ЖЭТФ, 2021, том 160, вып. 1 (7), стр. 88–94

УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ И МАГНИТОПОЛЕВАЯ ЗАВИСИМОСТЬ УГЛОВЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ИЗОЛЯТОРЕ СО СВЕРХПРОВОДЯЩИМ СПАРИВАНИЕМ НА ТРЕУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ

А. Д. Федосеев*

Институт физики им. Л. В. Киренского, ФИЦ КНЦ Сибирского отделения Российской академии наук 660036, Красноярск, Россия

Поступила в редакцию 12 января 2021 г.,
после переработки 12 января 2021 г.
Принята к публикации 13 февраля 2021 г.

В последние годы исследования топологических свойств систем были расширены новой концепцией топологических изоляторов и сверхпроводников высокого порядка. В то время как было предложено большое количество моделей двумерных систем на квадратной решетке, в которых могут возникать угловые возбуждения, вопрос о реализации таких возбуждений в сверхпроводящих системах с треугольной кристаллической решеткой остается слабо изучен. В данной работе на примере топологического изолятора в форме треугольника с киральным сверхпроводящим параметром порядка показана возможность реализации угловых возбуждений в C_3-симметричных системах. Несмотря на нетопологический характер, эти возбуждения обладают значениями энергии внутри щели спектра краевых возбуждений первого порядка в широком диапазоне параметров и хорошо локализованы в углах системы. Продемонстрировано наличие бесщелевых угловых возбуждений в системе при определенных значениях параметров. Приложение внешнего магнитного поля в плоскости системы приводит к снятию трехкратного вырождения энергии угловых возбуждений и позволяет с помощью направления магнитного поля управлять положением углового возбуждения с минимальной энергией. В то же время изменение величины магнитного поля позволяет сделать точную подстройку для реализации бесщелевого возбуждения в выбранном угле.

DOI: 10.31857/S0044451021070099

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы исследования топологически нетривиальных систем получили новое направление, связанное с предложенной концепцией топологических изоляторов высокого порядка (ТИВП) [1]. В таких системах щелевым является не только спектр объемных состояний, но и спектр краевых состояний первого порядка (обычных краевых состояний), и при этом возникают краевые состояния на границах более высокого порядка: углов в двумерных системах, а также углов и ребер в трехмерных системах. Следует отметить, что еще до работы [1] была продемонстрирована возможность возникновения локализованных состояний на доменных стенках между областями с разным топологическим индексом, расположенных на открытой границе системы [2, 3].

Особый интерес топологические системы высокого порядка вызывают в связи с возможностью реализации угловых майорановских состояний в двумерных топологических сверхпроводниках высокого порядка (ТСВП) [4, 5], поскольку снимают одну из проблем создания майорановских состояний на практике. Майорановские состояния первого порядка требуют наличия чисто одномерной системы, что сложно реализовать практически, в то время как уширение цепочки приводит к возникновению бесщелевой зоны краевых возбуждений. В таком случае возбуждения с нулевой энергией хоть и остаются отделенными щелью от объемных возбуждений, но уже не отделены от других краевых возбуждений. Кроме того, при уширении одномерной системы характер возбуждений меняется с чисто майорановского на киральный с изменением соотношения

* E-mail: fad@iph.krasn.ru

между длиной и шириной системы [6, 7]. Предсказанные майорановские угловые состояния решают эти проблемы. Во-первых, их энергия лежит в щели спектра как объемных, так и краевых возбуждений. Во-вторых, их локализация строго в углах системы препятствует смене характера, и они остаются майорановскими вне зависимости от соотношения размеров системы.

Дополнительный интерес к ТСВП вызван возможностью менять положение угловых возбуждений варьированием параметров системы [5, 8, 9]. Угловые возбуждения в двумерных системах представляются хорошими кандидатами для осуществления брейдинга, являющегося одним из ключевых требований при создании топологического кубита [10]. Другим возможным практическим применением таких систем является возможность создавать на их основе наноразмерные устройства с управляемыми транспортными характеристиками. Для таких практических применений важна возможность управления угловыми возбуждениями с помощью внешних полей, которая была продемонстрирована в работах [5, 8].

