

# ДИФРАКЦИОННАЯ СТРУКТУРА КВАНТОВЫХ ФАНТОМНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

*Д. А. Балакин<sup>\*</sup>, А. В. Белинский<sup>\*\*</sup>*

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет  
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 7 февраля 2021 г.,  
после переработки 17 февраля 2021 г.  
Принята к публикации 24 февраля 2021 г.

Рассмотрено влияние дифракции, обусловленное конечной шириной накачки, освещающей нелинейный кристалл, в котором происходит параметрическое рассеяние, на пространственное разрешение фантомных изображений. Даны необходимые формальные соотношения, предложен алгоритм расчета и проведено численное моделирование, учитывающее влияние этого искажающего фактора на качество фантомных изображений.

DOI: 10.31857/S004445102107004X

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Открытие и реализация параметрического рассеяния света, в ходе которого рождаются жестко коррелированные пары фотонов, породило множество новых направлений современной квантовой физики и квантовой нелинейной оптики [1–6]. Спектр этих новшеств необычайно широк: от фундаментальнейших вопросов квантовой теории, например, экспериментальной проверки теоремы Белла [7–15], до чисто прикладных задач, связанных, например, с безэталонной калибровкой фотоприемников в режиме счета фотонов [16].

В свое время значительную часть оптических приложений параметрического рассеяния было предложено называть двухфотонной оптикой [17]. Дело в том, что «обычные» изображения формируются и регистрируются обычной прямой фиксацией одиночных фотонов или их групп. В двухфотонной же оптике информативными являются только одновременно регистрируемые коррелированные фотонные пары. Это дает целый ряд преимуществ, связанных с запутанностью фотонов пары, например, в подавлении шума и др. Примером такого рода являются изображения, позже названные фантомными потому, что они появляются не в

объектном канале, в котором происходит освещение регистрируемого объекта, а в сопряженном канале [18]. Корреляция носителей света в этих каналах позволяет восстанавливать изображение объекта.

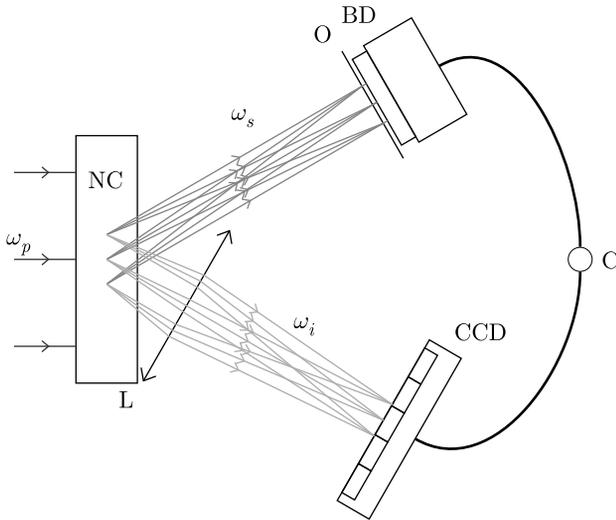
В настоящее время известно много разновидностей схем формирования фантомных изображений [18–25], но почти всегда наиболее весомым фактором, ограничивающим их пространственное разрешение, является дифракция [26–28]. Приближенные оценки ее влияния рассмотрены в работах [26, 28], но строгого решения задачи до сих пор не существует. Мы попытались восполнить этот недостаток прямым аналитическим и численным моделированием процесса формирования квантовых фантомных изображений с помощью трехфотонного параметрического рассеяния света. В идеале, имея характерный объект регистрации и основные параметры нелинейно-оптической системы, хотелось бы получать моделируемое изображение и оценивать его качество, не тратя время и средства на натуральный эксперимент. Этому и посвящена настоящая работа.

## 2. ОПТИЧЕСКАЯ СХЕМА

Для формирования фантомных изображений необходим источник коррелированных световых пучков, один из которых взаимодействует с объектом, а другой — нет, см. рис. 1. При формировании квантовых фантомных изображений для этого, как

<sup>\*</sup> E-mail: balakin\_d\_a@physics.msu.ru

<sup>\*\*</sup> E-mail: belinsky@inbox.ru



**Рис. 1.** Формирование квантового фантомного изображения. NC — нелинейный кристалл,  $\omega_p$  — луч накачки,  $\omega_s$  и  $\omega_i$  — лучи запутанных фотонов (которые расходятся вследствие использования неколлинеарного параметрического рассеяния), O — исследуемый объект, BD — собирающий детектор в объектном канале, L — линза, CCD — матрица датчиков в восстанавливающем канале, C — коррелятор интенсивностей (схема совпадений)

правило, используются параметрические процессы преобразования фотонов накачки в нелинейном кристалле. При этом в объектном канале детектор дает информацию только о полной интенсивности прошедшего излучения. Фотоны, направленные в восстанавливающий канал, не взаимодействуют с объектом, но регистрируются матрицей фотодетекторов, при помощи выходного сигнала которой определяется пространственная корреляционная функция интенсивности между двумя каналами.

