

# ФОРМА ЛИНИИ СУБДОПЛЕРОВСКИХ РЕЗОНАНСОВ В ГАЗЕ АТОМОВ ЩЕЛОЧНЫХ МЕТАЛЛОВ В ПОЛЕ ВСТРЕЧНЫХ БИХРОМАТИЧЕСКИХ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ

А. М. Михайлов<sup>a,b</sup>, Р. Будо<sup>c\*</sup>, Д. В. Бражников<sup>a,b\*\*</sup>

<sup>a</sup> Институт лазерной физики Сибирского отделения Российской академии наук  
630090, Новосибирск, Россия

<sup>b</sup> Новосибирский государственный университет  
630090, Новосибирск, Россия

<sup>c</sup> FEMTO-ST, CNRS, Université de Bourgogne Franche-Comté  
25030, Besançon, France

Поступила в редакцию 13 июля 2021 г.,  
после переработки 13 июля 2021 г.  
Принята к публикации 1 августа 2021 г.

Высококонтрастные субдоплеровские резонансы, наблюдаемые в пара́х атомов щелочных металлов в поле встречных бихроматических лазерных пучков, имеют хорошие перспективы в квантовой метрологии для создания миниатюрного оптического стандарта частоты. До настоящего времени эти нелинейные резонансы были изучены только экспериментально или с использованием численных расчетов. Для дальнейшего развития теории наблюдаемых резонансов крайне важным представляется разработка упрощенной теоретической модели, позволяющей получить явные и компактные аналитические выражения для формы резонансной линии. В настоящей работе проведен такой теоретический анализ на основе трехуровневой  $\Lambda$ -схемы атома. При этом исследованы два режима: режим слабой стоячей волны с близкими интенсивностями встречных пучков ( $I_1 \approx I_2$ ) и режим пробной волны, в котором один из пучков имеет интенсивность, заметно меньшую интенсивности встречного пучка ( $I_2 \ll I_1$ ). Полученные аналитические выражения позволяют установить качественные различия между этими режимами, а также явным образом выделить вклады от различных нелинейных эффектов в поглощение светового поля, в том числе слагаемые, ответственные за образование высококонтрастного субдоплеровского пика. Полученные выражения находятся в качественном согласии с ранее полученными экспериментальными данными.

DOI: 10.31857/S0044451021120063

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Лазерная спектроскопия играет важнейшую роль в развитии физики, позволяя изучать строение атомов, молекул и их взаимодействия [1], выполнять прецизионные измерения эффектов квантовой теории поля [2, 3], специальной и общей теории относительности [4–6]. Один из основных методов лазерной спектроскопии — метод насыщенного поглощения в газе атомов или молекул [1, 7]. Резонансы насыщенного поглощения, свободные от

доплеровского уширения (субдоплеровские резонансы), активно используются в лабораториях для проведения различных экспериментов, в которых необходимо осуществлять стабилизацию частоты лазерного излучения. На основе резонансов насыщенного поглощения создаются некоторые транспортируемые квантовые стандарты частоты (КСЧ) оптического диапазона с использованием молекулярных [8–11] или атомарных газов [12, 13]. Некоторые из таких стандартов применяются в космических научных миссиях [14, 15].

До недавнего времени наиболее компактные (миниатюрные) образцы КСЧ разрабатывались лишь для микроволнового диапазона. В таких устройствах частота СВЧ-генератора порядка нескольких

\* Rodolphe Boudot.

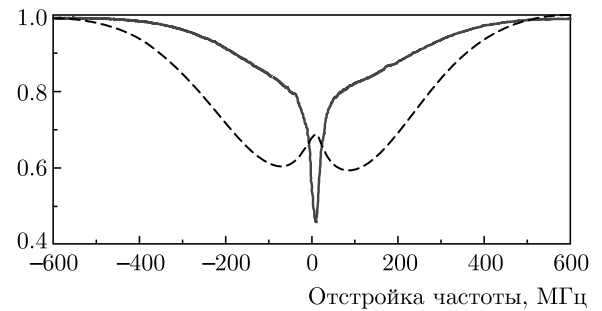
\*\* E-mail: brazhnikov@laser.nsc.ru

гигагерц стабилизируется по резонансам когерентного пленения населенностей (КПН) [16] в парах щелочных металлов (Rb или Cs). Современные образцы таких КСЧ используют газовые ячейки объемом  $V \ll 1 \text{ см}^3$ , при этом общий объем устройства обычно составляет менее  $70 \text{ см}^3$  [17–19]. Относительная стабильность частоты (девиация Аллана) КСЧ-КПН лежит в диапазоне  $\sigma_y \sim 10^{-11}$ – $10^{-10}$  за 1 с усреднения. Такие миниатюрные микроволновые стандарты чрезвычайно востребованы для развития многих современных технологий, в том числе связанных с использованием малых спутников: мониторинг ионосферы Земли [20], спутниковая навигация и связь, в том числе для дальнего космоса [21].

Создание миниатюрных КСЧ оптического диапазона представляет собой весьма сложную задачу. Поэтому долгое время не существовало соответствующих разработок, сравнимых по характеристикам с микроволновыми аналогами. Одна из причин заключается в том, что отношение сигнал/шум, определяющее кратковременную стабильность частоты, не достигало приемлемого уровня при использовании миниатюрных газовых ячеек. Действительно, наиболее компактные КСЧ оптического диапазона были основаны на резонансах насыщенного поглощения в ячейках объемом, равным нескольким кубическим сантиметрам или значительно больше. Например, в работах [11, 14, 15] длина ячеек с молекулярным йодом составляла от 10 до 30 см. Заметный прогресс в развитии миниатюрных КСЧ оптического диапазона произошел лишь в последние несколько лет с появлением серии работ группы ученых из NIST (г. Болдер) и других организаций США [22–24]. В них было предложено использовать микроячейку ( $V \approx 10 \text{ мм}^3$ ), наполненную парами атомов  $^{87}\text{Rb}$ , и метод двухфотонной спектроскопии для получения реперного резонанса, необходимого для стабилизации оптической частоты. Полный объем КСЧ составил всего  $35 \text{ см}^3$  [24], что сравнимо с миниатюрными образцами микроволновых КСЧ. Важно отметить, что активные работы в этом направлении на протяжении нескольких лет приводили к постоянному улучшению стабильности частоты оптических КСЧ с  $\sigma_y \approx 10^{-11}$  за 1 с в одной из первых работ [22] примерно до  $2 \cdot 10^{-13}$  в недавней работе [25].

В работе [26] был предложен альтернативный подход к созданию миниатюрных оптических КСЧ. В его основе лежит субдоплеровская спектроскопия атомов цезия в поле встречных бихроматических лазерных пучков с ортогональными линейными поля-

Сигнал с фотодетектора, отн. ед.



**Рис. 1.** Резонансное поглощение светового поля парами атомов Cs, наблюдаемое на фотодетекторе в обычном одночастотном (штриховая линия) и в двухчастотном (сплошная) режимах. В одночастотном режиме возбуждается переход  $F_g = 3 \rightarrow F_e = 4$  в  $D_1$ -линии,  $T_{cell} \approx 60^\circ\text{C}$ . В двухчастотном режиме одновременно возбуждаются переходы  $F_g = 3, 4 \rightarrow F_e = 4$ ,  $T_{cell} \approx 45^\circ\text{C}$ . Суммарная оптическая мощность в ячейке  $P_{tot} \approx 1.1 \text{ мВт}$  при диаметре пучков около 2 мм. Сигналы нормированы на постоянное значение, пропорциональное интенсивности света на входе в ячейку

ризациями. Этот метод весьма близок к стандартному методу насыщенного поглощения. Основное отличие состоит в том, что каждый из встречных пучков содержит две спектральные компоненты с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , так что их разность совпадает с частотой сверхтонкого расщепления  $\omega_{hfs}$  основного состояния в атоме ( $2\pi \cdot 9.2 \text{ ГГц}$  для  $^{133}\text{Cs}$ ). В этих условиях, как было впервые обнаружено в экспериментальной работе [27], при сканировании частоты лазера наблюдается субдоплеровский резонанс с необычно большим контрастом, а значение отношения амплитуда/ширина более чем на порядок превосходит аналогичное значение для резонансов, наблюдаемых в стандартном одночастотном методе насыщенного поглощения. Примеры резонансов, полученные в наших недавних экспериментах с миниатюрной кубической стеклянной ячейкой (объемом  $V \approx 125 \text{ мм}^3$ ) представлены на рис. 1 [28]. Из рисунка следует, что при использовании двухчастотного метода наблюдается более узкий субдоплеровский резонанс в виде провала в проходящей через ячейку интенсивности света по сравнению с аналогичным резонансом в стандартной одночастотной схеме, в которой наблюдается обычный резонанс насыщенного поглощения в виде пика пропускания. Кроме того, этот высоконтрастный провал имеет более высокую амплитуду, чем пик резонанса насыщенного поглощения. Эти особенности крайне важны для приложений новых нелинейных резонансов к решению задач кван-

товой метрологии, в частности, для создания миниатюрного КСЧ оптического диапазона. Так, в первых же экспериментах с использованием цезиевой микроячейки ( $V \approx 5 \text{ мм}^3$ ) была достигнута стабильность оптической частоты, равная  $2 \cdot 10^{-12}$  за 1 с [26]. Важно отметить, что кроме высокой стабильности частоты предложенная двухчастотная техника демонстрирует хорошие результаты при относительно малой температуре паров: около  $60^\circ\text{C}$  для двухчастотной спектроскопии Cs против  $80\text{--}100^\circ\text{C}$  для двухфотонной спектроскопии Rb [24, 25]. Это обстоятельство означает потенциально более низкое энергопотребление всего КСЧ.

Описанный новый метод двухчастотной спектроскопии уже успешно используется для стабилизации оптической частоты лазера в схеме высокостабильных микроволновых КСЧ на основе резонансов КПН [29, 30]. Кроме того, недавно этот метод был опробован и на атомах рубидия для создания КСЧ оптического диапазона [31]. Однако, несмотря на эти успехи и еще большие перспективы, теория наблюдаемых высококонтрастных нелинейных резонансов имеет свои пробелы. В частности, качественное описание наблюдаемых эффектов, а также численные расчеты в модели трехуровневой  $\Lambda$ -схемы были представлены в работах [27, 32, 33]. Численные расчеты, учитывающие реальную структуру уровней энергии в атоме цезия, были проведены в работе [26]. В этих работах была показана ключевая роль явления КПН в наблюдении высококонтрастных субдоплеровских резонансов. Между тем до сих пор не было представлено никаких аналитических выражений для формы линии наблюдаемых резонансов в газе атомов, которые бы явно демонстрировали возможность наблюдения резонанса в виде субдоплеровского пика в поглощении среды.

В настоящей работе нами представлена упрощенная спектроскопическая модель на основе трехуровневой  $\Lambda$ -схемы атома, позволяющая получить явные аналитические выражения, адекватно описывающие экспериментально наблюдаемые резонансы. Модель демонстрирует взаимное влияние таких нелинейных эффектов, как самонасыщение среды от каждого из двух лазерных пучков, насыщенное поглощение от взаимного действия встречных пучков, а также два типа нелинейных эффектов, связанных с КПН: просветление среды вдали от центра резонансной кривой и взаимная «конкуренция» разных КПН-состояний в центре этой кривой, которая и отвечает за наблюдение высококонтрастных субдоплеровских резонансов.

