ЖЭТФ, 2021, том 160, вып. 4 (10), стр. 553–564

ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ПРОТЕКАНИЕ СВЕРХТЕКУЧЕГО ^{3}He ЧЕРЕЗ НЕМАТИЧЕСКИЙ АЭРОГЕЛЬ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

*Е. В. Суровцев**

Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 26 июня 2021 г.,
после переработки 26 июня 2021 г.
Принята к публикации 29 июня 2021 г.

Рассматривается потенциальное протекание сверхтекучего ^{3}He через нематический аэрогель сферической формы. Особенностью рассматриваемой системы является то, что сверхтекучие фазы внутри и снаружи аэрогеля могут быть разными. В частности, в работе рассмотрены случаи, когда внутри аэрогеля реализуется полярная фаза сверхтекучего ^{3}He, а снаружи аэрогеля существуют либо B-фаза, либо A-фаза сверхтекучего ^{3}He. При условии, что параметр порядка системы является непрерывной функцией пространственной координаты без особых точек и линий на поверхности аэрогеля, а также при условии отсутствия джозефсоновских токов через поверхность аэрогеля получены граничные условия на фазу параметра порядка на поверхности аэрогеля, необходимые для гидродинамического описания течения. При помощи полученных граничных условий найден тензор присоединенной массы потенциального движения жидкости для рассматриваемых случаев. Проведено сравнение с имеющимися экспериментальными данными.

DOI: 10.31857/S0044451021100126

1. ВВЕДЕНИЕ

Использование различных типов аэрогелей в экспериментах со сверхтекучим ^{3}He позволило наблюдать сверхтекучие состояния, невозможные в чистом ^{3}He. В последние годы наибольший интерес представляет изучение свойств сверхтекучего ^{3}He в так называемом нематическом аэрогеле, который представляет собой набор сонаправленных нитей диаметром порядка 5–10 нм со средним расстоянием между нитями порядка 100 нм. Ввиду высокой пористости рассматриваемых структур сверхтекучесть ^{3}He, заполняющего аэрогель, сохраняется. Однако из-за анизотропии рассеяния квазичастиц на примесных нитях, изменяется симметрия сверхтекучего состояния. В частности, при использовании нафена, особого типа нематического аэрогеля с высокой степенью анизотропии, в экспериментах по ядерному магнитному резонансу удалось наблюдать переход в полярную фазу сверхтекучего ^{3}He [1,2]. Переход в полярную фазу удалось также обнаружить в недавних экспериментах с колеблющейся в ^{3}He проволочкой, к которой был прикреплен нематический аэрогель [3]. При рассматриваемом фазовом переходе наблюдалось возникновение дополнительной моды колебаний системы, а также изменение температурной зависимости основной моды (механической) в области существования полярной фазы. Дополнительная мода колебаний связана, по всей видимости, со совместным колебанием нитей аэрогеля и нормальной компоненты сверхтекучего ^{3}He относительно сверхтекучей части жидкости. Данные колебания аналогичны второму звуку в сверхтекучей системе с той лишь разницей, что в данном случае возвращающая сила в основном связана с упругостью аэрогеля, а не с градиентом температуры. Из экспериментальных данных по температурной зависимости частот двух колебательных мод следует их сильная связь в области температур вблизи перехода в полярную фазу. Однако в дальнейшем мы не будем рассматривать взаимодействие двух мод колебаний, а сконцентрируемся лишь на изучении влияния потенциального течения сверхтекучей жидкости вокруг аэрогеля на частоту механических колебаний системы.

В простейшей модели одномерного незатухающего осциллятора с заданной жесткостью квадрат

* E-mail: e.v.surovtsev@gmail.com

частоты колебаний обратно пропорционален полной массе системы: $\omega_0^2 \sim 1/M_0$. В нашем случае полная масса складывается из массы проволочки, массы аэрогеля и массы жидкости, которая движется вместе с аэрогелем и проволочкой. Массу жидкости, которая увлекается при колебаниях, можно условно разделить на две части: первая часть связана с потенциальным (безвихревым) потоком сверхтекучей и нормальной компоненты жидкости, а вторая возникает из-за вязкости нормальной компоненты жидкости [4]. Первый вклад в массу движущейся жидкости можно оценить как ρa^3, где ρ — плотность жидкости, a — характерный размер аэрогеля, а второй вклад оценивается соответственно как $\sim \rho_n \delta S$, где ρ_n — характерное значение плотности нормальной компоненты ^{3}He, S — площадь поверхности аэрогеля, $\delta \sim \sqrt{\eta/(\omega\rho_n)}$ — зависящая от частоты колебаний вязкая глубина проникновения, η — вязкость ^{3}He, ω — частота колебаний. Далее мы будем предполагать, что колебания происходят с достаточно большой частотой, чтобы можно было считать характерные размеры аэрогеля, a, много большими вязкой глубины проникновения $\delta(\omega)$, т. е. $\delta \ll a$. Данное условие позволяет пренебречь вкладом в массу движущейся жидкости, связанным с ее вязкостью. Поэтому именно вклад от потенциального движения мы в дальнейшем будем называть присоединенной массой, и он вычисляется в рамках данной работы.

Задача о вычислении присоединенной массы, возникающей при движении образцов аэрогеля в сверхтекучей жидкости, была впервые рассмотрена в работах [5, 6]. В статье Габая и др. [5] решалась задача для скалярного параметра порядка (сверхтекучий ^{4}He). Авторы заметили, что при условии непрерывности фазы параметра порядка на границе аэрогеля задача о протекании сверхтекучей жидкости решается аналогично поиску напряженности электрического поля вокруг диэлектрического тела [7]. Другой подход, который использовался для описания частоты колебаний аэрогеля в сверхтекучем ^{3}He при сверхнизких температурах, был предложен в работе Брусарди и др. [6]. Основная разница между двумя подходами при описании протекания сверхтекучей жидкости сквозь аэрогель заключается в граничных условиях, которые накладываются на фазовую часть параметра порядка на границе аэрогеля, при том что условие сохранения нормальной компоненты плотности массового тока в обоих случаях выполняется. В статье [6] функция фазы параметра порядка имеет разрыв на поверхности аэрогеля. Таким образом, неявно предполагается, что на границе аэрогеля существует система вихрей, обеспечивающая сброс фазы на границе.

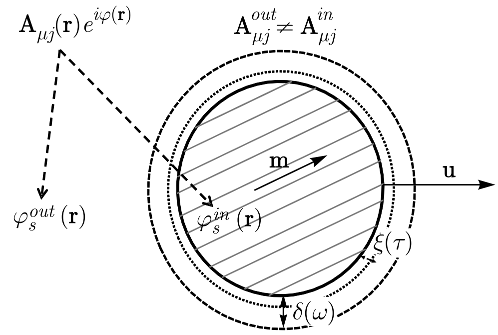

Рис. 1. Геометрия задачи: нематический аэрогель сферической формы с внутренней осью анизотропии, направленной вдоль вектора $\mathbf{m}$, движется со скоростью $\mathbf{u}(t)$ в сверхтекучем ^{3}He. Форма параметра порядка внутри и снаружи аэрогеля различается. Изменение формы параметра порядка происходит на длине когерентности сверхтекучего ^{3}He — $\xi(\tau)$ вблизи поверхности аэрогеля. При потенциальном течении сверхтекучий ток внутри и снаружи аэрогеля определяется функцией $\varphi_s(\mathbf{r})$. Для решения задачи необходимо установить граничное условие на функцию $\varphi_s(\mathbf{r})$ на поверхности аэрогеля. $\delta(\omega)$ — глубина вязкого проникновения, которая определяет область, где происходит вязкое течение нормальной компоненты жидкости. Предполагаются следующие соотношения между параметрами задачи: $\xi(\tau) \ll \delta(\omega) \ll a$