Одним из важных доводов в пользу использования квантовых фантомных изображений является создание максимально щадящих условий освещения исследуемого объекта, когда воздействие излучения на объект (иногда необратимое) минимально [19].

Качество изображения — его пространственное разрешение с учетом уровня шумов — является основной характеристикой практически любой оптической системы. В квантовых фантомных изображениях ему в последнее время уделяется значительное внимание, что обусловлено не только существенными пробелами в теории, но и неудовлетворительным пространственным разрешением, достигнутым в экспериментах. При этом основной ограничитель пространственного разрешения — дифракция.

### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФРАКЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ КВАНТОВЫХ ФАНТОМНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Для изучения влияния дифракции на формирование фантомного изображения вначале рассмотрим параметрическое рассеяние фотонов накачки в нелинейном кристалле. Будем считать, что накачка неистощима, а частоты сигнальных и холостых фотонов одинаковы.

Для получения системы уравнений, моделирующих параметрическое рассеяние фотонов накачки в нелинейном кристалле, рассмотрим оператор импульса электромагнитного поля, аналогичный рассмотренному в [29]:

$$\hat{G} = \hbar \int d\mathbf{r}' \left( -igA_p(\mathbf{r}')\hat{A}_s^\dagger(\mathbf{r}', z)\hat{A}_i^\dagger(\mathbf{r}', z) + \text{H.c.} + \frac{1}{2k} \sum_{j=i,s} \frac{\partial \hat{A}_j^\dagger(\mathbf{r}', z)}{\partial \mathbf{r}'} \frac{\partial \hat{A}_j(\mathbf{r}', z)}{\partial \mathbf{r}'} \right), \quad (1)$$

где параметр  $g$  определяется оптической нелинейностью среды,  $A_p(\cdot)$  — пространственное распределение амплитуды накачки,  $k$  — волновое число рождающихся фотонов.

В работах [30,31] был предложен формализм оператора импульса и отмечено, что хотя при изучении временной эволюции квантовой системы удобнее работать с гамильтонианом, при изучении свойств системы, связанных с распространением частиц вдоль оси  $z$  с фиксированной по модулю скоростью, предпочтительно использование оператора импульса. Позднее этот прием был успешно использован авторами статьи [29] для моделирования распространения света в нелинейном многослойном фотонном кристалле. В рассматриваемом случае уравнения эволюции имеют вид

$$i\hbar \frac{\partial \hat{A}_{s,i}(\mathbf{r}_\perp, z)}{\partial z} = [\hat{G}, \hat{A}_{s,i}(\mathbf{r}_\perp, z)], \quad (2)$$

где  $\hat{A}_{s,i}$  — полевые операторы сигнальных ( $s$ ) и холостых ( $i$ ) фотонов, направление оси  $z$  совпадает с направлением распространения фотонов, вектор  $\mathbf{r}_\perp$  перпендикулярен ему. Операторы  $\hat{A}_{s,i}(\mathbf{r}_\perp, z)$  и  $\hat{A}_{s,i}^\dagger(\mathbf{r}_\perp, z)$  удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [\hat{A}_j^\dagger(\mathbf{r}_\perp, z), \hat{A}_k(\mathbf{r}'_\perp, z)] &= -\delta_{jk}\delta(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp), \\ [\hat{A}_j(\mathbf{r}_\perp, z), \hat{A}_k(\mathbf{r}'_\perp, z)] &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $j, k \in \{s, i\}$ . Заметим, что обычно при изучении в картине Гейзенберга распространения квантовых