## 2. ТЕОРИЯ

### 2.1. Модель на основе $\Lambda$ -схемы

Для наблюдения высококонтрастных субдоплеровских резонансов методом двухчастотной спектроскопии атомы цезия облучались встречными лазерными пучками, каждый из которых состоит как минимум из двух спектральных компонент с частотами  $\omega_1, \omega_2$  и соответствующими волновыми числами  $k_1, k_2$  ( $k_j = \omega_j/c$ , где  $c$  — скорость света). Для упрощения теории рассмотрим случай, когда две спектральные компоненты излучения в каждом из пучков имеют равные амплитуды. Тогда световое поле может быть представлено в виде

$$E(z, t) = E_1 \{ \exp[-i(\omega_1 t - k_1 z)] + \exp[-i(\omega_2 t - k_2 z)] \} + E_2 \{ \exp[-i(\omega_1 t + k_1 z - \alpha + \phi_1)] + \exp[-i(\omega_2 t + k_2 z + \alpha + \phi_2)] \} + \text{с.с.} \quad (1)$$

Здесь  $E_1$  — вещественная амплитуда волн, бегущих по оси  $z$  (оси квантования), а  $E_2$  — волн, бегущих против этой оси. Для упрощения, интенсивность лазерного поля считаем однородной по поперечному сечению пучков ( $\Pi$ -образный профиль), т. е. амплитуды волн не зависят от поперечных координат  $x$  и  $y$ . Учет гауссова распределения интенсивности, как правило, приводит лишь к незначительным изменениям субдоплеровского резонанса [34]. В выражении (1) введены фазы  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , чтобы учесть возможную разность фаз между волнами, бегущими по оси  $z$  и против нее. Как мы увидим далее, наблюдаемые резонансы чувствительны не к этим фазам по отдельности, а к их разности  $\phi_1 - \phi_2$ . Эта разность может контролироваться в эксперименте, например, посредством перемещения зеркала, формирующего встречный световой пучок [26, 32, 33].

Как и в работе [32], всю совокупность уровней энергии в реальном атоме будем моделировать трехуровневой  $\Lambda$ -схемой, изображенной на рис. 2. Расстояние  $\Delta_g$  между подуровнями энергии основного состояния,  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ , соответствует величине сверхтонкого расщепления. При этом частотная компонента поля  $\omega_1$  вызывает дипольные переходы  $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ , тогда как компонента  $\omega_2$  — переходы  $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ . Отметим, что  $\Lambda$ -схема уровней энергии часто используется в теории при рассмотрении широкого круга задач из области лазерной спектроскопии атомов [35–37], динамики распространения импульсов света в резонансных средах [38–40] и иных задач, связанных с явлением КПН.

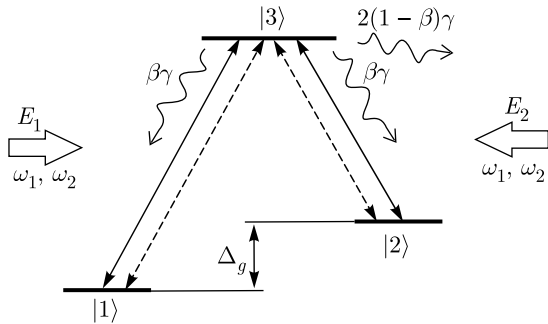


Рис. 2. \$\Lambda\$-схема уровней энергии в атоме. Сплошными стрелками обозначены переходы, индуцируемые двухчастотным пучком \$E\_1\$, распространяющимся вдоль оси \$z\$. Штриховые стрелки — переходы, индуцируемые встречным двухчастотным пучком \$E\_2\$. Волнистые стрелки обозначают каналы спонтанной релаксации. Пролетная релаксация не показана

Для наблюдения высококонтрастных субдоплеровских резонансов в работах [26,27] использовались встречные пучки с взаимно ортогональными линейными поляризациями. Несмотря на то, что поле (1) записано в скалярном виде, в нашей модели векторную природу света можно учесть введением в (1) фазы \$\pm\alpha\$, которая соответствует углу между линейными поляризациями встречных пучков (см. также работу [32]). При необходимости на основе \$\Lambda\$-схемы могут быть рассмотрены и эллиптически поляризованные волны [41].

Теоретический анализ будем проводить на основе стандартного квазиклассического формализма одноатомной матрицы плотности \$\hat{\rho}\$, когда внутренние степени свободы атома описываются квантовомеханическим образом, тогда как световое поле считается классическим (не квантуется) [1,42]. Соответствующее уравнение движения имеет линдбладовский вид:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [(\hat{H}_0 + \hat{V}), \hat{\rho}] + \hat{\mathcal{R}}\{\hat{\rho}\}. \quad (2)$$

Здесь \$d/dt = \partial/\partial t + v \partial/\partial z\$, где \$v\$ — проекция скорости атома на ось квантования \$z\$. Гамильтониан \$\hat{H}\_0\$ описывает невозмущенное состояние атома (в отсутствие лазерного поля). В базисе собственных функций он имеет диагональный вид:

$$\hat{H}_0 = \sum_{n=1}^3 \mathcal{E}_n |n\rangle\langle n|, \quad (3)$$

где \$\mathcal{E}\_n\$ — энергия уровня \$|n\rangle\$ в атоме (см. рис. 2), так что \$\omega\_{mn} = (\mathcal{E}\_m - \mathcal{E}\_n)/\hbar\$ есть частоты соответствующих переходов в \$\Lambda\$-схеме.

Оператор \$\hat{V}\$ в уравнении (2) описывает взаимодействие атома с полем (1) в электродипольном приближении. Его можно представить в виде суммы операторов для каждого из встречных пучков, \$\hat{V} = \hat{V}\_1 + \hat{V}\_2\$, где в резонансном приближении

$$\hat{V}_1 = -\hbar R_1 \{ \exp[-i(\omega_1 t - k_1 z)] |3\rangle\langle 1| + \exp[-i(\omega_2 t - k_2 z)] |3\rangle\langle 2| \} + \text{H.c.}, \quad (4)$$

$$\hat{V}_2 = -\hbar R_2 \{ \exp[-i(\omega_1 t + k_1 z + \phi_1 - \alpha)] |3\rangle\langle 1| + \exp[-i(\omega_2 t + k_2 z + \phi_2 + \alpha)] |3\rangle\langle 2| \} + \text{H.c.} \quad (5)$$

Здесь введены вещественные частоты Раби согласно определению \$R\_j = d\_0 E\_j/\hbar\$, где \$d\_0\$ — дипольные моменты оптических переходов в \$\Lambda\$-схеме, которые, для упрощения, мы считаем равными.

Оператор \$\hat{\mathcal{R}}\$ в уравнении (2) описывает релаксационные процессы в атоме. Как и дипольные моменты переходов, скорости спонтанной релаксации по каналам \$|3\rangle \to |1\rangle\$ и \$|3\rangle \to |2\rangle\$ также считаем одинаковыми и равными \$\beta\gamma\$, где \$\beta\$ — коэффициент ветвления, принимающий значение в диапазоне \$0 \le \beta \le 1\$ (в частности, \$\beta = 1\$ соответствует закрытой системе уровней). В уравнение (2) для матрицы плотности не входят дифференциальные операторы \$\partial/\partial x\$ и \$\partial/\partial y\$ по поперечным координатам, что формально означает неограниченный размер лазерных пучков. В принятом случае П-образного профиля интенсивности учет ограниченности пучков и, следовательно, конечного времени взаимодействия атомов с полем можно учесть соответствующей константой пролетной релаксации, которую обозначим \$\Gamma\$. Выпишем в явном виде оператор \$\hat{\mathcal{R}}\$:

$$\hat{\mathcal{R}} = \gamma \left[ \beta \rho_{33} \hat{P}_{11} + \beta \rho_{33} \hat{P}_{22} - 2\rho_{33} \hat{P}_{33} - (\rho_{31} \hat{P}_{31} + \rho_{32} \hat{P}_{32} + \text{H.c.}) \right] - \Gamma \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \rho_{nm} \hat{P}_{nm} + \frac{\Gamma}{2} [\hat{P}_{11} + \hat{P}_{22}], \quad (6)$$

где введены проекционные операторы \$\hat{P}\_{nm} = |n\rangle\langle m|\$. Из этого выражения следует, что в наших обозначениях спонтанная релаксация возбужденного уровня \$|3\rangle\$ равна \$2\gamma\$. В свою очередь, релаксация оптических когерентностей — недиагональных элементов \$\rho\_{31}, \rho\_{32}\$ матрицы плотности и комплексно-сопряженных им \$\rho\_{13}, \rho\_{23}\$ — описывается константой \$\gamma\_{eg} = \gamma + \Gamma\$. Релаксация населенностей подуровней основного состояния \$\rho\_{11}, \rho\_{22}\$ и низкочастотных когерентностей \$\rho\_{12}, \rho\_{21} = \rho\_{12}^\*\$ происходит со скорос-

тью Г. Последнее слагаемое в выражении (6) описывает установление изотропного состояния в атоме, когда подуровни  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$  имеют одинаковую населенность, равную  $1/2$ . Отметим, что мы считаем газ атомов достаточно разреженным, чтобы пренебречь столкновениями и связанными с ними эффектами (в частности, столкновительной релаксацией). Все сделанные приближения достаточно типичны в теории субдоплеровской спектроскопии атомов щелочных металлов в ячейках без релаксационного покрытия стенок и без буферного газа.

Матрица плотности  $\hat{\rho}$  является функцией как времени ( $t$ ), так и координат ( $z$ ). Будем рассматривать стационарный режим, в котором все переходные процессы (например, при влете атома в лазерный пучок) установились и населенности уровней энергии не зависят от времени. Между тем, как было предсказано теоретически [32] и подтверждено экспериментально [26, 33], величина резонансного поглощения поля в газовой ячейке медленно осциллирует в пространстве. Это является следствием «конкуренции» состояний КПН, индуцируемых в атоме каждым из встречных двухчастотных пучков (см. разд. 2.2): области конструктивной интерференции состояний КПН сменяются областями деструктивной интерференции. Для учета такого эффекта в населенностях уровней  $\Lambda$ -схемы необходимо учесть низкочастотные пространственные гармоники  $\exp(\pm 2i k_{12}z)$ , где  $k_{12} = k_1 - k_2$ . Таким образом, для диагональных элементов матрицы плотности будем использовать следующее фурье-разложение:

$$\rho_{nn}(z) \approx \rho_{nn}^{(0)} + \rho_{nn}^{(+)} \exp(2ik_{12}z) + \rho_{nn}^{(-)} \exp(-2ik_{12}z), \quad (7)$$

где  $n = 1, 2, 3$ . В силу эрмитовости матрицы плотности ( $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$ ) имеем  $\rho_{nn}^{(0)} = \rho_{nn}^{(0)*}$  и  $\rho_{nn}^{(+)} = \rho_{nn}^{(-)*}$ .

Состояние КПН в  $\Lambda$ -схеме есть особая суперпозиция подуровней  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$  (см. разд. 2.2). Она образуется под действием когерентного взаимодействия атома одновременно с обоими спектральными составляющими поля. В свою очередь, это состояние характеризуется недиагональными элементами  $\rho_{12}$  и  $\rho_{21}$  матрицы плотности. Поэтому для последних справедливо следующее представление:

$$\rho_{12}(z, t) \approx \exp(i\delta_{12}t) \times [\rho_{12}^{(+)} \exp(ik_{12}z) + \rho_{12}^{(-)} \exp(-ik_{12}z)], \quad (8)$$

$$\rho_{21}(z, t) \approx \exp(-i\delta_{12}t) \times [\rho_{21}^{(+)} \exp(ik_{12}z) + \rho_{21}^{(-)} \exp(-ik_{12}z)], \quad (9)$$

откуда видно, что эти элементы осциллируют во времени на низкой частоте  $\delta_{12} = \omega_1 - \omega_2$ . Свойство эрмитовости матрицы плотности дает следующую связь амплитуд гармоник:  $\rho_{21}^{(+)} = \rho_{12}^{(-)*}$  и  $\rho_{21}^{(-)} = \rho_{12}^{(+)*}$ .