В настоящей работе рассмотрена простая модель протекания сверхтекучего ^{3}He через нематический аэрогель, основанная на предположении, что параметр порядка системы является непрерывной функцией пространственной координаты (рис. 1). В отличие от подхода Габаи и др. [5] сверхтекучие состояния снаружи и внутри аэрогеля могут быть разными, поэтому определение функции фазы параметра порядка требует уточнения. Снаружи аэрогеля в зависимости от температуры и давления могут реализовываться объемные либо A-фаза, либо B-фаза сверхтекучего ^{3}He. В то же время мы будем считать, что внутри аэрогеля реализуется только полярная фаза, орбитальная часть параметра порядка которой фиксируется осью анизотропии аэрогеля. На границе аэрогеля в слое толщиной порядка температурной длины когерентности сверхтекучего ^{3}He ($\xi(\tau)$) амплитуды параметров порядка наружного сверхтекучего состояния и внутреннего состояния подавляются, что обеспечивает пространственное согласование между ними. В работе качественно исследовано влияние подавления параметра порядка на границе аэрогеля на возникающие эффективные граничные условия на фазу параметра порядка на поверхности аэрогеля в предположении, что длина когерентности гораздо меньше размеров аэрогеля. Другими словами, граничные условия получены с точностью до $\xi(\tau)/a$.

Данная статья организована следующим образом: в первой части статьи из уравнений Гинзбурга–Ландау получено уравнение, определяющее сверхтекучий поток массы, а также выписаны решения уравнения для случая трех рассматриваемых в работе сверхтекучих состояний. После этого получено граничное условие для функции фазы параметра порядка на поверхности аэрогеля. При помощи полученного граничного условия найден тензор присоединенной массы для двух возможных наружных сверхтекучих состояний. Наконец, в последней части статьи проводится сравнение влияния присоединенной массы на частоту собственных колебаний системы с имеющимися экспериментальными данными.

2. УРАВНЕНИЕ СВЕРХТЕКУЧЕГО ПОТОКА

Уравнение, описывающее сверхтекучий поток проще всего получить из уравнений Гинзбурга–Ландау для сверхтекучего ^{3}He. В сверхтекучем ^{3}He реализуется триплетное спаривание с равным единице орбитальным моментом. Как следствие, параметром порядка системы является комплексная матрица 3×3 — $A_{\mu j}$, где греческие буквы в индексах соответствуют орбитальной части параметра порядка, а латинские соответственно его спиновой части. Уравнения Гинзбурга–Ландау для сверхтекучего ^{3}He имеют стандартный вид:

$$\frac{\partial \delta F^{(2)}}{\partial A^*_{\mu j}} + \frac{\partial \delta F^{(4)}}{\partial A^*_{\mu j}} - (K_1 \nabla_p \nabla_p A_{\mu j} + \\ + (K_2 + K_3) \nabla_j \nabla_p A_{\mu p}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \delta F^{(2)}}{\partial A_{\mu j}} + \frac{\partial \delta F^{(4)}}{\partial A_{\mu j}} - (K_1 \nabla_p \nabla_p A^*_{\mu j} + \\ + (K_2 + K_3) \nabla_j \nabla_p A^*_{\mu p}) = 0, \quad (2)$$

где $F^{(2)}$, $F^{(4)}$ — члены соответственно второго и четвертого порядков, а K_i — феноменологические константы, возникающие в функционале Гинзбурга–Ландау перед градиентными членами. Комбинируя выписанные уравнения, легко можно получить следующее равенство:

$$(K_1 A^*_{\mu j} \nabla_p \nabla_p A_{\mu j} + \\ + (K_2 + K_3) A^*_{\mu j} \nabla_j \nabla_p A_{\mu p}) - \text{c.c.} = 0. \quad (3)$$

Заметим, что уравнение (3) можно переписать в другом виде:

$$\nabla_i (j_s)_i = 0, \quad (4)$$

где мы ввели $\mathbf{j}_s$ — плотность сверхтекучего потока массы, которая дается известным выражением [8]

$$(j_s)_i \sim -i \left[\left(K_1 A^*_{\mu j} \nabla_i A_{\mu j} + K_2 A^*_{\mu j} \nabla_j A_{\mu i} + \\ + K_3 A^*_{\mu i} \nabla_j A_{\mu j} \right) - \text{c.c.} \right]. \quad (5)$$

Полученное уравнение можно трактовать как условие несжимаемости сверхтекучей компоненты в рассматриваемом пределе.

При помощи определения (5) можно легко записать выражения, определяющие сверхтекучие массовые токи в различных сверхтекучих состояниях. Параметр порядка полярной фазы (состояния) можно записать в следующем виде:

$$A_{\mu j} = \Delta_P \cdot e^{i\varphi} d_\mu m_j,$$

где Δ_P — амплитуда параметра порядка, d_μ, m_j — действительные единичные векторы соответственно в спиновом и орбитальном пространствах, φ — фаза параметра порядка. Орбитальный вектор $\mathbf{m}$ направлен вдоль оси анизотропии аэрогеля (двукратное вырождение по направлению связано с тем, что аэрогель нематический). Из определения (5) получим выражение для плотности сверхтекучего массового потока в полярной фазе:

$$\left(j_s^P\right)_i = \rho_{ij}^P \frac{\hbar}{2m_{\text{He}^3}} \nabla_j \varphi, \quad (6)$$

где тензор сверхтекучей плотности полярной фазы определяется выражением

$$\rho_{ij}^P = (\rho_\parallel^P - \rho_\perp^P) m_i m_j + \rho_\perp^P \delta_{ij}, \quad (7)$$

здесь $\rho_\parallel$ — сверхтекучая плотность в направлении, параллельном оси анизотропии аэрогеля. Следует отметить, что в так называемом пределе слабой связи, который хорошо описывает термодинамические свойства системы при нулевом давлении, справедливо следующее соотношение: $K_1 = K_2 = K_3$. Соответственно в данном пределе существует следующая связь между главными значениями тензора сверхтекучей плотности полярной фазы:

$$\rho_\parallel^P = 3\rho_\perp^P = 3\rho_s^P.$$

В дальнейшем мы будем использовать данный предел и для других сверхтекучих состояний, чтобы упростить вычисления. Также, мы будем использовать соотношение

$$\frac{\hbar}{2m_{^3\mathrm{He}}} = 1,$$

при котором сверхтекучая скорость будет выражаться через градиент фазы параметра порядка $(v_s)_i = \nabla_i\varphi$. В случае полярной фазы с не зависящим от координат орбитальным вектором $\mathbf{m}$ уравнение, определяющее сверхтекучий поток (4), сводится к

$$(\rho_s^P)_{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi = 0. \quad (8)$$

Даже более простое выражение для сверхтекучего тока может быть записано для случая B-фазы, параметр порядка которой равен

$$A_{\mu j} = \Delta_B \cdot e^{i\varphi}R_{\mu j},$$

где $R_{\mu j}$ — произвольная ортогональная матрица. Тогда выражение для тока будет просто $\rho_s^B\nabla_i\varphi$, где ρ_s^B — сверхтекучая плотность B-фазы. Рассмотренные два случая достаточно просты в силу того, что сверхтекучий поток массы определяется в них только градиентом фазы параметра порядка.

Более интересное выражение для сверхтекучего тока получается для случая A-фазы, которое в пределе слабой связи имеет следующий вид [8]:

$$\begin{aligned}(j_s^A)_i = \rho_s^A(2\delta_{ij} - l_il_j)(v_s^A)_j - \\ - \rho_s^A\left(\frac{1}{2}\delta_{ij} - l_il_j\right)e_{jkt}\nabla_k l_t. \quad (9)\end{aligned}$$

Последний член в выражении (9) показывает, что даже в отсутствие градиента фазы параметра порядка сверхтекучий ток может существовать в некоторых неоднородных текстурах вектора $\mathbf{l}$. Однако в дальнейшем мы будем рассматривать только такие текстуры, в которых $e_{ijk}\nabla_j l_k = 0$, т. е. сверхтекучий поток будет чисто потенциальным.