частиц решается уравнение Гейзенберга для соответствующих полевых операторов при фиксированном волновом векторе, после чего пространственная координата вдоль направления распространения и время связываются через скорость распространения. Тем самым частота частицы и ее волновой вектор оказываются связанными. Напротив, при использовании оператора импульса и уравнений (2) рассматриваются полевые операторы при фиксированной частоте и заданном направлении распространения [31]. Таким образом, моды с определенным волновым числом  $k$  (например,  $\exp(-ikz)$ ) заменяются на моды с определенной частотой  $\omega$  (например,  $\exp(-i\omega t)$ ), распространяющиеся в заданном направлении. Подстановкой оператора импульса (1) в уравнения эволюции (2) и последующим использованием коммутационных соотношений получаем, что в указанном приближении нелинейный процесс описывается следующей системой уравнений в частных производных, см., например, [32–36]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k}\Delta_{\perp}\right)\hat{A}_s(\mathbf{r}_{\perp}, z) = gA_p(\mathbf{r}_{\perp})\hat{A}_i^{\dagger}(\mathbf{r}_{\perp}, z), \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k}\Delta_{\perp}\right)\hat{A}_i(\mathbf{r}_{\perp}, z) = gA_p(\mathbf{r}_{\perp})\hat{A}_s^{\dagger}(\mathbf{r}_{\perp}, z),$$

$$0 \leq z \leq l, \quad \hat{A}_{s,i}(\mathbf{r}_{\perp}, 0) = A_{s,i}^{(in)}(\mathbf{r}_{\perp}),$$

где  $l$  — толщина кристалла,  $\Delta_{\perp}$  — поперечный лапласиан. Для простоты мы рассматриваем коллинеарный процесс. Дело в том, что при втором типе параметрического рассеяния сигнальный и холостой пучки не вырождены по поляризации, поэтому их можно разделить поляризационной призмой даже в случае коллинеарного процесса.

Отметим также, что система уравнений (4) аналогична соответствующей системе для комплексных амплитуд в классическом описании. Линейность уравнений позволяет заменить комплексные амплитуды полей соответствующими операторами в представлении Гейзенберга благодаря отсутствию в системе произведений операторов, вследствие чего некоммутативность операторов не влияет на результат.

В силу малой толщины кристалла по сравнению с длиной пути света от кристалла до детекторов для упрощения системы уравнений (4) можно пренебречь дифракцией в кристалле, т. е. решать систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\hat{A}_s(\mathbf{r}_{\perp}, z) &= gA_p(\mathbf{r}_{\perp})\hat{A}_i^{\dagger}(\mathbf{r}_{\perp}, z), \\ \frac{\partial}{\partial z}\hat{A}_i(\mathbf{r}_{\perp}, z) &= gA_p(\mathbf{r}_{\perp})\hat{A}_s^{\dagger}(\mathbf{r}_{\perp}, z), \end{aligned} \quad 0 \leq z \leq l. \quad (5)$$

Обозначим полевые операторы на выходе кристалла  $\hat{A}_{s,i}^{(out)}(\mathbf{r}_{\perp})$ . В силу (5) они равны

$$\begin{aligned} \hat{A}_{s,i}^{(out)}(\mathbf{r}_{\perp}) &= \hat{A}_{s,i}^{(in)}(\mathbf{r}_{\perp}) \operatorname{ch}(|gA_p(\mathbf{r}_{\perp})|l) + \\ &+ \hat{A}_{i,s}^{(in)\dagger}(\mathbf{r}_{\perp}) \frac{gA_p(\mathbf{r}_{\perp})}{|gA_p(\mathbf{r}_{\perp})|} \operatorname{sh}(|gA_p(\mathbf{r}_{\perp})|l). \end{aligned} \quad (6)$$

Как показано в [18], корреляционная функция флуктуаций интенсивности в каналах равна

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}'_{\perp}, \mathbf{r}_{\perp}) &= \left| \int d\mathbf{r}''_{\perp} d\mathbf{r}'''_{\perp} h_1(\mathbf{r}'_{\perp}, \mathbf{r}''_{\perp}) h_2(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{r}'''_{\perp}) \times \right. \\ &\quad \left. \times \langle A_s^{(out)}(\mathbf{r}''_{\perp}) A_i^{(out)}(\mathbf{r}'''_{\perp}) \rangle \right|^2, \end{aligned} \quad (7)$$

где усреднение выполняется при вакуумном состоянии полей на входе в кристалл, а  $h_1$  и  $h_2$  — передаточные функции каналов. Для получения формируемого изображения функцию (7) далее необходимо проинтегрировать по  $\mathbf{r}'_{\perp}$ , поскольку собирающий детектор в объектном канале регистрирует весь световой пучок и не обладает пространственным разрешением.