Разложения на гармоники (7)–(9) приводят к необходимости учета в оптических когерентностях не только гармоник вида  $\exp(\pm i k_1 z)$  и  $\exp(\pm i k_2 z)$ , как в  $\Lambda$ -схеме, взаимодействующей с одним бихроматическим пучком, но и комбинированных гармоник вида  $\exp[\pm i (2k_1 - k_2)z]$  и  $\exp[\pm i (k_1 - 2k_2)z]$  (см. также [32]). Таким образом, для оптических когерентностей имеем следующие представления:

$$\rho_{31}(z, t) = \exp(-i\omega_1 t) [\rho_{31}^{(-1)} \exp(-i k_1 z - i \phi_1) + \rho_{31}^{(+1)} \exp(i k_1 z) + \rho_{31}^{(+21)} \exp[i (2k_2 - k_1)z] + \rho_{31}^{(-21)} \exp[-i (2k_2 - k_1)z - i \phi_1]], \quad (10)$$

$$\rho_{32}(z, t) = \exp(-i\omega_2 t) [\rho_{32}^{(-2)} \exp(-i k_2 z - i \phi_2) + \rho_{32}^{(+2)} \exp(i k_2 z) + \rho_{32}^{(+12)} \exp[i (2k_1 - k_2)z] + \rho_{32}^{(-12)} \exp[-i (2k_1 - k_2)z - i \phi_2]]. \quad (11)$$

Аналогичные выражения можно записать для остальных оптических когерентностей, учитывая связь между ними:  $\rho_{13} = \rho_{31}^*$ ,  $\rho_{23} = \rho_{32}^*$ .

Используя все выписанные выражения (3)–(11), из (2) можно получить систему уравнений (оптические уравнения Блоха) для всех элементов (гармоник) матрицы плотности. Эта система довольно громоздка, так как имеет ранг, равный 29. Однако из нее можно легко исключить все гармоники оптических когерентностей и понизить ранг системы до 13. Кроме того, мы будем рассматривать частный случай, который представляет наибольший интерес с точки зрения наблюдения наибольшего контраста субдоплеровских резонансов в рассматриваемом двухчастотном методе [26, 27, 32, 33]. А именно, будем считать рамановскую (двухфотонную) отстройку частоты равной нулю, т.е.  $\omega_1 - \omega_2 = \Delta_g$  (см. рис. 2). Итак, запишем оптические уравнения Блоха в явном виде, которые будут являться основой для получения аналитических решений в следующих разделах. Для нулевой гармоники  $\rho_{11}^{(0)}$  имеем

$$\rho_{11}^{(0)} - \beta\gamma\tau\rho_{33}^{(0)} + 2\gamma_{eg}\tau(S_1 + S_2)N_{13}^{(0)} + 2R_1^2\tau \operatorname{Re}\{L_1\rho_{12}^{(-)}\} + 2R_2^2\tau \operatorname{Re}\{L_2\rho_{12}^{(+)}e^{i\theta}\} = \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Здесь и далее  $\tau = \Gamma^{-1}$  — среднее время пролета атома через лазерное поле, а  $\theta = 2\alpha - \phi_{12}$ . Также, для краткости, будем использовать обозначение  $N_{nm}^{(0,\pm)} = \rho_{nn}^{(0,\pm)} - \rho_{mm}^{(0,\pm)}$  для гармоник разности населенностей подуровней.

Далее, для гармоники  $\rho_{11}^{(+)}$  имеем

$$\begin{aligned} & (1 + 2i k_{12} v \tau) \rho_{11}^{(+)} - \beta \gamma \tau \rho_{33}^{(+)} + \\ & + \left[ R_1^2 L_1 + R_2^2 L_2^* \right] \tau N_{13}^{(+)} + \\ & + R_1^2 \tau L_1 \rho_{12}^{(+)} + R_2^2 \tau L_2^* \rho_{21}^{(+)} e^{-i\theta} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

для гармоники  $\rho_{22}^{(0)}$  —

$$\begin{aligned} & \rho_{22}^{(0)} - \beta \gamma \tau \rho_{33}^{(0)} + 2\gamma_{eg} \tau (S_1 + S_2) N_{23}^{(0)} + \\ & + 2R_1^2 \tau \operatorname{Re} \left\{ L_1^* \rho_{12}^{(-)} \right\} + \\ & + 2R_2^2 \tau \operatorname{Re} \left\{ L_2^* \rho_{12}^{(+)} e^{i\theta} \right\} = \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (14)$$

для гармоники  $\rho_{22}^{(+)}$  —

$$\begin{aligned} & (1 + 2i k_{12} v \tau) \rho_{22}^{(+)} - \beta \gamma \tau \rho_{33}^{(+)} + \\ & + \left[ R_1^2 L_1^* + R_2^2 L_2 \right] \tau N_{23}^{(+)} + \\ & + R_1^2 \tau L_1^* \rho_{12}^{(+)} + R_2^2 \tau L_2 \rho_{21}^{(+)} e^{-i\theta} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения для гармоник  $\rho_{11}^{(-)}$  и  $\rho_{22}^{(-)}$  можно получить комплексным сопряжением уравнений соответственно (13) и (15). Аналогичные уравнения можно получить для гармоник возбужденного состояния  $\rho_{33}^{(0)}$ ,  $\rho_{33}^{(+)}$  и  $\rho_{33}^{(-)}$ . Однако их можно заменить гораздо более компактными уравнениями, которые можно получить сложением уравнений для разных гармоник. Например, сложение уравнений для  $\rho_{11}^{(0)}$ ,  $\rho_{22}^{(0)}$  и  $\rho_{33}^{(0)}$  дает простое уравнение вида

$$\rho_{11}^{(0)} + \rho_{22}^{(0)} + \rho_{33}^{(0)} + 2\gamma \tau (1 - \beta) \rho_{33}^{(0)} = 1. \quad (16)$$

Аналогично, складывая уравнения для  $\rho_{11}^{(+)}$ ,  $\rho_{22}^{(+)}$  и  $\rho_{33}^{(+)}$ , приходим к следующему простому уравнению:

$$\begin{aligned} & (1 + 2i \tau k_{12} v) [\rho_{11}^{(+)} + \rho_{22}^{(+)} + \rho_{33}^{(+)}] + \\ & + 2\gamma \tau (1 - \beta) \rho_{33}^{(+)} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Комплексным сопряжением последнего уравнения можно получить следующее:

$$\begin{aligned} & (1 - 2i \tau k_{12} v) [\rho_{11}^{(-)} + \rho_{22}^{(-)} + \rho_{33}^{(-)}] + \\ & + 2\gamma \tau (1 - \beta) \rho_{33}^{(-)} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Отметим, что для закрытой системы ( $\beta = 1$ ), как и должно быть, из выражений (16)–(18) и (7) следует сохранение полной населенности подуровней для всех  $z$  и  $t$ :

$$\operatorname{Tr} \{ \hat{\rho}(z, t) \} = \rho_{11}(z, t) + \rho_{22}(z, t) + \rho_{33}(z, t) = 1. \quad (19)$$

Осталось выписать уравнения для гармоник низкочастотных когерентностей. В частности, для  $\rho_{12}^{(+)}$  имеем

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + i k_{12} v \tau + 2\gamma_{eg} \tau (S_1 + S_2) \right] \rho_{12}^{(+)} + \\ & + R_1^2 \tau \left[ L_1 N_{13}^{(+)} + L_1^* N_{23}^{(+)} \right] + \\ & + R_2^2 \tau e^{-i\theta} \left[ L_2 N_{13}^{(0)} + L_2^* N_{23}^{(0)} \right] = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

для гармоники  $\rho_{12}^{(-)}$  —

$$\begin{aligned} & \left[ 1 - i k_{12} v \tau + 2\gamma_{eg} \tau (S_1 + S_2) \right] \rho_{12}^{(-)} + \\ & + R_1^2 \tau \left[ L_1 N_{13}^{(0)} + L_1^* N_{23}^{(0)} \right] + \\ & + R_2^2 \tau e^{-i\theta} \left[ L_2 N_{13}^{(-)} + L_2^* N_{23}^{(-)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Остальные два уравнения для гармоник  $\rho_{21}^{(-)}$  и  $\rho_{21}^{(+)}$  получаются комплексным сопряжением уравнений соответственно (20) и (21).

В выписанных уравнениях были использованы следующие обозначения для параметров насыщения:

$$S_{1,2} = \frac{R_{1,2}^2}{\gamma_{eg}^2 + (\delta \mp kv)^2}, \quad (22)$$

и комплексных лоренцианов:

$$L_{1,2} = \frac{1}{\gamma_{eg} + i(\delta \mp kv)}. \quad (23)$$

При этом было использовано приближение  $|\mathbf{k}_1| \approx \approx |\mathbf{k}_2| \equiv k$ . Далее мы также будем полагать, что выполняется условие

$$vk_{12} \approx v\Delta_g/c \ll \Gamma, \gamma_{eg} S_{1,2}.$$

Это условие может быть выполнено для узких световых пучков, о которых речь пойдет далее, и не очень слабых световых полей. В частности, для пучков диаметром  $d \sim 1$  мм, которые, например, использовались в работе [26], типовое значение  $\Gamma$  порядка  $10^{-2}\gamma$ . Тогда получаем, что для цезия, для которого  $2\gamma \approx 2\pi \cdot 4.6$  МГц, приближение  $vk_{12} \ll \Gamma$

выполняется с хорошим запасом для всех атомов, движущихся со скоростями менее  $10^3$  м/с, а это подавляющая часть атомов цезия при комнатной температуре (при  $T \approx 300$  К средняя тепловая скорость атомов цезия в газе составляет примерно 230 м/с). Таким образом, в самих уравнениях для матрицы плотности мы будем полагать  $k_{12} \approx 0$ , что является типовым приближением, например, в теории явления КПН [35] (отказ от этого приближения приводит лишь к некоторому дополнительному уширению КПН-резонанса).

В выражениях (22), (23) была введена отстройка несущей частоты  $\omega_0$  лазерного излучения от средней частоты двух переходов в  $\Lambda$ -схеме:

$$\delta = \omega_0 - \frac{\omega_{31} + \omega_{32}}{2}. \quad (24)$$

Именно эта отстройка сканируется в экспериментах для наблюдения резонансной кривой, тогда как упомянутые выше две спектральные компоненты,  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , получаются из несущей частоты  $\omega_0$ , например, с помощью СВЧ-модуляции излучения электрооптическим модулятором. Таким образом, по существу  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — это боковые полосы порядков соответственно  $+1$  и  $-1$ .

## 2.2. Когерентное пленение населенностей и образование пика в поглощении

Перед решением выписанных оптических уравнений Блоха продемонстрируем на качественном уровне причину наблюдения высококонтрастного субдоплеровского пика в поглощении лазерного поля средой резонансных атомов. Для этого запишем в явном виде состояния КПН, которые могут быть индуцированы в атоме каждым из двух встречных пучков по отдельности. Эти состояния, которые мы будем обозначать  $|NC\rangle$  (noncoupled), подчиняются уравнениям [43]

$$\langle 3|\hat{V}_j|NC_j\rangle = 0, \quad j = 1, 2. \quad (25)$$

Используя выражения (4) и (5), получаем явный вид нормированных на единицу волновых функций:

$$|NC_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |1\rangle - \exp[-i(\delta_{12}t - k_{12}z)]|2\rangle \right\}, \quad (26)$$

$$|NC_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |1\rangle - \exp[-i(\delta_{12}t + k_{12}z - \theta)]|2\rangle \right\}. \quad (27)$$

Как видно из (25), находясь в состоянии КПН, атом не взаимодействует с лазерным полем и, следовательно, не флуоресцирует. Поэтому КПН-состояние также называют «темным».