В качестве примера сверхтекучего тока через границу раздела двух сверхтекучих состояний рассмотрим ток через границу между полярной и B-фазами. В рассматриваемой области пространства параметр порядка можно искать в виде суперпозиции двух решений однородных уравнений Гинзбурга–Ландау:

$$A_{\mu j} = \left[e^{i\varphi^P}\Delta_P d_\mu m_j + e^{i\varphi^B}\Delta_B R_{\mu j}\right], \quad (10)$$

где все параметры за исключением параметров из спинового подпространства являются функциями пространственной координаты. Спиновая степень свободы никак не связана с границей раздела двух состояний, если только не рассматривать слабое спин-орбитальное взаимодействие. Форма параметра порядка в приграничной области может быть более сложной, однако для качественного описания данный анзац кажется вполне удовлетворительным. Заданная выше форма параметра порядка приводит к следующему выражению для сверхтекучего потока массы:

$$\begin{aligned}(j_s)_i \sim 5\Delta_B^2\nabla_i\varphi^B + \Delta_P^2(\delta_{ij} + 2m_im_j)\nabla_j\varphi^P + \\ + \Delta_B\Delta_P(\nabla_j\varphi^B + \nabla_j\varphi^P)(\delta_{ij}R_{\mu k}d_\mu m_k + \\ + R_{\mu j}d_\mu m_i + R_{\mu i}d_\mu m_j)\cos(\varphi^B - \varphi^P) + \\ + (\Delta_P\nabla_j\Delta_B - \Delta_B\nabla_j\Delta_P)(\delta_{ij}R_{\mu k}d_\mu m_k + \\ + R_{\mu j}d_\mu m_i + R_{\mu i}d_\mu m_j)\sin(\varphi^B - \varphi^P) + \\ + \Delta_B\Delta_P\{(\nabla_i R_{\mu j})\,d_\mu m_j + (\nabla_j R_{\mu j})\,d_\mu m_i + \\ + (\nabla_j R_{\mu i})\,d_\mu m_j - R_{\mu j}d_\mu\nabla_i m_j - \\ - R_{\mu j}d_\mu\nabla_j m_i - R_{\mu i}d_\mu\nabla_j m_j\}\sin(\varphi^B - \varphi^P). \quad (11)\end{aligned}$$

Первые два члена определяют сверхтекучий ток в пределах соответственно B-фазы и полярной фазы, а последние два, пропорциональные $\sin(\varphi^B - \varphi^P)$, соответствуют джозефсоновским токам через границу раздела состояний. Наконец, член, пропорциональный $\cos(\varphi^B - \varphi^P)$, также возникает благодаря интерференции двух состояний. Таким образом, из вида выражения для сверхтекучего тока следуют условия отсутствия тока через границу: $\varphi^B = \varphi^P = \mathrm{const}$ или $\varphi^B = \varphi^P + \pi = \mathrm{const}$. Глобальный минимум соответствуют одному из условий и может быть найден при решении уравнений Гинзбурга–Ландау в приграничной области.

Можно рассмотреть два существенно различающихся случая сверхтекучего протекания через границу аэрогеля. Первый случай соответствует отсутствию джозефсоновских токов через границу, т. е. $\varphi^B - \varphi^P = \pi n$, $n \in Z$ и, как следствие, $\nabla_i\varphi^B = \nabla_i\varphi^P$. Таким образом, в этом случае сверхтекучий ток определяется выражением

$$\begin{aligned}(j_s)_i \sim [5\Delta_B^2\delta_{ij} + \Delta_P^2(\delta_{ij} + 2m_im_j)]\nabla_j\varphi \pm \\ \pm 2\Delta_B\Delta_P(\delta_{ij}R_{\mu k}d_\mu m_k + \\ + R_{\mu j}d_\mu m_i + R_{\mu i}d_\mu m_j)\nabla_j\varphi. \quad (12)\end{aligned}$$

При помощи написанного выражения, а также из условия постоянства нормальной к границе компоненты сверхтекучего тока, можно приближенно вычислить дополнительную разницу фаз между состояниями, набегающую на границе раздела из-за изменения амплитуд параметра порядка (поверхностными токами в этом случае необходимо пренебречь).

Рассмотрим теперь кратко случай протекания через границу джозефсоновских токов. В присутствии сверхтекучих токов в объеме вокруг образца аэрогеля изменение фазы происходит на масштабах порядка размера аэрогеля, в то время как амплитуда параметра порядка существенно меняется на длине когерентности на границе раздела двух состояний. Таким образом, в случае ненулевой разницы фаз двух состояний порядка $\pi/2$ джозефсоновские токи могут давать главный вклад в ток через границу. Качественно, джозефсоновский сверхтекучий ток через границу можно аппроксимировать с помощью обычного выражения:

$$(j_s)_i \sim \frac{\Delta_B^0 \Delta_P^0}{\lambda} \sin(\varphi^B - \varphi^P) n_i, \tag{13}$$

где n_i — нормаль к поверхности аэрогеля, а λ имеет размерность длины и $\lambda \sim \xi(\tau)$. Следует отметить, что написанное выражение может описывать как токи, которые возбуждаются движением аэрогеля (нестационарный эффект), так и токи, которые могут возникнуть из-за постоянной разности фаз в покоящемся состоянии аэрогеля (стационарный эффект). Однако в последнем случае из-за того, что на противоположных концах аэрогеля направление тока меняется (разность фаз постоянна), происходит нескомпенсированное втекание или вытекание сверхтекучей жидкости в (из) аэрогель, что приведет к разнице давлений и возбуждению собственных колебаний аэрогеля с изменением его объема. При этом из-за сильной вязкости нормальной компоненты такие колебания будут сопровождаться затуханием, что в итоге приведет к их полному затуханию и выравниванию фаз сверхтекучих состояний внутри и снаружи аэрогеля. Условие возможности пренебрежения нестационарыми джозефсоновскими токами требует отдельного рассмотрения.

В двухжидкостной гидродинамике плотность полного массового тока определяется выражением

$$j_i = (\rho_n)_{ij}(v_n)_j + (\rho_s)_{ij}(v_s)_j,$$

где $\mathbf{v}_n$ — скорость нормальной компоненты жидкости,

$$(\rho_n)_{ij} + (\rho_s)_{ij} = \rho\delta_{ij},$$

ρ — полная плотность ^{3}He и $(v_s)_i$ — сверхтекучая скорость, введенные ранее. В результате, если возможны два типа движения, то сверхтекучий ток в этом случае должен быть переопределен следующим образом:

$$(j_s)_i = \rho^s_{ij}[(v_s)_j - (v_n)_j].$$

В новых обозначениях уравнение сохранения массы имеет вид

$$\partial_t \rho + \nabla_i(\rho(v_n)_i + (j_s)_i) = 0. \tag{14}$$

В пределе несжимаемой жидкости $\rho = \mathrm{const}$ из него следует, что

$$\nabla_i(v_n)_i = 0. \tag{15}$$

Существуют два характерных масштаба, определяющих изменения нормальной компоненты скорости $\mathbf{v}_n$. На больших расстояниях от поверхности тела $r \gg \delta$ и при достаточно малых амплитудах движения $\mathrm{rot}\, \mathbf{v}_n \approx 0$, поэтому решение для нормальной скорости можно искать в форме потенциального потока: $(v_n)_i = \nabla_i \varphi_n$ [4]. В области вблизи поверхности аэрогеля $r \sim \delta$ необходимо учитывать вязкость нормальной компоненты ^{3}He. В то же время заметим, что ввиду $\delta \gg \xi(\tau)$ зависимость тензора сверхтекучей плотности от координаты может быть связана исключительно с текстурой параметра порядка, характерный масштаб изменения которой определяется размерами аэрогеля $a \gg \delta$. Исходя из этого, можно считать что $(\rho^s)_{ij} \approx \mathrm{const}$ и уравнение сверхтекучего потока в этой области сводится к

$$\nabla_i((\rho^s)_{ij}[(v_s)_j - (v_n)_j]) \approx \nabla_i(\rho^s)_{ij}(v_s)_j - (\rho^s)_{ij}\nabla_i(v_n)_i = \nabla_i\ (\rho^s)_{ij}(v_s)_j = 0.$$

Таким образом, в рассматриваемой области уравнение сверхтекучего потока можно решать независимо по отношению к нормальной компоненте жидкости.

