ЖЭТФ, 2021, том 160, вып. 1 (7), стр. 132–138 © 2021

СВЯЗЬ ВЕЛИЧИН ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ С ИХ НОМЕРАМИ

Ю. Н. Овчинников*

Max-Planck Institute for Physics of Complex Systems
01187, Dresden, Germany

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 18 февраля 2021 г.,
после переработки 18 февраля 2021 г.
Принята к публикации 18 февраля 2021 г.

Уравнение Эйлера порождает бесконечное число связей между величинами простых чисел и их номерами. Эти связи осуществляются условно сходящимися рядами. Аналитическая функция, осуществляющая эти связи, бесконечное число раз проходит через значение, равное единице. Расстояние между первой и второй такими точками оказывается аномально большим.

DOI: 10.31857/S0044451021070142

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] было показано, что в распределении нулей дзета-функции Римана существует дальний порядок, что делает возможным установить номер нуля с точностью ± 1, если известно значение только одного нуля, и однозначно, если известно значение трех последовательных нулей. Формула Эйлера устанавливает жесткую связь значений простых чисел с дзета-функцией Римана [2].

Точка $z = 1$ является простым полюсом дзета-функции. Это позволяет ввести две аналитические функции $\{\kappa, \xi\}$, связывающие значение простых чисел P с их номерами N. Полученная связь позволяет восстановить значение функций $\{\kappa, \xi\}$ на полуоси $P > 0$. В качестве примера мы приводим значения функции κ в двух областях: $P < 10^6$ и $2.4 \cdot 10^7 < P < 5 \cdot 10^7$. Функция κ бесконечное число раз проходит через значение $\kappa = 1$. Значения функции ξ однозначно определены в целочисленных точках $\{N, P(N)\}$. Среднее расстояние между простыми числами δ равно $\ln(P/\kappa)$.

* E-mail: ovc@itp.ac.ru

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для получения уравнений для функций $\{\kappa, \xi\}$ воспользуемся уравнением Эйлера для дзета-функции Римана [2], записанным в виде

$$\ln \zeta(z) = \sum_P \frac{1}{P^z} - \sum_P \left[\ln \left(1 - \frac{1}{P^z} \right) + \frac{1}{P^z} \right], \quad (1)$$

где P — простые числа. Функция Римана имеет простой полюс в точке $z = 1$. Используя разложение в ряд дзета-функции Римана

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} \left\{ 1 + C(z-1) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k (z-1)^{k+1} \right\}, \quad (2)$$

где C — константа Эйлера, получим из разложений (1), (2) следующее уравнение:

$$\sum_{N=1}^{\infty}\left(\frac{1}{N^z}-\frac{\ln P}{P^z}\right)=2C+\sum_P\frac{\ln P}{P^z(P^z-1)}+$$
$$+\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}C_k(z-1)^k(k+2)+(z-1)\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}C_k(z-1)^k\right)^2-C^2(z-1)}{1+C(z-1)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}C_k(z-1)^{k+1}}. \quad (3)$$

Ряды в правой части уравнения (3) быстро сходятся в окрестности $z=1$ и порождают бесконечное число связей на простые числа P как функцию их номера N. В частности, находим первые два равенства

$$\sum_{N=1}^{\infty}\left(\frac{1}{N}-\frac{\ln P}{P}\right)=2C+\sum_P\frac{\ln P}{P(P-1)},$$
$$\sum_{N=1}^{\infty}\left(\frac{\ln^2 P}{P}-\frac{\ln N}{N}\right)= \quad (4)$$
$$=-\sum_P\frac{\ln^2 P}{P-1}\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{P-1}\right)+3C_1-C^2.$$

В результате оказывается возможным определить две аналитические функции $\{\kappa,\xi\}$ на полуоси $P>0$:

$$P=N\ln\left(\frac{P}{\kappa}\right)+\xi\ln^2\left(\frac{P}{\kappa}\right), \quad (5)$$

где κ — медленная функция от P, а ξ — быстро осциллирующая неявная функция N, однозначно определенная в целочисленных точках $\{N,P(N)\}$. Величина $|\xi|\lesssim 1$.