При  $\delta \gg \Delta_{res}$ , где  $\Delta_{res}$  — полная ширина субдоплеровского резонанса на полувысоте (FWHM), в силу эффекта Доплера атомы газа могут находиться в резонансе одновременно только с одним из двух встречных световых пучков. Тогда, при достаточно малой константе релаксации  $\Gamma$  основного состояния, большая часть атомов оказывается в одном из двух состояний, (26) или (27). Этим объясняется слабое поглощение поля на крыльях доплеровского контура (см. рис. 1, сплошная кривая). В центре же резонансной кривой, где  $\delta \leq \Delta_{res}$ , атомы одновременно взаимодействуют с двумя встречными лазерными пучками. В этом смысле можно говорить о «конкуренции» лазерных пучков в приготовлении квантового состояния в атоме, результат которой сильно зависит от «степени» эквивалентности двух состояний, (26) и (27). Действительно, рассмотрим скалярное произведение

$$|\langle NC_1|NC_2\rangle| = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \exp[i(\theta - 2k_{12}z)] \right\}, \quad (28)$$

откуда видно, что при

$$\theta - 2k_{12}z = (2n - 1)\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (29)$$

состояния  $|NC_1\rangle$  и  $|NC_2\rangle$  ортогональны, т. е. они не могут существовать одновременно в атоме. Это можно назвать деструктивной интерференцией темных состояний, которая приводит к заметному поглощению света атомом по сравнению с уровнем поглощения при  $\delta \gg \Delta_{res}$ . Описанные особенности формирования состояний КПН в рассматриваемой конфигурации лазерного поля позволяют качественно объяснить возможность наблюдения высококонтрастного субдоплеровского пика поглощения в экспериментах (см. рис. 1).

Если атом находится в чистом состоянии КПН, например  $|NC_1\rangle$ , то его матрица плотности может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(NC_1) &= |NC_1\rangle\langle NC_1| = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ |1\rangle\langle 1| + \exp(2i k_{12}z)|2\rangle\langle 2| - \right. \\ &\quad \left. - \exp[i(\delta_{12}t - k_{12}z)]|1\rangle\langle 2| - \right. \\ &\quad \left. - \exp[-i(\delta_{12}t - k_{12}z)]|2\rangle\langle 1| \right\}. \quad (30) \end{aligned}$$

Если атом находится в состоянии  $|NC_2\rangle$ , то помимо появления фазы  $\theta$  в этих гармониках у  $k_{12}$  сменится знак. Из этого простого анализа следует, что населенности подуровней (матричные элементы вида  $\langle n|\hat{\rho}|n\rangle$ ) должны содержать гармоники  $\exp(\pm 2k_{12}z)$ , в то время как низкочастотные когерентности осциллируют во времени и пространстве,

как  $\exp[\pm i(\delta_{12}t \pm k_{12}z)]$ . С этим и связано появление соответствующих гармоник в выражениях (7), (8) и (9). Отметим, что если среда облучается только одним из двух встречных пучков, то квантовое состояние в движущемся атоме газа адиабатически следует за полем и ненулевые пространственные гармоники в населенностях (7) не возникают [35]. Также можно показать, что в таком однопучковом режиме гармоники  $\rho_{12}^{(+)} = \rho_{21}^{(-)} = 0$ . При этом если атом находится в чистом состоянии  $|NC_1\rangle$ , то для оставшихся ненулевых гармоник элементов матрицы плотности получаем простые и очевидные решения:

$$\rho_{11}^{(0)} = \rho_{22}^{(0)} = \frac{1}{2}, \quad \rho_{33}^{(0)} = 0, \quad \rho_{12}^{(-)} = \rho_{21}^{(+)} = -\frac{1}{2}.$$

В экспериментах условие (29) может быть выполнено различными способами: перемещением ячейки вдоль оси  $z$ , перемещением зеркала в схеме, где встречный пучок формируется простым отражением исходного пучка обратно в ячейку (при этом изменяется фаза  $\phi_{12}$ , а, следовательно, и  $\theta$ ), изменением угла  $\alpha$  между линейными поляризациями встречных пучков. Все эти особенности наблюдались в экспериментах [26, 32, 33]. Из условия (29), в частности, следует, что с точки зрения максимизации амплитуды субдоплеровского пика преимущественно обладают короткие ячейки, в которых это условие с достаточной точностью выполняется на всей длине. Период осцилляций амплитуды резонанса при перемещении отражающего зеркала может быть найден из выражения (29):  $\Delta z = \pi/2|k_{12}|$  (здесь коэффициент 2 связан с тем, что при перемещении зеркала на  $\Delta z$  отраженные от него волны приобретают удвоенный фазовый сдвиг  $2k_{1,2}\Delta z$ ). В частности, для цезия период осцилляций амплитуды резонанса составляет  $\Delta z(\text{Cs}) \approx 8$  мм, что также подтверждается экспериментами с микроячейкой ( $L \approx 1.4$  мм), изготовленной по технологии MEMS [26], и с компактной стеклянной ячейкой ( $L \approx 5$  мм) [33].

Рассматриваемая  $\Lambda$ -схема уровней является лишь приближением реальной структуры уровней энергии в атомах щелочных металлов. Поэтому на ее основе можно делать лишь грубые оценки параметров субдоплеровского резонанса, наблюдаемого в экспериментах. Реальная схема уровней энергии была рассмотрена в работе [26] на основе численных расчетов оптических уравнений Блоха. Между тем  $\Lambda$ -схема может быть использована для получения явных аналитических выражений для формы резонансной линии и объяснения причин

появления субдоплеровского пика в поглощении среды. Этому и посвящены следующие два раздела.

### 2.3. Режим пробной волны

Рассмотрим сначала режим, в котором один из двухчастотных пучков (пробный пучок) значительно слабее другого. Пусть это будет поле  $E_2$  (см. рис. 2). Причем интенсивность этого пучка также полагаем гораздо меньше интенсивности насыщения  $I_{sat}$ , которая для атомов щелочных металлов составляет единицы милливатт на квадратный сантиметр. Другой пучок, поле накачки  $E_1$ , мы не будем пока существенно ограничивать по интенсивности, т. е. она может быть сравнима с  $I_{sat}$ . В таком случае задачу можно решить в линейном режиме по пробному полю, когда это поле никак не отражается на оптических характеристиках среды, а лишь «пробует» то состояние атомов, которое подготовлено волной накачки. Поэтому в уравнениях для матрицы плотности следует учесть только влияние поля  $E_1$  и положить  $R_2 = 0$ . Кроме того, из системы уравнений исчезнут некоторые гармоники, например,  $\rho_{nn}^{(\pm)}$  ( $n = 1, 2, 3$ ), которые являются следствием действия двух полей одновременно. В итоге ранг этой системы понижается до 5, и она примет простой вид:

$$\rho_{11}^{(0)} - \beta\gamma\tau\rho_{33}^{(0)} + 2\gamma_{eg}\tau S_1 N_{13}^{(0)} + 2R_1^2\tau \operatorname{Re}\{L_1\rho_{12}^{(-)}\} = \frac{1}{2}, \quad (31)$$

$$\rho_{22}^{(0)} - \beta\gamma\tau\rho_{33}^{(0)} + 2\gamma_{eg}\tau S_1 N_{23}^{(0)} + 2R_1^2\tau \operatorname{Re}\{L_1^*\rho_{12}^{(-)}\} = \frac{1}{2}, \quad (32)$$

$$(1 + 2\gamma_{eg}\tau S_1)\rho_{12}^{(-)} + R_1^2\tau \left[ L_1 N_{13}^{(0)} + L_1^* N_{23}^{(0)} \right] = 0. \quad (33)$$

Уравнение для  $\rho_{33}^{(0)}$  остается в неизменном виде (16), а уравнение для  $\rho_{21}^{(+)}$  может быть получено комплексным сопряжением уравнения (33).

Легко показать, что в выписанных уравнениях присутствует симметрия относительно замены  $\rho_{11}^{(0)} \leftrightarrow \rho_{22}^{(0)}$ . Это же следует из качественного анализа рис. 2 в рассматриваемых условиях. Следовательно, не решая систему, мы получаем  $\rho_{11}^{(0)} = \rho_{22}^{(0)}$  и  $N_{13}^{(0)} = N_{23}^{(0)}$ . Тогда из (33) для  $\rho_{12}^{(-)}$  находим

$$\rho_{12}^{(-)} = -\frac{\xi_1}{1 + \xi_1} N_{13}^{(0)}, \quad (34)$$



где введен пролетный параметр насыщения согласно определению [44]

$$\xi_j \equiv 2\gamma_{eg}\tau S_j. \quad (35)$$

Из (34), в частности, следует, что гармоника  $\rho_{12}^{(-)}$  вещественная, как и гармоника  $\rho_{21}^{(+)} = \rho_{12}^{(-)*}$ . Как уже было отмечено в разд. 2.2, этими элементами матрицы плотности описывается состояние КПН как суперпозиция уровней  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ . Их вещественность является следствием того, что мы изначально положили рамановскую отстройку равной нулю.

Выпишем окончательное решение уравнений Блоха в линейном приближении по пробному полю:

$$\begin{aligned} \rho_{11}^{(0)} = \rho_{22}^{(0)} &= \\ &= \frac{1}{2} - \frac{(1 + 2(1 - \beta)\gamma\tau)/2}{1 + 2\gamma\tau + [4 + 2(2 - \beta)\gamma\tau]\xi_1} \xi_1, \quad (36) \end{aligned}$$

$$\rho_{33}^{(0)} = \frac{\xi_1}{1 + 2\gamma\tau + [4 + 2(2 - \beta)\gamma\tau]\xi_1}, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \rho_{12}^{(-)} = \rho_{21}^{(+)} &= -\frac{\xi_1/2}{1 + \xi_1} \times \\ &\times \left[ 1 - \frac{3 + 2(1 - \beta)\gamma\tau}{1 + 2\gamma\tau + [4 + 2(2 - \beta)\gamma\tau]\xi_1} \xi_1 \right]. \quad (38) \end{aligned}$$

Из этого решения, в частности, следует, что в закрытой системе ( $\beta = 1$ ) в пределе достаточно большого времени взаимодействия ( $\tau \rightarrow \infty$ ) все атомы накачиваются в состояние КПН, для которого

$$\rho_{11}^{(0)} = \rho_{22}^{(0)} = \frac{1}{2}, \quad \rho_{33}^{(0)} = 0, \quad \rho_{12}^{(-)} = \rho_{21}^{(+)} = -\frac{1}{2}.$$

Этот же результат мы получали в разд. 2.2 без решения системы для матрицы плотности, что является проверкой полученных решений.