Пусть в объектном канале объект, описываемый амплитудным коэффициентом пропускания  $T(\mathbf{r}_{\perp})$ , находится на расстоянии  $s_s$  от кристалла и сразу за ним расположен собирающий детектор, тогда в приближении Френеля (§ 32 в [37])

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{r}'_{\perp}, \mathbf{r}''_{\perp}) &= \frac{k}{2\pi i} \frac{\exp(iks_s)}{s_s} T(\mathbf{r}'_{\perp}) \times \\ &\quad \times \exp\left(\frac{ik(\|\mathbf{r}'_{\perp} - \mathbf{r}''_{\perp}\|^2)}{2s_s}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Если в восстанавливающем канале нет линз, а матрица датчиков расположена на расстоянии  $s$  от кристалла, то в приближении Френеля

$$\begin{aligned} h_2(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{r}'''_{\perp}) &= \frac{k}{2\pi i} \frac{\exp(iks)}{s} \times \\ &\quad \times \exp\left(\frac{ik(\|\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}'''_{\perp}\|^2)}{2s}\right), \end{aligned} \quad (9)$$

а если в восстанавливающий канал помещена тонкая линза с фокусным расстоянием  $f = s/2$  (например, линза находится на расстояниях  $2f$  от матрицы датчиков и от объекта вдоль осей каналов), то в приближении Френеля (§ 35 в [37])

$$\begin{aligned} h_2(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{r}'''_{\perp}) &= \frac{k}{2\pi i} \frac{\exp(iks)}{s} \exp\left(\frac{ik(\|\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}'''_{\perp}\|^2)}{2s}\right) \times \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{ik\|\mathbf{r}'''_{\perp}\|^2}{2f}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

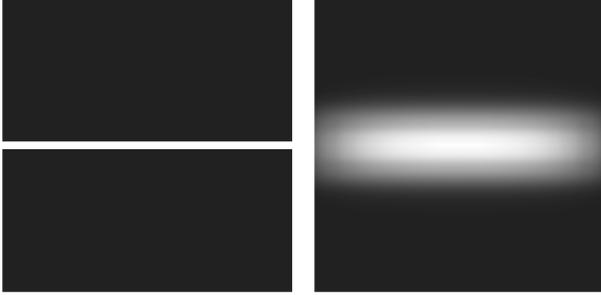


Рис. 2. Моделирование формирования квантовых фантомных изображений согласно формуле (12). Размер изображений  $6 \times 6$  мм. Слева — распределение прозрачности объекта  $T(\cdot)$  (щель шириной 0.16 мм), справа — корреляционная функция  $G(\cdot)$

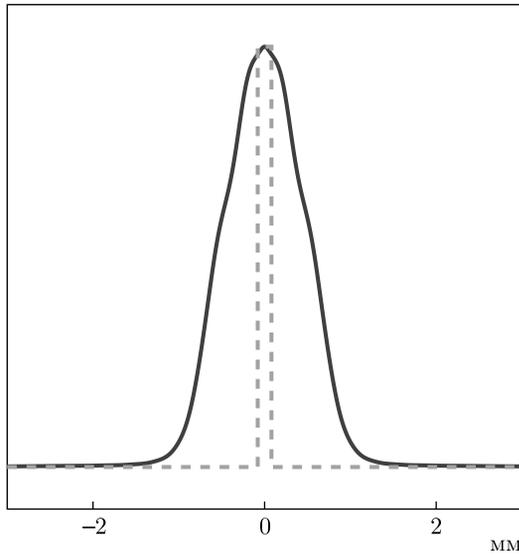


Рис. 3. Профиль изображения щели на рис. 2, ср. с рис. 5 из [38], (сплошная линия) и профиль распределения прозрачностей самой щели (штриховая)

С учетом (6)

$$\langle A_s^{(out)}(\mathbf{r}_\perp'') A_i^{(out)}(\mathbf{r}_\perp''') \rangle = \text{ch}(|gA_p(\mathbf{r}_\perp'')|l) \times \frac{gA_p(\mathbf{r}_\perp''')}{|gA_p(\mathbf{r}_\perp''')|} \text{sh}(|gA_p(\mathbf{r}_\perp''')|l) \delta(\mathbf{r}_\perp'' - \mathbf{r}_\perp'''). \quad (11)$$

