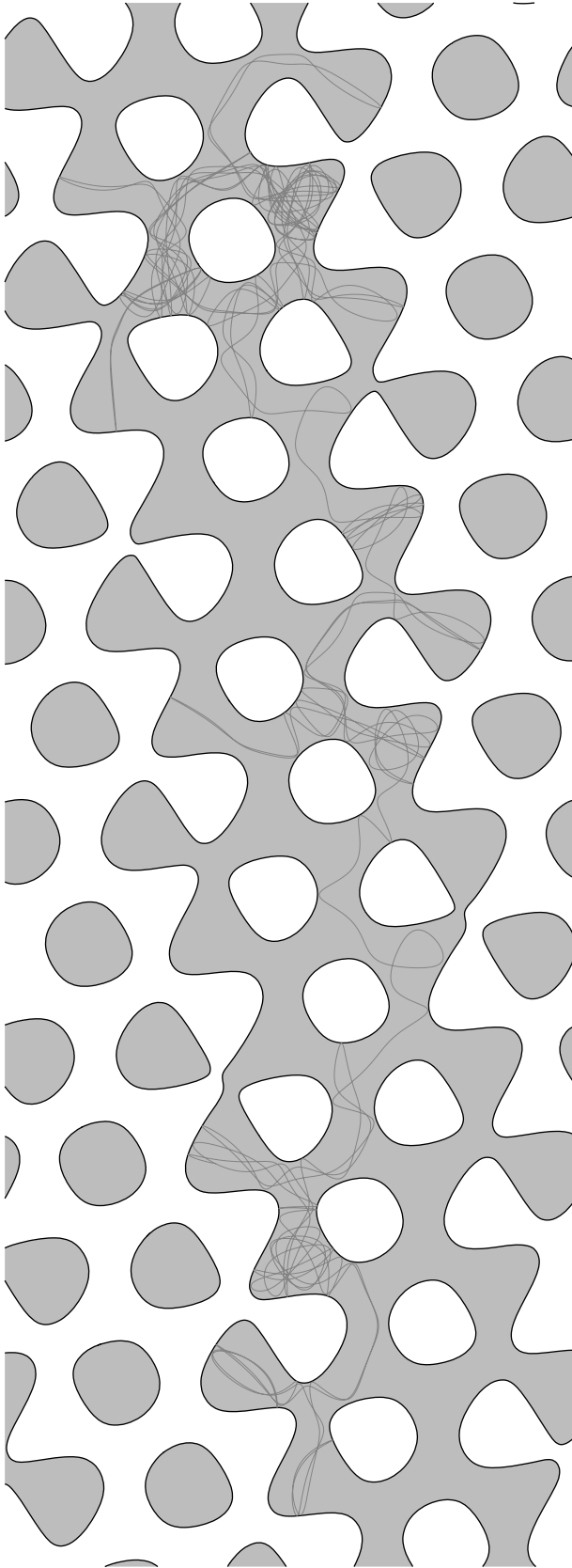


Рис. 23. Диффузионная динамика в «регулярном» потенциале (3.3) при нулевой полной энергии частицы

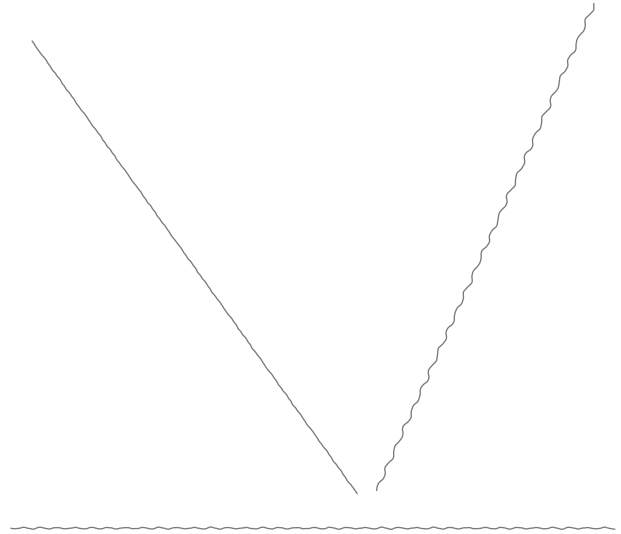


Рис. 24. Баллистические траектории «главных» направлений в «регулярном» потенциале (3.3) ( $\epsilon = 4$ )

ляться в действительности для большинства типов «регулярных» потенциалов (в отсутствие дополнительных причин для увеличения фазового объема, занятого интегрируемой динамикой), создаваемых рассматриваемым способом.

Последняя серия наших вычислений относится к потенциалу

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -0.6190763027420052, \\
 b_1 &= -0.2572674789786692, \\
 c_1 &= 1.311209111211166, \\
 a_2 &= 0.7853308419916342, \\
 b_2 &= -0.20280395367888493, \\
 c_2 &= 0.8662242771884692, \\
 a_3 &= 0, \\
 b_3 &= 0.9448195598272575, \\
 c_3 &= 2.950743051151684,
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

имеющему «хаотические» линии уровня (рис. 26). В данном случае открытые линии уровня, как мы уже говорили, существуют лишь при значении  $V_0 = 0$ .

Как и в предыдущих двух случаях, в этом случае на уровне энергии  $\epsilon = 0$  также существуют области, отвечающие движению по торам как сравнительно простой (рис. 27), так и более сложной геометрии (рис. 28).