2.1. B-фаза

Для случая B-фазы уравнения потоков принимают простейший вид — такой же, как и для случая идеальной жидкости:

$$\begin{aligned} &\Delta\varphi_s = 0, \\ &\Delta\varphi_n = 0, \quad r \gg \delta. \end{aligned} \tag{16}$$

Другими словами, можно рассматривать две независимые идеальные жидкости с различными плотностями ρ_n и ρ_s. Поскольку в рассматриваемой геометрии B-фаза находится снаружи аэрогеля, необходимо искать решение с убывающей на бесконечности фазой:

$$\varphi_{s,n}(\mathbf{r}) = \frac{(A_{s,n})_i r_i}{r^3}, \tag{17}$$

где $\mathbf{A}_{s,n}$ — постоянные векторы [4]. Написанное выражение является асимптотикой решения на больших расстояниях и определяет самую медленную возможную убывающую зависимость φ от расстояния $\mathbf{r}$ для случая несжимаемой жидкости. Для сферического тела выписанное решение можно использовать вплоть до поверхности тела. В общем случае постоянные векторы $\mathbf{A}_{s,n}$ находятся из граничных условий на поверхности тела и зависят от его формы. Из выражений для фазы легко получить убывающие на бесконечности зависимости двух скоростей в виде

$$(v^B_{s,n})_i = \frac{(A_{s,n})_i}{r^3} - \frac{3r_i((A_{s,n})_j r_j)}{r^5}. \qquad (18)$$

Для сверхтекучего типа движения найденное решение справедливо для расстояний от поверхности порядка $r \gg \xi(\tau)$, где можно считать ρ_s постоянной. Для нормальной скорости ситуация немного сложнее, и вблизи поверхности $\mathbf{r}$ необходимо решать уравнение Стокса с эффективной плотностью ρ_n.

2.2. A-фаза

Как пример того, что задача может быть решена для случая A-фазы, рассмотрим сферическое тело, которое движется в сверхтекучем ^{3}He. Предположим, что в системе реализуется текстура с вектором l, перпендикулярным поверхности шара, т. е. так называемая текстура типа «ежа»: $l_i(\mathbf{r}) = n_i = r_i/r$. Очевидно, что для такой текстуры не возникает сверхтекучих токов, связанных с пространственным изменением направления вектора $\mathbf{l}$. Таким образом, выражение для сверхтекучего тока в этом случае будет следующим:

$$(j^A_s)_i = \rho^A_s(2\delta_{ij} - n_i n_j)\nabla_j\varphi, \quad r \gg \delta, \qquad (19)$$

где $\varphi = \varphi_s - \varphi_n$. После подстановки данного выражения в уравнение сверхтекучего потока получим следующее:

$$\Delta\varphi - \frac{n_j\nabla_j\varphi}{r} - \frac{1}{2}n_i n_j\nabla_i\nabla_j\varphi = 0. \qquad (20)$$

Будем искать убывающее на бесконечности решение в виде

$$\varphi = \frac{A_i r_i}{r^\gamma}, \quad \gamma \ge 3, \qquad (21)$$

которое приводит к уравнению для γ:

$$(\gamma^2 - 3\gamma - 2)\frac{A_i r_i}{r^{\gamma+2}} = 0.$$

Поскольку по предположению A_i — это постоянный вектор, то подходящее решение уравнения для γ будет

$$\gamma = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \approx 3.56.$$

Решение для «нормальной» части фазы находится аналогично случаю B-фазы:

$$\varphi_n = \frac{(A_n)_i r_i}{r^3}.$$

Поэтому для «сверхтекучей» части фазы получается выражение

$$\varphi^A_s = \frac{A_i r_i}{r^\gamma} - \frac{(A_n)_i r_i}{r^3}. \qquad (22)$$

2.3. Полярная фаза

В пределе слабой связи уравнение сверхтекучего потока для полярной фазы запишется в виде

$$\rho^P_s(\delta_{ij} + 2m_i m_j)\nabla_i[\nabla_j\varphi^P_s - (v^P_n)_j] = 0. \qquad (23)$$

Поскольку по предположению вязкая глубина проникновения δ много больше среднего расстояния между нитями, образующими нематический аэрогель, скорость нормальной компоненты $\mathbf{v}_n$ внутри аэрогеля должна совпадать со скоростью движения аэрогеля $\mathbf{u}$. Для рассматриваемой геометрии задачи необходимо искать решение для φ_s которое не расходится при $r = 0$. Исходя из этого, мы будем искать решение в виде

$$\varphi_s = \left(r_i(v^{in}_s)_i\right) + b\left(\delta_{ij} - \frac{5}{3}m_i m_j\right) r_i r_j, \qquad (24)$$

с неизвестной константой b и постоянной скоростью $\mathbf{v}^{in}_s$. Для несжимаемой жидкости второй член в выражении можно опустить, так как он приводит к конечному значению потока через любую замкнутую поверхность, который не может быть скомпенсирован противотоком нормальной компоненты ввиду ее жесткой связи с нитями аэрогеля. В таком приближении сверхтекучая скорость внутри аэрогеля будет постоянной величиной:

$$(v^P_s)_i = (v^{in}_s)_i. \qquad (25)$$

3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

При выводе граничных условий мы будем рассматривать предел, в котором можно пренебречь джозефсоновскими токами через границу аэрогеля. Как следствие, в задаче остается лишь одна фазовая переменная как функция от пространственной координаты. В дальнейшем мы будем предполагать, что кинетическая энергия сверхтекучего движения много меньше энергии конденсации, и поэтому задача может быть решена последовательно в два этапа.

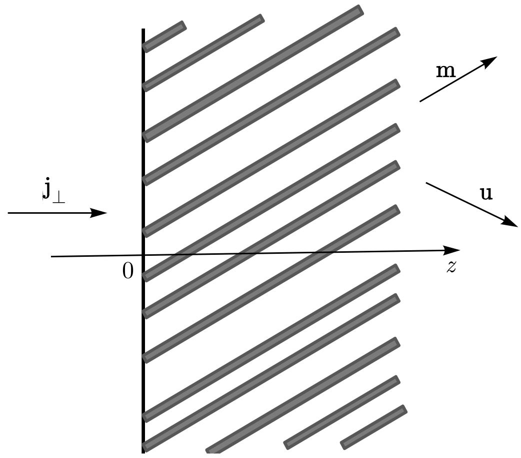

Рис. 2. В пределе $a \gg \xi(\tau)$ можно рассматривать одномерную задачу о протекании сверхтекучего тока через границу раздела двух сверхтекучих состояний. Плотность тока в направлении, перпендикулярном границе аэрогеля, считается постоянной

На первом шаге можно найти изменение параметра порядка на границе аэрогеля, считая, что ток через границу отсутствует. Затем найденное решение для амплитуд параметра порядка можно подставить в уравнение сверхтекучего потока. В пределе $a \gg \xi(\tau)$ можно ограничиться рассмотрением одномерной задачи, в которой уравнение потока может быть проинтегрировано, откуда можно найти изменение фазы на границе аэрогеля.

