ЖЭТФ, 2021, том 159, вып. 6, стр. 1090–1117

ГИДРОМАГНИТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В НЕОДНОРОДНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СЛОЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ НАНОЖИДКОСТИ

М. И. Копп [a*], *А. В. Тур* [c**], *В. В. Яновский* [a,b***]

[a] *Институт монокристаллов Национальной академии наук Украины 61001, Харьков, Украина*

[b] *Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина 61000, Харьков, Украина*

[c] *Université de Toulouse [UPS], CNRS, Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France*

Поступила в редакцию 15 декабря 2020 г.,
после переработки 15 декабря 2020 г.
Принята к публикации 11 января 2021 г.

Исследуется устойчивость замагниченных потоков неоднородно вращающегося слоя электропроводящей наножидкости с учетом эффектов броуновской диффузии и термофореза. В отсутствие градиента температуры рассмотрены новые виды магнитовращательной неустойчивости в аксиальном, азимутальном и спиральном магнитных полях в тонких слоях наножидкости. Получены инкременты и области развития этих неустойчивостей в зависимости от профиля угловой скорости вращения (числа Россби Ro) и радиального волнового числа k. При наличии градиентов температуры и концентрации наночастиц исследуются стационарные режимы неоднородно вращающейся конвекции в аксиальном и спиральном магнитных полях. Получены выражения для критических чисел Рэлея Ra_{st} и построены кривые нейтральной устойчивости в зависимости от профиля угловой скорости вращения, профиля внешнего азимутального магнитного поля (магнитного числа Россби Rb) и радиального волнового числа k. Определены условия стабилизации и дестабилизации стационарной конвекции в аксиальном и спиральном магнитных полях.

DOI: 10.31857/S0044451021060080

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время, в связи с ростом производительности электронных устройств и развитием высокоэнергетичных технологий, возникает необходимость создания эффективных охлаждающих систем. Перспективным направлением интенсификации теплообмена является повышение теплопроводности жидкости (газа) путем добавления наночастиц с высокой теплопроводностью. Такая смесь жидкости (газа) с частицами твердой фазы получила название наножидкости [1]. В качестве наночастиц используются керамические частицы (оксиды алюминия, меди, кремния), металлические частицы (алюминий, железо, медь) и углеродные нанотрубки, в качестве базовых жидкостей — вода, этиленгликоль, машинное масло. Добавление наночастиц приводит к повышению теплопроводности базовой жидкости на десятки процентов, а в случае углеродных нанотрубок — в несколько раз. Исследования, проведенные в [2] (см. цитируемую там литературу), показали, что коэффициенты переноса наножидкостей зависят не только от концентрации наночастиц, но и от их размера и материала. В работе [3] было показано, что на перенос тепла может оказывать влияние пространственная неоднородность концентрации наночастиц, которая возникает под действием броуновской диффузии и термофореза (возникновения потока частиц под действием градиента температуры). В связи с этим исследование влияния диффузии и термофореза наночастиц на вынужденную конвекцию наножидкостей в теплообменных устройствах является актуальной задачей.

* E-mail: michaelkopp0165@gmail.com
** E-mail: Anatoly.Tour@irap.omp.eu
*** E-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua

Наряду с вязкостью и теплопроводностью наножидкостей для различных приложений большую роль играет свойство электропроводности наножидкостей. В недавней работе [4] проведены экспериментальные исследования электропроводности наножидкостей на основе воды и этиленгликоля с частицами меди и алюминия. Там же было показано, что электропроводность наножидкостей практически линейно растет с увеличением концентрации наночастиц и, в отличие от теплопроводности, растет с уменьшением размера частиц. С учетом этого был сделан вывод [4], что механизмы электропроводности и теплопроводности наножидкостей существенно различаются.

Кроме того, возрастает интерес к исследованиям механизма теплопередачи электропроводящих наножидкостей под воздействием магнитного поля с эффектами броуновской диффузии и термофореза [5, 6]. Конвективная неустойчивость в наножидкостном слое с вертикальным магнитным полем для свободных, жестких-жестких и жестких-свободных границ изучалась в работе [7]. Там же показано, что устойчивость наножидкости возрастает с увеличением значения магнитного поля, в то время как увеличение концентрации наночастиц приводит к ускорению начала конвекции. Условия возникновения конвекции в чистых средах в поле силы тяжести при наличии однородного вращения и внешнего магнитного поля изучены достаточно подробно [8–10]. Поэтому представляет интерес исследование конвективной неустойчивости во вращающемся слое наножидкости в присутствии магнитного поля. Впервые эта задача была рассмотрена в работе [11], где исследовано совместное влияние вращения и магнитного поля на возникновение конвекции в горизонтальном слое электропроводящей наножидкости с учетом эффекта броуновского движения наночастиц и термофореза. В работе [11] было установлено, что критическое число Рэлея Ra_c для наножидкости ниже по сравнению с Ra_c для обычной жидкости при одинаковых значениях числа Чандрасекара Q (характеризует меру влияния силы Лоренца) и числа Тейлора Ta (характеризует меру влияния силы Кориолиса). Как было показано [11], увеличение концентрации наночастиц оказывает дестабилизирующее влияние на начало конвекции, а вращение — стабилизирующее.

В работах [12–14] впервые рассматривалась конвективная неустойчивость неоднородно вращающегося слоя электропроводящей жидкости в постоянном вертикальном магнитном поле $\mathbf{H}_0 = \mathrm{const}$, а в работе [15] — в спиральном магнитном поле. Результаты работ [12–15] показали, что при отсутствии градиента температуры $\mathrm{Ra} = 0$, т. е. когда нет подогрева, критерии конвективной неустойчивости переходят в известные критерии возникновения стандартной магнитовращательной неустойчивости (МВН) и спиральной МВН в диссипативной электропроводящей среде (плазме) [16, 17]. Еще одним фактором, влияющим на устойчивость неоднородно вращающейся электропроводящей жидкости, является градиент концентрации наночастиц в жидкости. Использование электропроводящих наножидкостей, возможно, решит проблемы, возникающие при использовании жидких металлов для лабораторного моделирования МВН. Кратко остановимся на основных проблемах лабораторного моделирования МВН.

В лабораторных экспериментах неоднородное (дифференциальное) вращение среды моделируется течением Куэтта, заключенным между двумя вращающимися с разной угловой скоростью цилиндрами. Угловая скорость вращения жидкости в такой конфигурации описывается соотношением

$$\Omega(R) = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R^2 (R_2^2 - R_1^2)} = a + \frac{b}{R^2},$$

где $R_{1,2}$ и $\Omega_{1,2}$ — соответственно радиус и угловая скорость вращения внутреннего и внешнего цилиндров. Устойчивость такого течения для идеально проводящей среды в магнитном поле была впервые рассмотрена в работах [19, 20]. Там же показано, что слабое осевое магнитное поле дестабилизирует азимутальное дифференциальное вращение плазмы и при выполнении условия $d\Omega^2/dR < 0$ в бездиссипативной плазме возникает МВН, или стандартная МВН. Поскольку это условие выполняется и для кеплеровских течений ($\Omega \propto R^{-3/2}$), МВН является наиболее вероятным источником турбулентности в аккреционных дисках. Открытие МВН послужило толчком к многочисленным теоретическим и лабораторным исследованиям по вращению жидких металлов (натрия, галлия) [21–27]. В этих работах показано, что из-за сильного стабилизирующего эффекта, обусловленного магнитной диффузией или малыми значениями магнитного числа Прандтля ($\mathrm{Pm} \ll 1$) МВН возникает лишь при достаточно больших угловых скоростях жидкого металла, для которых число Рейнольдса $Re = \Omega_1 R_1 (R_2 - R_1)/\nu$ (ν — коэффициент кинематической вязкости) является величиной порядка 10^6. При таких больших числах Рейнольдса ламинарность течения жидкости маловероятна, так как оно становится турбулентным из-за нелинейных неустойчивостей и из-за взаимодействия с цилиндрами.

Теоретический анализ, выполненный в работах [22–24, 26], показал, что среди гидродинамически устойчивых профилей вращения самый низкий порог устойчивости имеет место для профиля угловой скорости вращения $a = 0$, соответствующего границе гидродинамической устойчивости (линия Рэлея). При этом критическое число Рейнольдса оказывается по величине на два порядка меньше, т. е. $Re \sim 10^4$ для жидкого натрия. Однако из-за малости магнитного числа Прандтля Pm порог МВН возрастает на два порядка с $Re \approx 10^4$ до $Re \approx 10^6$ при малейшем отклонении профиля угловой скорости вращения от $\Omega \propto R^{-2}$ в область гидродинамической устойчивости: $\Omega \propto R^{-2} \to \Omega \propto R^{-2+\alpha}$, $\alpha > 0$ [27]. В силу недостижимости поддержания профиля вращения в эксперименте с такой точностью в работе [27] было сделано утверждение о невозможности наблюдения МВН в эксперименте с профилем угловой скорости, соответствующим линии Рэлея $\Omega = b/R^2$, но эта проблема была решена в работах [28, 29]. Там же было показано, что рост величины аксиального магнитного поля приводит к тому, что изменение порога МВН при отклонении профиля вращения от линии Рэлея перестает быть таким резким, как в случае слабого поля. Вместе с тем, сам порог неустойчивости на линии Рэлея увеличивается пропорционально величине магнитного поля.

В работах [30, 31] было предложено изучать неустойчивость азимутального вращения жидкого галлия в спиральном магнитном поле, т. е. наряду с аксиальным магнитным полем приложено дополнительное внешнее азимутальное магнитное поле. Численные расчеты, проведенные в этих работах, показали, что критическое число Рейнольдса Re_c в спиральном магнитном поле уменьшается по величине на два порядка. Анализ природы наблюдаемых в эксперименте мод был выполнен в работах [17, 32]. В последней было получено выражение для порога спиральной МВН.