Распространенный подход для получения ТСВП заключается в рассмотрении модели топологического изолятора при учете сверхпроводящего спаривания, выбранного таким образом, чтобы спектр краевых возбуждений первого порядка стал щелевым, а масса Дирака для этих возбуждений имела противоположный знак на соприкасающихся границах [4]. В таком случае углы в системе будут выступать в роли доменных границ, на которых будут возникать краевые возбуждения второго порядка, то есть бесщелевые угловые возбуждения. Этот подход хорошо работает в системах на квадратной кристаллической решетке, для которых предложено множество моделей ТИВП и ТСВП [11–15]. Однако он не применим для C_3-симметричных систем, поскольку в рамках описанного выше метода всегда возникает четное число топологически защищенных угловых состояний [16].

Другой способ формирования угловых состояний был предложен на примере решетки Кагомэ [17–19]. При определенных значениях параметров узлы, находящиеся в углах системы с открытыми граничными условиями в форме треугольника, становятся изолированными от остальной системы, формируя угловые состояния (аналогично краевым состояниям в модели Su-Schrieffer-Heeger или модели Китаева [20]). Эти состояния являются бесщелевыми и возникают во всей области параметров, которая не отделена от особой параметрической точки закрытием щели спектра краевых состояний. По предположению авторов такие состояния топологически защищены обобщенной киральной симметрией [18, 19]. Однако ключевой особенностью рассматриваемых систем являлось отсутствие электрон-дырочной симметрии, а значит, подобный подход не применим для создания ТСВП. Кроме того, выводы о топологической защищенности угловых состояний в решетке Кагомэ впоследствии были оспорены [21, 22]. Более того, авторы работы [21] сделали вывод о невозможности реализации топологически защищенных угловых состояний в C_3-симметричной системе.

В то время как топологически защищенные угловые состояния в системах в форме треугольника, обладающих треугольной кристаллической решеткой, запрещены, эти системы все еще представляют интерес для исследования. Во-первых, существуют и другие проявления нетривиальной топологии помимо возникновения бесщелевых угловых состояний [16]. В частности, для C_3-симметричной системы была продемонстрирована возможность возникновения зарядовой аномалии [23]. Во-вторых, краевые состояния, в том числе бесщелевые, могут возникать в системах, не обеспечивающих их топологическую защищенность. Так, к примеру, краевые состояния были обнаружены в тривиальной фазе одномерной цепочки со спин-орбитальным взаимодействием и сверхпроводимостью s-типа [24, 25], а также экситонного диэлектрика со спин-орбитальным взаимодействием [26]. Краевые возбуждения с нулевой энергией были найдены в тривиальной фазе двумерного топологического изолятора с киральной сверхпроводимостью и 120-градусным магнитным упорядочением [27, 28].

В связи с отсутствием в системах с треугольной решеткой топологически защищенных угловых состояний представляется важным исследование возможности реализации в такой системе угловых возбуждений нетопологического характера, в том числе бесщелевых угловых возбуждений. Данная работа посвящена исследованию условий возникновения угловых возбуждений в двумерном топологическом изоляторе в форме треугольника с киральной сверхпроводимостью на треугольной решетке и их модификации при приложении магнитного поля.

2. МОДЕЛЬ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ИЗОЛЯТОРА С КИРАЛЬНОЙ СВЕРХПРОВОДИМОСТЬЮ НА ТРЕУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ

Аналогично авторам работы [4], рассмотрим двухуровневую модель в приближении сильной свя-

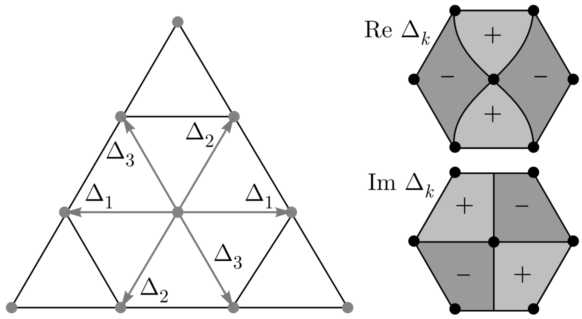

Рис. 1. (В цвете онлайн) Киральное сверхпроводящее спаривание $d+id$-типа на треугольной решетке. Слева: направление сверхпроводящего спаривания Δ_j (2). Справа: знак $\mathrm{Re}\,\Delta_k$ и $\mathrm{Im}\,\Delta_k$ [29]. Точками обозначены нодальные точки Δ_k (3)