В рассматриваемом режиме ( $I_2 \ll I_1$ ) исследуемым сигналом является поглощение пробного пучка с интенсивностью  $I_2$ , включающего две спектральные составляющие,  $E_2(\omega_1)$  и  $E_2(\omega_2)$ , которые взаимодействуют с отдельными переходами в  $\Lambda$ -схеме. Укороченное волновое уравнение для медленной амплитуды каждой из этих составляющих имеет известный вид ( $j = 1, 2$ ):

$$\frac{dE_2(\omega_j)}{dz} = 2\pi i k P(\omega_j), \quad (39)$$

где  $P(\omega_j)$  — поляризация среды на частоте  $\omega_j$ , изменяющаяся медленно в пространстве (по сравнению

с осцилляциями  $\exp(ikz)$ ). Здесь, как и раньше, мы положили  $k_1 \approx k_2 = k$ . Учитывая, что  $I = cE^2/2\pi$  и  $P = n_a \text{Tr}[\hat{d}_0 \hat{\rho}]$ , где  $\hat{d}_0$  — оператор дипольного момента,  $n_a$  — концентрация атомов, можно прийти к следующему дифференциальному уравнению, описывающему изменение интенсивности двухчастотного пробного пучка в среде:

$$\begin{aligned} \frac{dI_2}{dz} &= -2\gamma_{eg} \hbar k c n_a S_2 \times \\ &\times \left[ N_{13}^{(0)} + \rho_{12}^{(-)} \left( \cos \eta + \frac{\delta + kv}{\gamma_{eg}} \sin \eta \right) \right]. \quad (40) \end{aligned}$$

При выводе этого выражения было учтено, что  $\rho_{12}^{(-)}$  — вещественная функция и  $N_{13}(0) = N_{23}(0)$ . Также была введена фаза  $\eta(z) = \theta - 2k_{12}z$ . Формула (40) имеет простой физический смысл. Действительно,  $\hbar kc = pc = E_{ph}$  — это энергия одного фотона пробного пучка, которая в линейном режиме по полю рассеивается со скоростью порядка  $\gamma_{eg} S_2$ . Количество этой энергии, рассеиваемой в единице объема среды, должно быть пропорционально количеству рассеивающих частиц, т. е.  $n_a$ . Все нелинейные процессы, которые влияют на скорость рассеяния энергии из пробного пучка, описываются слагаемыми в квадратных скобках. Так, в линейном режиме (по обоим пучкам) населенности подуровней в  $\Lambda$ -схеме совпадают с изотропным начальным состоянием:  $\rho_{11} = \rho_{22} = 1/2$ ,  $\rho_{33} = 0$ ,  $\rho_{12}^{(-)} = 0$ , поэтому  $N_{13}^{(0)} = \rho_{11} = 1/2$ . Отклонение от этих значений — суть проявление нелинейных эффектов. В частности, первое слагаемое в скобках ( $N_{13}^{(0)}$ ) связано с выравниванием населенностей подуровней основного и возбужденного состояний, происходящее под влиянием пучка накачки и описывающее явление насыщенного поглощения. Это явление при перестройке частоты лазера (т. е. при сканировании  $\delta$ ) приводит к наблюдению резонанса насыщенного поглощения в проходящей через ячейку интенсивности пробного пучка. Второе слагаемое в скобках, пропорциональное  $\rho_{12}^{(-)}$ , связано с образованием когерентного состояния как суперпозиции подуровней  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ . Причем, как видно из (40), это состояние либо уменьшает поглощение пробной волны, либо увеличивает его в зависимости от фазы  $\eta(z)$ , что находится в качественном согласии с анализом, проведенным в разд. 2.2.

Учитывая связь параметра насыщения  $S_2$  с интенсивностью волны  $I_2$  и дипольным моментом перехода  $d_0$ , а также известную формулу  $d_0^2 = 3\beta\gamma\hbar/4k^3$ , перепишем уравнение (40) в виде

$$\frac{dI_2}{dz} = -\frac{3\lambda^2 n_a}{2\pi} \chi(I_1, z) I_2, \quad (41)$$

где был введен безразмерный показатель поглощения пробной волны

$$\kappa(I_1, z) = \beta\gamma\gamma_{eg} |L_2|^2 \times \left[ N_{13}^{(0)} + \rho_{12}^{(-)} \left( \cos \eta + \frac{\delta + kv}{\gamma_{eg}} \sin \eta \right) \right]. \quad (42)$$

Здесь лоренциан  $L_2$  определяется формулой (23).

Как уже отмечалось выше в разд. 2.2, короткие газовые ячейки предпочтительны для использования в методе двухчастотной спектроскопии (см. также работы [26, 33]). В таких ячейках можно пренебречь зависимостью показателя поглощения  $\kappa$  от переменной  $z$ , происходящей из-за присутствия медленных гармоник  $\exp(\pm 2ik_{12}z)$ . Иными словами, в выражении (42) переменную  $z$ , для упрощения, можно считать еще одним заданным параметром. Тогда уравнение (41) имеет весьма простое решение в виде известного закона Бугера:

$$I_2(z = L_{cell}) = I_{20} \exp[-\kappa(I_1)L_{cell}]. \quad (43)$$

Здесь  $I_{20}$  — интенсивность пробного пучка на входе в ячейку, а  $I_2(z = L_{cell})$  — на выходе из нее.

Таким образом, резонансное поглощение пробного поля  $E_2$  описывается функцией  $\kappa(\delta)$ . Между тем эта функция также зависит от скорости  $v$  атома. Поэтому в случае газа атомов необходимо провести ее усреднение по скоростям теплового движения с учетом распределения Максвелла:

$$\Upsilon(\delta) \equiv \langle \kappa(\delta, v) \rangle_v = \frac{1}{\sqrt{\pi}v_0} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\delta, v) \exp\left(-\frac{v^2}{v_0^2}\right) dv, \quad (44)$$

где  $v_0 = \sqrt{2k_B T/m_0}$  — наиболее вероятная скорость теплового движения атома в газе ( $k_B$  — постоянная Больцмана,  $m_0$  — масса атома).

Для дальнейшего упрощения задачи и получения компактного аналитического выражения для  $\Upsilon(\delta)$  воспользуемся приближением первого порядка по теории возмущений для пучка накачки, полагая  $\xi_1 \ll 1$ . Тогда, учитывая явный вид решений (36)–(38), приближенное выражение для показателя поглощения пробной волны примет вид

$$\kappa \approx \frac{\beta\gamma\gamma_{eg}}{2} |L_2|^2 \left[ 1 - \frac{3 + 2(1 - \beta)\gamma\tau}{1 + 2\gamma\tau} \xi_1 - \xi_1 \left( \cos \eta + \frac{\delta + kv}{\gamma_{eg}} \sin \eta \right) \right]. \quad (45)$$

Как мы покажем далее, слагаемое в скобках, пропорциональное  $\sin \eta$ , после усреднения по скоростям приведет к важной особенности показателя поглощения — к появлению асимметрии нелинейного резонанса. С учетом приближения (45) усреднение по скоростям атомов становится тривиальным и приводит к выражению вида

$$\Upsilon_{total}(\delta) = \Upsilon_{lin}(\delta) + \Upsilon_{SAR}(\delta) + \Upsilon_{interCPT}(\delta), \quad (46)$$

где линейное поглощение пробного поля, не зависящее от интенсивности пучка накачки, описывается слагаемым

$$\Upsilon_{lin}(\delta) = \frac{\sqrt{\pi}\beta\gamma}{2\Delta_D} \Phi_r \left( \frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D} \right), \quad (47)$$

которое приводит к формированию широкого контура Фойгта (см. рис. 1). В своей центральной части этот контур близок к доплеровскому контуру с полушириной по уровню  $e^{-1}$ , равной  $\Delta_D = kv_0$ . Поэтому в спектроскопии его часто также называют доплеровским. В последнем выражении была введена функция

$$\Phi_r(x) = \text{Re} \left\{ \exp(x^2) [1 - \text{erf}(x)] \right\}, \quad (48)$$

где  $\text{erf}(x)$  — функция ошибок.

Второе и третье слагаемые в (46) описывают нелинейные эффекты. В частности, слагаемое  $\Upsilon_{SAR}$  ответственно за резонанс насыщенного поглощения:

$$\Upsilon_{SAR}(\delta) = -\frac{3 + 2(1 - \beta)\gamma\tau}{1 + 2\gamma\tau} \frac{\sqrt{\pi}\beta^2\gamma^3\gamma_{eg}\tau}{8\Delta_D(\gamma_{eg}^2 + \delta^2)} \times \left[ \Phi_r \left( \frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D} \right) - \frac{\gamma_{eg}}{\delta} \Phi_i \left( \frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D} \right) \right] \frac{I_1}{I_{sat}}, \quad (49)$$

где

$$\Phi_i(x) = \text{Im} \left\{ \exp(x^2) [1 - \text{erf}(x)] \right\}, \quad (50)$$

а интенсивность насыщения введена стандартной формулой:  $I_{sat} = 4\pi^2 \hbar c \gamma / \lambda^3$ .

Слагаемое  $\Upsilon_{interCPT}$  связано с образованием состояния КПН в атоме под действием волны накачки, которое взаимодействует с пробной волной:

$$\Upsilon_{interCPT}(\delta) = -\frac{\sqrt{\pi}\beta^2\gamma^3\gamma_{eg}\tau}{8\Delta_D(\gamma_{eg}^2 + \delta^2)} \times \left[ \Phi_r \left( \frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D} \right) - \frac{\gamma_{eg}}{\delta} \Phi_i \left( \frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D} \right) \right] \times \left( \cos \eta + \frac{\delta}{\gamma_{eg}} \sin \eta \right) \frac{I_1}{I_{sat}}. \quad (51)$$

Выражениям (49) и (51) можно придать более простой вид, учитывая, что эти функции сконцентрированы по большей части в области  $\delta \sim \gamma_{eg} \ll \ll \Delta_D$ , поэтому

$$\Phi_r \approx 1 - 2 \left( \frac{2\gamma_{eg}\delta}{\Delta_D^2} \right)^2 \approx 1, \quad \Phi_i \approx \frac{4\gamma_{eg}\delta}{\Delta_D^2} \ll 1.$$

Тогда для нелинейных вкладов в  $\Upsilon$  имеем выражения

$$\Upsilon_{SAR}(\delta) \approx -\frac{3 + 2(1 - \beta)\gamma\tau}{1 + 2\gamma\tau} \times \frac{\sqrt{\pi}\beta^2\gamma^3\gamma_{eg}\tau}{8\Delta_D(\gamma_{eg}^2 + \delta^2)} \frac{I_1}{I_{sat}}, \quad (52)$$

$$\Upsilon_{interCPT}(\delta) \approx -\frac{\sqrt{\pi}\beta^2\gamma^3\tau}{8\Delta_D(\gamma_{eg}^2 + \delta^2)} \times (\gamma_{eg} \cos \eta + \delta \sin \eta) \frac{I_1}{I_{sat}}. \quad (53)$$

Как видно из этих выражений, функция (52) является четной по  $\delta$  и описывается простым лоренцевским контуром. В то же время функция (53) содержит слагаемое  $\delta \sin \eta$ , что приводит к появлению асимметрии субдоплеровского резонанса при  $\eta \neq \pi n$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Также из этих выражений следует, что функция  $\Upsilon_{SAR}$  всегда будет иметь отрицательный знак, тогда как знаком функции  $\Upsilon_{interCPT}$  можно управлять, меняя фазу  $\eta$ . В частности, особый интерес представляет случай, когда фаза  $\eta = (2n - 1)\pi$ , при которой, как было показано в разд. 2.2, можно ожидать появления резонансного провала в проходящей через ячейку интенсивности пробного пучка. Для явной демонстрации такой возможности, исходя из полученных выражений, сравним относительные веса слагаемых  $\Upsilon_{SAR}$  и  $\Upsilon_{interCPT}$  при выбранной фазе  $\eta$ :

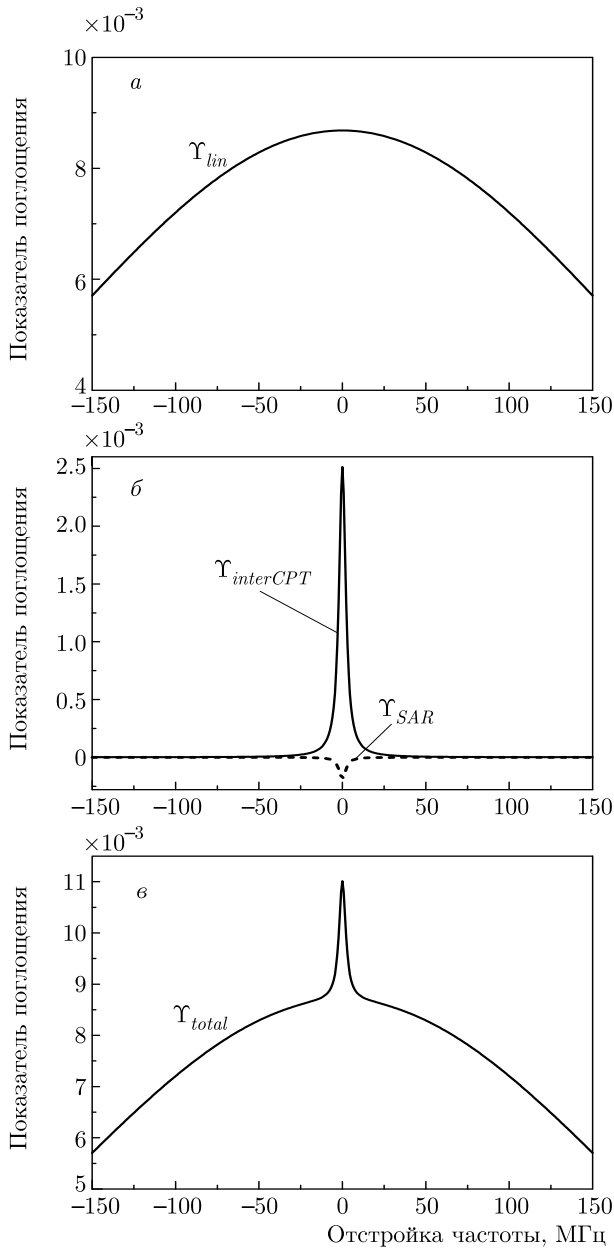
$$\frac{\Upsilon_{interCPT}}{\Upsilon_{SAR}} \approx -\frac{1 + 2\gamma\tau}{3 + 2(1 - \beta)\gamma\tau}. \quad (54)$$