Однако малость магнитного числа Прандтля ($\mathrm{Pm} \ll 1$) для жидких металлов является также препятствием для дестабилизации кеплеровских потоков в экспериментах с азимутальными и спиралевидными полями. Поэтому эксперименты с жидкими металлами нуждаются в дальнейшем улучшении [33]. Аналог астрофизической МВН рассматривался в работе [34], где исследовалось течение Куэтта в вязко-упругой полимерной жидкости. Как утверждалось в работах [35, 36], лабораторные эксперименты с полимерными жидкостями позволяют лучше понять физический механизм магнитогидродинамических неустойчивостей.

На основании проведенных в настоящей работе теоретических исследований по реализации стандартной МВН, азимутальной МВН и спиральной МВН в неоднородно вращающемся слое электропроводящей наножидкости предлагается использование электропроводящих наножидкостей для лабораторного моделирования МВН. Содержание работы изложено в следующих разделах. В разд. 2 описана постановка задачи и получены уравнения эволюции малых возмущений в приближении Буссинеска во вращающемся слое несжимаемой электропроводящей наножидкости, находящейся в поле силы тяжести с постоянными градиентами температуры и концентрации наночастиц. Неоднородно вращающийся слой наножидкости находится во внешнем спиральном магнитном поле. В разд. 3 решается задача Рэлея – Бенара для слоя электропроводящей наножидкости, заключенной между двумя вращающимися цилиндрами и подогреваемой снизу. Получено общее дисперсионное уравнение для осесимметричных возмущений с учетом эффектов броуновской диффузии наночастиц и термофореза. В разд. 4–6 рассматриваются гидромагнитные неустойчивости при условии равенства температуры ($\mathrm{Ra} = 0$) на границах слоя наножидкости. В разд. 4 проведен анализ дисперсионного уравнения для случая, когда отсутствует азимутальная компонента магнитного поля, $H_{0\varphi} = 0$. Получен критерий развития аналога стандартной МВН в тонком слое наножидкости. В разд. 5 проведен анализ дисперсионного уравнения для случая, когда отсутствует аксиальная компонента магнитного поля, $H_{0z} = 0$, и получен критерий развития аналога азимутальной МВН в тонком слое наножидкости. В разд. 6 проведен анализ дисперсионного уравнения при наличии внешнего спирального магнитного поля. Также получены критерии развития аналога спиральной МВН в тонком слое наножидкости. В разд. 7 исследуются стационарные режимы конвекции в однородном аксиальном и неоднородном спиральном магнитных полях. Там же получены критические значения чисел Рэлея для стационарной конвективной неустойчивости. Проведен анализ развития этих неустойчивостей для различных профилей угловой скорости вращения $\Omega(R)$ в зависимости от профиля внешнего азимутального магнитного поля $B_{0\varphi}(R)$. В Заключении приводятся основные выводы, полученные в настоящей работе.

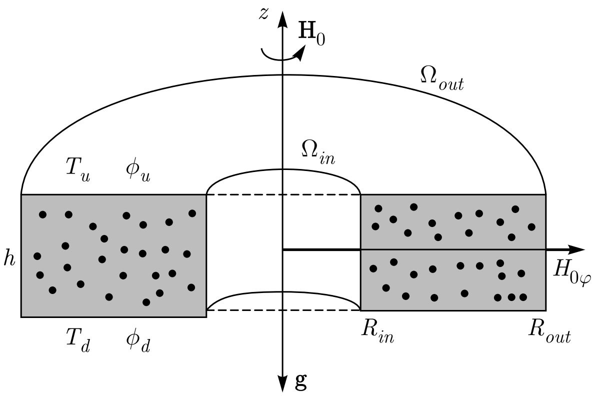

Рис. 1. Электропроводящая наножидкость заполняет слой между двумя вращающимися цилиндрами с угловыми скоростями Ω_{in} и Ω_{out} и находится в спиральном магнитном поле $\mathbf{H}_0 = H_{0\varphi}(R)\mathbf{e}_\varphi + H_{0z}\mathbf{e}_z$. Нижняя поверхность слоя имеет температуру T_d и объемную долю наночастиц ϕ_d, а верхняя — T_u и ϕ_u; $T_d > T_u$, $\phi_d < \phi_u$

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим слой несжимаемой вязкой электропроводящей наножидкости толщины h, которая заключена между двумя вращающимися цилиндрами с внутренним R_{in} и внешним R_{out} радиусами, причем $h \ll (R_{out} - R_{in})$. Наножидкость заключена между двумя параллельными плоскостями $z = 0$ и $z = h$, где температура T и объемная доля ϕ наночастиц поддерживаются постоянными: $T = T_d$, $\phi = \phi_d$ при $z = 0$ и $T = T_u$, $\phi = \phi_u$ при $z = h$, причем $T_d > T_u$, $\phi_u > \phi_d$ (рис. 1). Считаем, что жидкость находится в постоянном гравитационном поле $\mathbf{g}$, направленном по оси z вертикально вниз: $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$. Электропроводящая жидкость вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, направленной вертикально вверх по оси z. Вращение жидкости создает стационарный поток в азимутальном направлении: $\mathbf{V}_0 = \mathbf{e}_\varphi \Omega(R) R$, где $\Omega(R)$ — угловая скорость вращения с произвольной зависимостью от координаты R. Кроме того, мы полагаем, что наножидкость находится в спиральном магнитном поле $\mathbf{H}_0$, которое представимо в виде суммы неоднородного азимутального $H_{0\varphi}(R)$ и однородного аксиального H_{0z} полей:

$$\mathbf{H}_0 = H_{0\varphi}(R)\mathbf{e}_\varphi + H_{0z}\mathbf{e}_z, \quad H_{0z} = \mathrm{const}. \tag{1}$$

Топологической характеристикой силовых линий спирального магнитного поля (1) является псевдоскалярная величина — магнитная спиральность [37]:

$$\mathbf{H}_0 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = \frac{H_{0z}}{R} \frac{\partial}{\partial R}(R H_{0\varphi}). \tag{2}$$

Очевидно, что для исследования данного типа течения удобно использовать цилиндрическую систему координат (R, φ, z), выбор которой обусловлен возможностью практического применения развиваемой здесь теории.

Для описания конвективных процессов будем использовать уравнения гидродинамики Буссинеска – Обербека несжимаемой электропроводящей наножидкости [7], записанные для цилиндрической системы координат:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial V_R}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) V_R - \frac{V_\varphi^2}{R} \right) - \\ - \frac{\mu_e}{4\pi} \left((\mathbf{H} \cdot \nabla) H_R - \frac{H_\varphi^2}{R} \right) = -\frac{\partial}{\partial R} \left(P + \frac{\mu_e H^2}{8\pi} \right) + \\ + \mu \left(\nabla^2 V_R - \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{V_R}{R^2} \right), \tag{3}$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) V_\varphi + \frac{V_\varphi V_R}{R} \right) - \\ - \frac{\mu_e}{4\pi} \left((\mathbf{H} \cdot \nabla) H_\varphi + \frac{H_\varphi H_R}{R} \right) = \\ = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(P + \frac{\mu_e H^2}{8\pi} \right) + \\ + \mu \left(\nabla^2 V_\varphi + \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_R}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{R^2} \right), \tag{4}$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) V_z \right) - \frac{\mu_e}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot \nabla) H_z = \\ = -\frac{\partial}{\partial z} \left(P + \frac{\mu_e H^2}{8\pi} \right) + \mu \nabla^2 V_z - \\ - [\phi \rho_p + (1 - \phi) \rho_0 (1 - \beta (T - T_u))] g, \tag{5}$$

$$(\rho c)_f \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T \right) = k_f \nabla^2 T + \\ + (\rho c)_p \left(D_B \nabla \phi \cdot \nabla T + D_T \frac{\nabla T \cdot \nabla T}{T_u} \right), \tag{6}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \phi = D_B \nabla^2 \phi + \frac{D_T}{T_u} \nabla^2 T, \tag{7}$$

$$\frac{\partial H_R}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) H_R - (\mathbf{H} \cdot \nabla) V_R = \\ = \eta \left(\nabla^2 H_R - \frac{2}{R^2} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{H_R}{R^2} \right), \tag{8}$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)H_\varphi-(\mathbf{H}\cdot\nabla)V_\varphi+\frac{1}{R}\left(V_\varphi H_R-V_R H_\varphi\right)= \\ =\eta\left(\nabla^2 H_\varphi+\frac{2}{R^2}\frac{\partial H_R}{\partial\varphi}-\frac{H_\varphi}{R^2}\right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)H_z-(\mathbf{H}\cdot\nabla)V_z=\eta\nabla^2 H_z, \quad (10)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial V_R}{\partial R}+\frac{V_R}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0,\\ \frac{\partial H_R}{\partial R}+\frac{H_R}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial H_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0,\end{gathered} \quad (11)$$

где скалярное произведение $\mathbf{A}\cdot\nabla$ и лапласиан $\Delta\equiv\equiv\nabla^2$ соответственно равны

$$\mathbf{A}\cdot\nabla=A_R\frac{\partial}{\partial R}+\frac{A_\varphi}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}+A_z\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Здесь $\rho_0=\phi\rho_p+(1-\phi)\rho_f$ — плотность наножидкости при контрольной температуре T_u, ρ_p — плотность наночастиц, ρ_f — плотность базовой жидкости при температуре T_u, ϕ — объемная доля наночастиц, β — коэффициент теплового расширения, $(\rho c)_f$ и $(\rho c)_p$ — эффективные теплоемкости базовой жидкости и наночастиц, D_B — коэффициент броуновской диффузии, D_T — коэффициент термофоретической диффузии. Знаки коэффициентов D_B и D_T положительные, а сами коэффициенты равны

$$D_B=\frac{k_B T}{3\pi\mu d_p}, \quad D_T=\frac{\mu}{\rho_f}\frac{0.26k_f}{2k_f+k_p},$$

где d_p — диаметр наночастиц, k_B — постоянная Больцмана, k_f и k_p — коэффициенты теплопроводности базовой жидкости и наночастиц, μ — вязкость базовой жидкости. Коэффициенты магнитной проницаемости μ_e, магнитной вязкости η и электропроводности равны

$$\mu_e=\phi\mu_{ep}+(1-\phi)\mu_{ef}, \quad \eta=\frac{1}{4\pi\mu_e\sigma}=\phi\eta_p+(1-\phi)\eta_f,$$

$$\sigma=\phi\sigma_p+(1-\phi)\sigma_f,$$

где μ_{ep} и μ_{ef} — магнитные проницаемости наночастиц и базовой жидкости, η_p и η_f — магнитные вязкости наночастиц и базовой жидкости, σ_p и σ_f — коэффициенты электропроводности наночастиц и базовой жидкости.