зи при учете гибридизации, индуцированной спин-орбитальным взаимодействием Рашбы, и сверхпроводящего синглетного спаривания на соседних узлах:

$$
\begin{aligned}
&\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{T} + \hat{H}_{so} + \hat{H}_{sc},\\
&\hat{H}_0 = \sum_{f\nu\sigma} (\nu\Delta\varepsilon - \mu)\, c^{\dagger}_{f\nu\sigma} c_{f\nu\sigma},\\
&\hat{T} = t \sum_{\langle fm\rangle \nu\sigma} \nu c^{\dagger}_{f\nu\sigma} c_{m\nu\sigma},\\
&\hat{H}_{so} = i\lambda \sum_{\langle fm\rangle \nu\sigma\sigma'} \left[\boldsymbol{\sigma}_{\sigma\sigma'} \times \mathbf{d}_{fm}\right]_z c^{\dagger}_{f\nu\sigma} c_{m,-\nu,\sigma'},\\
&\hat{H}_{sc} = \sum_{\langle fm\rangle \nu} \Delta_{fm} c^{\dagger}_{f\nu\uparrow} c^{\dagger}_{m\nu\downarrow} + \mathrm{h.c.}
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Здесь сумма по f обозначает суммирование по узлам решетки, $\langle fm\rangle$ отвечает суммированию по ближайшим соседям, $\mathbf{d}_{fm}$ — единичный вектор вдоль направления от узла m к узлу f, μ — химический потенциал системы, $2\Delta\varepsilon$ — разница посадочных энергий в двух подзонах, t — параметр перескока между ближайшими соседями, λ — параметр спин-орбитального взаимодействия, σ_j — матрицы Паули в спиновом пространстве, $c^{\dagger}_{f\nu\sigma}$ — операторы рождения электрона на узле f в разных подзонах, обозначенных индексом $\nu = \pm 1$.

Будем рассматривать случай кирального сверхпроводящего синглетного спаривания между электронами на ближайших узлах, соответствующего симметрии треугольной решетки (рис. 1):

$$
\Delta_{fm} = \Delta_j = \Delta_1 e^{2\pi i (j-1)/3}, \quad j = 1, 2, 3. \qquad (2)
$$

Спектр объемных возбуждений рассматриваемой системы имеет вид

$$
E_k = \sqrt{|\Delta_k|^2 + \left(\mu - E_k^{TI}\right)^2}, \qquad (3)
$$

где E_k^{TI} обозначает спектр объемных состояний в топологическом изоляторе:

$$
\begin{aligned}
&E_k^{TI} = \pm\sqrt{|t_k|^2 + |\lambda_{k\sigma}|^2},\\
&t_k = \Delta\varepsilon - 2t + 4t\cos\frac{k_x}{2}\left(\cos\frac{k_x}{2} + \cos\frac{k_y\sqrt{3}}{2}\right),\\
&\lambda_{k\sigma} = 2i\lambda\sigma\sin\frac{k_x}{2}\left(2\cos\frac{k_x}{2} + \cos\frac{k_y\sqrt{3}}{2}\right) -\\
&\qquad\qquad - 2\sqrt{3}\lambda\sin\frac{k_y\sqrt{3}}{2}\cos\frac{k_x}{2},
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

а Δ_k — сверхпроводящее спаривание, имеющее двумерное представление

$$
\begin{aligned}
\Delta_k = 2\Delta_1 &\left(\cos k_x - \cos\frac{k_x}{2}\cos\frac{k_y\sqrt{3}}{2}\right) -\\
&- 2i\sqrt{3}\Delta_1 \sin\frac{k_x}{2}\sin\frac{k_y\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Поскольку Δ_k имеет двумерное представление, оно обладает не нодальными линиями, как в работе [4], а нодальными точками, как и спин-орбитальное взаимодействие.