Ряд в левой части k-го уравнения бесконечной системы равенства (4) может быть записан в виде

$$\sum_{N=1}^{\infty}\left(\frac{\ln^k N}{N}-\frac{\ln^{k+1} P}{P}\right). \quad (6)$$

Все эти ряды являются условно сходящимися. В результате функция $\{\kappa(P),\,P>0\}$ бесконечное число раз проходит через значение $\kappa=1$. В области $P\gg 1$ функция κ восстанавливается с помощью уравнения (5) и простых чисел в окрестности точки P. Ниже мы приведем значения функции $\kappa(P)$ в широкой области $N<5\cdot 10^7$, используя асимптотическое приближение и банк данных для простых чисел $P(N)$.

Из первого уравнения (4) следует всего лишь условная сходимость ряда $\sum_N(1/N-\ln P(N)/P(N))$. Однако функция $\kappa(P)$, определяющая сходимость, является очень нетривиальной, и оценки для зависимости $N(P)$, полученные в работах [3–5], оказываются довольно грубыми.

Первое значение величины P_0, для которого $\kappa(P_0)=1$, оказывается достаточно большим, и для его нахождения мы воспользуемся численными значениями функции $\kappa(P)$, полученными в асимптотическом приближении в трех точках, соответствующих значениям $\langle N\rangle$ равным $\langle N\rangle=\{6,5,4\}$:

$$\begin{aligned}&\frac{P}{\kappa}=9.33091735, \quad \kappa=1.436086,\\&\frac{P}{\kappa}=8.3311375, \quad \kappa=1.2723356,\\&\frac{P}{\kappa}=7.02868758, \quad \kappa=1.10973776.\end{aligned} \quad (7)$$

Интерполяция по трем точкам позволяет записать функцию κ в интервале $P_0\le P<14$ в неявном виде:

$$\kappa=1.2723356+\alpha_1\left(\frac{P}{\kappa}-8.3311375\right)+$$
$$+\alpha_2\left(\frac{P}{\kappa}-8.3311375\right)^2, \quad (8)$$

где параметры α_1, α_2, P_0 равны

$$\begin{gathered}\alpha_1=0.1468733, \quad \alpha_2=1.6916836\cdot 10^{-2},\\ \{\kappa=1, \quad P_0=5.6472442\}.\end{gathered} \quad (9)$$

Из уравнений (8), (9) находим значения первой и второй производных κ по P в точке P_0:

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial\kappa}{\partial P}\right|_{P=P_0}=4.2584129\cdot 10^{-2},\\&\left.\frac{\partial^2\kappa}{\partial P^2}\right|_{P=P_0}=1.2069243\cdot 10^{-2}.\end{aligned} \quad (10)$$

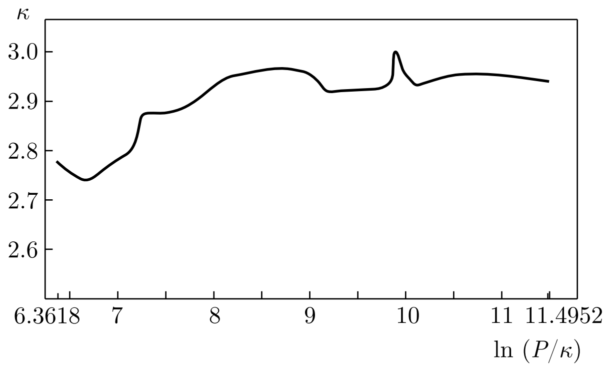

Рис. 1. Зависимость величины κ от $\ln(P/\kappa)$ в интервале $6.35 < \ln(P/\kappa) < 11.5$

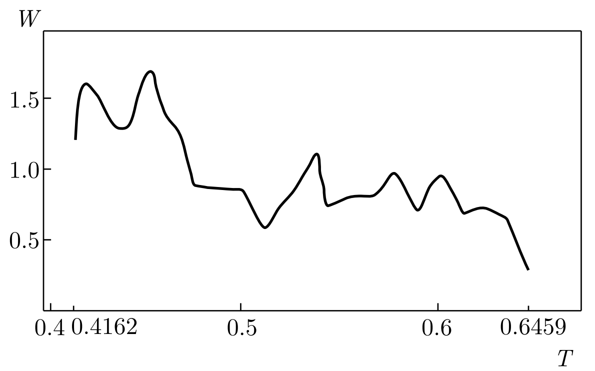

Рис. 2. Зависимость величины κ от $\ln(P/\kappa)$ в интервале $15.24 < \ln(P/\kappa) < 15.5$; $\kappa = 2.911 + 10^{-2}W$; $\ln(P/\kappa) = 14.84 + T$