Представим все величины в уравнениях (3)–(11) в виде суммы стационарной и возмущенной частей:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix}V_R\\V_\varphi\\V_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\Omega(R)R\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_R\\u_\varphi\\u_z\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}H_R\\H_\varphi\\H_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\H_{0\varphi}\\H_{0z}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_R\\b_\varphi\\b_z\end{pmatrix},\\ P=P_b+p, \quad T=T_b+T', \quad \phi=\phi_b+\phi'.\end{gathered} \quad (12)$$

Равновесие стационарного течения обеспечивается балансом сил в радиальном направлении:

$$\Omega^2 R=\frac{1}{\rho_0}\frac{dP_b}{dR}+\frac{\mu_e H_{0\varphi}}{4\pi\rho_0 R}\frac{d}{dR}(RH_{0\varphi}). \quad (13)$$

В вертикальном направлении стационарному состоянию удовлетворяет уравнение гидростатики

$$\frac{dP_b}{dz}=-g[\phi_b(\rho_p-\rho_0)+\rho_0-\rho_0\beta(T_b-T_u)]. \quad (14)$$

Стационарные профили температуры $T_b=T_b(z)$ и объемной доли наночастиц $\phi_b=\phi_b(z)$ находятся из решений уравнений

$$\begin{gathered}0=\frac{k_f}{(\rho c)_f}\frac{d^2T_b}{dz^2}+\frac{(\rho c)_p}{(\rho c)_f}\times\\ \times\left(D_B\frac{d\phi_b}{dz}\frac{dT_b}{dz}+\frac{D_T}{T_u}\left(\frac{dT_b}{dz}\right)^2\right),\\ 0=D_B\frac{d^2\phi_b}{dz^2}+\frac{D_T}{T_u}\frac{d^2T_b}{dz^2}.\end{gathered} \quad (15)$$

С учетом граничных условий находим линейные зависимости от z для $T_b(z)$ и $\phi_b(z)$:

$$T_b(z)=T_d-\frac{T_d-T_u}{h}z, \quad \phi_b(z)=\phi_d-\frac{\phi_d-\phi_u}{h}z.$$

Далее нас будет интересовать вопрос об устойчивости малых возмущений физических величин ($\mathbf{u}==(u_R,u_\varphi,u_z)$, $\mathbf{b}=(b_R,b_\varphi,b_z),p,T',\phi'$) на фоне стационарного состояния. Подставляя уравнения (12) в (3)–(11), получим уравнения эволюции малых возмущений в линейном приближении:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_R}{\partial t}+\Omega\frac{\partial u_R}{\partial\varphi}-2\Omega u_\varphi-\frac{\mu_e}{4\pi\rho_0}\times\\ \times\left(\frac{H_{0\varphi}}{R}\frac{\partial b_R}{\partial\varphi}-\frac{2H_{0\varphi}b_\varphi}{R}+H_{0z}\frac{\partial b_R}{\partial z}\right)=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial R}+\\ +\nu\left(\nabla^2u_R-\frac{2}{R^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{u_R}{R^2}\right), \quad \nu=\frac{\mu}{\rho_0}, \quad (16)\end{gathered}$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}+\Omega\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+2\Omega(1+\mathrm{Ro})u_R-\\-\frac{1}{4\pi\rho_0}\left(\frac{H_{0\varphi}}{R}\frac{\partial b_R}{\partial\varphi}+\frac{2H_{0\varphi}}{R}(1+\mathrm{Rb})+H_{0z}\frac{\partial b_\varphi}{\partial z}\right)=\\=-\frac{1}{\rho_0 R}\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial\varphi}+\nu\left(\nabla^2u_\varphi+\frac{2}{R^2}\frac{\partial u_R}{\partial\varphi}-\frac{u_\varphi}{R^2}\right),\quad(17)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+\Omega\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}-\frac{\mu_e}{4\pi\rho_0}\left(\frac{H_{0\varphi}}{R}\frac{\partial b_z}{\partial\varphi}+H_{0z}\frac{\partial b_z}{\partial z}\right)=\\=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\widetilde{p}}{\partial z}+\nu\nabla^2u_z-\frac{g}{\rho_0}[\phi'(\rho_p-\rho_0)-\rho_0\beta T'],\quad(18)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t}+\Omega\frac{\partial T'}{\partial\varphi}-u_z\left(\frac{T_d-T_u}{h}\right)=\chi_f\nabla^2T'-\\-\frac{(\rho c)_p}{(\rho c)_f}\left[D_B\left(\frac{T_d-T_u}{h}\right)\frac{d\phi'}{dz}+D_B\left(\frac{\phi_d-\phi_u}{h}\right)\frac{dT'}{dz}+\right.\\\left.+\frac{2D_T}{T_u}\left(\frac{T_d-T_u}{h}\right)\frac{dT'}{dz}\right],\quad\chi_f=\frac{k_f}{(\rho c)_f},\quad(19)$$

$$\frac{\partial\phi'}{\partial t}+\Omega\frac{\partial\phi'}{\partial\varphi}+u_z\left(\frac{\phi_u-\phi_d}{h}\right)=\\=D_B\nabla^2\phi'+\frac{D_T}{T_u}\nabla^2T',\quad(20)$$

$$\frac{\partial b_R}{\partial t}+\Omega\frac{\partial b_R}{\partial\varphi}-\frac{H_{0\varphi}}{R}\frac{\partial u_R}{\partial\varphi}-H_{0z}\frac{\partial u_R}{\partial z}=\\=\eta\left(\nabla^2b_R-\frac{2}{R^2}\frac{\partial b_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{b_R}{R^2}\right),\quad(21)$$

$$\frac{\partial b_\varphi}{\partial t}+\Omega\frac{\partial b_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{H_{0\varphi}}{R}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}-H_{0z}\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}-2\Omega\mathrm{Ro}b_R+\\+\frac{2H_{0\varphi}}{R}\mathrm{Rb}u_R=\eta\left(\nabla^2b_\varphi+\frac{2}{R^2}\frac{\partial b_R}{\partial\varphi}-\frac{b_\phi}{R^2}\right),\quad(22)$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t}+\Omega\frac{\partial b_z}{\partial\varphi}-\frac{H_{0\varphi}}{R}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}-H_{0z}\frac{\partial u_z}{\partial z}=\eta\nabla^2b_z,\quad(23)$$

$$\frac{\partial u_R}{\partial R}+\frac{u_R}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0,\\\frac{\partial b_R}{\partial R}+\frac{b_R}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial b_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial b_z}{\partial z}=0,\quad(24)$$

где $\widetilde{p}=p+(1/4\pi)\,\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{b}$ — общее возмущенное давление,

$$\mathrm{Ro}=\frac{R}{2\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial R}$$

— гидродинамическое число Россби, характеризующее неоднородность вращения среды,

$$\mathrm{Rb}=\frac{R}{2H_{0\varphi}R^{-1}}\frac{\partial}{\partial R}(H_{0\varphi}R^{-1})$$

— магнитное число Россби, характеризующее свойства азимутального магнитного поля [17].

Отметим, что для твердотельного вращения параметр Россби равен нулю, $\mathrm{Ro}=0$, в случае кеплеровского вращения, $\Omega(R)\propto R^{-3/2}$, параметр Россби равен $\mathrm{Ro}=-3/4$, для рэлеевского профиля угловой скорости $\Omega(R)\propto R^{-2}$, соответственно, $\mathrm{Ro}=-1$. Если азимутальная составляющая $H_{0\varphi}(R)=2I/R$ магнитного поля $\mathbf{H}_0$ создается внешним аксиальным током I, изолированным от жидкости, то для такой зависимости ($H_{0\varphi}\propto R^{-1}$) магнитное число Россби $\mathrm{Rb}=-1$. В этом случае спиральность магнитного поля равна нулю: $\mathbf{H}_0\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_0=0$. Магнитное число Россби равно нулю, $\mathrm{Rb}=0$, при линейной зависимости азимутального магнитного поля от радиальной координаты, $H_{0\varphi}(R)\propto R$, но спиральность магнитного поля при этом не исчезает: $\mathbf{H}_0\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_0=2H_{0z}H_{0\varphi}/R$. Магнитному числу Россби $\mathrm{Rb}=1/2$ соответствует квадратичная зависимость азимутального магнитного поля от радиального направления, $H_{0\varphi}(R)\propto R^2$. Для этого случая спиральность магнитного поля равна $\mathbf{H}_0\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_0=3H_{0z}H_{0\varphi}/R$. Отметим, что для случая однородного азимутального магнитного поля $H_{0\varphi}=\mathrm{const}$ спиральность не исчезает, $\mathbf{H}_0\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_0=H_{0z}H_{0\varphi}/R$, а магнитное число Россби принимает значение $\mathrm{Rb}=-1/2$.