Мы начнем с рассмотрения простого случая аэрогеля сферической формы, который движется сквозь сверхтекучий ^{3}He с постоянной скоростью $\mathbf{u}$ (рис. 2). Для начала предположим, что снаружи аэрогеля ($z < 0$) находится B-фаза. Как было показано ранее, в области координат, удовлетворяющих условиям $(r - R) = z < 0$ и $(r - R) \gg \xi(\tau)$, фаза имеет вид $\mathbf{A}\mathbf{r}/r^3$. Для достаточно малых расстояний $R \gg |r - R| \gg \xi(\tau)$ мы можем разложить данную функцию до членов, линейных по z:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}}{R^3} + 2\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}}{R^3}z, \quad z < 0, \tag{26}$$

здесь $\mathbf{n}$ — это внутренняя нормаль к поверхности. Аналогично для области $z > 0$ можно записать

$$\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_s^{in}\cdot\mathbf{R} + \mathbf{v}_s^{in}\cdot\mathbf{n}\,z, \quad z > 0. \tag{27}$$

Такая же форма решения может быть получена после интегрирования уравнения потока в предположении постоянства тока через границу аэрогеля $(\mathbf{j}_s\cdot\mathbf{n}) = \text{const} = \rho_s^B[(\mathbf{v}_s^B - \mathbf{u})\cdot\mathbf{n}]$:

$$\begin{aligned}(j_s)_i n_i \sim [5\Delta_B^2 + \Delta_P^2(1+2(m_i n_i)^2)](\partial_z\varphi - u_z) \pm \\ \pm 2\Delta_B\Delta_P(R_{\mu k}d_\mu m_k + 2R_{\mu j}d_\mu m_i n_j)(\partial_z\varphi - u_z) = \\ = (\rho_s)_{zz}(\partial_z\varphi - u_z).\end{aligned} \tag{28}$$

Пусть

$$\varphi(z) = [\mathbf{v}_s^B\cdot\mathbf{n}]z + \chi(z),$$

тогда для $\chi(z)$ имеем

$$\chi(z) = (\mathbf{v}_s^B - \mathbf{u})\cdot\mathbf{n}\int_{-\infty}^{z}\frac{(\rho_s)_{zz}(z') - \rho_s^B}{(\rho_s)_{zz}(z')}\,dz'. \tag{29}$$

Асимптотика выражения для $\chi(z)$ при $z \gg \xi(\tau)$ имеет вид

$$\chi(z) = \alpha + [(\mathbf{v}_s^B - \mathbf{u})\cdot\mathbf{n}]\frac{\rho_s^B - (\rho_s^P)_{zz}}{(\rho_s^P)_{zz}}\,z, \tag{30}$$

где α определяется выражением

$$\begin{aligned}\alpha = [(\mathbf{v}_s^B - \mathbf{u})\cdot\mathbf{n}]\left(\int_{-\infty}^{0}\frac{\rho_{zz}(z') - \rho_s^B}{\rho_{zz}(z')}\,dz' + \right.\\ \left. + \int_{0}^{+\infty}\frac{\rho_{zz}(z') - \rho_s^P}{\rho_{zz}(z')}\,dz'\right).\end{aligned} \tag{31}$$

Сравнивая полученный результат с разложениями (26), (27), мы приходим к граничному условию вида

$$\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}}{R^3} - \mathbf{v}_s^{in}\cdot\mathbf{R} = \alpha. \tag{32}$$

Поскольку по предположению $\rho_{zz}(z)$ не имеет особых точек на поверхности аэрогеля, можно оценить α как $[(\mathbf{v}_s^B - \mathbf{u})\cdot\mathbf{n}]\xi(\tau)$. Таким образом, если изменение фазы на размере аэрогеля много больше изменения фазы на границе, то в нулевом приближении по $\xi(\tau)/R \ll 1$ граничное условие упрощаются до

$$\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}}{R^3} = \mathbf{v}_s^{in}\cdot\mathbf{R}, \tag{33}$$

и в таком виде будет использоваться в дальнейшем. Очевидно, что с заданной точностью написанное условие будет справедливо для тела любой формы, если $\xi(\tau) \ll a$, где a — характерный радиус кривизны поверхности тела:

$$\varphi_s^P = \varphi_s^B, \quad r \in S. \tag{34}$$

Более того, если сверхтекучий ток является чисто потенциальным (т. е. на поверхности отсутствуют токи, связанные с текстурой параметра порядка), то в рассмотренном доказательстве снаружи и внутри аэрогеля можно использовать параметр порядка произвольной формы и результат при этом не изменится:

$$\varphi_s^{in} = \varphi_s^{out}, \quad r \in S. \tag{35}$$

Именно данное граничное условие использовалось в работе Габая и др. [5] для случая скалярного параметра порядка [5].

Запишем теперь граничное условие для скорости нормального движения:

$$\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \quad r \in S. \tag{36}$$

Данное условие отражает тот факт, что через границу аэрогеля не течет тепловой поток. Поскольку скорость движения аэрогеля $\mathbf{u}$ является постоянным вектором, а внутри аэрогеля по предположению $\mathbf{v}_n = \mathbf{u}$, в отсутствие проскальзывания нормальной компоненты жидкости из условия (36) следует, что $\mathbf{v}_n = \mathbf{u}$ на всей границе аэрогеля. Таким образом, полный набор граничных условий, которые используются далее, выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} \varphi_s^{in} = \varphi_s^{out}, \quad r \in S, \\ \mathbf{v}_n = \mathbf{u}, \quad r \in S, \end{gathered} \tag{37}$$

$$\mathbf{j}^{in} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{j}^{out} \cdot \mathbf{n}, \quad r \in S. \tag{38}$$

4. ДВИЖЕНИЕ АЭРОГЕЛЯ В B-ФАЗЕ

Как и ранее, мы начнем решение задачи со случая, когда снаружи аэрогеля находится B-фаза. Условие сохранения тока через поверхность (37) можно переписать, используя выражение для тензора сверхтекучей плотности полярной фазы (7), решения для сверхтекучих скоростей внутри и снаружи аэрогеля (18), (25), а также тот факт, что на границе аэрогеля $\mathbf{v}_n = \mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} &\rho_s^P(\delta_{ij} + 2m_i m_j)[(v_s^{in})_j - u_j]n_i = \\ &\qquad = \rho_s^B \left(\frac{(A_s)_i}{R^3} - \frac{3n_i((A_s)_j n_j)}{R^3} - u_i \right) n_i. \end{aligned} \tag{39}$$

Из непрерывности на границе аэрогеля функции фазы следует, что $(A_s)_i = (v_s^{in})_i R^3$, после чего получим выражение

$$\begin{aligned} &\left([\rho_s^P + 2\rho_s^B]\delta_{ij} + 2\rho_s^P m_i m_j\right)(v_s)_j^{in} = \\ &\qquad = ([\rho_s^P - \rho_s^B]\delta_{ij} + 2\rho_s^P m_i m_j) u_j. \end{aligned} \tag{40}$$

После простых выкладок можно записать ответ для сверхтекучей скорости внутри аэрогеля:

$$\begin{aligned} (v_s^{in})_i = \Bigg(&\frac{\rho_s^P - \rho_s^B}{\rho_s^P + 2\rho_s^B}\delta_{ij} + \\ &+ \frac{6\rho_s^P\rho_s^B}{(\rho_s^P + 2\rho_s^B)(2\rho_s^B + 3\rho_s^P)} m_i m_j \Bigg) u_j. \end{aligned} \tag{41}$$

Матрица, связывающая скорость $\mathbf{u}$ со сверхтекучей скоростью $\mathbf{v}_s^{in}$, имеет два главных значения:

$$\frac{3}{2}\,\frac{\rho_s^P}{\rho_s^P + 2\rho_s^B} - \frac{1}{2}, \quad \mathbf{u} \perp \mathbf{m}, \tag{42}$$

$$\frac{3}{2}\,\frac{3\rho_s^P}{3\rho_s^P + 2\rho_s^B} - \frac{1}{2}, \quad \mathbf{u} \parallel \mathbf{m}. \tag{43}$$

Как видно из написанного выражения, в случае $\rho^P = 0$ мы получим хорошо известное выражение для поля скоростей вокруг непроницаемого шарика, движущегося в идеальной жидкости.