Кроме того, в определенных областях начальных данных можно наблюдать и неинтегрируемую динамику, ограниченную, однако, некоторыми инвариантными торами на многообразии  $\epsilon = 0$ . Такая дина-

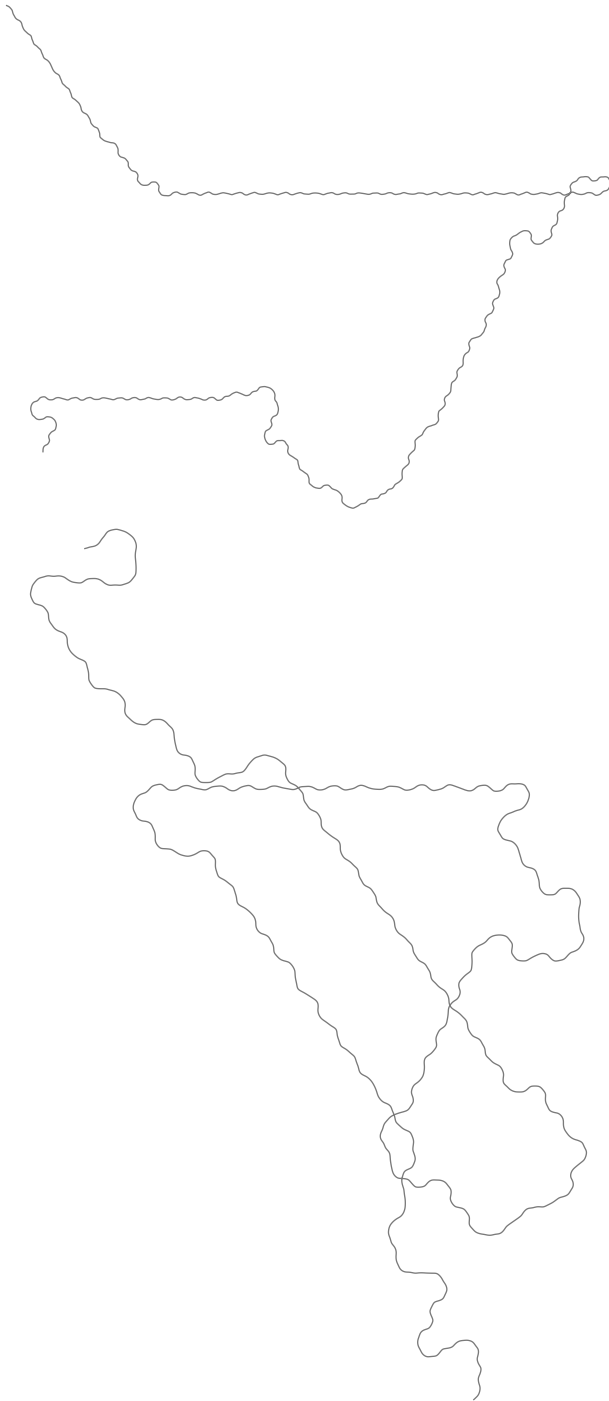


Рис. 25. «Почти» баллистические траектории в «регулярном» потенциале (3.3) ( $\epsilon = 4$ )

мика также легко отличима от других типов при ее проекции на координатное пространство (рис. 29).

Как и в предыдущих случаях, при определенных начальных условиях на нулевом уровне энергии можно также наблюдать «прилипание» траек-