Таким образом, при  $s = s_s$  формируемое фантомное изображение в случае конфигурации восстанавливающего канала, охарактеризованной передаточной функцией (10), описывается функцией

$$G(\mathbf{r}_\perp) = \frac{k^4}{16\pi^4 s^4} \int d\mathbf{r}'_\perp |T(\mathbf{r}'_\perp)|^2 \left| \int d\mathbf{r}''_\perp \times \exp\left(\frac{ik(\|\mathbf{r}'_\perp - \mathbf{r}''_\perp\|^2 + \|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}''_\perp\|^2)}{2s}\right) \times \exp\left(-\frac{ik\|\mathbf{r}''_\perp\|^2}{2f}\right) \times \text{ch}\left(gA_0 l \exp\left(-\frac{\|\mathbf{r}''_\perp\|^2}{2a^2}\right)\right) \times \text{sh}\left(gA_0 l \exp\left(-\frac{\|\mathbf{r}''_\perp\|^2}{2a^2}\right)\right) \right|^2, \quad (12)$$

где рассмотрено усиление в поле фокусированного гауссовского пучка накачки,  $A_p(\mathbf{r}_\perp) = A_0 \exp(-\|\mathbf{r}_\perp\|^2/(2a^2))$ , и учтено, что  $g, A_0, a$  — положительные числа. В случае же передаточной функции (9)

$$G(\mathbf{r}_\perp) = \frac{k^4}{16\pi^4 s^4} \int d\mathbf{r}'_\perp |T(\mathbf{r}'_\perp)|^2 \left| \int d\mathbf{r}''_\perp \times \exp\left(\frac{ik(\|\mathbf{r}'_\perp - \mathbf{r}''_\perp\|^2 + \|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}''_\perp\|^2)}{2s}\right) \times \text{ch}\left(gA_0 l \exp\left(-\frac{\|\mathbf{r}''_\perp\|^2}{2a^2}\right)\right) \times \text{sh}\left(gA_0 l \exp\left(-\frac{\|\mathbf{r}''_\perp\|^2}{2a^2}\right)\right) \right|^2. \quad (13)$$

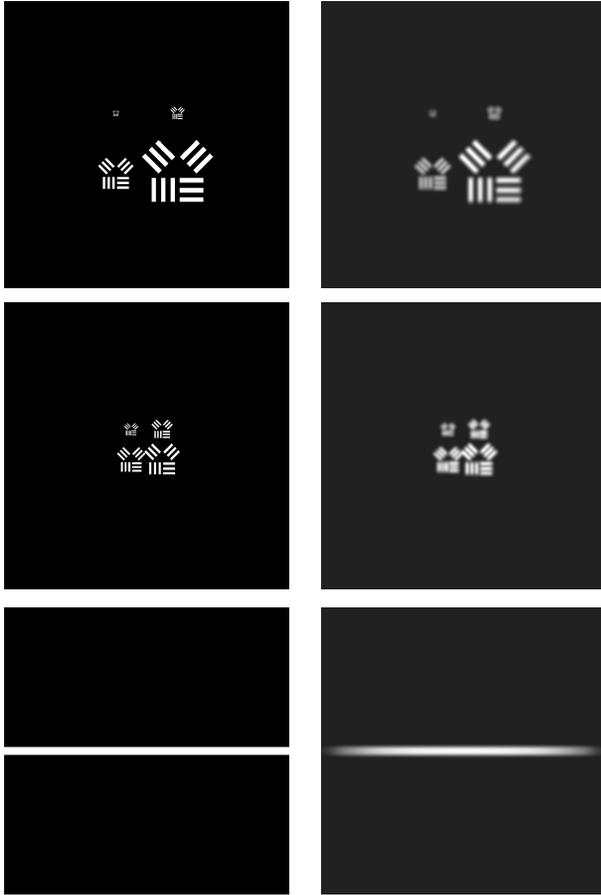
Заметим, что если бы в формуле (12) отсутствовал связанный с накачкой множитель (последние две строки), то она бы, с точностью до постоянного для всего изображения множителя, соответствовала формированию обычного изображения равномерно освещенного объекта удаленной от него на расстояние  $s$  тонкой линзой с тем же фокусным расстоянием  $f = s/2$  в плоскости на расстоянии  $s$  от линзы в отсутствие вакуумных флуктуаций.