В отсутствие сверхпроводящего спаривания, гамильтониан (1) описывает двумерный киральный топологический изолятор, характеризующийся спиновым числом Черна [30]:

$$
\begin{aligned}
&C_s = 1, \quad -6t < \Delta\varepsilon < 2t,\\
&C_s = 2, \quad 2t < \Delta\varepsilon < 3t.
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

При отсутствии гибридизации между подзонами рассматриваемая система является топологическим сверхпроводником [31, 32] с числами Черна, противоположными для верхней и нижней подзон:

$$
C_\nu = 2\nu, \quad -3t + \Delta\varepsilon < \nu\mu < 6t + \Delta\varepsilon. \qquad (7)
$$

Следует отметить, что поскольку числа Черна имеют противоположный знак, на пересечении нетривиальных областей для верхней и нижней подзон полное число Черна системы C = 0. Это делает систему чувствительной к гибридизации между подзонами.

При одновременном учете кирального сверхпроводящего спаривания и спин-орбитального взаимодействия диаграмма топологических фаз остается практически той же, что и в отсутствие спин-орбитального взаимодействия. Тривиальные области с $C_{\pm 1} = 0$ остаются тривиальными, а области, в которых только одно из чисел Черна $C_{\pm 1} \neq 0$, в то

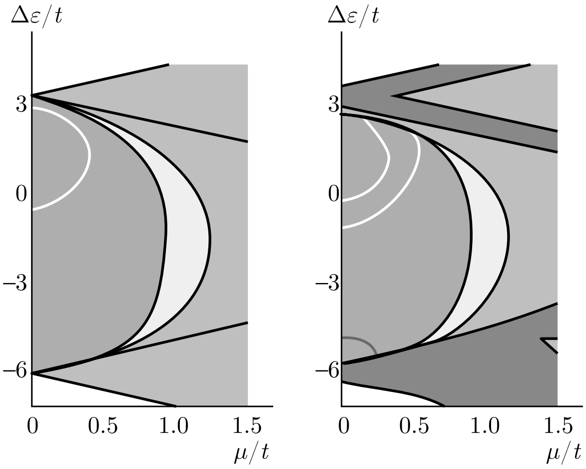

Рис. 2. (В цвете онлайн) Диаграмма параметров топологического изолятора в форме треугольника с киральной сверхпроводимостью на треугольной решетке. Слева: в отсутствие магнитного поля, справа: при наличии магнитного поля в плоскости $h = 0.3$, $\phi_h = \pi/2$. Красные области соответствуют наличию бесщелевых краевых возбуждений первого порядка, фиолетовые — объемных бесщелевых возбуждений. Синим обозначены области параметров, при которых в системе возникают угловые возбуждения со значением энергии, лежащим внутри щели спектра краевых возбуждений. Желтым — области параметров, при которых спектр краевых возбуждений щелевой, однако угловые возбуждения с энергией внутри щели отсутствуют. Белая линия соответствует параметрам, при которых возникают бесщелевые угловые возбуждения, синяя линия — параметрам, при которых закрывается щель спектра краевых возбуждений в магнитном поле. Параметр спин-орбитального взаимодействия $\lambda = 0.5t$, сверхпроводящего спаривания $\Delta_1/t = 0.5$

время как второе $C_{\mp 1} = 0$, остаются топологически нетривиальными. Обе эти области не представляют интереса для поиска угловых возбуждений. Область же, в которой оба числа Черна $C_{\pm 1}$ были отличны от нуля, формирует топологическую фазу с числом Черна $C = 0$, которая более не содержит топологически защищенных краевых возбуждений. Однако в ее границах все еще возможна реализация как краевых возбуждений нетопологического характера, в том числе бесщелевых, так и угловых возбуждений. Таким образом, именно эта область будет исследоваться в дальнейшем.

3. УГЛОВЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В СИСТЕМЕ В ФОРМЕ ТРЕУГОЛЬНИКА

Результаты численных расчетов спектра одноэлектронных возбуждений топологического изолятора в форме треугольника с киральной сверхпроводимостью продемонстрировали, что в интересующей области в зависимости от значений параметров реализуются три ситуации (рис. 2 слева). В значительной части рассматриваемой области, хотя она и является топологически тривиальной, в системе возникают бесщелевые краевые возбуждения первого порядка. Другая часть области отвечает наличию угловых возбуждений нетопологического характера с энергией внутри щели спектра краевых возбуждений. Энергия таких возбуждений трехкратно вырождена ввиду эквивалентности углов в системе. Третий случай соответствует наличию в системе щели в спектре краевых возбуждений первого порядка, однако угловые возбуждения с энергией внутри щели в системе отсутствуют.

В одномерных системах существует взаимное соответствие между энергией краевых состояний и характером этого состояния. Если энергия состояния находится внутри щели объемного спектра, то состояние краевое, а если внутри значений спектра разрешенных объемных состояний, то состояние является объемным. В двумерных системах это соответствие работает только в одну сторону. Если энергия состояния находится внутри абсолютной щели спектра объемных состояний, то такое состояние по-прежнему является краевым. Однако обратное, вообще говоря, не верно. То же самое относится и к угловым возбуждениям в двумерных системах. Поэтому для определения характера состояний в двумерных случаях полезно рассчитать параметр IPR (inverse participation ratio) [33,34], характеризующей степень локализации состояния, который хорошо зарекомендовал себя для обнаружения краевых состояний в топологических изоляторах [35]:

$$I_q(m) = \frac{\sum_f (A_m(f))^q}{\left(\sum_f A_m(f)\right)^q}. \quad (8)$$

Здесь $A_m(f)$ — амплитуда возбуждения с номером m на узле f, $q > 1$. Параметр I_q является относительно большим для локализованных состояний ($I_q = 1$ для состояния, локализованного на одном узле), и имеет порядок $1/V^{q-1}$ для делокализованного состояния в системе с числом узлов V.

На рис. 3 представлена зависимость величины I_4 от химпотенциала μ для различных собственных возбуждений в системе. Как можно видеть, возбуждения, характеризующиеся минимальной энергией при $\mu = 0$, остаются хорошо локализованными в углах треугольника, даже когда их энергия оказывается за пределами щели спектра краевых возбужде-