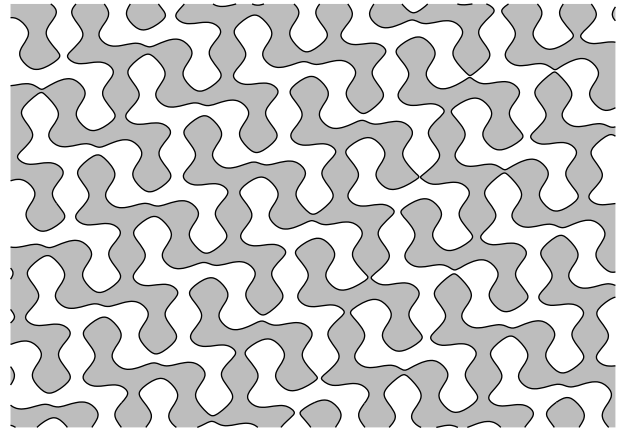


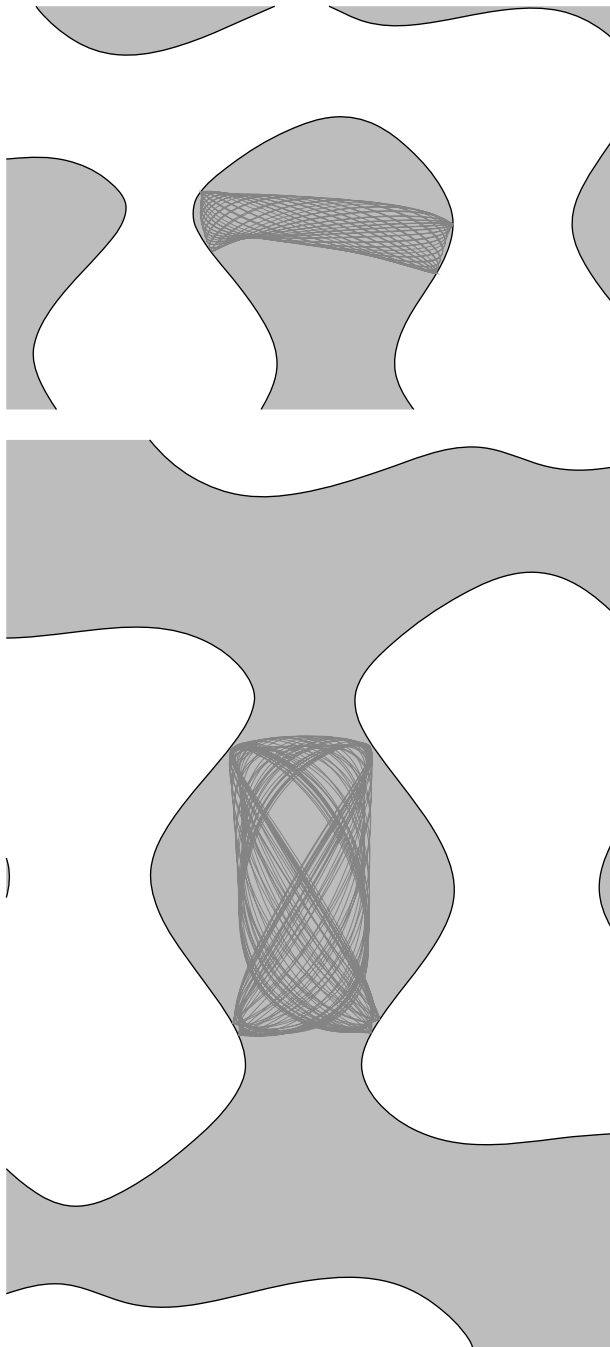
Рис. 26. Потенциал (3.4), обладающий «хаотическими» открытыми линиями уровня. Закрашенные области отвечают значениям  $V(x, y) \leq 0$

тории частицы к инвариантным торомам на довольно длительное время, перемежаемое полетами Леви в определенные моменты (рис. 30).

Так же, как и в предыдущем случае, изменяя начальные данные, мы можем добиться усложнения геометрии торов и перехода к диффузионной динамике частиц (рис. 31). Диффузионная динамика здесь также ограничена «областью доступности», которая имеет теперь совершенно другую геометрию и сама обладает в некотором смысле «диффузионными свойствами». Надо сказать, что, по-видимому, в классическом пределе транспортные свойства частиц на нулевом уровне энергии здесь близки к транспортным свойствам локализованных (хотя и в больших областях) частиц, поскольку вероятность далекого диффундирования в рассматриваемой области очень мала. Можно отметить, что в случае трех квазипериодов такие области всегда содержат участки границы, очень близко подходящие друг к другу, где возможно квантовое туннелирование. В этом случае именно квантовое туннелирование, по-видимому, должно играть большую роль для транспортных явлений при  $\epsilon = 0$ .

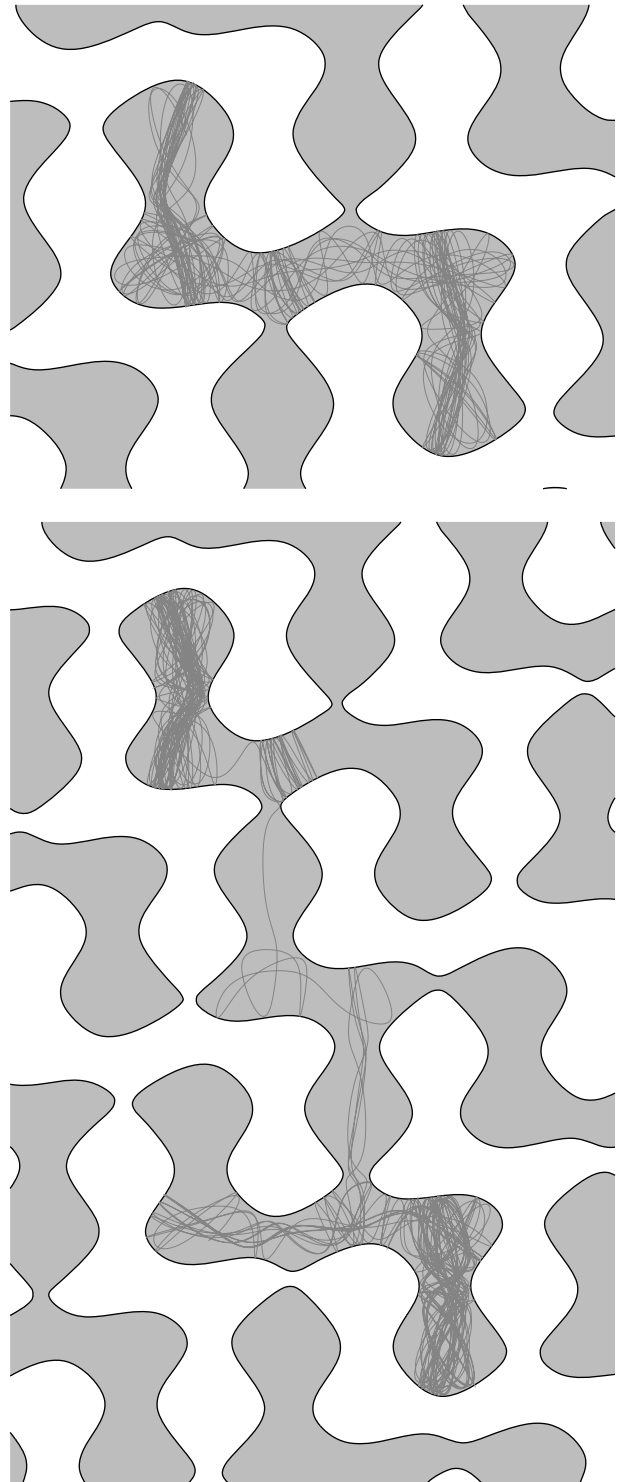
В целом, транспортные свойства атомного газа в описанном потенциале при постепенном повышении энергии частиц ансамбля должны (в классическом пределе) существенно меняться при появлении в ансамбле частиц с положительными энергиями. Действительно, при увеличении энергии области доступности расширяются и становятся неодносвязными в отличие от случая  $\epsilon = 0$ . Можно сказать, что в некотором смысле у таких областей при этом появляется свойство «протекания». Вместе с тем, они сохраняют некоторое время и определенную «диффу-