Поскольку внутренний интеграл в (12) не берется аналитически, для моделирования формирования фантомных изображений использованы численные методы. Для расчета заметим, что при фиксированном  $\mathbf{r}'_\perp$  внутренний интеграл в (12) может быть вычислен как свертка функции

$$\frac{k \exp(iks)}{2\pi i s} \exp\left(\frac{ik(\|\cdot\|^2)}{2s}\right)$$

с произведением функции

$$\text{ch}\left(gA_0 l \exp\left(-\frac{\|\cdot\|^2}{2a^2}\right)\right) \times \text{sh}\left(gA_0 l \exp\left(-\frac{\|\cdot\|^2}{2a^2}\right)\right) \exp\left(-\frac{ik\|\cdot\|^2}{s}\right)$$

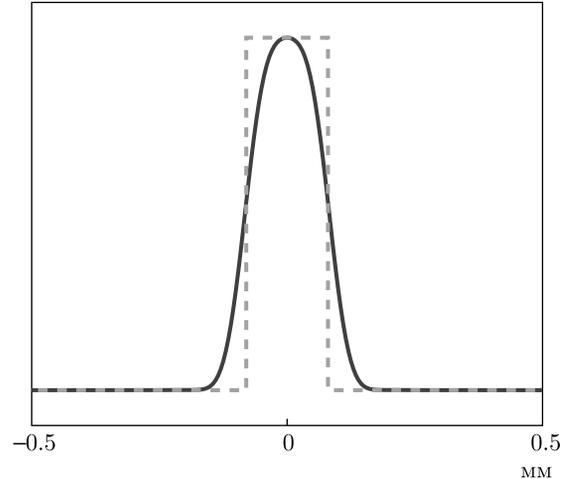


**Рис. 4.** Моделирование формирования квантовых фантомных изображений оптических мир и щели согласно формуле (12). Расстояния между щелями мир 0.01, 0.02, 0.05, 0.1 мм (верхняя пара изображений; 50, 25, 10 и 5 штрихов на миллиметр), 0.02, 0.03, 0.04, 0.05 мм (средняя пара изображений; 25, 16.7, 12.5 и 10 штрихов на миллиметр). Ширина щели 0.16 мм. В левом столбце распределения прозрачностей объектов  $T(\cdot)$ , в правом — корреляционные функции  $G(\cdot)$

и сдвинутой на  $r'_\perp$  функции

$$\frac{k \exp(iks)}{2\pi is} \exp\left(\frac{ik(\|\cdot\|^2)}{2s}\right).$$

Это позволило выполнить расчеты по формуле (12) вычислением дискретной свертки массива значений внутреннего интеграла при фиксированном значении  $r'_\perp$  и при всех значениях  $r_\perp$ , принадлежащих выбранной сетке с постоянным шагом, а затем суммированием поэлементных квадратов модулей полученных массивов с весами, равными коэффициентам пропускания по интенсивности соответствующих пикселей освещаемого объекта.



**Рис. 5.** Профиль изображения щели на рис. 4 (сплошная линия) и профиль распределения прозрачностей самой щели (штриховая)

Результаты вычисления по формуле (12) сформированных фантомных изображений показаны на рис. 2–4. Используемые значения параметров:  $a = l = 3$  мм,  $k \approx 8.95 \cdot 10^3$  мм (соответствует длине волны 702.2 нм),  $gA_0l = 1$ .

На рис. 2, 3  $s = 1500$  мм,  $s_s = 1000$  мм,  $f = 500$  мм. Степень размытия, полученная в результате компьютерного моделирования, согласуется с экспериментально наблюдаемой степенью размытия, полученной в [38], см. рис. 3.

На рис. 4, 5  $s = s_s = 500$  мм,  $f = s/2$ .

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, нам удалось смоделировать формирование фантомных изображений дифракционно-ограниченной квантовой нелинейно-оптической системой. Задавая произвольный объект регистрации, мы получаем его компьютерное изображение. При этом сразу можно менять параметры системы, добиваясь оптимальных характеристик и качества изображения. Но это только начало работы. Не представляет принципиальной сложности вместо идеальной линзы установить реальный объектив, что позволит учесть не только дифракционные ограничения, но и абберрационные искажения. Интересно также исследовать влияние пространственной конфигурации накачки. Но это предмет дальнейшей работы. А к каким выводам можно прийти уже сейчас?

Подводя итоги, можно заключить, что компьютерное моделирование снова подтверждает утверждение о большем влиянии дифракции на фантом-

ные изображения по сравнению с обычными. В самом деле, как отмечено выше, по дифракционным свойствам фантомное изображение, полученное по схеме рис. 1, аналогично изображению, сформированному на расстоянии от объекта, равном сумме оптических длин каналов, что увеличивает влияние дифракции по сравнению с обычным изображением приблизительно во столько раз, во сколько сумма оптических длин каналов превышает оптическую длину объектного канала. Вместе с тем использование гауссовского пучка накачки ограничивает поперечные размеры пучка более «мягко», чем это делало бы размещенное на месте нелинейного кристалла зеркало или объектив с резкими границами, что, напротив, несколько уменьшает обусловленное дифракцией размытие. Но все зависит, конечно, от апертуры оптики.