Кинетическая энергия жидкости, увлекаемой движением шара, содержит следующие члены:

$$\begin{aligned} E = &\frac{(\rho_n^P)_{ij} u_i u_j}{2} V_0 + \frac{(\rho_s^P)_{ij}(v_s^{in})_i(v_s^{in})_j}{2} V_0 + \\ &+ \frac{\rho_n^B u_i u_i}{2}\,\frac{V_0}{2} + \frac{\rho_s^B (v_s^{in})_i (v_s^{in})_i}{2} 2V_0, \end{aligned} \tag{44}$$

здесь V_0 — объем тела. Первый член — это кинетическая энергия нормальной части жидкости, которая движется вместе с аэрогелем внутри его объема. Второй член — это энергия противотока сверхтекучей компоненты через аэрогель. Третий член — это энергия потенциального течения нормальной компоненты вокруг шара. Наконец, последний член возникает из-за потенциального течения сверхтекучей компоненты в наружной области и получается после простого интегрирования:

$$\int\limits_{r>R} \frac{\rho_s^B (v_s^{in})_i (v_s^{in})_i}{2}\, d^3 r.$$

Удобно переписать выражение для энергии в виде

$$\begin{aligned} E = &\frac{3}{4}\rho u^2 V_0 - \frac{1}{2}\left[2(\rho_s^P)_{ij} + \rho_s^B \delta_{ij}\right] u_i u_j \frac{V_0}{2} + \\ &+ \frac{1}{2}\left[(\rho_s^P)_{ij} + 2\rho_s^B \delta_{ij}\right](v_s^{in})_i (v_s^{in})_j V_0, \end{aligned} \tag{45}$$

где мы выделили член, описывающий не зависящую от температуры энергию потенциального движения жидкости для нормальной фазы ^{3}He. Подстановка выражения для v_s^{in} из (41) в (45) позволяет получить энергию как квадратичную форму по u_i:

$$E = \frac{M_{ij}^{ad} u_i u_j}{2}, \tag{46}$$

где M_{ij}^{at} — это тензор присоединенной массы жидкости в отсутствие вязкости,

$$M_{ij}^{ad} = \frac{3}{2}\rho V_0 \left(\delta_{ij} - 3\frac{\rho_s^P \rho_s^B}{\rho(\rho_s^P + 2\rho_s^B)} \times \right. \\ \left. \times \left[\delta_{ij} + \frac{4\rho_s^B}{3\rho_s^P + 2\rho_s^B} m_i m_j \right] \right). \quad (47)$$

Согласно выражениям (46) и (47) энергия потенциального движения вокруг и через аэрогель является квадратичной функцией от косинуса угла между направлением скорости движения аэрогеля $\mathbf{u}$ и осью анизотропии аэрогеля (совпадает с направлением вектора $\mathbf{m}$). В отсутствие сверхтекучести ^{3}He внутри аэрогеля выражение для присоединенной массы упрощается до $3\rho V_0/2$, что совпадает с ответом для непроницаемого шарика, движущего в идеальной жидкости, с учетом того, что масса шарика увеличивается на ρV_0 за счет массы жидкости внутри него. Выражение (47) может быть обобщено на случай аэрогеля эллиптической формы (см. Приложение):

$$M_{ij}^{ad} = (1+\alpha)\rho V_0 \times \\ \times \left(\delta_{ij} - (1+\alpha)\frac{\rho_s^P \rho_s^B}{\rho(\rho_s^B + \alpha\rho_s^P)} \times \right. \\ \left. \times \left[\delta_{ij} + \frac{2\rho_s^B}{\rho_s^B + 3\alpha\rho_s^P} m_i m_j \right] \right), \quad (48)$$

где α — «размагничивающий» фактор тела в направлении потока ($\alpha = 1/2$ для шарика).

В дальнейшем мы разделим тензор присоединенной массы на два члена:

$$M_{ij}^{ad} = \frac{3}{2}\rho V_0 \delta_{ij} - \delta M_{ij}^{B-P},$$

где последний член возникает только в присутствии сверхтекучести внутри аэрогеля, $\delta M_{ij}^{B-P} > 0$.

5. ДВИЖЕНИЕ АЭРОГЕЛЯ В А-ФАЗЕ

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда снаружи аэрогеля находится А-фаза. Напомним, что мы рассматриваем случай текстуры вектора $\mathbf{l}$ типа «ежа», для того чтобы исключить из рассмотрения сверхтекучие токи, связанные со вторым членом в выражении (9). Помимо этого, необходимо отметить, что рассматриваемые скорости потока должны быть малы, для того чтобы не происходила переориентация вектора $\mathbf{l}$ на границе аэрогеля.

Решение для потенциального потока нормальной части жидкости вокруг аэрогеля находится аналогично случаю B-фазы. Из определения функции φ ее сверхтекучая часть выражается как

$$\varphi_s = \frac{A_i r_i}{r^\beta} - \frac{u_i r_i}{r^3}\,\frac{R^3}{2}, \quad (49)$$

где было использовано, что

$$\varphi_n = -\frac{u_i r_i}{r^3}\,\frac{R^3}{2}.$$

Строго говоря, выписанное выражение имеет смысл лишь в области $|r-R| \gg \delta$, но мы расширим область применимости выражения вплоть до поверхности аэрогеля, предполагая, что $\delta \ll a$. Для рассматриваемого случая граничные условия можно переписать в виде

$$\frac{A_i R_i}{R^\beta} - \frac{u_i R_i}{2} = (v_s^{in})_i R_i, \quad (50)$$

$$\rho_s^P(\delta_{ij} + 2m_i m_j)[(v_s^{in})_j - u_j]n_i = \\ = \rho_s^A \left(\frac{(A)_i}{R^\beta} - \frac{\beta n_i((A)_j n_j)}{R^\beta} \right) n_i, \quad (51)$$

где было использовано, что $(\rho_s^A)_{ij} n_j = \rho_s^A n_i$ (см. (9)). Комбинируя выписанные равенства, можно выразить сверхтекучую скорость внутри аэрогеля $\mathbf{v}_s^{in}$ через $\mathbf{u}$:

$$(v_s^{in})_i = \left(\frac{\rho_s^P - (\beta-1)\rho_s^A/2}{\rho_s^P + (\beta-1)\rho_s^A}\delta_{ij} + \right. \\ \left. + \frac{3(\beta-1)\rho_s^P\rho_s^A}{(\rho_s^P+(\beta-1)\rho_s^A)(3\rho_s^P+(\beta-1)\rho_s^A)} m_i m_j \right) u_j. \quad (52)$$

Если $\mathbf{m} \parallel \mathbf{u}$ или $\mathbf{m} \perp \mathbf{u}$, то выражения для $\mathbf{v}_s^{in}$ достаточно просты:

$$\mathbf{v}_s^{in} = \left(\frac{3}{2}\,\frac{3\rho_s^P}{3\rho_s^P + (\beta-1)\rho_s^A} - \frac{1}{2} \right)\mathbf{u}, \quad \mathbf{m} \parallel \mathbf{u}, \quad (53)$$

$$\mathbf{v}_s^{in} = \left(\frac{3}{2}\,\frac{\rho_s^P}{\rho_s^P + (\beta-1)\rho_s^A} - \frac{1}{2} \right)\mathbf{u}, \quad \mathbf{m} \perp \mathbf{u}. \quad (54)$$