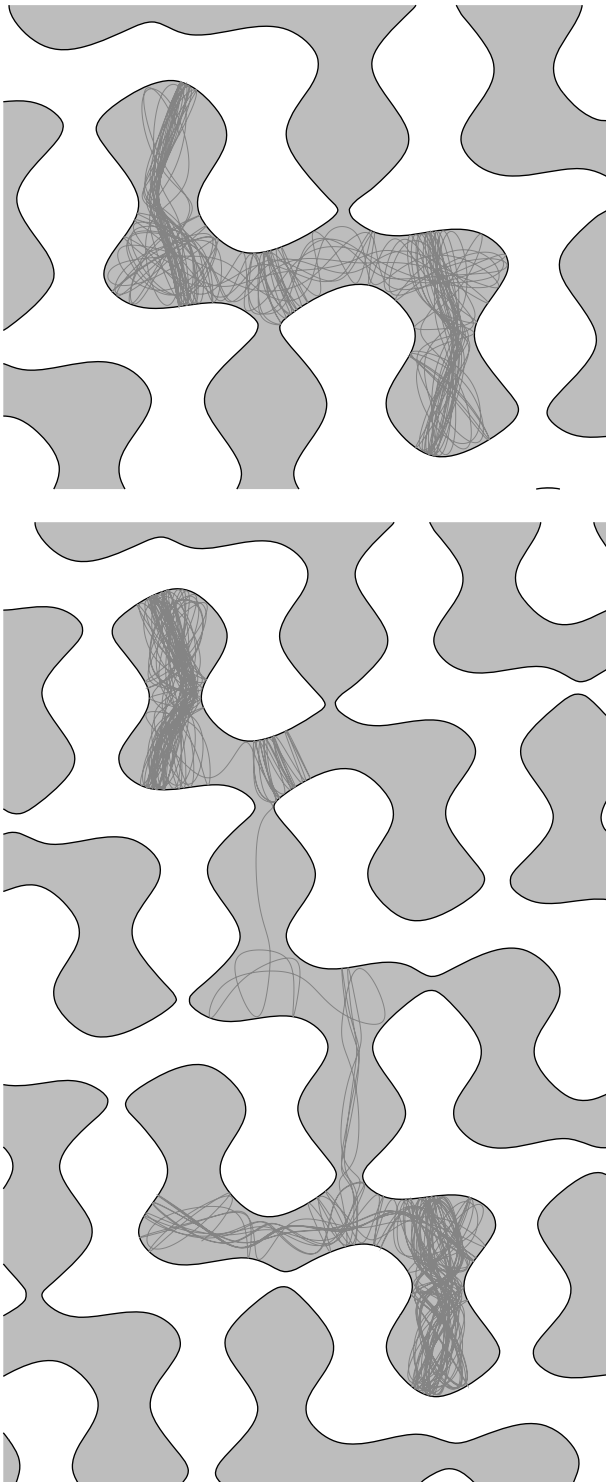


**Рис. 27.** Примеры инвариантных торов, отвечающих сравнительно простой динамике атомов в «хаотическом» потенциале (3.4) при нулевой полной энергии

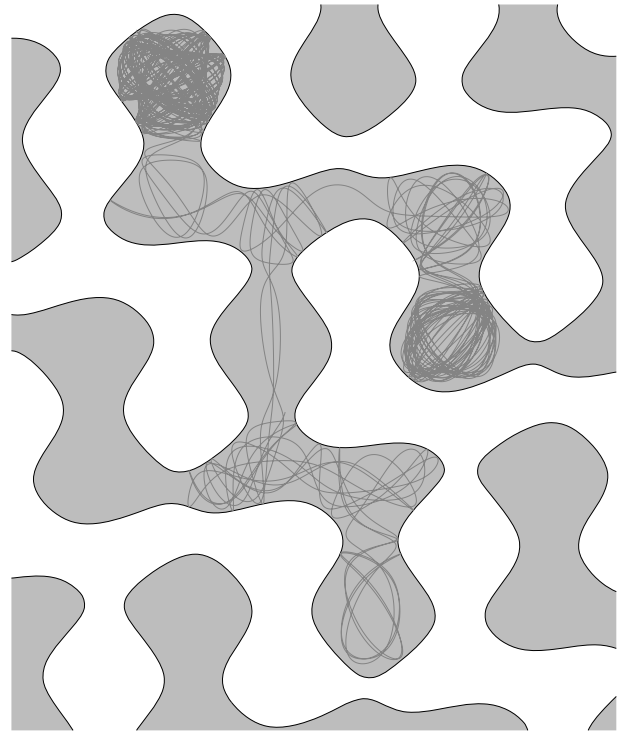
зионную» форму, что должно проявляться в транспортных свойствах атомного газа. Как можно видеть на рис. 32, диффузионные свойства динамики частиц в таких потенциалах быстро нарастают с увеличением значения  $\epsilon$ . При уменьшении энергии частиц «области доступности» становятся ограни-