Однако это не означает бесперспективности усилий по получению фантомных изображений высокого качества. Так, в работах [39, 40] предложено дополнительное формирование и регистрация в объектном канале изображения исследуемого объекта, что позволяет ослабить влияние дифракции при использовании для последующей математической обработки пары полученных изображений методом редукции измерения к виду, свойственному измерениям распределения прозрачности объекта. А в работе [41] показаны возможные преимущества в этом плане встречного четырехфотонного смешения за счет снятия ограничений на соблюдение фазового синхронизма для эффективной генерации сигнального и холостого пучков.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Н. Клышко, Письма в ЖЭТФ **6**, 490 (1967).
2. С. А. Ахманов, В. В. Фадеев, Р. В. Хохлов и др., Письма в ЖЭТФ **6**, 575 (1967) [S. A. Akhmanov, V. V. Fadeev, R. V. Khokhlov et al., JETP Lett. **6**, 85 (1967)].
3. S. E. Harris, M. K. Oshman, and R. L. Byer, Phys. Rev. Lett. **18**, 732 (1967), doi:10.1103/physrevlett.18.732.
4. D. Magde and H. Mahr, Phys. Rev. Lett. **18**, 905 (1967), doi:10.1103/physrevlett.18.905.
5. D. Magde and H. Mahr, Phys. Rev. **171**, 393 (1968), doi:10.1103/physrev.171.393.
6. Д. Н. Клышко, *Фотонь и нелинейная оптика*, Наука, Москва (1980) [D. N. Klyshko, *Photons and Nonlinear Optics*, CRC Press (1988)].
7. J. S. Bell, Physics **1**(3), 195 (1964), doi:10.1103/physicsphysiquefizika.1.195.
8. J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony et al., Phys. Rev. Lett. **23**, 880 (1969), doi:10.1103/physrevlett.23.880.
9. A. Aspect, in *Quantum [Un]speakables*, ed. by R. A. Bertlmann and A. Zeilinger (2002), p. 119, doi: 10.1007/978-3-662-05032-3\_9; arXiv:quant-ph/0402001.
10. А. В. Белинский, Д. Н. Клышко, УФН **163**, 1 (1993), doi:10.3367/UFNr.0163.199308a.0001. [A. V. Belinskii and D. N. Klyshko, Phys. Usp. **36**, 653 (1993), doi:10.1070/PU1993v036n08ABEN002299].
11. X. Ma, J. Kofler, and A. Zeilinger, Rev. Mod. Phys. **88**, 015005 (2016), doi:10.1103/revmodphys.88.015005.
12. Н. Жизан, *Квантовая случайность. Нелокальность, телепортация и другие квантовые чудеса*, Альпина нон-фикшн, Москва (2016) [N. Gisin, *Quantum Chance: Nonlocality, Teleportation and Other Quantum Marvels*, Springer-Verlag (2014)].
13. А. В. Белинский, А. А. Клевцов, УФН **188**, 335 (2018), doi:10.3367/UFNr.2017.09.038210 [A. V. Belinsky and A. A. Klevtsov, Phys. Usp. **61**, 313 (2018), doi:10.3367/UFNe.2017.09.038210].
14. M. Proietti, A. Pickston, F. Graffitti et al., Sci. Adv. **5**(9), eaaw9832 (2019), doi:10.1126/sciadv.aaw9832.
15. А. В. Белинский, УФН **190**, 1335 (2020), doi: 10.3367/UFNr.2020.05.038767 [A. V. Belinsky, Phys. Usp. **63**, 1256 (2020), doi:10.3367/UFNe.2020.05.038767].
16. Д. Н. Клышко, А. Н. Пенин, УФН **152**, 653 (1987), doi:10.3367/ufnr.0152.198708e.0653 [D. N. Klyshko and A. N. Penin, Sov. Phys. Usp. **30**, 716 (1987)].
17. А. В. Белинский, Д. Н. Клышко, ЖЭТФ **105**, 487 (1994) [A. V. Belinskii and D. N. Klyshko, JETP **78**, 259 (1994)].
18. А. Гатти, Э. Брамбилла, М. Баке и др., в *Квантовое изображение*, под ред. М. И. Колобова (ориг.), А. С. Чиркина (пер.), Физматлит, Москва (2009), с. 96 [A. Gatti, E. Brambilla, M. Bache et al., in *Quantum Imaging*, ed. by M. I. Kolobov, Springer (2007), p. 79].
19. M. G. Basset, F. Setzpfandt, F. Steinlechner et al., Laser & Photon. Rev. **13**, 1970042 (2019), doi: 10.1002/lpor.201970042.