Используя формулы (9), (10), находим нечетную функцию $\kappa(P)$ в области $P \le P_0$ (первые три члена разложения):

$$\kappa = \gamma_1 P + \gamma_2 P^3 + \gamma_3 P^5, \tag{11}$$

где константы $\gamma_{1,2,3}$ имеют следующие значения:

$$\gamma_1 = 0.303279, \quad \gamma_2 = -5.8058416 \cdot 10^{-3}, \\ \gamma_3 = 5.7965908 \cdot 10^{-5}. \tag{12}$$

В табл. 1 мы приводим значения величины κ как неявной функции параметра P/κ в интервале $540 < P < 7.3 \cdot 10^6$. Часть этих данных была использована для построения графика, представленного на рис. 1.

Значение величины P, при котором функция κ второй раз проходит через значение $\kappa = 1$, оказывается аномально большим, существенно превосходящим величину $P = 7.3 \cdot 10^6$. Поэтому целесообразно привести еще две таблицы значений функции κ в областях $8.16 \cdot 10^6 < P < 1.58 \cdot 10^7$ и $9.2 \cdot 10^8 < P < 9.825 \cdot 10^8$ (табл. 2, 3), а также график зависимости

Таблица 1. Зависимость величины κ от $\ln(P/\kappa)$ в интервале $5.35 < \ln(P/\kappa) < 14.74$

$\ln(P/\kappa)$	κ
5.35986733	2.532557395
6.361764094	2.7785552736
6.656853070	2.7376907868
7.138752753	2.7991641109
7.240179252	2.866279247
7.679349235	2.8825805393
8.1531214638	2.9498744213
8.7361532971	2.96730411698
8.9738055746	2.9580785715
9.1078202553	2.935500058
9.1641636965	2.919485504
9.7288761507	2.925208492
9.8249648932	2.9342652576
9.8613751177	2.9442329767
9.8759351769	2.9947880488
9.900228354	3.0065822195
9.928897597	2.9770170407
9.9451740301	2.97048106437
9.9744924046	2.964698903
10.0983306239	2.9327967962
10.4741457273	2.953829756
10.9297175937	2.9549719277
11.4952340659	2.9401961334
12.294175355	2.9401995052
12.758840765	2.9490812862
12.9966888249	2.94683360385
13.00172510718	2.94625054098
13.2011721141	2.94050117017
13.4388887258	2.9500020520
13.754458736	2.9360893117
13.991422373	2.9338110441
14.1882942799	2.93402098171
14.3527898788	2.9388529294
14.5045135422	2.9247033152
14.628134333	2.9259205748
14.737507751	2.93074136764

Таблица 2. Зависимость κ от $\ln(P/\kappa)$ в интервале $14.84 < \ln(P/\kappa) < 15.51$

$\ln(P/\kappa)$	κ
14.842012977	2.9243479799
14.8420644714	2.92476583005
14.8422005715	2.925043205288
14.93482165159	2.92766521445
15.0221175005	2.92412428438
15.105787376	2.9215655575
15.1768393655	2.92145015378
15.2446168534	2.9218232556
15.2561829441	2.923054851016
15.2616646486	2.92704088393
15.2696793082	2.9258098905
15.27669576	2.9238602422
15.2835251379	2.92398668898
15.2885691113	2.92648243034
15.2944510732	2.92793492459
15.3018253923	2.9248193697
15.3089118352	2.9236628357
15.31630130749	2.91988575077
15.3230581547	2.91969750252
15.3410729589	2.9195137771
15.35243137362	2.91685184742
15.3748482399	2.9212716555
15.37861615754	2.92206461207
15.3809690351	2.9203751964
15.3817957353	2.91967658363
15.3841847891	2.91840517525
15.3956681915	2.91906708912
15.4072591843	2.91908981313
15.41813991587	2.9207073572
15.4296689062	2.91809831012
15.4355021939	2.919670940958
15.44077484115	2.920568271677
15.4454792496	2.919897317768
15.45287846854	2.917865400382
15.45722005856	2.91806190337
15.46372783078	2.91827610925
15.474893680726	2.917512899447
15.4811222298	2.91525849714
15.4859377749	2.9138585193
15.4882792369	2.9164619053
15.4912758845	2.918129923
15.4960674804	2.91782284429
15.498561695	2.917669126
15.502901555	2.9173601436
15.506369399	2.9159441886