**Рис. 28.** Примеры инвариантных торов, задающих более сложную динамику атомов в «хаотическом» потенциале (3.4) при нулевой полной энергии



**Рис. 29.** Неинтегрируемая динамика, ограниченная инвариантными торами в фазовом пространстве в «хаотическом» потенциале (3.4) при нулевой полной энергии



**Рис. 30.** Полеты Леви в «хаотическом» потенциале (3.4) при нулевой полной энергии

ченными областями в плоскости. Можно видеть, таким образом, здесь заметную разницу с потенциалами, обладающими «регулярными» линиями уровня, где картина существенно не меняется при вариации энергии частиц вблизи нуля.

При значительном повышении энергии в потенциале (3.4) возникают баллистические траектории, обладающие устойчивыми направлениями (рис. 33). Как и в предыдущих двух случаях, главными устойчивыми направлениями являются при этом направления линий уровня косинусов, задающих потенциал (3.4) согласно формуле (3.1). Соответствующие траектории появляются на наиболее низких уровнях энергии, при дальнейшем повышении энергии число таких направлений растет. Так же, как и в предыдущих двух случаях, конечный фазовый объем занимают «квазибаллистические» траектории, состоящие из длинных участков баллистических траекторий, разделенных короткими промежуточными участками (рис. 34). При этом, как мы уже говорили выше, для определения геометрических особенностей «хаотического» потенциала, как и в «регулярном» случае, более всего подходит, видимо, изучение вклада «диффузионных» и «скачущих» траекторий, появляющихся при «промежуточных» значениях энергии.

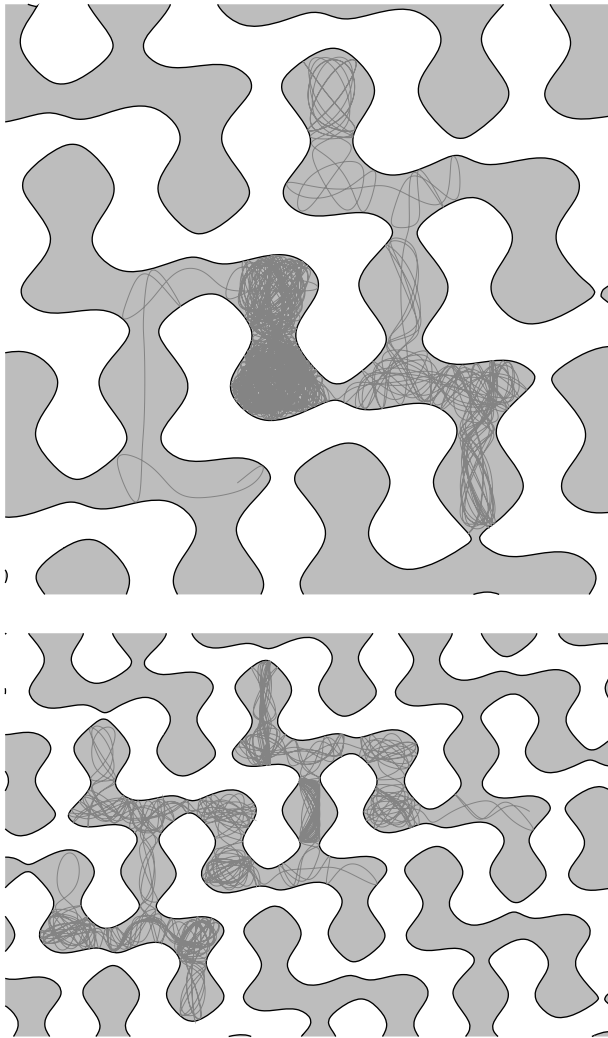


Рис. 31. Переход к диффузионной динамике при изменении начальных условий в «хаотическом» потенциале (3.4) при нулевой полной энергии частицы

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматриваются вопросы, связанные с геометрией квазипериодических потенциалов на плоскости, методами их создания, зависимостью от управляющих параметров, а также динамикой квазиклассических частиц в таких потенциалах. Основные рассуждения относятся к ситуации появления таких потенциалов в системах ультрахолодных атомов в магнитооптических ловушках, хотя приводимые нами результаты имеют место в действительности для самых общих типов квазипериодических потенциалов. Показано, что в общем случае квазипериодические потенциалы на плоскости естественно разделить на два основных класса, а именно, потенциалы с «регулярным» поведением открытых ли-