3. ЛОКАЛЬНОЕ ВКБ-ПРИБЛИЖЕНИЕ И ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Систему уравнений (16)–(24) будем использовать для исследования вопроса устойчивости малых осесимметричных возмущений. Поскольку характерный масштаб неоднородности среды в горизонтальной плоскости больше, чем в вертикальном направлении, $L_R\gg L_h$, мы можем применить локальный метод ВКБ для возмущений, зависящих от радиальных координат R. Для этой цели разложим все величины в ряд Тейлора в окрестности фиксированной точки R_0, оставляя члены нулевого порядка по локальным координатам $\widetilde{R}=R-R_0$. В результате получим систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с учетом следующих соотношений:

$$\Omega_0=\Omega(R_0),\quad\nabla^2\to\widehat{D}^2+\frac{\partial^2}{\partial\widetilde{R}^2}+\frac{1}{R_0}\frac{\partial}{\partial\widetilde{R}},\quad\widehat{D}\equiv\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\left(\nabla^2\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\\mathbf{b}\end{pmatrix}\right)_R=\nabla^2\begin{pmatrix}u_R\\b_R\end{pmatrix}-\frac{1}{R_0^2}\begin{pmatrix}u_R\\b_R\end{pmatrix},$$

$$\left(\nabla^2\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix}\right)_\varphi=\nabla^2\begin{pmatrix}u_\varphi\\ b_\varphi\end{pmatrix}-\frac{1}{R_0^2}\begin{pmatrix}u_\varphi\\ b_\varphi\end{pmatrix}.$$

Все возмущения в системе уравнений (16)–(24) представим в виде плоских волн:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{b}\\ T'\\ \phi'\\ \widetilde{p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{U}(z)\\ \mathbf{B}(z)\\ \Theta(z)\\ \Phi(z)\\ \widetilde{P}(z)\end{pmatrix}\exp(\gamma t+ik\widetilde{R}). \qquad (25)$$

Подставляя (25) в систему уравнений (16)–(24), в коротковолновом приближении $k\gg 1/R_0$, пренебрегая членами $ik/R_0-1/R_0^2$, находим

$$\widehat{L}_\nu U_R+\frac{2\Omega}{\nu}U_\varphi-\frac{\mu_e H_{0\varphi}}{2\pi\rho_0\nu R_0}B_\varphi+ +\frac{\mu_e H_{0z}}{4\pi\rho_0\nu}\widehat{D}B_R-\frac{ik}{\nu\rho_0}\widetilde{P}=0, \qquad (26)$$

$$\widehat{L}_\nu U_\varphi-\frac{2\Omega}{\nu}(1+\mathrm{Ro})U_R+\frac{\mu_e H_{0\varphi}}{2\pi\rho_0\nu R_0}(1+\mathrm{Rb})B_R+ +\frac{\mu_e H_{0z}}{4\pi\rho_0\nu}\widehat{D}B_\varphi=0, \qquad (27)$$

$$\widehat{L}_\nu U_z+\frac{\mu_e H_{0z}}{4\pi\rho_0\nu}\widehat{D}H_z-\frac{\widehat{D}}{\nu\rho_0}\widetilde{P}- -\frac{g}{\rho_0\nu}\left(\Phi(\rho_p-\rho_0)-\rho_0\beta\Theta\right)=0, \qquad (28)$$

$$\widehat{L}_\chi\Theta+\left(\frac{T_d-T_u}{\chi_f h}\right)U_z-\frac{(\rho c)_p D_B}{(\rho c)_f\chi_f}\left(\frac{T_d-T_u}{h}\right)\widehat{D}\Phi- -\frac{(\rho c)_p}{(\rho c)_f\chi_f}\left[D_B\left(\frac{\phi_d-\phi_u}{h}\right)+ +\frac{2D_T}{T_u}\left(\frac{T_d-T_u}{h}\right)\right]\widehat{D}\Theta=0, \qquad (29)$$

$$\widehat{L}_\phi\Phi+\left(\frac{\phi_d-\phi_u}{D_B h}\right)U_z+\frac{D_T}{D_B T_u}\left(\widehat{D}^2-k^2\right)\Theta=0, \qquad (30)$$

$$\widehat{L}_\eta B_R+\frac{H_{0z}}{\eta}\widehat{D}U_R=0, \qquad (31)$$

$$\widehat{L}_\eta B_\varphi+\frac{H_{0z}}{\eta}\widehat{D}U_\varphi-\frac{2H_{0\varphi}}{\eta R_0}\mathrm{Rb}U_R+\frac{2\Omega}{\eta}\mathrm{Ro}B_R=0, \qquad (32)$$

$$\widehat{L}_\eta B_z+\frac{H_{0z}}{\eta}\widehat{D}U_z=0. \qquad (33)$$

Здесь введены следующие обозначения для операторов:

$$\widehat{L}_\nu=\widehat{D}^2-\left(\frac{\gamma}{\nu}+k^2\right),\quad \widehat{L}_\eta=\widehat{D}^2-\left(\frac{\gamma}{\eta}+k^2\right),$$

$$\widehat{L}_\chi=\widehat{D}^2-\left(\frac{\gamma}{\chi_f}+k^2\right),\quad \widehat{L}_\phi=\widehat{D}^2-\left(\frac{\gamma}{D_B}+k^2\right).$$

Для последующего анализа системы уравнений (26)–(33) удобно привести ее к безразмерному виду, вводя безразмерные величины, которые отметим звездочкой:

$$(R_0^*,z^*)=h^{-1}(R_0,z),$$

$$(U_R^*,U_\varphi^*,U_z^*)=\frac{h}{\chi_f}(U_R,U_\varphi,U_z),$$

$$(B_R^*,B_\varphi^*,B_z^*)=H_0^{-1}(B_R,B_\varphi,B_z),\quad H_0=H_{0z},$$

$$\varphi^*=\varphi,\quad \Theta^*=\frac{\Theta}{T_d-T_u},\quad \Phi^*=\frac{\Phi}{\phi_u-\phi_d},$$

$$\widetilde{P}^*=\widetilde{P}\left(\frac{h^2}{\rho_0\nu\chi_f}\right),\quad t^*=t\left(\frac{\nu}{h^2}\right),\quad \frac{\partial}{\partial t^*}=\frac{h^2}{\nu}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Опуская звездочку, получим следующую систему безразмерных уравнений:

$$\widehat{L}_\nu U_R+\sqrt{\mathrm{Ta}}U_\varphi-2\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Pm}^{-1}\mathrm{Q}\xi B_\varphi+ +\mathrm{Pr}\,\mathrm{Pm}^{-1}\mathrm{Q}\widehat{D}B_R-ik\widetilde{P}=0, \qquad (34)$$

$$\widehat{L}_\nu U_\varphi-\sqrt{\mathrm{Ta}}(1+\mathrm{Ro})U_R+2\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Pm}^{-1}\mathrm{Q}\xi(1+\mathrm{Rb})B_R+ +\mathrm{Pr}\,\mathrm{Pm}^{-1}\mathrm{Q}\widehat{D}B_\varphi=0, \qquad (35)$$

$$\widehat{L}_\nu U_z+\mathrm{Pr}\,\mathrm{Pm}^{-1}\mathrm{Q}\widehat{D}B_z-\widehat{D}\widetilde{P}+\mathrm{Ra}\Theta-\mathrm{R}_n\Phi=0, \qquad (36)$$

$$\widehat{L}_\chi\Theta+U_z+\frac{N_B}{L_e}\left(\widehat{D}\Theta-\widehat{D}\Phi\right)-\frac{2N_A N_B}{L_e}\widehat{D}\Theta=0, \qquad (37)$$

$$\widehat{L}_\phi\Phi-L_e U_z+N_A\left(\widehat{D}^2-k^2\right)\Theta=0, \qquad (38)$$

$$\widehat{L}_\eta B_R+\mathrm{Pr}^{-1}\mathrm{Pm}\widehat{D}U_R=0, \qquad (39)$$

$$\widehat{L}_\eta B_\varphi+\mathrm{Pr}^{-1}\mathrm{Pm}\widehat{D}U_\varphi-2\mathrm{Pr}^{-1}\mathrm{Pm}\xi\mathrm{Rb}U_R+ +\mathrm{Pm}\mathrm{Ro}\sqrt{\mathrm{Ta}}B_R=0, \qquad (40)$$

$$\widehat{L}_\eta B_z+\mathrm{Pr}^{-1}\mathrm{Pm}\widehat{D}U_z=0, \qquad (41)$$

где операторы $\widehat{L}_\nu$, $\widehat{L}_\eta$, $\widehat{L}_\chi$, $\widehat{L}_\phi$ в безразмерных переменных имеют вид

$$\widehat{L}_\nu=\widehat{D}^2-\gamma-k^2,\quad \widehat{L}_\eta=\widehat{D}^2-\mathrm{Pm}\gamma-k^2,$$

$$\widehat{L}_\chi=\widehat{D}^2-\mathrm{Pr}\,\gamma-k^2,\quad \widehat{L}_\phi=\widehat{D}^2-\mathrm{Pr}\,L_e\gamma-k^2.$$

В уравнениях (34)–(41) введены безразмерные параметры $\mathrm{Ta}=4\Omega^2h^4/\nu^2$ — число Тейлора, $\mathrm{Pr}==\nu/\chi_f$ — число Прандтля, $\mathrm{Pm}=\nu/\eta$ — магнитное число Прандтля, $\mathrm{Q}=\mu_e H_0^2h^2/4\pi\rho_0\nu\eta$ —

число Чандрасекара, $\xi = H_{0\varphi}h/R_0H_0$ — отношение азимутального магнитного поля к аксиальному, $\mathrm{Ra} = (T_d - T_u)\rho_0 g\beta h^3/\mu\chi_f$ — число Рэлея, $\mathrm{R}_n = (\rho_p - \rho_f)(\phi_u - \phi_d)gh^3/\mu\chi_f$ — концентрационное число Рэлея, $L_e = \chi_f/D_B$ — число Льюиса,

$$N_B = (\phi_u - \phi_d)\frac{(\rho c)_p}{(\rho c)_f}$$

— коэффициент, характеризующий прирост плотности наночастиц, и

$$N_A = \frac{D_T(T_d - T_u)}{D_B T_u(\phi_u - \phi_d)}$$

— коэффициент модифицированной диффузии.