20. J. H. Shapiro and R. W. Boyd, *Quant. Inf. Process.* **11**, 949 (2012), doi:10.1007/s11128-011-0356-5.
21. B. I. Erkman and J. H. Shapiro, *Adv. Opt. Photon.* **2**, 405 (2010), doi:10.1364/aop.2.000405.
22. D. Duan, Sh. Du, and Yu. Xia, *Phys. Rev. A* **88**, 053842 (2013), doi:10.1103/physreva.88.053842.
23. D.-J. Zhang, H.-G. Li, Q.-L. Zhao et al., *Phys. Rev. A* **92**, 013823 (2015), doi:10.1103/physreva.92.013823.
24. A. S. Chirkin, P. P. Gostev, D. P. Agapov et al., *Laser Phys. Lett.* **15**, 115404 (2018), doi:10.1088/1612-202x/aae4a6.
25. А. С. Чиркин, *Письма в ЖЭТФ* **102**, 444 (2015) [A. S. Chirkin, *JETP Lett.* **102**, 404 (2015), doi:10.1134/S0021364015180046].
26. А. В. Белинский, *Вестник Московского унив. Серия 3. Физика, астрон.* № 5, 3 (2018) [A. V. Belinsky, *Moscow Univ. Phys. Bull.* **73**(5), 447 (2018), doi:10.3103/S0027134918050053].
27. P.-A. Moreau, P. A. Morris, E. Toninelli et al., *Sci. Rep.* **8**, 13183 (2018), doi:10.1038/s41598-018-31429-y.
28. P.-A. Moreau, E. Toninelli, P. A. Morris et al., *Opt. Express* **26**, 7528 (2018), doi:10.1364/oe.26.007528.
29. A. S. Chirkin and E. V. Makeev, *J. Opt. B: Quant. Semiclass. Opt.* **7**, S500 (2005), doi:10.1088/1464-4266/7/12/010.
30. B. Huttner, S. Serulnik, and Y. Ben-Aryeh, *Phys. Rev. A* **42**, 5594 (1990), doi:10.1103/physreva.42.5594.
31. M. Toren and Y. Ben-Aryeh, *Quant. Opt.: J. Europ. Opt. Soc., Part B* **6**, 425 (1994), doi:10.1088/0954-8998/6/5/006.
32. С. А. Ахманов, А. В. Белинский, А. С. Чиркин, *КЭ* **15**, 873 (1988) [S. A. Akhmanov, A. V. Belinskii, and A. S. Chirkin, *Sov. J. Quant. Electron.* **15**, 873 (1988)].
33. М. И. Колобов, И. В. Соколов, *ЖЭТФ* **96**, 1945 (1989) [M. I. Kolobov and I. V. Sokolov, *JETP* **69**, 1097 (1989)].
34. А. В. Белинский, А. С. Чиркин, *ЖТФ* **59**(4), 174 (1989).
35. А. В. Белинский, А. С. Чиркин, *Вестник Московского унив. Серия 3. Физика, астрон.* № 30, 38 (1989) [A. V. Belinskii and A. S. Chirkin, *Moscow Univ. Phys. Bull.* **30**(3), 38 (1989)].
36. А. В. Белинский, А. С. Чиркин, *КЭ* **16**, 2551 (1989) [A. V. Belinsky and A. S. Chirkin, *Sov. J. Quant. Electron.* **19**, 1638 (1989)].
37. А. Н. Матвеев, *Оптика*, Высш. школа, Москва (1985) [A. N. Matveev, *Optics*, Mir, Moscow (1988)].
38. Y.-H. Kim and Y. Shih, *Found. Phys.* **29**, 1849 (1999), doi:10.1023/a:1018890316979.
39. Д. А. Балакин, А. В. Белинский, *Вестник Московского унив. Серия 3. Физика, астрон.* № 4, 12 (2020) [D. A. Balakin and A. V. Belinsky, *Moscow Univ. Phys. Bull.* **75**(4), 12 (2020)].
40. D. A. Balakin and A. V. Belinsky, *Quant. Inf. Process.* **19**(9), 316 (2020), doi:10.1007/s11128-020-02820-4.
41. А. В. Белинский, Р. Сингх, *ЖЭТФ* **159**, 258 (2021) [A. V. Belinsky and R. Singh, *JETP* **132**, 212 (2021)].