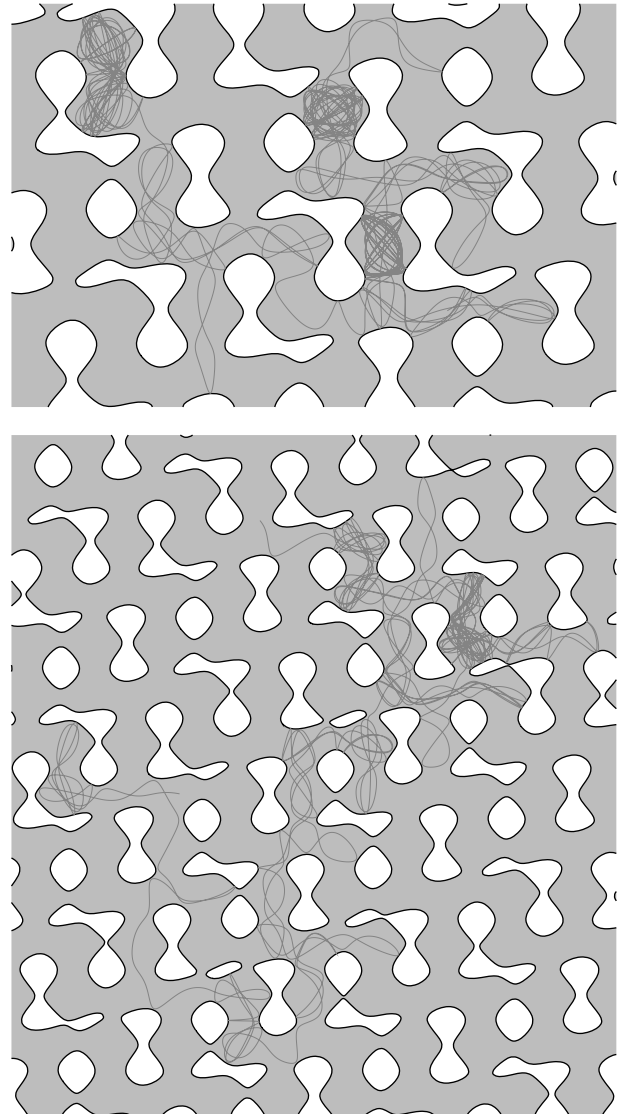


Рис. 32. Области доступности и диффузионная динамика в «хаотическом» потенциале (3.4) при положительных энергиях частиц ( $\epsilon = 0.64$  и  $\epsilon = 0.72$ )

ний уровня и потенциалы с «хаотическим» поведением открытых линий уровня. В каждом семействе квазипериодических потенциалов, зависящих гладко от некоторого набора параметров, потенциалы из этих классов возникают на множествах различной структуры, дополняющих друг друга в полном пространстве параметров. А именно, первое множество представляет собой объединение (счетного числа) областей с кусочно-гладкими границами, в то время как второе имеет фрактальные свойства. По поведению открытых линий уровня первые потенциалы могут быть отнесены к «регулярному» типу (приближающихся к периодическим потенциалам),

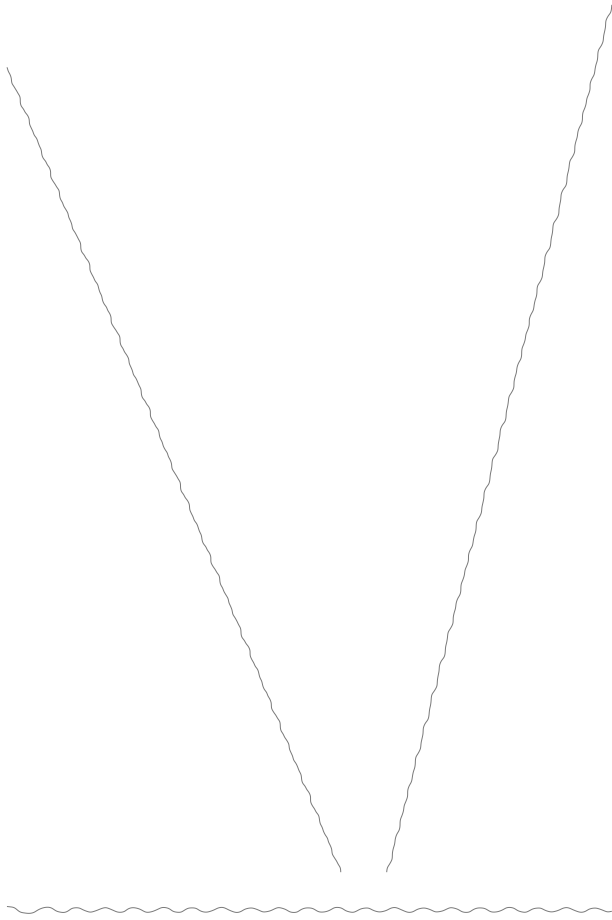


Рис. 33. Появление баллистических траекторий в «хаотическом» потенциале (3.4) при повышении энергии частицы ( $\epsilon = 5$ )

в то время как вторые могут рассматриваться в качестве модели случайных потенциалов. Бездиссипативная динамика ультрахолодных атомов в рассматриваемых потенциалах является интегрируемой на нижних уровнях энергии, постепенно хаотизируясь с ростом энергии атомов. Как правило, в интервале существования открытых линий уровня потенциала присутствуют оба типа (интегрируемый и хаотический) такой динамики, при этом свойства хаотической динамики атомов существенно зависят от геометрии линий уровня потенциала. Исследование транспортных свойств атомного газа в квазипериодических потенциалах при наличии в ансамбле частиц с соответствующими энергиями может, таким образом, позволить наблюдать различия между потенциалами обоих типов, а также дать более подробную информацию о геометрии их открытых линий уровня.