Уравнения (34)–(41) дополняются уравнениями соленоидальности полей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{b}$:

$$\widehat{D}U_z + ikU_R = 0, \quad \widehat{D}B_z + ikB_R = 0. \qquad (42)$$

Используя условие (42), из уравнений (34) и (36) исключаем давление $\widetilde{P}$:

$$\widetilde{P} = \frac{1}{\widehat{D}^2 - k^2}\Bigg[\sqrt{\mathrm{Ta}}ikU_\varphi - 2\mathrm{Q}\xi ik\left(-\frac{\widehat{D}U_\varphi}{\widehat{L}_\eta} + 2\xi\mathrm{Rb}\frac{U_R}{\widehat{L}_\eta} + \mathrm{PmRo}\sqrt{\mathrm{Ta}}\frac{\widehat{D}}{\widehat{L}_\eta^2}U_R\right) - \mathrm{Ra}\frac{\widehat{D}\left(\widehat{L}_\phi - \frac{N_B}{L_e}\widehat{D}\right)}{\widehat{L}}U_z - \mathrm{R}_n\frac{\widehat{D}}{\widehat{L}\widehat{L}_\phi}\left(\widehat{L}L_e + N_A\left(\widehat{D}^2 - k^2\right) \times \left(\widehat{L}_\phi - \frac{N_B}{L_e}\widehat{D}\right)\right)U_z\Bigg], \qquad (43)$$

где оператор

$$\widehat{L} = \widehat{L}_\chi\widehat{L}_\phi + \frac{N_B}{L_e}(1 - 2N_A)\widehat{L}_\phi\widehat{D} + \frac{N_AN_B}{L_e}(\widehat{D}^2 - k^2)\widehat{D}.$$

Подставляя выражение (43) в систему линейных уравнений (34)–(41), в результате несложных, но громоздких преобразований получим одно дифференциальное уравнение для U_z:

$$[\widehat{a}_{33}(\widehat{a}_{11}\widehat{a}_{22} - \widehat{a}_{21}\widehat{a}_{12}) + \widehat{a}_{13}(\widehat{a}_{21}\widehat{a}_{32} - \widehat{a}_{31}\widehat{a}_{22})]U_z = 0, \qquad (44)$$

где

$$\widehat{a}_{11} = \widehat{L}_\nu - \mathrm{Q}\frac{\widehat{D}^2}{\widehat{L}_\eta} - 2\mathrm{Q}\xi\left(2\xi\mathrm{Rb} + \sqrt{\mathrm{Ta}}\mathrm{RoPm}\frac{\widehat{D}}{\widehat{L}_\eta}\right)\frac{\widehat{D}^2}{\widehat{L}_\eta(\widehat{D}^2 - k^2)},$$

$$\widehat{a}_{12} = \frac{\widehat{D}^2}{\widehat{D}^2 - k^2}\left(\sqrt{\mathrm{Ta}} + 2\mathrm{Q}\xi\frac{\widehat{D}}{\widehat{L}_\eta}\right),$$

$$\widehat{a}_{13} = \frac{ik\widehat{D}}{\widehat{D}^2 - k^2}\left[\mathrm{Ra}\frac{\widehat{L}_\phi - \frac{N_B}{L_e}\widehat{D}}{\widehat{L}} + \frac{\mathrm{R}_n}{\widehat{L}\widehat{L}_\phi}\left(\widehat{L}L_e + N_A(\widehat{D}^2 - k^2)\left(\widehat{L}_\phi - \frac{N_B}{L_e}\widehat{D}\right)\right)\right],$$

$$\widehat{a}_{21} = -\sqrt{\mathrm{Ta}}(1+\mathrm{Ro}) + \mathrm{QRoPm}\sqrt{\mathrm{Ta}}\frac{\widehat{D}^2}{\widehat{L}_\eta^2} - 2\mathrm{Q}\xi\frac{\widehat{D}}{\widehat{L}_\eta},$$

$$\widehat{a}_{22} = \widehat{L}_\nu - \mathrm{Q}\frac{\widehat{D}^2}{\widehat{L}_\eta},$$

$$\widehat{a}_{31} = \frac{2\mathrm{Q}\xi ik}{\widehat{D}^2 - k^2}\left(2\xi\mathrm{Rb}\frac{\widehat{D}}{\widehat{L}_\eta} + \sqrt{\mathrm{Ta}}\mathrm{RoPm}\frac{\widehat{D}^2}{\widehat{L}_\eta^2}\right),$$

$$\widehat{a}_{32} = -\frac{ik\widehat{D}}{\widehat{D}^2 - k^2}\left(\sqrt{\mathrm{Ta}} + 2\mathrm{Q}\xi\frac{\widehat{D}}{\widehat{L}_\eta}\right),$$

$$\widehat{a}_{33} = \widehat{L}_\nu - \mathrm{Q}\frac{\widehat{D}^2}{\widehat{L}_\eta} + \frac{k^2\mathrm{Ra}}{\widehat{L}(\widehat{D}^2 - k^2)}\left(\widehat{L}_\phi - \frac{N_B}{L_e}\widehat{D}\right) + \frac{k^2\mathrm{R}_n}{\widehat{L}\widehat{L}_\phi(\widehat{D}^2 - k^2)}\left(\widehat{L}L_e + N_A(\widehat{D}^2 - k^2)\left(\widehat{L}_\phi - \frac{N_B}{L_e}\widehat{D}\right)\right).$$

Уравнение (44) дополняется граничными условиями только в z-направлении:

$$U_z = \frac{d^2U_z}{dz^2} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad z = 1. \qquad (45)$$

Уравнение (44) описывает конвективные явления в тонком слое неоднородно вращающейся электропроводящей наножидкости во внешнем спиральном магнитном поле.

Выберем функцию U_z, удовлетворяющую свободным граничным условиям (45), в следующем виде:

$$U_z = U_{0z}\sin n\pi z \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (46)$$

где $U_{0z} = \mathrm{const}$ — амплитуда возмущений z-компоненты скорости. Подставляя (46) в (44) и проводя интегрирование по толщине слоя $z = (0, 1)$, получим дисперсионное уравнение для одномодового приближения ($n = 1$):

$$\mathrm{Ra} = \left[a^2\Gamma_A^4\Gamma_\eta(a^2\Gamma_A^2\Gamma_\phi^2\Gamma_\chi - m_0) + a^2\Gamma_A^2\Gamma_\phi^2\Gamma_\chi m_1 - \right.$$
$$\left. - \pi^2 a^2\Gamma_A^2\Gamma_\phi\left(\frac{N_B}{L_e}(1-2N_A)\Gamma_\phi + \frac{N_A N_B}{L_e}a^2\right)m_2\right] \times$$
$$\times \left[k^2\Gamma_\eta\Gamma_\phi(a^2\Gamma_\eta\Gamma_\phi\Gamma_A^4 + \frac{\pi^2}{L_e}(N_B - N_A)m_2)\right]^{-1}, \quad (47)$$

где введены обозначения

$$\Gamma_A^2 = (\gamma + a^2)(\gamma\mathrm{Pm} + a^2) + \pi^2\mathrm{Q}, \quad \Gamma_\chi = \gamma\,\mathrm{Pr} + a^2,$$
$$\Gamma_\eta = \gamma\mathrm{Pm} + a^2, \quad \Gamma_\phi = \gamma\mathrm{Pr}L_e + a^2,$$
$$a^2 = \pi^2 + k^2, \quad m_0 = k^2\mathrm{R}_n\Gamma_\eta\Gamma_\phi(L_e\Gamma_\chi + a^2 N_A),$$

$$m_1 = \pi^2\mathrm{Ta}(1+\mathrm{Ro})\Gamma_\eta^3 + \pi^4\mathrm{QTaRoPm}\Gamma_\eta - $$
$$- 4\pi^4\mathrm{Q}^2\xi^2\Gamma_\eta - 4\pi^2\mathrm{Q}\xi^2\Gamma_A^2\mathrm{Rb}\Gamma_\eta,$$

$$m_2 = 2\pi^2\mathrm{Q}\xi\sqrt{\mathrm{Ta}}[(2+\mathrm{Ro})\Gamma_\eta^2 + \mathrm{PmRo}(\pi^2\mathrm{Q} - \Gamma_A^2)].$$

В отсутствие азимутального магнитного поля ($\xi = 0$) и наночастиц ($\mathrm{R}_n = N_B = 0$) дисперсионное уравнение (47) совпадает с результатами работы [12], а при $\xi \neq 0$ и $\mathrm{R}_n = N_B = 0$ — с результатами работы [15].

4. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СТАНДАРТНОЙ МВН В ТОНКИХ СЛОЯХ НАНОЖИДКОСТИ

Рассмотрим случай, когда температура на границах слоя наножидкости одинаковая ($\mathrm{Ra} = N_A = 0$) и внешнее азимутальное магнитное поле отсутствует ($\xi = 0$). Тогда из уравнения (47) мы получим дисперсионное уравнение для стандартной МВН в тонком слое наножидкости в виде полинома шестой степени по γ:

$$\mathcal{P}(\gamma) \equiv a_0\gamma^6 + a_1\gamma^5 + a_2\gamma^4 + a_3\gamma^3 + $$
$$+ a_4\gamma^2 + a_5\gamma + a_6 = 0, \quad (48)$$

где коэффициенты a_j $(j = 0,\ldots,6)$ имеют вид

$$a_0 = \mathrm{Pr}^2\mathrm{Pm}^2 L_e a^2,$$

$$a_1 = 2\mathrm{Pr}^2\mathrm{Pm}L_e a^4(1+\mathrm{Pm}) + \mathrm{Pr}(1+L_e)a^4\mathrm{Pm}^2,$$

$$a_2 = \mathrm{Pr}^2 L_e[a^6(1+4\mathrm{Pm}+\mathrm{Pm}^2) + 2a^2\mathrm{Pm}\pi^2\mathrm{Q} + $$
$$+ \pi^2\mathrm{Pm}^2\mathrm{Ta}(1+\mathrm{Ro})] + 2a^6(1+L_e)\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Pm}(1+\mathrm{Pm}) + $$
$$+ a^6\mathrm{Pm}^2 - k^2\mathrm{R}_n L_e\mathrm{Pm}^2,$$

$$a_3 = \mathrm{Pr}^2 L_e[2a^8(1+\mathrm{Pm}) + 2\pi^2 a^4\mathrm{Q}(1+\mathrm{Pm}) + $$
$$+ 2\pi^2 a^2\mathrm{Pm}\ \mathrm{Ta}(1+\mathrm{Ro})] + a^2(1+L_e)\times$$
$$\times \mathrm{Pr}[a^6(1+4\mathrm{Pm}+\mathrm{Pm}^2) + 2a^2\mathrm{Pm}\pi^2\mathrm{Q} + $$
$$+ \pi^2\mathrm{Pm}^2\mathrm{Ta}(1+\mathrm{Ro})] + 2a^8\mathrm{Pm}(1+\mathrm{Pm}) - $$
$$- k^2\mathrm{R}_n L_e(\mathrm{PrPm}a^2(2+\mathrm{Pm}) + a^2\mathrm{Pm}^2),$$

$$a_4 = a^2\,\mathrm{Pr}(1+L_e)[2a^8(1+\mathrm{Pm}) + 2\pi^2 a^4\mathrm{Q}(1+\mathrm{Pm}) + $$
$$+ 2\pi^2 a^2\mathrm{Pm}\ \mathrm{Ta}(1+\mathrm{Ro})] + \mathrm{Pr}^2 L_e[a^2(a^4+\pi^2\mathrm{Q})^2 + $$
$$+ \pi^2 a^4\mathrm{Ta}(1+\mathrm{Ro}) + \pi^4\mathrm{PmRoTaQ}] + $$
$$+ a^4[a^6(1+4\mathrm{Pm}+\mathrm{Pm}^2) + 2a^2\mathrm{Pm}\pi^2\mathrm{Q} + $$
$$+ \pi^2\mathrm{Pm}^2\mathrm{Ta}(1+\mathrm{Ro})] - k^2\mathrm{R}_n L_e(\mathrm{Pr}(a^4(1+2\mathrm{Pm}) + $$
$$+ \pi^2\mathrm{QPm}) + a^4\mathrm{Pm}(2+\mathrm{Pm})),$$

$$a_5 = a^2(1+L_e)\,\mathrm{Pr}[a^2(a^4+\pi^2\mathrm{Q})^2 + \pi^2 a^4\mathrm{Ta}(1+\mathrm{Ro}) + $$
$$+ \pi^4\mathrm{PmRoTaQ}] + a^4[2a^8(1+\mathrm{Pm}) + 2\pi^2 a^4\mathrm{Q}(1+\mathrm{Pm}) + $$
$$+ 2\pi^2 a^2\mathrm{Pm}\ \mathrm{Ta}(1+\mathrm{Ro})] - k^2\mathrm{R}_n L_e(a^2\mathrm{Pr}(a^4+\pi^2\mathrm{Q}) + $$
$$+ a^6(1+2\mathrm{Pm}) + \pi^2 a^2\mathrm{QPm}),$$

$$a_6 = a^4[a^2(a^4+\pi^2\mathrm{Q})^2 + \pi^2 a^4\mathrm{Ta}(1+\mathrm{Ro}) + $$
$$\pi^4\mathrm{PmRoTaQ}] - k^2 a^4(a^4+\pi^2\mathrm{Q})\mathrm{R}_n L_e.$$

В предельном случае, когда нет наночастиц, т. е. для «чистой» электропроводящей жидкости, дисперсионное уравнение (48) совпадает с результатами работы [13]. Аналитическое решение уравнения (48) в общем случае невозможно. Однако вывод об устойчивости возмущений, описываемых уравнением (48) с действительными коэффициентами, можно сделать, не решая его, а лишь анализируя его коэффициенты с применением критериев Рауса–Гурвица или Льенара–Шипара [38]. В последнем критерии число детерминантных неравенств примерно вдвое меньше, чем в условиях Рауса–Гурвица, поэтому целесообразно его использование. Критерий Льенара–Шипара асимптотической устойчивости возмущений, описываемых алгебраическим уравнением (48), состоит в следующем. Для того чтобы многочлен $\mathcal{P}(\gamma)$ имел все корни с отрицательными вещественными частями, необходимо и достаточно, чтобы

а) все коэффициенты многочлена $\mathcal{P}(\gamma)$ были положительны: $a_j > 0$, $j = 0,\ldots,6$;

б) имели место неравенства для определителей Гурвица: $\Delta_{j-1} > 0$, $\Delta_{j-3} > 0,\ldots$, где Δ_m — обозначает определитель Гурвица порядка m:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdot\cdot \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdot\cdot \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdot\cdot \\ & \ldots & & a_m \end{vmatrix}.$$

Используя алгоритм Льенара–Шипара, получим необходимые и достаточные условия устойчивости:

$$a_j > 0, \quad j = 0, \ldots, 6, \quad \Delta_3 > 0, \quad \Delta_5 > 0. \qquad (49)$$

Подставляя значения коэффициентов a_j в условия (49), находим следующие неравенства:

1. $(a_0 > 0) \Rightarrow \mathrm{Pr}^2\mathrm{Pm}^2 L_e a^2 > 0$,

$$(a_1 > 0) \Rightarrow 2\mathrm{Pr}^2\mathrm{Pm} L_e a^4(1+\mathrm{Pm}) + \\ + \mathrm{Pr}(1+L_e)a^4\mathrm{Pm}^2 > 0.$$

Эти неравенства выполняются автоматически.

$$\mathbf{2}.\,(a_2 > 0) \Rightarrow \mathrm{Pr}^2 L_e[a^6(1+4\mathrm{Pm}+\mathrm{Pm}^2) + \\ + 2a^2\mathrm{Pm}\pi^2\mathrm{Q} + \pi^2\mathrm{Pm}^2\mathrm{Ta}(1+\mathrm{Ro})] + \\ + 2a^6(1+L_e)\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Pm}(1+\mathrm{Pm}) + \\ + a^6\mathrm{Pm}^2 > k^2\mathrm{R}_n L_e \mathrm{Pm}^2.$$

Отсюда видно, что диссипативные процессы естественно приводят к стабилизации устойчивости течений наножидкости. Стабилизирующими факторами также выступают однородное магнитное поле и неоднородное вращение, если профиль угловой скорости вращения соответствует положительным числам Россби ($\mathrm{Ro} > 0$). Напротив, концентрация наночастиц приводит к дестабилизации течения наножидкости.

$$\mathbf{3}.\,(a_3 > 0) \Rightarrow \mathrm{Pr}^2 L_e[2a^8(1+\mathrm{Pm}) + 2\pi^2 a^4\mathrm{Q}(1+\mathrm{Pm}) + \\ + 2\pi^2 a^2\mathrm{Pm}\ \mathrm{Ta}(1+\mathrm{Ro})] + a^2(1+L_e)\,\mathrm{Pr}\,\times \\ \times [a^6(1+4\mathrm{Pm}+\mathrm{Pm}^2) + 2a^2\mathrm{Pm}\pi^2\mathrm{Q} + \\ + \pi^2\mathrm{Pm}^2\mathrm{Ta}(1+\mathrm{Ro})] + 2a^8\mathrm{Pm}(1+\mathrm{Pm}) > k^2\mathrm{R}_n L_e \times \\ \times (\mathrm{Pr}\mathrm{Pm}a^2(2+\mathrm{Pm}) + a^2\mathrm{Pm}^2).$$

Отсюда мы видим, что однородное магнитное поле и неоднородное вращение с положительными числами Россби ($\mathrm{Ro} > 0$) также оказывают стабилизирующее действие, а концентрация наночастиц (члены с концентрационным числом Рэлея R_n) оказывает дестабилизирующее влияние. Для «чистой», идеально электропроводящей, жидкости в однородном магнитном поле это неравенство совпадает с известным критерием устойчивости Велихова [20]:

$$2\pi^2\mathrm{Q}\mathrm{Pm}^{-1} + \frac{\pi^2}{a^2}\mathrm{Ta}(1+\mathrm{Ro}) > 0,$$

или, при переходе к размерным переменным

$$\frac{\pi^2\mathrm{Q}}{\mathrm{Pm}} \to \frac{h^4}{\nu^2}\omega_A^2, \ \mathrm{Ta}(1+\mathrm{Ro}) \to \frac{4\Omega^2 h^4}{\nu^2}(1+\mathrm{Ro}),$$

$$\frac{\pi^2}{a^2} \to \xi^2 = \frac{k_z^2}{k_z^2 + k_R^2},$$

получим

$$\omega_A^2 + 2\Omega^2\xi^2(1+\mathrm{Ro}) > 0,$$

где $\omega_A = \sqrt{\mu_e k_z^2 H_0^2/4\pi\rho_0}$ — альфвеновская частота.

4. Неравенства $a_4 > 0$ и $a_5 > 0$ не содержат новых условий стабилизации возмущений.