Таблица 3. Зависимость κ от величины $\ln(P/\kappa)$ в интервале $18.87 < \ln(P/\kappa) < 19.65$

$\ln(P/\kappa)$	κ
18.872100641387	2.883917549832
18.88530470456	2.883821647853
18.898513188825	2.88385749774
18.915277601838	2.883709814489
19.5834048502	2.8775419576
19.60644413388	2.876702036015
19.64044301007	2.87672022243
19.64099174063	2.87666572901
19.64148063226	2.87675655906
19.64207172507	2.87661380433
19.64280973796	2.8764997721
19.6431621368	2.87653112677
19.6436317364	2.8766133494
19.6448815012	2.8765666246
19.645324773	2.8764057000
19.6458210148	2.87652288395
19.646377446	2.876417377328
19.6469020285	2.87642625346
19.646903686	2.87642507113
19.6474709814	2.876316271829
19.6479757649	2.8763774043
19.64851833796	2.87633459382
19.6490325534	2.87636853505

κ от $\ln(P/\kappa)$ в области $0.4 < \ln(P/\kappa) - 14.84 < 2/3$ (рис. 2). Эти данные позволяют провести хотя и грубую, но важную и все еще разумную оценку второго значения величины P, при которой $\kappa = 1$.

Величина κ является однозначной функцией P. Но функция $\ln(P/\kappa)$ не является монотонно растущей. Поэтому существуют узкие области, в которых величина κ как функция $\ln(P/\kappa)$ не является однозначной. Одна из таких областей расположена внутри интервала $1.548\cdot 10^7 < P < 1.549\cdot 10^7$. В табл. 4 мы приводим значения величины $\{\kappa, \ln(P/\kappa)\}$ в двенадцати точках P, лежащих внутри этого интервала.

Используя значение величин $\{P, \kappa\}$ в трех верхних строках табл. 2:

$$\{\ln(P/\kappa) = (14.8420129777; 14.8420644714;$$
$$14.8422005715)\},$$

Таблица 4. $P = 1.548 \cdot 10^7 + T$; $\kappa = 2.91 \cdot 10^{-3}\tilde{\kappa}$; $\ln(P/\kappa) = 15.4 + 10^{-2}x$

T	$\tilde{\kappa}$	x
2011.42105263	4.351222317	8.554212465
3796.68421052	3.997343055	8.57788639
4883.14035087	3.74338389	8.593618401
5519.6545455	3.858519304	8.593777486
5892.5438596	4.060487546	8.589254386
6367.36363636	4.11998825	8.590278655
6815.350877193	4.2075043814	8.5901682678
7332.92982456	4.2858290451	8.5908226267
7676.368421052	4.2521941541	8.5941942923
7976.052631578	4.2475754424	8.5962877457
9534.754385964	4.2117179325	8.6003945486
11236.754385964	4.2944709531	8.6157294793

мы получаем следующую интерполяционную формулу для функции $\kappa(P)$ в интервале $8.1638 \cdot 10^6 < P < 8.1666 \cdot 10^6$:

$$\kappa = 2.92 + 10^{-3}\tilde{\kappa}, \tag{13}$$

где

$$\tilde{\kappa} = 4.7658300529 + 2.102225195 \cdot 10^{-4}(T - T_0) - 3.347544609 \cdot 10^{-8}(T - T_0)^2, \tag{14}$$

$$P = 816 \cdot 10^4 + T, \quad T_0 = 4278.298245614.$$

Подставляя в формулы (5), (12), (13) значения простых чисел из банка данных, получим значения функции ξ в целочисленных точках $(N, P(N))$, лежащих в интервале $8.1638 \cdot 10^6 < P < 8.1666 \cdot 10^6$. Эти значения приведены в табл. 5.