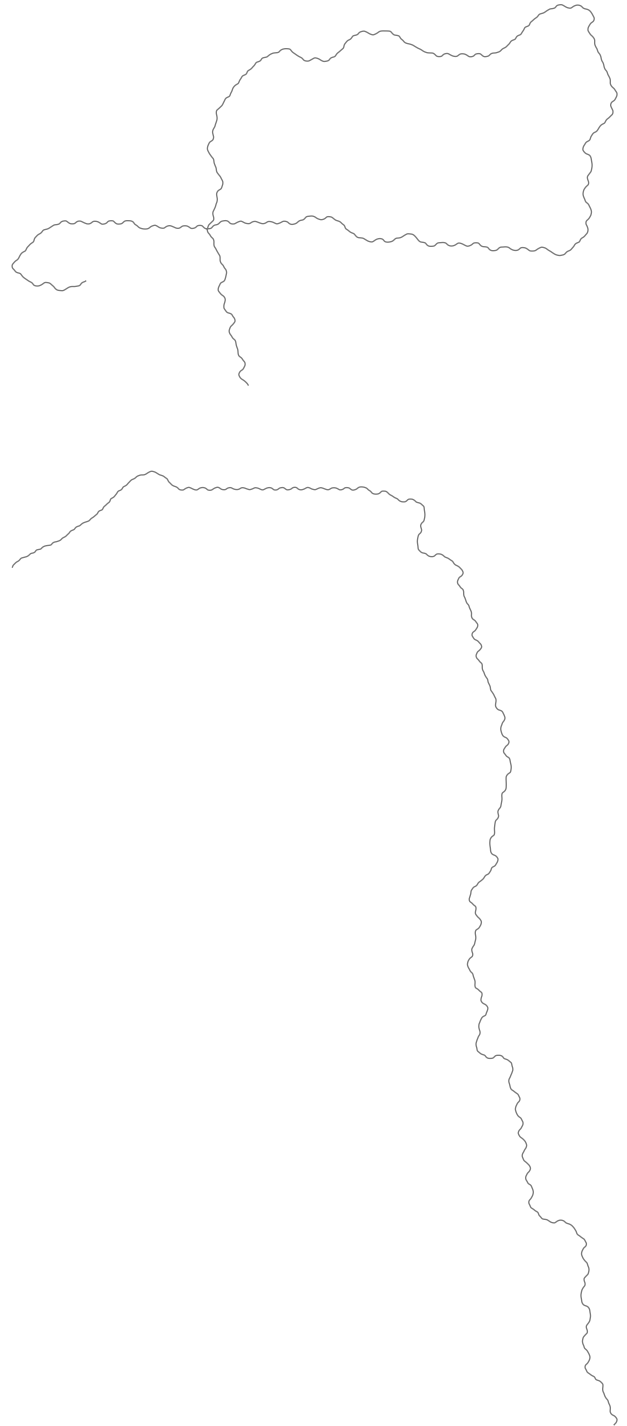


Рис. 34. «Почти» баллистические траектории в «хаотическом» потенциале (3.4) ( $\epsilon = 4$ )

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Bohr, Acta Mathematica **47**, 237 (1926).
2. A. S. Besicovitch, Proceed. London Math. Soc. **2**, 495 (1926).