Отсюда следует, что в закрытой системе ( $\beta = 1$ ) вклад от  $\Upsilon_{interCPT}$  будет преобладать по модулю над вкладом от  $\Upsilon_{SAR}$  при выполнении условия  $\gamma\tau > 1$ , которое обычно выполняется с хорошим запасом в экспериментах с атомами щелочных металлов. Таким образом, при  $\eta = (2n - 1)\pi$  в закрытой системе выполняется условие  $\Upsilon_{interCPT} \gg \Upsilon_{SAR}$ , а

с учетом того, что знаки у этих вкладов различаются, это обосновывает возможность наблюдения контрастного субдоплеровского резонанса в виде провала в проходящей через среду интенсивности света (рис. 1, сплошная кривая) вместо обычного резонанса насыщенного поглощения в виде пика пропускания (рис. 1, штриховая кривая). С другой стороны, в существенно открытой системе ( $\beta \ll 1$ ), как легко видеть из выражения (54), вклад от  $\Upsilon_{SAR}$  всегда будет хоть и незначительно, но преобладать над вкладом от  $\Upsilon_{interCPT}$ , и субдоплеровский резонанс будет иметь вид пика (провала) в пропускании (поглощении) ячейки. Эти выводы согласуются с численными решениями оптических уравнений Блоха, проведенными в работе [32].

Продемонстрируем сказанное выше графически. На рис. 3 изображены по отдельности линейный и нелинейные вклады в показатель поглощения  $\Upsilon(\delta)$  при  $\beta = 1$ ,  $\eta = \pi$ ,  $I_1 = 50$  мВт/см<sup>2</sup>,  $\Delta_D = 2\pi \cdot 230$  МГц,  $\Gamma = 5 \cdot 10^{-2}\gamma$ ,  $2\gamma = 2\pi \cdot 4.56$  МГц,  $\lambda = 894.6$  нм — это соответствует  $D_1$ -линии цезия при температуре атомов около 50 °С и диаметре пучка около 0.5 мм, как в экспериментах с микроячейками. Интенсивность насыщения при этих параметрах равна примерно 2.5 мВт/см<sup>2</sup>. На рис. 3б видно, что вклад от  $\Upsilon_{interCPT}$  существенно превосходит вклад от  $\Upsilon_{SAR}$ , что в результате и приводит к наблюдению однородно уширенного резонанса в виде высококонтрастного провала (пика) в прохождении (поглощении) света резонансной средой (см. рис. 1, сплошная кривая). Суммарное действие всех вкладов отражено на рис. 3в.

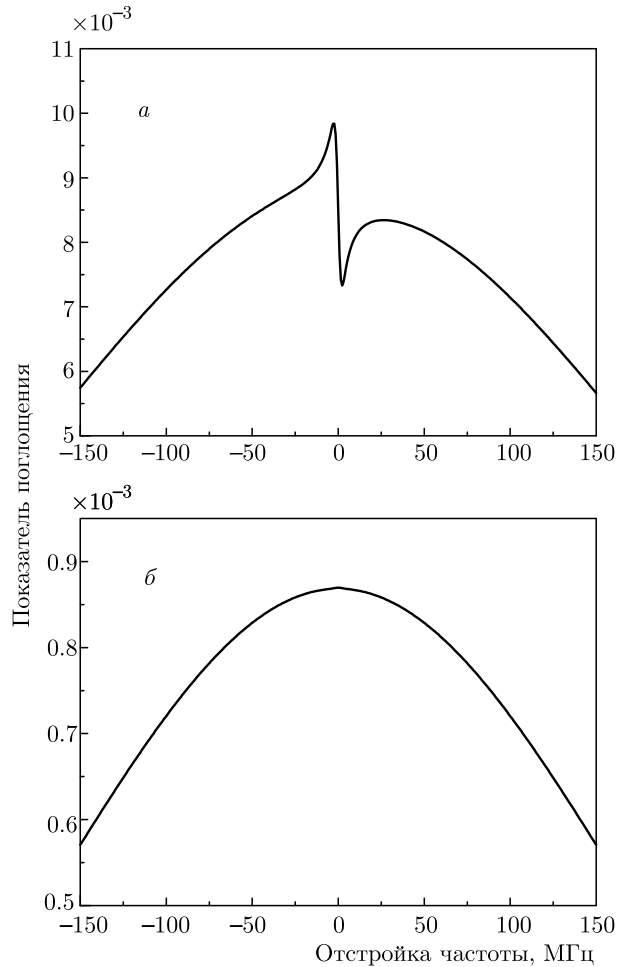
Выше мы отмечали важную особенность функции  $\Upsilon(\delta)$ , связанную с появлением асимметрии при  $\eta \neq \pi n$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . На рис. 4а хорошо видна эта асимметрия при  $\eta = \pi/2$ , когда в выражении (53)  $\sin \eta = 1$ . Такого рода асимметрия обычно является нежелательной при использовании резонанса в качестве репера для стабилизации частоты в КСЧ, поскольку она приводит к появлению дополнительного сдвига сигнала ошибки, не связанного с динамическим штарковским сдвигом уровней энергии перехода. Поэтому фаза  $\eta$  должна хорошо контролироваться в экспериментах при стабилизации частоты излучения в рассматриваемой схеме с пробным пучком. Другая особенность полученных решений демонстрируется на рис. 4б и связана с исчезновением пика поглощения в существенно открытой системе. На рисунке субдоплеровский резонанс неразличим на фоне широкого доплеровского контура, поскольку  $\Upsilon_{interCPT} \approx -\Upsilon_{SAR}$  при  $\beta \ll 1$  и  $\gamma\tau \gg 1$ .



**Рис. 3.** Различные вклады в показатель поглощения пробного пучка: *a* — линейное поглощение (доплеровский контур); *б* — нелинейные слагаемые  $\Upsilon_{SAR}$  и  $\Upsilon_{interCPT}$ ; *в* — общий вид резонансной кривой с учетом всех вкладов. Параметры расчета приведены в тексте

**2.4. Режим слабой стоячей волны**

В этом разделе рассмотрим другой, часто используемый на практике, режим — поле стоячей световой волны. В этом режиме интенсивности встречных пучков близки ( $I_1 \approx I_2$ ). В этом режиме будем интересоваться поглощением обоих встречных световых пучков в резонансной среде. Это связано с



**Рис. 4.** Общий вид резонансной кривой в следующих случаях: *a* — асимметрия субдоплеровского резонанса при  $\beta = 1, \eta = \pi/2$ ; *б* — отсутствие нелинейного резонанса в открытой системе при  $\beta = 0.1, \eta = \pi$ . Остальные параметры расчета такие же, как для рис. 3

тем, что в экспериментах режим стоячей световой волны чаще всего формируется простым отражением пучка  $E_1$ , после его прохождения ячейки, обратно в ячейку с помощью зеркала (так формируется пучок  $E_2$ ). Тогда на фотоприемнике наблюдается сигнал, пропорциональный поглощению обоих пучков.

Для получения аналитических выражений мы будем использовать теорию возмущений по пролетному параметру насыщения  $\xi$ , полагая  $\xi_1 \sim \xi_2 \ll 1$  и  $\gamma\tau > 1$ . Эти условия соответствуют приближению узких световых пучков [44]. Отметим, что слагаемые в оптических уравнениях Блоха, пропорциональные  $R_j^2 \tau \text{Re}\{L_j\}$  ( $j = 1, 2$ ) имеют порядок малости  $\xi_j$  или меньше. Также для упрощения задачи полагаем систему уровней закрытой ( $\beta = 1$ ). Очевидно, что в

нулевого порядке малости по  $\xi_{1,2}$ , т. е. в отсутствие поля, отличными от нуля являются только нулевые гармоники населенностей подуровней основного состояния:  $\rho_{11,0}^{(0)} = \rho_{22,0}^{(0)} = 1/2$ . Здесь и далее нижний индекс после запятой означает порядок по теории возмущений. С учетом этих значений, из уравнений, представленных в разд. 2.1, легко получить решение для следующих ненулевых элементов матрицы плотности в первом порядке теории возмущений:

$$\rho_{11,1}^{(0)} = \rho_{22,1}^{(0)} = -\frac{(\xi_1 + \xi_2)/2}{1 + 2\gamma\tau}, \quad (55)$$

$$\rho_{33,1}^{(0)} = -2\rho_{11,1}^{(0)} = \frac{\xi_1 + \xi_2}{1 + 2\gamma\tau}, \quad (56)$$

$$\rho_{12,1}^{(+)} = \rho_{21,1}^{(-)*} = -\frac{\xi_2}{2} e^{-i\theta}, \quad (57)$$

$$\rho_{12,1}^{(-)} = \rho_{21,1}^{(+)*} = -\xi_1/2. \quad (58)$$

При  $\xi_2 = 0$  эти выражения совпадают с (36)–(38) в рассматриваемом приближении ( $\xi_1 \ll 1$  и  $\beta = 1$ ).