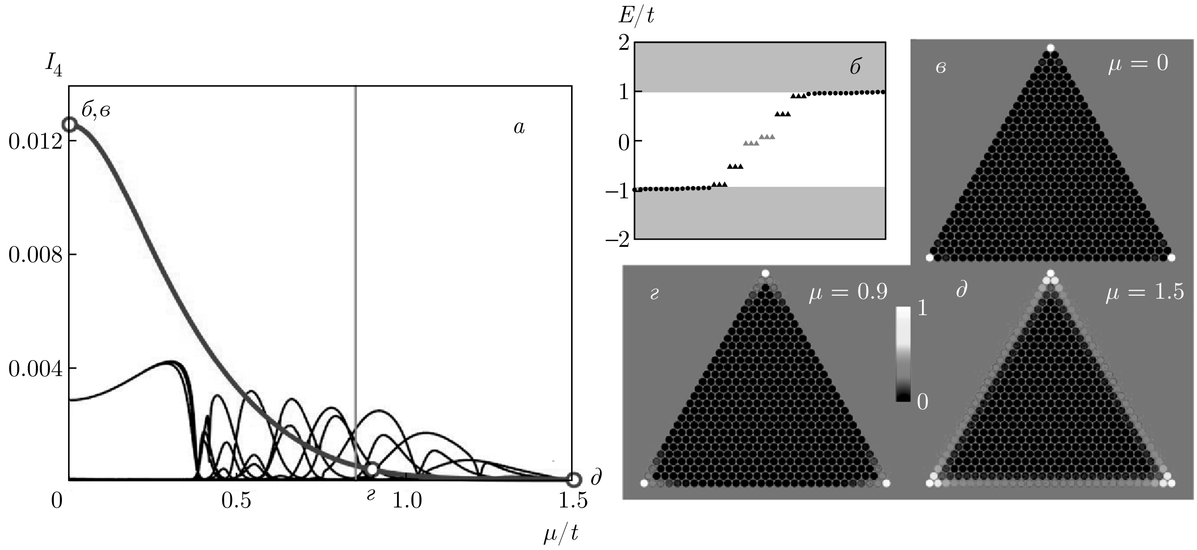

Рис. 3. (В цвете онлайн) *а*) Зависимость I_4 (8) для собственных возбуждений в топологическом изоляторе в форме треугольника с киральной сверхпроводимостью от величины химического потенциала. Синяя линия отвечает угловым возбуждениям с минимальной энергией, красная линия обозначает величину химического потенциала μ, при котором энергия угловых возбуждений пересекает границу зоны краевых возбуждений. *б*) Спектр системы при $\mu = 0$. Точками обозначены энергии краевых возбуждений, треугольниками — угловых, серые области обозначают зону краевых состояний. *в–д*) Пространственное распределение угловых возбуждений при различных значениях химического потенциала, отмеченных точками на *а*: при $\mu = 0$ это угловое возбуждение с энергией внутри щели спектра краевых возбуждений, при $\mu = 0.9t$ это угловое возбуждение с энергией внутри зоны краевых состояний, при $\mu = 1.5t$ возбуждение является краевым с тенденцией к локализации в углах системы. Параметры системы: $\Delta_1/t = 0.6$, $\Delta\varepsilon = 0$, $\lambda/t = 0.5$

ний в рассматриваемой системе (рис. 3*г*). Небольшие пики I_4 возникают из-за тенденции краевых возбуждений первого порядка с энергиями в глубине щели спектра объемных возбуждений к локализации в углах ограниченных систем [36]. Подобные возбуждения можно легко отличить от угловых возбуждений, изменяя размер системы. Поскольку краевые возбуждения даже при наличии тенденции к локализации в углах распределены по всей границе системы, то их значения IPR уменьшаются с увеличением размеров системы, в то время как значения IPR для угловых состояний остаются неизменными.

При определенных значениях параметров, формирующих линию на диаграмме параметров, в системе возможна реализация угловых возбуждений с нулевой энергией (рис. 2 слева). Эти линии нулевых мод не являются размерным эффектом в отличие от ситуаций, рассмотренных в работах [25,37,38]. Наличие в системе беспорядка не влияет на возможность реализации в ней нулевых угловых возбуждений, однако конкретные значения параметров, при которых такие возбуждения возникают, оказались очень чувствительны к беспорядку непосредственно в углах системы.

4. ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ УГЛОВЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ

Рассмотрим влияние однородного магнитного поля, направленного в плоскости системы, на особенности реализации угловых состояний в треугольном топологическом изоляторе с киральной сверхпроводимостью на треугольной решетке:

$$\hat{H}_h = -\sum_{f\nu\sigma\sigma'} \mathbf{h}\boldsymbol{\sigma}_{\sigma\sigma'} c^{\dagger}_{f\nu\sigma} c_{f\nu\sigma'}, \qquad \mathbf{h} = h\left(\cos\phi_h,\ \sin\phi_h,\ 0\right). \tag{9}$$

Наличие магнитного поля приводит к изменению описанной в предыдущем параграфе диаграммы параметров (рис. 2 справа). Так, спектр объемных возбуждений теперь закрывается не на линиях, а в области параметров. Также внутри области параметров, соответствующих реализации угловых возбуждений, возникает линия параметров, отвечающая закрытию щели в спектре краевых возбуждений первого порядка. Линия реализации бесщелевых угловых мод при приложении магнитного поля расщепляется на две. Однако сами области реали-