3. С. П. Новиков, УМН **37**, 3 (1982).
4. А. В. Зорич, УМН **39**, 235 (1984).
5. И. А. Дынников, УМН **47**, 161 (1992).
6. С. П. Царев, Частное сообщение (1992-93).
7. И. А. Дынников, Математические заметки **53**, 57 (1993).
8. A. V. Zorich. in: Proc. *Geometric Study of Foliations*, (Tokyo, November 1993), ed. by T. Mizutani et al., World Scientific, Singapore (1994), p. 479.
9. I. A. Dynnikov, *Surfaces in 3-Torus: Geometry of Plane Sections*, Proc. of ECM2, BuDA (1996).
10. I. A. Dynnikov, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 179, AMS, Providence, RI (1997), p. 45.
11. И. А. Дынников, УМН **54**, 21 (1999).
12. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **69**, 419 (1959).
13. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **78**, 411 (1962).
14. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **87**, 389 (1965).
15. Ч. Киттель, *Квантовая теория твердых тел*, Наука, Москва (1967).
16. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
17. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).
18. M. I. Kaganov and V. G. Peschansky, Phys. Rep. **372**, 445 (2002).
19. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, Письма в ЖЭТФ **63**, 809 (1996).
20. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, УФН **168**, 249 (1998).
21. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, Sol. State Phys., *Bulletin of Braz. Math. Society*, New Series **34**, 171 (2003).
22. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, J. Stat. Phys. **115**, 31 (2004).
23. С. П. Новиков, УМН **54**, 147 (1999).
24. И. А. Дынников, С. П. Новиков, УМН **60**, 3 (2005).
25. E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1983).
26. А. Лихтенберг, М. Либерман, *Регулярное и стохастическое движение*, Мир, Москва (1984).
27. В. С. Летохов, Письма в ЖЭТФ **7**, 348 (1968).
28. V. Letokhov, *Laser Control of Atoms and Molecules*, Oxford University Press, New York (2007).
29. I. Bloch, Nature Phys. **1**, 23 (2005).
30. I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, Rev. Mod. Phys. **80**, 885 (2008).
31. M. Greiner and S. Fölling, Nature **453**, 736 (2008).
32. A. Hemmerich, D. Schropp, Jr., and T. W. Hänsch, Phys. Rev. A **44**, 1910 (1991).
33. D. Hennequin and P. Verkerk, arXiv:0906.2121 [physics.atom-ph]
34. D. Hennequin and P. Verkerk, Eur. Phys. J. D **57**, 95 (2010).
35. L. Guidoni, C. Triche, P. Verkerk, and G. Grynberg, Phys. Rev. Lett. **79**, 3363 (1997).
36. L. Guidoni, B. Depret, A. di Stefano, and P. Verkerk, Phys. Rev. A **60**, R4233 (1999).
37. L. Sanchez-Palencia and L. Santos, Phys. Rev. A **72**, 053607 (2005).
38. K. Viebahn, M. Sbrocia, E. Carter, Jr-Chiun Yu, and U. Schneider, Phys. Rev. Lett. **122**, 110404 (2019).
39. R. Gautier, H. Yao, and L. Sanchez-Palencia, Phys. Rev. Lett. **126**, 110401 (2021).
40. L. Guidoni and P. Verkerk, J. Optics B: Quantum and Semiclassical Optics **1**, R23 (1999).
41. S. Gopalakrishnan, I. Martin, and E. A. Demler, Phys. Rev. Lett. **111**, 185304 (2013).
42. L.-M. Duan, E. Demler, and M. D. Lukin, Phys. Rev. Lett. **91**, 090402 (2003).
43. L. Santos, M. A. Baranov, J. I. Cirac, H.-U. Everts, H. Fehrmann, and M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. **93**, 030601 (2004).
44. A. Ya. Maltsev, J. Math. Phys. **45**, 1128 (2004).
45. M. R. Lam, N. Peter, Th. Groh, W. Alt, C. Robens, D. Meschede, A. Negretti, S. Montangero, T. Calarco, and A. Alberti, Phys. Rev. X **11**, 011035 (2021).
46. D. Stauffer, Phys. Rep. **54**, 1 (1979).
47. J. W. Essam, Rep. Prog. Phys. **43**, 833 (1980).
48. E. K. Riedel, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **106**, 110 (1981).

49. S. A. Trugman, *Phys. Rev. B* **27**, 7539 (1983).
50. А. Я. Мальцев, *ЖЭТФ* **112**, 1710 (1997).
51. A. Zorich, *Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, Vol. 197*, AMS, Providence, RI (1999), p. 135.
52. Р. Де Лео, *УМН* **55**, 181 (2000).
53. Р. Де Лео, *УМН* **58**, 197 (2003).
54. R. De Leo, *Phys. Lett. A* **332**, 469 (2004).
55. R. De Leo, *Physica B: Cond. Matt.* **362**, 62 (2005).
56. R. De Leo, *Exper. Math.* **15**, 109 (2006).
57. Р. Де Лео, И. А. Дынный, *УМН* **62**, 151 (2007).
58. R. De Leo and I.A. Dynnikov, *Geom. Dedicata* **138**, 51 (2009).
59. A. Skripchenko, *Discrete Contin. Dyn. Sys.* **32**, 643 (2012).
60. A. Skripchenko, *Ann. Glob. Anal. Geom.* **43**, 253 (2013).
61. I. Dynnikov and A. Skripchenko, *Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, Vol. 234*, AMS, Providence, RI (2014), p. 173, arXiv:1309.4884.
62. I. Dynnikov and A. Skripchenko, *Trans. Moscow Math. Soc.* **76**, 287 (2015).
63. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, *Invent. Math.* **206**, 109 (2016).
64. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, *Bulletin de la Société Mathématique de France* **144**, 539 (2016).
65. А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, *Труды МИАН* **302**, 296 (2018).
66. P. Horak, J.-Y. Courtois, and G. Grynberg, *Phys. Rev. A* **58**, 3953 (1998).
67. D. Boiron, C. Mennerat-Robilliard, J.-M. Fournier, L. Guidoni, C. Salomon, and G. Grynberg, *Eur. Phys. J. D — Atomic, Molecular, Opt. Plasma Phys.* **7**, 373 (1999).
68. J. P. Gordon and A. Ashkin, *Phys. Rev. A* **21**, 1606 (1980).
69. J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *Journal of the Optical Society of America B* **2**, 1707 (1985).
70. V. G. Minogin and V. S. Letokhov, *Laser Light Pressure on Atoms*, CRC Press; 1st edition (January 1, 1987).
71. A. P. Kazantsev, G. I. Surdutovich, and V. P. Yakovlev, *Mechanical Action of Light on Atoms*, World Scientific Publishing Company; Illustrated edition (August 1, 1990).
72. В. Ю. Аргонов, С. В. Пранц, *ЖЭТФ* **123**, 946 (2003).
73. С. В. Пранц, *ЖЭТФ* **158**, 459 (2020).