5. Неравенство $a_6 > 0$ запишем в виде

$$\mathrm{Ro} > -\frac{a^2(a^4+\pi^2\mathrm{Q})^2 + \pi^2 a^4\mathrm{Ta}}{\pi^2\mathrm{Ta}(a^4+\pi^2\mathrm{Q}\mathrm{Pm})} + \\ + \frac{k^2(a^4+\pi^2\mathrm{Q})\mathrm{R}_n L_e}{\pi^2\mathrm{Ta}(a^4+\pi^2\mathrm{Q}\mathrm{Pm})} = \mathrm{Ro}_{cr}, \qquad (50)$$

где параметр Ro_{cr} — критическое число Россби на границе устойчивости, соответствующее нейтральному состоянию $\gamma = 0$. Выражение (50) в предельном случае «чистой» электропроводящей жидкости переходит в известное выражение для критического числа Россби Ro [17]:

$$\mathrm{Ro}_{cr} = -\frac{a^2(a^4+\pi^2\mathrm{Q})^2 + \pi^2 a^4\mathrm{Ta}}{\pi^2\mathrm{Ta}(a^4+\pi^2\mathrm{Q}\mathrm{Pm})},$$

или, при переходе к размерным переменным

$$\frac{\pi^2\mathrm{Q}}{a^4} \to \frac{\omega_A^2}{\omega_\nu\omega_\eta}, \quad \frac{\pi^2\mathrm{Q}\mathrm{Pm}}{a^4} \to \frac{\omega_A^2}{\omega_\eta^2}, \quad \frac{\mathrm{Ta}}{a^4} \to \frac{4\Omega^2}{\omega_\nu^2},$$

$$\frac{\pi^2}{a^2} \to \alpha^2 = \left(\frac{k_z}{|\mathbf{k}|}\right)^2,$$

находим

$$\mathrm{Ro}_{cr} = -\frac{(\omega_A^2 + \omega_\nu\omega_\eta)^2 + 4\alpha^2\Omega^2\omega_\eta^2}{4\Omega^2\alpha^2(\omega_A^2 + \omega_\eta^2)}.$$

Здесь $\omega_\nu = \nu|\mathbf{k}|^2$, $\omega_\eta = \eta|\mathbf{k}|^2$ — частоты вязкостной и омической диссипаций, $|\mathbf{k}|^2 = k_R^2 + k_z^2$.

Перейдем теперь к условиям устойчивости, состоящим из неравенств с определителями Гурвица (49). Для определителя Δ_3,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 + a_0a_1a_5 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2,$$

критерий устойчивости имеет вид

$$a_1a_2a_3 + a_0a_1a_5 > a_1^2a_4 + a_0a_3^2. \qquad (51)$$

Для второго определителя Гурвица из условия (49),

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix} = a_1 a_2 (a_3 a_4 a_5 - a_2 a_5^2) - \\ - a_1 a_4 (a_1 a_4 a_5 - a_0 a_5^2) + a_1 a_6 (a_1 a_2 a_5 - a_0 a_3 a_5) - \\ - a_3 a_0 (a_3 a_4 a_5 - a_2 a_5^2) + a_5 a_0 (a_1 a_4 a_5 - a_0 a_5^2),$$

получим следующий критерий устойчивости:

$$a_4 a_5 (a_1 a_2 a_3 + a_0 a_1 a_5 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2) + \\ + a_1^2 a_2 a_5 a_6 + a_0 a_5^2 (a_2 a_3 + a_1 a_4) > \\ > a_0 a_1 a_3 a_5 a_6 + a_5^2 (a_1 a_2^2 + a_0^2 a_5). \quad (52)$$

Критерии устойчивости (51) и (52) показывают, что концентрация наночастиц оказывает дестабилизирующее действие на устойчивость осесимметричных возмущений.

Используя выражение для критического числа Россби (50), численным методом определим области развития стандартной МВН в «чистой» жидкости и наножидкости. На рис. 2 выделены области неустойчивости для чисел Россби $\mathrm{Ro} < \mathrm{Ro}_{cr}$ при изменении параметра вращения Ta (числа Тейлора) в плоскости (k, Ro), где k — безразмерное радиальное волновое число. Черным цветом на рис. 2 показаны области неустойчивости в «чистой» жидкости, а серым цветом — в наножидкости. На рис. 2 видно, что при небольших числах Тейлора $\mathrm{Ta} = 100, 300$ область развития стандартной МВН в наножидкости (рис. 2*а,б*) намного больше области неустойчивости для «чистой» жидкости, $\mathrm{R}_n = 0$. Напротив, при больших числах Тейлора $\mathrm{Ta} = 2000$ области неустойчивости для наножидкости и «чистой» жидкости уже не так сильно различаются. Значения параметров $\mathrm{R}_n = 0.122$, $L_e = 5000$, $\mathrm{Pr} = 5$, $N_A = 5$, $N_B = 7.5 \cdot 10^{-4}$ для наножидкости (например $\mathrm{Al_2O_3}$–вода) взяты из работы [11].

На рис. 3 представлены численные результаты темпа роста стандартной МВН, т. е. для положительного вещественного корня ($\mathrm{Re}\,\gamma > 0$) дисперсионного уравнения (48), в зависимости от радиального волнового числа k. Считая параметры наножидкости фиксированными ($\mathrm{Pr} = 5$, $\mathrm{R}_n = 0.122$, $L_e = 5000$, рис. 3*а*), видим, что темпы роста осесимметричных возмущений в случае рэлеевского профиля вращения ($\mathrm{Ro} = -1$) выше, чем для случая кеплеровского ($\mathrm{Ro} = -3/4$) профиля вращения при

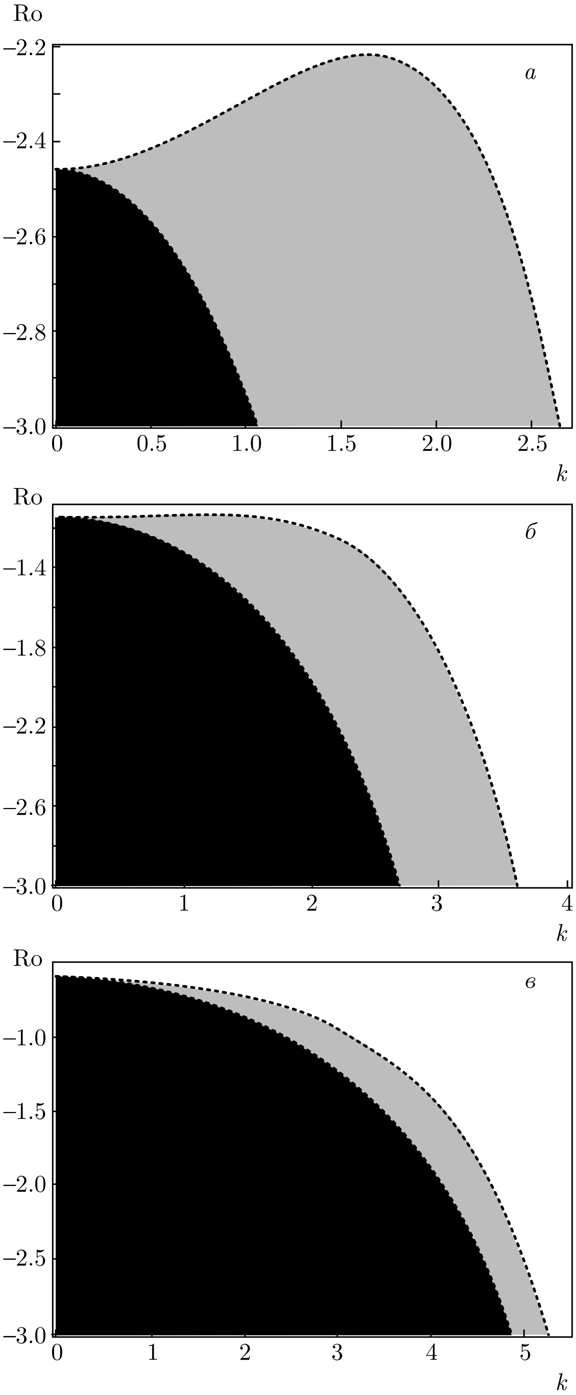

Рис. 2. Черным цветом показаны области, в которых возникает стандартная МВН в «чистой» жидкости, и серым цветом — в наножидкости для параметров $\mathrm{Q} = 10$, $\mathrm{Pm} = 1$, $\mathrm{R}_n = 0.122$, $L_e = 5000$ и чисел Тейлора $\mathrm{Ta} = 100$ (*а*), 300 (*б*), 2000 (*в*)