Отметим, что полученные выражения отличаются от случая, когда снаружи аэрогеля существует B-фаза (42), (43). Как и ранее, запишем выражение для кинетической энергии жидкости в виде

$$E = \frac{(\rho_n^P)_{ij} u_i u_j}{2} V_0 + \frac{(\rho_s^P)_{ij}(v_s^{in})_i (v_s^{in})_j}{2} V_0 + \\ + \int\limits_{r>R} \frac{(\rho_n^A)_{ij}(v_n^{out})_i (v_n^{out})_j}{2}\, d^3r + \\ \int\limits_{r>R} \frac{(\rho_s^A)_{ij}(v_s^{out})_i (v_s^{out})_j}{2}\, d^3r, \quad (55)$$

где

$$(v_n^{out})_i = \frac{(A_n)_i}{r^3} - 3\frac{n_i(A_n)_j n_j}{r^3}, \tag{56}$$

$$(A_n)_i = -\frac{u_i}{2}R^3,$$
$$(v_s^{out})_i = \frac{(A)_i}{r^\beta} - \beta\frac{n_i(A)_j n_j}{r^\beta} + (v_n^{out})_i. \tag{57}$$

После простых, но длительных вычислений получим

$$E = \frac{3}{4}\rho u_i u_i V_0 + \frac{1}{2}(\rho_s^P)_{ij}[(v_s^{in})_i(v_s^{in})_j - u_i u_j]\,V_0 + \\ + \frac{\rho_s^A}{2}\left(\frac{\beta^2-2\beta+5}{2\beta-3}\left[(v_s^{in})_i + \frac{u_i}{2}\right]\left[(v_s^{in})_i + \frac{u_i}{2}\right] - \right. \\ \left. - 2\frac{(1+\beta)}{\beta}\left[(v_s^{in})_i + \frac{u_i}{2}\right]u_i\right)V_0. \tag{58}$$

Из последнего выражения легко получить главные значения тензора присоединенной массы для рассматриваемого случая:

$$M_\parallel^{ad} = \frac{3}{2}\rho V_0\left(1 - \frac{3\rho_s^P\rho_s^A(\rho_s^A(\beta-1)(2\beta-3)(\beta^2+3\beta+4) - 3\rho_s^P(5\beta^3-6\beta^2-7\beta-12))/2}{\beta(2\beta-3)(3\rho_s^P+(\beta-1)\rho_s^A)^2\rho}\right), \tag{59}$$

$$M_\perp^{ad} = \frac{3}{2}\rho V_0\left(1 - \frac{\rho_s^P\rho_s^A\cdot\left\{\rho_s^A(\beta-1)(2\beta-3)(\beta^2+3\beta+4) - \rho_s^P(5\beta^3-6\beta^2-7\beta-12)\right\}/2}{\beta(2\beta-3)(\rho_s^P+(\beta-1)\rho_s^A)^2\rho}\right). \tag{60}$$

Несмотря на громоздкость выражений, численное значение сверхтекучей части присоединенной массы в области температур, где $2\rho_s^A \approx 3\rho_s^P \approx \rho_s^B$ совсем немного отличается от того, что было для случая внешней B-фазы. В частности, оценка отношения $\delta M^{A-P}/\delta M^{B-P}$ получается следующей:

$$\delta M_\parallel^{A-P}/\delta M_\parallel^{B-P} \approx 0.84, \tag{61}$$
$$\delta M_\perp^{A-P}/\delta M_\perp^{B-P} \approx 0.93. \tag{62}$$

6. КОЛЕБАНИЯ АЭРОГЕЛЯ

В эксперименте [3] образец аэрогеля был прикреплен к тоненькой проволочке, через которую пропускался переменный электрический ток, который, в свою очередь, приводил к колебаниям системы, находящейся в постоянном магнитном поле. Оценка зависимости частоты собственных колебаний такой составной системы от сверхтекучей плотности ^{3}He может быть проведена в рамках модели одномерного незатухающего осциллятора с заданной жесткостью K. В таком случае собственная частота системы дается выражением

$$\omega^2 = K/M,$$

где M — полная масса системы,

$$M = M_w + M_a + M_{ad}^0 - \delta M_{ad}^P, \tag{63}$$

здесь M_w — масса проволочки, M_a — масса аэрогеля, $M_{ad}^0 = 3\rho V_0/2$ — масса присоединенной жидкости из-за потенциального обтекания шара (в нормальном состоянии ^{3}He в пределе нулевой вязкости) плюс полная масса жидкости внутри аэрогеля, δM^P — масса части сверхтекучей жидкости, которая не участвует в движении из-за частичного протекания сверхтекучей компоненты через аэрогель. Для дальнейшего анализа удобно ввести дополнительные обозначения [6]:

$$\omega_0^2 = \frac{K}{M_w + M_a}, \tag{64}$$

$$\omega_n^2 = \frac{K}{M_w + M_a + M_{ad}^0}, \tag{65}$$

где ω_0 — собственная частота системы в вакууме, а ω_n — собственная частота системы с учетом присоединенной массы ^{3}He M_{ad}^0. Заметим, что здесь мы пренебрегли вязкостью системы, которая дает вклад как в инерционную массу системы, так и в затухание. При помощи новых обозначений можно переписать результат, выразив в явном виде δM^P:

$$\frac{\delta M^P}{M_{ad}^0} = \frac{\omega_n^2/\omega^2 - 1}{\omega_n^2/\omega_0^2 - 1}. \tag{66}$$

Левую часть формулы (66) можно вычислить при помощи соотношений (47), (48), (59), (60). Из нее можно оценить скачок собственной частоты колебаний системы при фазовом переходе снаружи аэрогеля из-за изменения функции потенциального обтекания. Полагая, что

$$1 - \delta M^{A-P}/\delta M^{B-P} \ll 1, \quad \frac{\omega_B - \omega_n}{\omega_n} \ll 1,$$
$$\frac{\omega_B - \omega_A}{\omega_B} \ll 1,$$

получим скачок частоты:

$$\omega_B - \omega_A \sim (\omega_A - \omega_n)(1 - \delta M^{A-P}/\delta M^{B-P}), \tag{67}$$

где ω_A, ω_B — частоты колебаний системы вблизи A–B перехода снаружи аэрогеля (соответственно выше и ниже точки перехода). Из эксперимента [3] известно, что при давлении 15.4 бар частота собственных колебаний системы в пределе нулевой вязкости равна $f_n = \omega_n/2\pi \approx 566$ Гц (см. рис. 2 в [3]). К сожалению, из-за взаимодействия двух мод колебаний экспериментально оценить величину ω_A, определенную выше, достаточно сложно, так как из-за данного взаимодействия происходит видимое уменьшение частоты основной моды. В области перехода в полярную фазу уменьшение частоты составляет порядка 20 Гц (при том же давлении, см. рис. 6 из [3]). Оценим величину $f_A = \omega_A/2\pi$, предполагая, что рассмотренный сдвиг частоты слабо зависит от температуры. Поскольку по определению величина ω_A должна быть вычислена без учета эффекта вязкости, с учетом сдвига частоты из-за взаимодействия мод имеем $f_a \approx (563 + 20) = 583$ Гц. Таким образом, используя соотношение (61), скачок частоты можно оценить примерно как 3 Гц, что не сильно противоречит экспериментальным данным.