Из уравнений Максвелла–Блоха можно показать, что поглощение суммарного поля  $E_1(z, t) + E_2(z, t)$  пропорционально полной населенности возбужденного уровня  $\rho_{33}$ , т. е.

$$\frac{dI_t}{dz} \propto \rho_{33}(I_1, I_2, z), \quad (59)$$

где  $I_t = I_1 + I_2$ . Исходя из выражения (7), величина  $\rho_{33}$  может быть представлена в виде

$$\rho_{33}(z) = \rho_{33}^{(0)} + 2 \operatorname{Re}\{\exp(2ik_{12}z)\rho_{33}^{(+)}\}, \quad (60)$$

где, как и раньше, мы полагаем зависимость от координаты достаточно медленной, чтобы переменная  $z$  считалась параметром, постоянным на длине ячейки, — это избавляет от необходимости интегрирования по координате в (59). Далее, для краткости, мы приведем решения только для гармоник  $\rho_{33}$ , входящих в анализируемый сигнал (60). Так, во втором порядке теории возмущений имеем

$$\rho_{33,2}^{(0)} = -3\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{(1 + 2\gamma\tau)^2} - 6\frac{\xi_1\xi_2}{1 + 2\gamma\tau} - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{1 + 2\gamma\tau}. \quad (61)$$

Первое слагаемое здесь описывает эффект самонасыщения среды под действием каждого из встречных пучков. Этот эффект отсутствовал при анализе поглощения только пробного пучка в линейном режиме (см. разд. 2.3). Далее следует слагаемое, пропорциональное произведению интенсивностей встречных пучков и описывающее, после усреднения по скоростям, резонанс насыщенного поглощения. Последнее слагаемое связано с образованием

темных состояний в атомах под действием каждого из пучков по отдельности. Эти состояния начинают «конкурировать» в центре резонансной кривой, что описывается гармоникой  $\rho_{33,2}^{(+)}$  и приводит, согласно выражению (60), к зависимости населенности возбужденного состояния от  $z$ . Выражение для этой гармоники имеет вид

$$\rho_{33,2}^{(+)} = -\frac{\xi_1\xi_2}{1 + 2\gamma\tau} \left(1 + i\frac{kv}{\gamma eg}\right) e^{-i\theta}. \quad (62)$$

Далее, по аналогии с (44), необходимо усреднить выражения (56), (61) и (62) по скоростям атомов. Для удобства мы введем краткое обозначение для усредненной населенности возбужденного уровня и запишем ее в следующем виде:

$$W(\delta) \equiv \langle \rho_{33}(\delta, v) \rangle_v = W_{lin} + W_{SS} + W_{CPT} + W_{SAR} + W_{interCPT}. \quad (63)$$

Здесь первое слагаемое описывает линейное поглощение суммарного поля в ячейке, т. е.  $W_{lin}/I_t$  не зависит от интенсивности  $I_t$ :

$$W_{lin}(\delta) = \frac{\sqrt{\pi}\gamma^2\tau}{2\Delta_D(1 + 2\gamma\tau)} \Phi_r \left( \frac{\gamma eg + i\delta}{\Delta_D} \right) \frac{I_t}{I_{sat}}. \quad (64)$$

Остальные слагаемые в (63) описывают различные нелинейные эффекты. Так, эффект самонасыщения среды от каждого из пучков по отдельности описывается вкладом

$$W_{SS}(\delta) = -\frac{3\gamma^4\tau^2}{8\Delta_D\gamma eg(1 + 2\gamma\tau)^2} \left[ \frac{2\gamma eg}{\Delta_D} + \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{2\gamma_{eg}^2}{\Delta_D^2}\right) \Phi_r \left( \frac{\gamma eg + i\delta}{\Delta_D} \right) + \frac{2\sqrt{\pi}\gamma_{eg}\delta}{\Delta_D^2} \Phi_i \left( \frac{\gamma eg + i\delta}{\Delta_D} \right) \right] \frac{I_1^2 + I_2^2}{I_s^2}. \quad (65)$$

Помимо самонасыщения каждый из пучков вдали от центра резонанса просветляет среду за счет накачки атомов в состоянии КПН, что описывается очень похожим слагаемым:

$$W_{CPT}(\delta) = -\frac{\gamma^4\tau^2}{8\Delta_D\gamma_{eg}(1 + 2\gamma\tau)} \left[ \frac{2\gamma_{eg}}{\Delta_D} + \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{2\gamma_{eg}^2}{\Delta_D^2}\right) \Phi_r \left( \frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D} \right) + \frac{2\sqrt{\pi}\gamma_{eg}\delta}{\Delta_D^2} \Phi_i \left( \frac{\gamma_{eg} + i\delta}{\Delta_D} \right) \right] \frac{I_1^2 + I_2^2}{I_s^2}. \quad (66)$$

Последние две формулы можно записать в приближенном виде, поскольку выполняется соотношение  $\gamma_{eg} \ll \Delta_D$ :

$$W_{SS}(\delta) \approx -\frac{3\sqrt{\pi}\gamma^4\tau^2}{8\Delta_D\gamma_{eg}(1+2\gamma\tau)^2} \times \Phi_r\left(\frac{\gamma_{eg}+i\delta}{\Delta_D}\right) \frac{I_1^2+I_2^2}{I_s^2}, \quad (67)$$

$$W_{CPT}(\delta) \approx -\frac{\sqrt{\pi}\gamma^4\tau^2}{8\Delta_D\gamma_{eg}(1+2\gamma\tau)} \times \Phi_r\left(\frac{\gamma_{eg}+i\delta}{\Delta_D}\right) \frac{I_1^2+I_2^2}{I_s^2}. \quad (68)$$

Отметим, что эффекты, описываемые этими двумя слагаемыми, отсутствуют в показателе поглощения  $\Upsilon(\delta)$ , исследованном в предыдущем разделе. Это связано с тем, что этот показатель был рассчитан в линейном режиме по пробному полю, тогда как в настоящем разделе населенность  $W(\delta)$  содержит в себе нелинейные эффекты от обоих пучков. Далее, как можно видеть из сравнения выражений (67) и (68), при формальном условии  $\gamma\tau \gg 1$  эффект от накачки атомов в состояние КПН ( $W_{CPT}$ ) преобладает над эффектом самонасыщения ( $W_{SS}$ ) оптических переходов в  $\Lambda$ -схеме. Это неудивительно, поскольку при увеличении времени взаимодействия с лазерным полем ( $\tau \gg \gamma^{-1}$ ) атомы больше накапливаются в состоянии КПН, переставая взаимодействовать с излучением, чем испытывают эффект самонасыщения от выравнивания населенностей возбужденного и основных подуровней.

Нелинейный эффект, приводящий к резонансу насыщенного поглощения, описывается слагаемым

$$W_{SAR}(\delta) = -\frac{3\sqrt{\pi}\gamma^4\gamma_{eg}\tau^2}{4\Delta_D(1+2\gamma\tau)^2(\gamma_{eg}^2+\delta^2)} \times \left[ \Phi_r\left(\frac{\gamma_{eg}+i\delta}{\Delta_D}\right) - \frac{\gamma_{eg}}{\delta}\Phi_i\left(\frac{\gamma_{eg}+i\delta}{\Delta_D}\right) \right] \frac{I_1I_2}{I_s^2}. \quad (69)$$

В отличие от слагаемых (65) и (66), последнее выражение описывает функцию, локализованную вблизи  $\delta \sim \gamma_{eg}$ . Поэтому, по аналогии с (49) и (52), эту функцию можно приближенно записать в виде простого лоренцевского контура:

$$W_{SAR}(\delta) \approx -\frac{3\sqrt{\pi}\gamma^4\gamma_{eg}\tau^2}{4\Delta_D(1+2\gamma\tau)^2(\gamma_{eg}^2+\delta^2)} \frac{I_1I_2}{I_s^2}. \quad (70)$$

Последнее слагаемое в (63) связано с конкуренцией различных состояний КПН в центре резонанса, как это качественно описано в разд. 2.2. Это слагаемое имеет вид

$$W_{interCPT}(\delta) = -\frac{\sqrt{\pi}\gamma^4\gamma_{eg}\tau^2 \cos \eta}{4\Delta_D(1+2\gamma\tau)(\gamma_{eg}^2+\delta^2)} \times \left[ \Phi_r\left(\frac{\gamma_{eg}+i\delta}{\Delta_D}\right) - \frac{\gamma_{eg}}{\delta}\Phi_i\left(\frac{\gamma_{eg}+i\delta}{\Delta_D}\right) \right] \frac{I_1I_2}{I_s^2}. \quad (71)$$

Как и предыдущее слагаемое, выражение для  $W_{interCPT}$  можно приближенно записать в более простой форме, описываемой функцией Лоренца:

$$W_{interCPT}(\delta) \approx -\frac{\sqrt{\pi}\gamma^4\gamma_{eg}\tau^2 \cos \eta}{4\Delta_D(1+2\gamma\tau)(\gamma_{eg}^2+\delta^2)} \frac{I_1I_2}{I_s^2}. \quad (72)$$

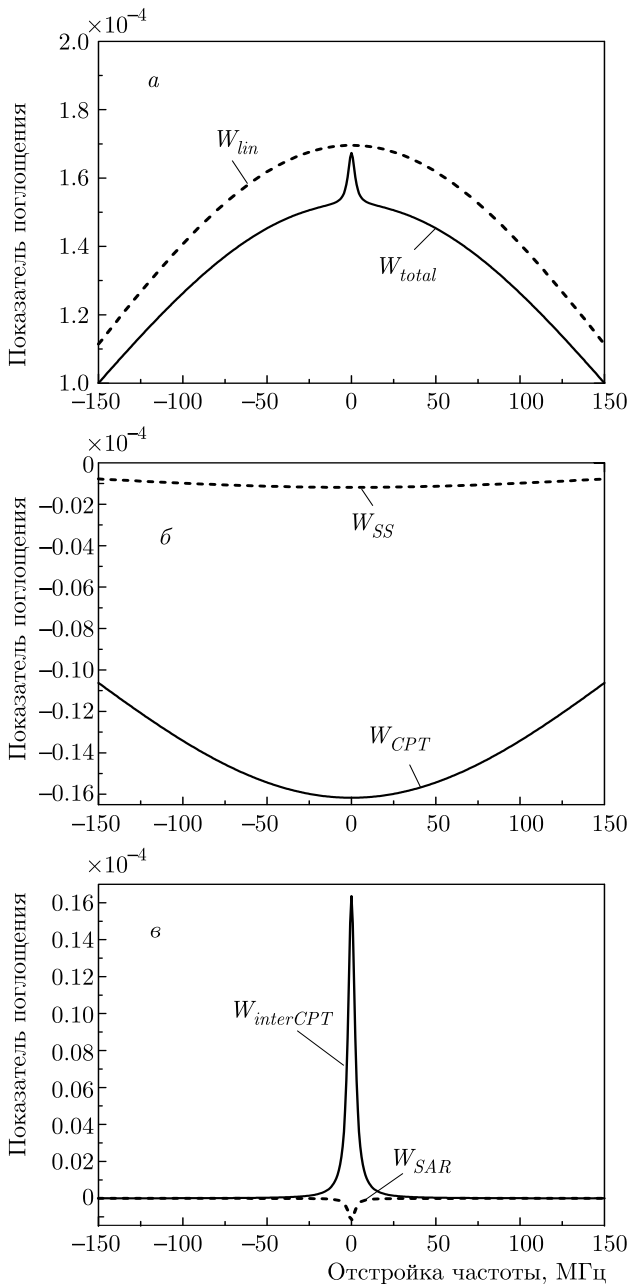
Из этого выражения вытекает важное следствие. А именно, как мы видели в разд. 2.3, в линейном режиме по пробному полю нелинейный резонанс может приобретать асимметрию при  $\eta \neq \pi n$ . В данном случае функция (72) не содержит нечетных по  $\delta$  слагаемых, в отличие от функции  $\Upsilon_{CPT}$  из (53). Это связано с тем, что в режиме стоячей волны мы рассматриваем полное поглощение поля в резонансной среде, а не поглощение какого-либо одного пучка.

Так же, как и в случае с  $\Upsilon_{interCPT}$  и  $\Upsilon_{SAR}$  в разд. 2.3, можно легко показать, что вклад от  $W_{interCPT}$  преобладает над вкладом от  $W_{SAR}$ , что при  $\cos \eta < 0$  может приводить к образованию контрастного пика в поглощении среды. Действительно, по аналогии с (54) при  $\eta = \pi$  имеем

$$\frac{W_{interCPT}}{W_{SAR}} \approx -\frac{1+2\gamma\tau}{3}. \quad (73)$$

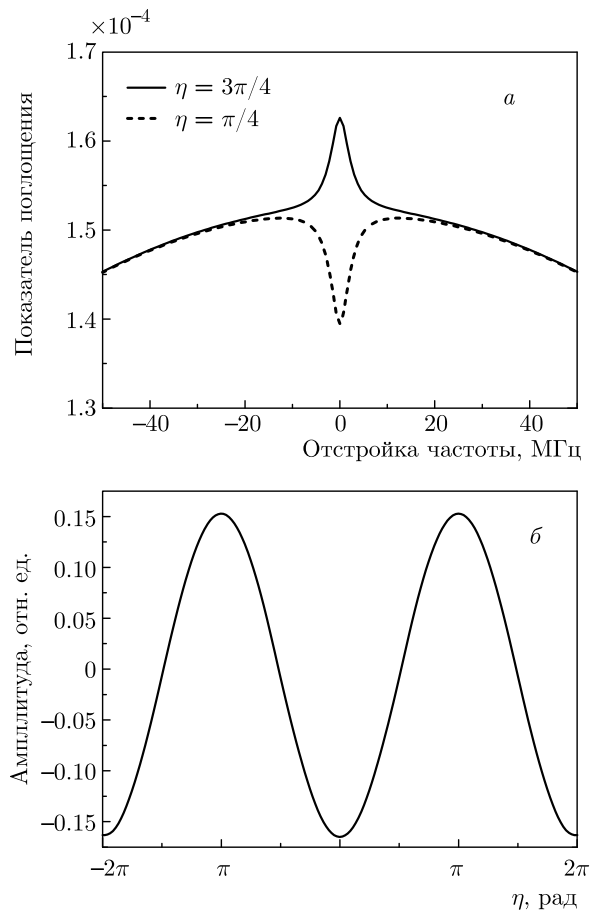
Это выражение совпадает с (54) при  $\beta = 1$ . Отсюда следует, что при  $\gamma\tau \gg 1$  выполняется соотношение  $|W_{interCPT}| \gg |W_{SAR}|$  между вкладами от двух нелинейных эффектов.