Из табл. 1–4 следует очень нетривиальное поведение функции κ даже в области значений P между двумя ближайшими точками, в которых κ обращается в единицу. Имеется очень широкая область, важная для численных расчетов, в которой функция κ имеет плавную огибающую при наличии слабых осцилляций. Данные, приведенные в табл. 2, 3, позволяют получить достаточно хорошую интерполяционную формулу в этой области:

$$\tilde{\kappa} = 2.883826627 - 9.8747968051 \cdot 10^{-3}(\ln(P/\tilde{\kappa}) - 18.892799033) + 1.34071370507 \cdot 10^{-5} \times (\ln(P/\tilde{\kappa}) - 18.892799033)^2, \tag{15}$$

Таблица 5. Значения ξ и κ (N — номер простого числа, P — простое число)

N	P	ξ	κ
550000	8163047	-0.289294796	2.92445623145
550001	8163049	-0.347704066	2.9244568166
550002	8163107	-0.155136627	2.92447367049
550003	8163109	-0.2135527505	2.924474224764
550004	8163121	-0.227172944	2.92447770492
550005	8163131	-0.2497587709	2.92448057862
550006	8163139	-0.28130680031	2.92448287276
550007	8163143	-0.33077031933	2.92448401822
550008	8163191	-0.18326496992	2.92449768021
550009	8163193	-0.241690687923	2.92449824612
550010	8163227	-0.15694272000	2.92450782548
550011	8163241	-0.1616987974	2.924511747435
550012	8163251	-0.1843532127	2.92451454079
550013	8163271	-0.1623029385	2.92452010742
550014	8163283	-0.1760342491	2.9245234345
550015	8163313	-0.1093341666	2.924531710179
550016	8163319	-0.1499013199143	2.92453335807
550017	8163329	-0.172600317414	2.9245360992
550018	8163359	-0.1059799123081	2.92454428245
550019	8163401	$1.41546012621 \cdot 10^{-2}$	2.92455563775
550020	8163427	$6.280542115015 \cdot 10^{-2}$	2.9245626608043
550021	8163457	0.129258533298	2.9245709444
550022	8163473	0.133236916658	2.92457482922
550023	8163479	$9.26148988163 \cdot 10^{-2}$	2.92457641284
550024	8163487	$6.0907749269 \cdot 10^{-2}$	2.92457852059
550025	8163497	$3.8112724199 \cdot 10^{-2}$	2.92458114925
550026	8163503	$-2.517521573681 \cdot 10^{-3}$	2.924582723234
550027	8163539	$9.05388780683 \cdot 10^{-2}$	2.9245921165
550028	8163541	$3.207341553 \cdot 10^{-2}$	2.9245926358
550029	8163557	$3.597497581 \cdot 10^{-2}$	2.9245967806
550030	8163563	$-4.6758427602 \cdot 10^{-3}$	2.92459833049
550031	8163583	$1.7017722726 \cdot 10^{-2}$	2.924603479
550032	8163599	$2.08808701541 \cdot 10^{-2}$	2.924607579
550033	8163607	$-1.08811450877 \cdot 10^{-2}$	2.9246096225
550034	8163613	$-5.1549106935 \cdot 10^{-2}$	2.9246111524
550035	8163629	$-4.7713395122 \cdot 10^{-2}$	2.92461522

Таблица 5. (продолжение)