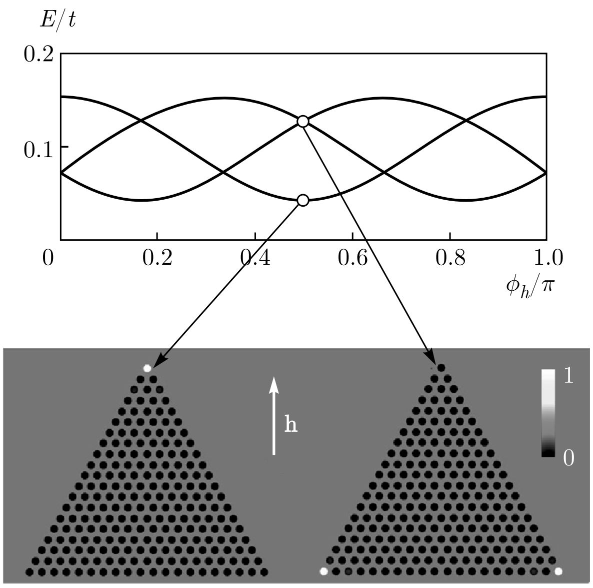

Рис. 4. (В цвете онлайн) Сверху: зависимость энергии угловых возбуждений от направления магнитного поля $h = 0.3t$, направленного в плоскости системы. Снизу: пространственное распределение двух возбуждений с минимальной энергией при $\phi_h = \pi/2$

зации угловых возбуждений остаются практически без изменений.

Поскольку в рассматриваемой системе вследствие наличия спин-орбитального взаимодействия существует связь между спиновыми и пространственными степенями свободы, включение магнитного поля, направленного в плоскости системы, приводит к разрушению пространственной симметрии и делает углы неэквивалентными. При этом энергия возбуждений становится зависящей не только от величины, но и от направления магнитного поля (рис. 4). Так, экстремальным значением энергии обладает возбуждение, находящееся в том углу, направление на который из центра треугольника совпадает с направлением магнитного поля. Таким образом, с помощью магнитного поля можно осуществить не только точную подстройку системы для получения углового возбуждения с нулевой энергией, но и определить, в каком именно углу будет возникать это возбуждение.

Поскольку полученные в магнитном поле возбуждения имеют нетопологический характер и не могут быть представлены в виде двух разнесенных майорановских операторов, такая система не может быть использована для реализации брейдинга. Однако она все еще может быть полезна для реализации устройства, транспортом через которое можно управлять с помощью магнитного поля.

5. ВЫВОДЫ

На примере двумерного топологического изолятора в форме треугольника с киральной сверхпроводимостью на треугольной решетке была продемонстрирована возможность реализации угловых возбуждений в C_3-симметричных системах. Было показано, что угловые возбуждения в такой системе могут обладать энергиями как внутри щели спектра краевых возбуждений первого порядка, так и за ее пределами. При определенных значениях параметров, формирующих линию на диаграмме параметров, угловые возбуждения являются бесщелевыми. Включение магнитного поля в системе снимает вырождение угловых возбуждений, при этом энергия угловых возбуждений зависит как от величины магнитного поля так и от его направления в плоскости системы. Это позволяет не только провести точную подстройку для получения углового возбуждения с нулевой энергией, но и выбрать угол, в котором это угловое возбуждение будет реализовываться.

Благодарности. Автор выражает благодарность Д. М. Дзебисашвили, В. А. Мицкану, М. С. Шустину, М. М. Коровушкину и С. В. Аксенову за многочисленные дискуссии и внимание к работе.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-02-00348), Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности в рамках научного проекта № 20-42-243005 «Изучение краевых состояний в одно- и двумерных топологических сверхпроводниках», № 19-42-240011 «Кулоновские взаимодействия в проблеме реализации майорановских мод в низкоразмерных системах с нетривиальной топологией», а также гранта Президента РФ МК-1641.2020.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. A. Benalcazar, B. A. Bernevig, and T. L. Hughes, Science **357**, 61 (2017).
2. G. E. Volovik, Письма в ЖЭТФ **91**, 201 (2010).
3. F. Zhang, C. L. Kane, and E. J. Mele, Phys. Rev. Lett. **110**, 046404 (2013).
4. Q. Wang, C.-C. Liu, Yu.-M. Lu, and F. Zhang, Phys. Rev. Lett. **121**, 186801 (2018).