Далее, как и в разд. 2.3, проиллюстрируем графически различные вклады в общий сигнал (63). На рис. 5 представлены парциальные вклады от линейного поглощения и от различных нелинейных эффектов в населенность  $W$  возбужденного уровня при таких же параметрах, как для рис. 3. В рассматриваемом режиме стоячей волны эти параметры следует дополнить интенсивностью второго пучка:  $I_2 = I_1 = 50$  мкВт/см<sup>2</sup>. Как видно на рис. 5а, доплеровский контур линейного поглощения светового поля (штриховая кривая) имеет амплитуду больше, чем соответствующая амплитуда суммарного резонанса (сплошная). Это является следствием проявления двух нелинейных эффектов: самонасыщения (рис. 5б, штриховая кривая) и накачки в состоянии КПН (рис. 5б, сплошная). Причем последний



**Рис. 5.** Различные вклады в показатель поглощения пробного пучка: *a* — линейное поглощение  $\Upsilon_{lin}$  (доплеровский контур); *б* — нелинейные слагаемые  $\Upsilon_{SAR}$  и  $\Upsilon_{interCPT}$ ; *в* — общий вид резонансной кривой с учетом всех вкладов. Параметры расчета приведены в тексте

эффект влияет на величину доплеровского поглощения гораздо сильнее. Центральный (субдоплеровский) резонанс на рис. 5*a* (сплошная кривая) формируется в результате конкуренции двух субдоплеровских спектральных структур, изображенных на 5*б*. Из этого рисунка следует, что амплитуда резонанса, возникающего вследствие конкуренции раз-



**Рис. 6.** *a*) Резонансная кривая при различных значениях фазы  $\eta$ . *б*) Осцилляции амплитуды субдоплеровского резонанса при изменении фазы  $\eta$ . Параметры расчета такие же, как для рис. 5

личных состояний КПН (сплошная кривая) существенно больше амплитуды резонанса насыщенного поглощения, что и приводит к появлению субдоплеровского резонанса в виде пика поглощения или провала в прозрачности среды, как на рис. 1 или 5*a* (сплошные кривые).

Рисунок 6*a* демонстрирует симметричность резонанса при фазе  $\eta \neq \pi n$  в отличие от режима пробного пучка (ср. с рис. 4*a*). Рисунок 6*б* отражает эффект пространственных осцилляций амплитуды субдоплеровского резонанса при вариации фазы  $\eta$ , который был предсказан в работе [32] на основе численных расчетов и подтвержден экспериментально в работах [26, 33].

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе построена теория и получены аналитические выражения для формы линии

субдоплеровских резонансов, наблюдаемых в поле встречных бихроматических лазерных пучков. При этом в явном виде выделены слагаемые, отвечающие за различные линейные и нелинейные эффекты в поглощении поля резонансной средой. На основе полученных формул дано теоретическое объяснение эффекта возникновения высококонтрастного пика поглощения, который может быть использован для создания миниатюрных оптических стандартов частоты нового поколения. Выполнено сравнение двух режимов наблюдения субдоплеровских резонансов: режима стоячей волны и режима пробного поля. Показано, что в первом случае не наблюдается асимметрия нелинейного резонанса, что может явиться ключевым фактором при выборе конкретной схемы реализации оптического КСЧ. Действительно, подобного рода асимметрия резонанса может приводить к нежелательным сдвигам частоты КСЧ при ее стабилизации по субдоплеровскому резонансу методом синхронного детектирования и формирования сигнала ошибки. В таком случае асимметрия приводит к сдвигу сигнала ошибки, что может сказаться на долговременной стабильности КСЧ. В целом, полученные результаты существенно дополняют теорию высококонтрастных субдоплеровских резонансов в бихроматическом лазерном поле, ранее построенную лишь на основе численных расчетов.

**Финансирование.** Работа А. М. Михайлова и Д. В. Бражникова была поддержана грантами Российского научного фонда (17-72-20089) и Российского фонда фундаментальных исследований (20-02-00075). Р. Будо благодарит за поддержку Национальное агентство научных исследований (Agence Nationale de la Recherche) в рамках проекта "LabeX FIRST-TF" (грант ANR 10-LABX-0048).

## ЛИТЕРАТУРА

1. V. S. Letokhov and V. P. Chebotayev, *Nonlinear Laser Spectroscopy*, Springer, Berlin (1977).
2. T. W. Hänsch, S. A. Lee, R. Wallenstein, and C. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 307 (1975).
3. J. L. Hall, C. J. Borde, and K. Uehara, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 1339 (1976).
4. С. Н. Багаев и В. П. Чеботаев, *Письма в ЖЭТФ* **16**, 614 (1972) [S. N. Bagaev and V. P. Chebotayev, *JETP Lett.* **16**, 433 (1972)].
5. M. Takamoto, I. Ushijima, N. Ohmae et al., *Nature Photon.* **14**, 411 (2020).
6. R. M. Godun, P. B. R. Nisbet-Jones, J. M. Jones et al., *Phys. Rev. Lett.* **113**, 210801 (2014).
7. S. Haroche and F. Hartmann, *Phys. Rev. A* **6**, 1280 (1972).
8. M. A. Gubin, D. A. Tyurikov, A. S. Shelkovnikov et al., *IEEE J. Quant. Elect.* **31**, 2177 (1995).
9. S. N. Bagayev, A. K. Dmitriyev, and P. V. Pokasov, *Laser Phys.* **7**, 989 (1997).
10. G. Galzerano, C. Svelto, A. Onae, and E. Bava, *SPIE Proc.* **4269**, 224 (2001)
11. S. M. Ignatovich, M. N. Skvortsov, V. I. Vishnyakov et al., *J. Phys. Conf. Ser.* **793**, 012010 (2017).
12. C. Affolderbach and G. Mileti, *Rev. Sci. Instrum.* **76**, 073108 (2005).
13. N. Almat, W. Moreno, M. Pellaton et al., *IEEE Trans. Ultrason. Ferr.* **65**, 919 (2018).
14. T. Schuldt, K. Döringshoff, E. V. Kovalchuk et al., *Appl. Opt.* **56**, 1101 (2017).
15. V. Schkolnik, K. Döringshoff, F. B. Gutsch et al., *Eur. Phys. J. Quant. Techn.* **4**, 9 (2017).
16. G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi, and G. Orriols, *Nuovo Cim. B* **36**, 5 (1976).
17. H. Zhang, K. Okada, H. Herdian et al., *IEEE J. Sol. St. Circ.* **54**, 3135 (2019).
18. R. Vicarini, M. Abdel Hafiz, V. Maurice et al., *IEEE Trans. Ultrason. Ferr.* **66**, 1962 (2019).
19. М. Н. Скворцов, С. М. Игнатович, В. И. Вишняков и др., *КЭ* **50**, 576 (2020) [M. N. Skvortsov, S. M. Ignatovich, V. I. Vishnyakov et al., *Quant. Electron.* **50**, 576 (2020)].
20. C. L. Chow, M. Cho, K. Aheieva et al., *Overview of Project SPATIUM — Space Precision Atomic-Clock Timing Utility Mission*, in Proc. 33rd Annual AIAA/USU Conf. on Small Satellites, Logan, Utah, USA 3–8 August (2019), paper No. SSC19-WKVII-07.
21. J. W. Conklin, S. Nydam, T. Ritz et al., *Preliminary Results from the CHOMPTT Laser Time-Transfer Mission*, in [20], paper No. SSC19-VI-03.
22. M. T. Hummon, S. Kang, D. G. Bopp et al., *Optica* **5**, 443 (2018).
23. Z. L. Newman, V. Maurice, T. E. Drake et al., *Optica* **6**, 680 (2019).
24. V. Maurice, Z. Newman, S. Dickerson et al., *Opt. Express* **28**, 24708 (2020).



25. Z.L. Newman, V. Maurice, C. Fredrick et al., arXiv:2105.00610v1 [physics.atom-ph].
26. D. Brazhnikov, M. Petersen, G. Coget et al., Phys. Rev. A **99**, 062508 (2019).
27. M. Abdel Hafiz, G. Coget, E. De Clercq, and R. Boudot, Opt. Lett. **41**, 2982 (2016).
28. D. V. Brazhnikov, S. M. Ignatovich, I. S. Mesenzova et al., J. Phys. Conf. Ser. **1859**, 012019 (2021).
29. P. Yun, F. Tricot, C. E. Calosso et al., Phys. Rev. Appl. **7**, 014018 (2017).
30. M. Abdel Hafiz, G. Coget, M. Petersen et al., J. Appl. Phys. **121**, 104903 (2017).
31. M. Zhao, X. Jiang, R. Fang et al., Appl. Opt. **60**, 5203 (2021).
32. M. Abdel Hafiz, D. V. Brazhnikov, G. Coget et al., New J. Phys. **19**, 073028 (2017).
33. Д. В. Бражников, С. М. Игнатович, И. С. Месенцова и др., КЭ **50**, 1015 (2020) [D. V. Brazhnikov, S. M. Ignatovich, I. S. Mesenzova et al., Quant. Electron. **50**, 1015 (2020)].
34. S. N. Bagayev, V. P. Chebotayev, and E. A. Titov, Laser Phys. **4**, 224 (1994).
35. E. Arimondo and G. Orriols, Lett. Nuovo Cim. **17**, 333 (1976).
36. H. R. Gray, R. M. Whitley, and C. R. Stroud, Jr., Opt. Lett. **3**, 218 (1978).
37. K.-J. Boller, A. Imamoglu, and S. E. Harris, Phys. Rev. Lett. **66**, 2593 (1991).
38. L. V. Hau, S. E. Harris, Z. Dutton, and C. H. Behroozi, Nature **397**, 594 (1999).
39. V. G. Arkhipkin and I. V. Timofeev, Phys. Rev. A **64**, 053811 (2001).
40. V. I. Yudin, M. Yu. Basalaev, D. V. Brazhnikov, and A. V. Taichenachev, Phys. Rev. A **88**, 023862 (2013).
41. D. V. Brazhnikov, A. V. Taichenachev, and V. I. Yudin, Eur. Phys. J. D **63**, 315 (2011).
42. S. G. Rautian and A. M. Shalagin, *Kinetic Problems of Nonlinear Spectroscopy*, North-Holland, Amsterdam (1991).
43. E. Arimondo, Progr. Opt. **35**, 257 (1996).
44. Д. Б. Лазебный, Д. В. Бражников, А. В. Тайченачев и др., ЖЭТФ **148**, 1068 (2015) [D. B. Lazebnyi, D. V. Brazhnikov, A. V. Taichenachev et al., JETP **121**, 934 (2015)].