N	P	ξ	κ
550036	8163637	$-7.948912575 \cdot 10^{-2}$	2.92461724749
550037	8163641	-0.129066461013	2.924618259589
550038	8163647	-0.16974607895	2.92461977572
550039	8163709	$3.8621840882 \cdot 10^{-2}$	2.92463530133
550040	8163713	$-1.097194955 \cdot 10^{-2}$	2.9246362941
550041	8163737	$2.83270265313 \cdot 10^{-2}$	2.9246422285
550042	8163739	$-3.01610440384 \cdot 10^{-2}$	2.9246427213
550043	8163769	$3.5756985394 \cdot 10^{-2}$	2.924650081
550044	8163803	0.119385368367	2.924658349
550045	8163817	0.114168334318	2.9246617313
550046	8163821	$6.4549862555 \cdot 10^{-2}$	2.9246626952
550047	8163823	$6.05220132773 \cdot 10^{-3}$	2.9246631767
550048	8163829	$-3.46898216005 \cdot 10^{-2}$	2.9246646198
550049	8163833	$-8.43110339885 \cdot 10^{-2}$	2.92466558047
550050	8163839	-0.1250564841428	2.92466701947
550051	8163847	-0.156928229725	2.9246689344
550052	8163871	-0.1178130955035	2.924674653
550053	8163917	$1.88269990635 \cdot 10^{-2}$	2.92468550726
550054	8163923	$-2.19472538302 \cdot 10^{-2}$	2.9246869125
550055	8163929	$-6.2723563236 \cdot 10^{-2}$	2.924688315
550056	8163971	$5.60415135045 \cdot 10^{-2}$	2.9246980679
550057	8163983	$4.18300552139 \cdot 10^{-2}$	2.9247008326
550058	8163989	$1.0331726483 \cdot 10^{-3}$	2.92470221137
550059	8163997	$-3.09071589937 \cdot 10^{-2}$	2.9247040459
550060	8164003	$-7.17088403903 \cdot 10^{-2}$	2.924705419
550061	8164027	$-3.28077521019 \cdot 10^{-2}$	2.92471088701
550062	8164031	$-8.2474210274 \cdot 10^{-2}$	2.92471179515
550063	8164033	-0.14099584436	2.92471224858
550064	8164069	$-4.9030238574 \cdot 10^{-2}$	2.92472036443
550065	8164073	$-9.87062938677 \cdot 10^{-2}$	2.92472126083
550066	8164099	$-5.10543058019 \cdot 10^{-2}$	2.92472706136
550067	8164111	$-6.5353559954 \cdot 10^{-2}$	2.92472972326
550068	8164127	$-6.19733337456 \cdot 10^{-2}$	2.92473325746
550069	8164141	$-6.74496536088 \cdot 10^{-2}$	2.92473633583
550070	8164147	-0.10830070674	2.9247376511

Таблица 5. (продолжение)

N	P	ξ	κ
550071	8164159	-0.12263288378	2.92474027445
550072	8164183	$-8.3945836937 \cdot 10^{-2}$	2.9247454922
550073	8164201	$-7.1796186709 \cdot 10^{-2}$	2.9247493802
550074	8164213	$-8.616540604 \cdot 10^{-2}$	2.92475196015
550075	8164217	-0.1358743653	2.924752818
550076	8164249	$-6.1946370214 \cdot 10^{-2}$	2.924759642
550077	8164259	$-8.517693224 \cdot 10^{-2}$	2.92476176066
550078	8164291	$-1.1325784660407 \cdot 10^{-2}$	2.9247684948
550079	8164297	$-5.222826795 \cdot 10^{-2}$	2.9247697499
550080	8164307	$-7.5486266417 \cdot 10^{-2}$	2.9247718362

где $\tilde{\kappa}$ — огибающая функция κ. Формула (15) имеет исключительно широкую область применимости. В частности, из нее следует, что вторая точка, в которой функция κ обращается в единицу, находится при значениях P около

$$P \sim 3.27 \cdot 10^{112}. \tag{16}$$

Это делает возможным сформулировать кластерно-обогатительный подход, позволяющий с высокой скоростью находить простые числа.

В настоящее время показано [6], что на множестве чисел вида $M_n = 2^n - 1$ существует подмножество чисел $\tilde{n}$ такое, что $M_{\tilde{n}}$ есть простое число.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Зависимость величины простого числа от его номера определяется в основном аналитической функцией κ, связанной с дзета-функцией Римана уравнением Эйлера. Показано, что функция κ бесконечное число раз проходит через значение, равное единице. Средняя плотность простых чисел очень слабо зависит от величины P и лишь логарифмически мала по сравнению с единицей. Получено бесконечное число связей для функции κ. Определяющую роль играет условная сходимость рядов в левой части уравнений (4).

Полученные результаты позволяют сформулировать кластерно-обогатительный подход для вычисления простых чисел, резко ускоряющий этот процесс.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **159**, 569 (2021).

2. H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Acad. Press, New York, London (1974).

3. П. Л. Чебышёв, *Об определении числа простых чисел, меньших данной величины* (1848).

4. П. Л. Чебышёв, *О простых числах* (1850).

5. A. Selberg, Ann. Math. **50**, 305 (1949).

6. G. M. Ziegler, Notices Amer. Math. Soc. **51**, 414 (2004).