5. X. Zhu, Phys. Rev. B **97**, 205134 (2018).

6. A. C. Potter and P. A. Lee, Phys. Rev. Lett. **105**, 227003 (2010).

7. N. Sedlmayr, J. M. Aguiar-Hualde, and C. Bena, Phys. Rev. B **93**, 155425 (2016).

8. T. E. Pahomi, M. Sigrist, and A. A. Sluyanov, Phys. Rev. Res. **2**, 032068(R) (2020).

9. S.-B. Zhang, A. Calzona, and B. Trauzettel, Phys. Rev. B **102**, 100503(R) (2020).

10. C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S. D. Sarma, Rev. Mod. Phys. **80**, 1083 (2008).

11. A. Yoshida, Y. Otaki, R. Otaki, and T. Fukui, Phys. Rev. B **100**, 125125 (2019).

12. J. Zou, Zh. He, and G. Xu, Phys. Rev. B **100**, 235137 (2019).

13. Q.-B. Zeng, Y.-B. Yang, and Y. Xu, Phys. Rev. B **101**, 241104(R) (2020).

14. K. Asaga and T. Fukui, Phys. Rev. B **102**, 115102 (2020).

15. S.-B. Zhang, W. B. Rui, A. Calzona, S.-J. Choi, A. P. Schnyder, and B. Trauzettel, Phys. Rev. Res. **2**, 043025 (2020).

16. E. Khalaf, W. A. Benalcazar, T. L. Hughes, and R. Queiroz, arXiv:1908.00011 (2019).

17. M. Ezawa, Phys. Rev. Lett. **120**, 026801 (2018).

18. X. Ni, M. Weiner, A. Alu, and B. Khanikaev, Nature Mater. **18**, 113 (2019).

19. S. N. Kempkes, M. R. Slot, J. J. van den Broeke, P. Capoid, W. A. Benalcazar, D. Vanmaekelbergh, D. Cercioux, I. Swart, and C. M. Smith, Nature Mater. **18**, 1292 (2019).

20. A. Yu. Kitaev, Phys. Usp. **44** (suppl), 131 (2001).

21. G. van Miert and C. Ortix, Quantum Mater. **5**, 63 (2020).

22. M. Jung, Y. Yu, and G. Shvets, arXiv:2010.10299 (2020).

23. W. A. Benalcazar, T. Li, and T. L. Hughes, Phys. Rev. B **99**, 245151 (2019).

24. M. Serina, D. Loss, and J. Klinovaja, Phys. Rev. B **98**, 035419 (2018).

25. А. Д. Федосеев, ЖЭТФ **155**, 138 (2019).

26. В. В. Вальков, Письма в ЖЭТФ **111**, 772 (2020).

27. V. V. Val'kov, A. O. Zlotnikov, A. D. Fedoseev, and M. S. Shustin, J. Magn. Magn. Mat. **440**, 37 (2017).

28. V. V. Val'kov, A. O. Zlotnikov, and M. S. Shustin, J. Magn. Magn. Mat. **459**, 112 (2018).

29. A. M. Black-Schaffer and C. Honerkamp, J. Phys.: Condens. Matter **26**, 423201 (2014).

30. M. Ezawa, Eur. Phys. J. B **85**, 363 (2012).

31. T. Senthil, J. B. Marston, and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. B **60**, 4245 (1999).

32. T. Chern, AIP Adv. **6**, 085211 (2016).

33. D. J. Thouless, Phys. Rep. **13**, 93 (1974).

34. N. C. Murphy, R. Wortis, and W. A. Atkinson, Phys. Rev. B **83**, 184206 (2011).

35. M. Calixto and E. Romera, J. Stat. Mech. **2015**, 06029 (2015).

36. A. D. Fedoseev, J. Phys.: Condens. Matter **32**, 215301 (2020).

37. В. В. Вальков, В. А. Мицкан, М. С. Шустин, Письма в ЖЭТФ **106**, 762 (2017).

38. В. В. Вальков, В. А. Мицкан, М. С. Шустин, ЖЭТФ **156**, 507 (2019).