7. ВЫВОДЫ

В настоящей статье представлен последовательный вывод граничных условий для фазового множителя параметра порядка при условии протекания сверхтекучего тока между двумя различными состояниями сверхтекучей жидкости с p-спариванием. Было показано, что в нулевом приближении по малому параметру $\xi(\tau)/a$ фазу параметра порядка можно считать непрерывной функцией пространственной координаты. Данное утверждение справедливо только при условии пренебрежения джозефсоновскими токами через границу аэрогеля, а также при условии отсутствия текстурных сверхтекучих токов на границе аэрогеля. Можно привести также простую оценку влияния нестационарных джозефсоновских токов на полученные граничные условия. Выражение для данного тока можно записать в виде

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{n} = \frac{\Delta_B \Delta_P}{\lambda}(\varphi_s^B(\mathbf{r}) - \varphi_s^P(\mathbf{r})), \quad r \in S, \qquad (68)$$

где мы предположили малость разницы фаз двух сверхтекучих состояний на границе аэрогеля. Как видно из написанного выражения, в состоянии покоя аэрогеля джозефсоновские токи должны исчезнуть, так как согласно полученным результатам фазы φ_s должны быть пропорциональны скорости аэрогеля $\mathbf{u}$. Из вида выражения (68) при условии, что $\lambda \sim \xi(\tau)$, а также при помощи оценки для разности фаз двух состояний, полученной при выводе граничных условий, можно заключить, что нестационарные джозефсоновские токи имеют тот же порядок, что и токи, связанные с градиентом фазы. Поэтому для рассматриваемой в работе точности граничные условия измениться не должны. Таким образом, можно заключить, что для выполнения граничных условий помимо условия $\xi(\tau)/a \ll 1$ необходимо, чтобы изменение фазы через границу было мало, т. е. $u \ll \hbar/(m_{^3\mathrm{He}}\xi(\tau))$. К примеру, для нулевого давления и $\tau = 0.001$ получается, что $u \ll 1$ см/с.

Найденная температурная зависимость частоты механического резонанса системы возникает из-за соответствующей зависимости присоединенной массы от сверхтекучих плотностей наружного и внутреннего сверхтекучих состояний. Как следует из найденного соотношения, присоединенная масса минимальна, когда сверхтекучая плотность внутреннего состояния становится равной сверхтекучей плотности внешнего состояния. В этом случае сверхтекучая часть жидкости покоится и не участвует в потенциальном обтекании аэрогеля, поэтому в присоединенной массе системы остается лишь вклад нормальной компоненты жидкости. Этот вклад может быть разделен на две части — первый возникает из-за потенциального течения нормальной части жидкости в объеме порядка размеров аэрогеля, а второй из-за влияния вязкости в маленьком объеме δS вблизи поверхности аэрогеля. Для экспериментальных условий [3] (в области температур и частот колебаний имеет место неравенство $\delta \ll a$), второй вклад гораздо меньше первого. К сожалению, экспериментально полученная температурная зависимость частоты оказалась более быстрой, чем это следует из теоретической модели, рассмотренной в статье. Одно из возможных объяснений наблюдаемого расхождения может быть связано с одновременным возбуждением второй моды колебаний, в которой происходят совместные колебания нитей аэрогеля и ^{3}He внутри него. Эффективное отталкивание двух мод колебаний может быть причиной более сильной температурной зависимости механической ветви колебаний. Можно предположить, что в случае колебаний аэрогеля в направлении, перпендикулярном оси анизотропии аэрогеля, вторая мода колебаний не будет возбуждаться в силу сильной анизотропии тензора упругости нематического аэрогеля, и в таком случае рассмотренная теоретическая модель будет лучше описывать экспериментальные данные.

Благодарности. Автор признателен И. А. Фомину, В. В. Дмитриеву и А. А. Солдатову за полезные обсуждения результатов работы.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-12-00384).

8. ПРИЛОЖЕНИЕ

Для случая, когда снаружи аэрогеля существует B-фаза, полученный результат может быть обобщен для тела эллиптической формы в предположении, что аэрогель движется вдоль одной из главных осей эллипсоида. Основная идея заключается в том, что задача аналогична задаче о диэлектрическом теле в однородном электрическом поле. В нашей задаче A_i можно поставить в соответствие дипольный момент из задачи о диэлектрическом теле. Поскольку дипольный момент тела инвариантен относительно галилеевского преобразования, мы можем использовать хорошо известный результат из [4], в котором необходимо заменить диэлектрические проницаемости на тензоры сверхтекучей плотности наружнего и внутреннего состояний системы. В итоге имеем

$$(A_s)_i = \frac{V_0}{4\pi}\frac{1+\alpha}{\rho_s^B+\alpha\rho_s^P}\times \\ \times\left([\rho_s^P-\rho_s^B]\delta_{ij}+\frac{2(1+\alpha)\rho_s^P\rho_s^B}{\rho_s^B+3\alpha\rho_s^P}\,m_i m_j\right)u_j, \quad (69)$$

где α — «размагничивающий» фактор тела в направлении потока ($\alpha = 1/2$ для шара), V_0 — объем тела.

Получим теперь выражение для тензора присоединенной массы эллиптического аэрогеля. Первые три члена в (44) остаются такими же, а последний может быть вычислен следующим образом [4]:

$$\frac{\rho_s^B}{2}\int\limits_{V/V_0}(v_s^{out}(\mathbf{r}))^2 d^3r = \frac{\rho_s^B}{2}(-4\pi A_i u_i - V_0 u_i u_i) + \\ + \frac{\rho_s^B}{2}\int\limits_{S_0}(\varphi + u_i r_i)((v_s^{out})_j - u_j)\,df_j, \quad (70)$$

где $d\mathbf{f} = -\mathbf{n}r^2 d\Omega$ — ориентированный элемент поверхности тела. При помощи граничных условий интеграл можно переписать в виде

$$-\frac{(\rho_s^P)_{jk}}{2}\int\limits_{S_0}((v_s^{in})_i r_i + u_i r_i)((v_s^{in})_k - u_k)\,dn_j r^2 d\Omega, \quad (71)$$

и после несложных преобразований получим

$$-\frac{(\rho_s^P)_{jk}}{2}V_0[(v_s^{in})_i(v_s^{in})_k - u_i u_k]. \quad (72)$$

Итоговое выражение для кинетической энергии запишем как

$$E = (1+\alpha)\frac{\rho u_i u_i}{2}V_0 - \frac{(1+\alpha)^2\rho_s^P\rho_s^B}{\rho_s^B+\alpha\rho_s^P}\times \\ \times\left(\delta_{ij}+\frac{2\rho_s^B}{\rho_s^B+3\alpha\rho_s^P}m_i m_j\right)u_i u_j. \quad (73)$$

Таким образом, получается следующий вид тензора присоединенной массы для нематического аэрогеля эллиптической формы:

$$M_{ij}^{ad} = (1+\alpha)\rho V_0\left(\delta_{ij} - (1+\alpha)\frac{\rho_s^P\rho_s^B}{\rho(\rho_s^B+\alpha\rho_s^P)}\times \\ \times\left[\delta_{ij}+\frac{2\rho_s^B}{\rho_s^B+3\alpha\rho_s^P}\,m_i m_j\right]\right). \quad (74)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Aoyama and R. Ikeda, Phys. Rev. B **73**, 060504(R) (2006).
2. V. V. Dmitriev, A. A. Senin, A. A. Soldatov, and A. N. Yudin, Phys. Rev. Lett. **115**, 165304 (2015).
3. В. В. Дмитриев, М. С. Кутузов, А. А. Солдатов, Е. В. Суровцев, А. Н. Юдин, Письма в ЖЭТФ **112**, 820 (2020).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (2005).
5. C. Gabay, P. E. Wolf, and L. Puech, Physica B 284 (2000).
6. P. Brussaard, S. N. Fisher, A. M. Guenault, A. J. Hale, N. Mulders, and G. R. Pickett, Phys. Rev. Lett. **86**, 4580 (2001).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (2005).
8. D. Vollhardt and P. Wölfle, *The Superfluid Phases of* ^{3}He, Taylor and Francis, London (1990).