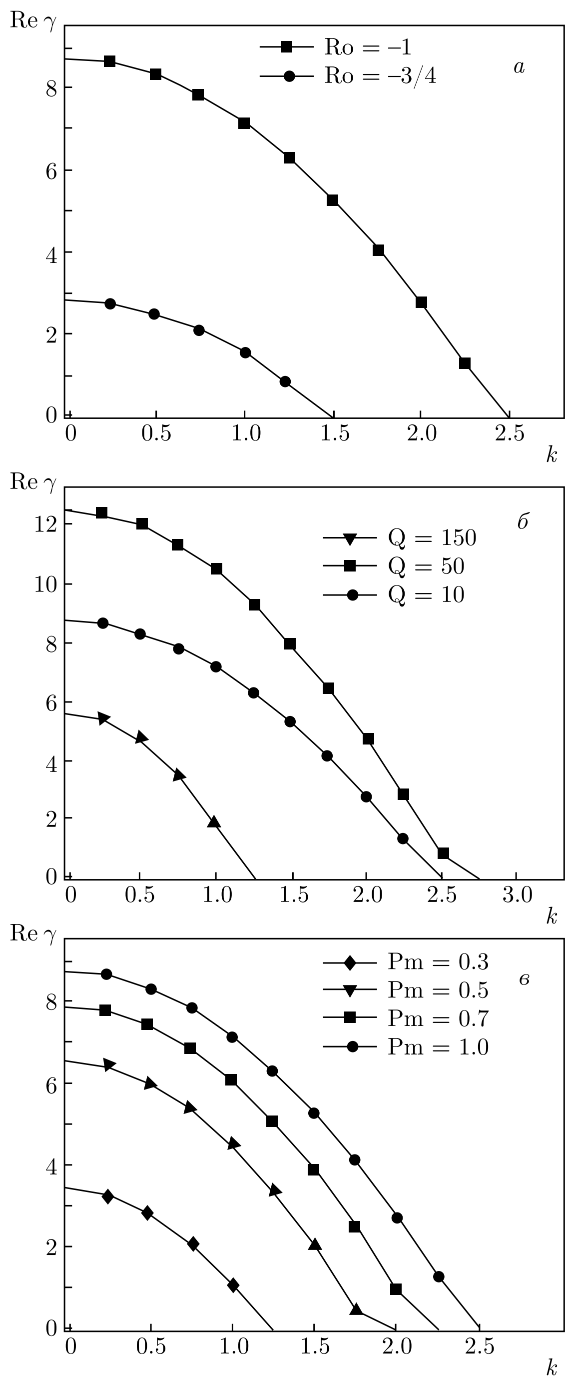

Рис. 3. Зависимости инкремента ($\mathrm{Re}\,\gamma > 0$) стандартной МВН в наножидкости от радиального волнового числа k. Показаны темпы роста возмущений для рэлеевского ($\mathrm{Ro} = -1$) и кеплеровского ($\mathrm{Ro} = -3/4$) профилей вращения (a), для разных значений величины аксиального магнитного поля (числа Чандрасекара) $\mathrm{Q} = 10,\ 50,\ 150$ ($б$) и для различных значений магнитного числа Прандтля $\mathrm{Pm} = 0.3, 0.5, 0.7, 1.0$ ($в$)

числах Тейлора $\mathrm{Ta} = 2000$. На рис. 3$б$ показаны темпы роста стандартной МВН при различных значениях аксиального магнитного поля $\mathrm{Q} = 10, 50, 150$ для рэлеевского профиля вращения ($\mathrm{Ro} = -1$) и числа Тейлора $\mathrm{Ta} = 2000$. Здесь мы видим, что увеличение напряженности аксиального магнитного поля H_{0z} может приводить как к увеличению инкремента неустойчивости ($\mathrm{Q} = 10 \to \mathrm{Q} = 50$), так и к уменьшению инкремента при $\mathrm{Q} = 50 \to \mathrm{Q} = 150$. Вариации магнитного числа Прандтля Pm также могут существенно повлиять на развитие стандартной МВН в наножидкости (рис. 3$в$). Для фиксированных параметров $\mathrm{Ta} = 2000$, $\mathrm{Q} = 10$, $\mathrm{Ro} = -1$ мы наблюдаем, что темпы роста возмущений значительно ниже при числах Прандтля $\mathrm{Pm} \ll 1$.

Отметим, что при изменении физических характеристик наножидкости, например электропроводности σ, теплопроводности χ и вязкости ν, от которых зависят безразмерные параметры Q, Pr, Pm, Ta, R_n, при рэлеевском профиле вращения ($\mathrm{Ro} = -1$) вполне возможно развитие стандартной МВН.

5. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ АЗИМУТАЛЬНОЙ МВН В ТОНКИХ СЛОЯХ НАНОЖИДКОСТИ

Рассмотрим неоднородно вращающийся слой наножидкости с постоянной и одинаковой температурой на границах слоя во внешнем азимутальном магнитном поле $H_{0\varphi}$. В этом случае осевое магнитное поле равно нулю, $H_{0z} = 0$, и $\mathrm{Ra} = N_A = 0$. При этом стационарный поток наножидкости совпадает с направлением магнитного поля. Таким образом, такая геометрия задачи соответствует азимутальной МВН [17]. Дисперсионное уравнение для азимутальной МВН в тонких слоях наножидкости получим из уравнения (47), полагая $H_{0z} = 0$:

$$\mathcal{P}(\gamma) \equiv a_0\gamma^6 + a_1\gamma^5 + a_2\gamma^4 + a_3\gamma^3 + a_4\gamma^2 + a_5\gamma + a_6 = 0, \quad (53)$$

где коэффициенты a_j $(j = 0, \ldots, 6)$ имеют вид

$$a_0 = \mathrm{Pr}^2\mathrm{Pm}^2 L_e a^2, \quad a_1 = \mathrm{Pr}(1 + L_e)a^4\mathrm{Pm}^2,$$

$$\begin{aligned} a_2 = a^6[&\mathrm{Pm}^2 + 2\mathrm{Pm}(1+\mathrm{Pm})\,\mathrm{Pr}(1+L_e) + \\ &+ \mathrm{Pr}^2 L_e(1+\mathrm{Pm}^2) + 4\mathrm{Pm}\mathrm{Pr}^2 L_e] + \\ &+ \pi^2\mathrm{Pm}^2\mathrm{Pr}^2\mathrm{Ta}(1+\mathrm{Ro})L_e - \\ &- k^2\mathrm{R}_n L_e\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Pm}^2 - 4\pi^2\mathrm{Q}_\varphi\mathrm{Rb}\mathrm{Pm}\mathrm{Pr}^2 L_e, \end{aligned}$$

$$a_3 = a^8[2\mathrm{Pm}(1+\mathrm{Pm})+\mathrm{Pr}(1+L_e)(1+4\mathrm{Pm}+\mathrm{Pm}^2)] + \\ + \pi^2 a^2 \mathrm{Ta}(1+\mathrm{Ro})(2\mathrm{Pm}\mathrm{Pr}^2 L_e + \mathrm{Pm}^2\,\mathrm{Pr}(1+L_e)) - \\ - k^2 a^2 \mathrm{R}_n L_e(\mathrm{Pm}^2 + \mathrm{Pm}\,\mathrm{Pr}(2+\mathrm{Pm})) - \\ - 4\pi^2 a^2 \mathrm{Q}_\varphi \mathrm{Rb}(\mathrm{Pr}^2 L_e(1+\mathrm{Pm}) + \mathrm{Pm}\mathrm{Pr}(1+L_e)),$$

$$a_4 = a^{10}[2\,\mathrm{Pr}(1+\mathrm{Pm})(1+L_e) + \mathrm{Pr}^2 L_e] + \\ + \pi^2 a^4 \mathrm{Ta}(1+\mathrm{Ro})(\mathrm{Pr}^2 L_e + 2\mathrm{Pm}\mathrm{Pr}(1+L_e) + \mathrm{Pm}^2) - \\ - k^2 a^4 \mathrm{R}_n L_e(\mathrm{Pm}(2+\mathrm{Pm}) + \mathrm{Pr}(2\mathrm{Pm}+1)) - \\ - 4\pi^2 a^4 \mathrm{Q}_\varphi \mathrm{Rb}(\mathrm{Pr}^2 L_e + \mathrm{Pr}(1+\mathrm{Pm})(1+L_e) + \mathrm{Pm}),$$

$$a_5 = a^{12}[2(1+\mathrm{Pm}) + \mathrm{Pr}(1+L_e)] + \pi^2 a^6 \mathrm{Ta}(1+\mathrm{Ro}) \times \\ \times (\mathrm{Pr}(1+L_e) + 2\mathrm{Pm}) - k^2 a^6 \mathrm{R}_n L_e(\mathrm{Pr}+2\mathrm{Pm}+1) - \\ - 4\pi^2 a^6 \mathrm{Q}_\varphi \mathrm{Rb}(\mathrm{Pr}(1+L_e) + 1 + \mathrm{Pm}),$$

$$a_6 = a^{14} + \pi^2 a^8 \mathrm{Ta}(1+\mathrm{Ro}) - k^2 a^8 \mathrm{R}_n L_e - 4\pi^2 a^8 \mathrm{Q}_\varphi \mathrm{Rb}.$$

Здесь $\mathrm{Q}_\varphi = \mu_e H_{0\varphi}^2 h^4/4\pi\rho_0 R_0^2 \nu\eta$ — азимутальное число Чандрасекара. Вещественность коэффициентов a_j в уравнении (53) позволяет нам использовать критерий асимптотической устойчивости Льенара–Шипара, из которого следует положительность коэффициентов $a_j > 0$ и определителей Гурвица Δ_3, $\Delta_5 > 0$. Из явного вида коэффициентов a_j следует, что неоднородное вращение с положительными числами Россби ($\mathrm{Ro} > 0$) оказывает стабилизирующее действие, а концентрация наночастиц (члены с концентрационным числом Рэлея R_n) — дестабилизирующее влияние. Азимутальное магнитное поле $H_{0\varphi}$ оказывает как стабилизирующее, так и дестабилизирующее влияние в зависимости от знака магнитного числа Россби Rb. Условие $a_6 > 0$ дает следующий критерий устойчивости:

$$\mathrm{Ro} > -1 - \frac{a^6}{\pi^2 \mathrm{Ta}} + \frac{k^2 \mathrm{R}_n L_e}{\pi^2 \mathrm{Ta}} + \frac{4\mathrm{Q}_\varphi \mathrm{Rb}}{\mathrm{Ta}} = \mathrm{Ro}_{cr}, \quad (54)$$

или, в размерных переменных,

$$\mathrm{Ro} > -1 - \frac{\omega_\nu^2}{4\alpha^2\Omega^2} + \mathrm{Rb}\frac{\omega_{A\varphi}^2}{\Omega^2}\,\frac{\omega_\nu}{\omega_\eta} + (1-\alpha^2)\frac{\mathrm{R}_n L_e \omega_\nu^2}{4\alpha^2\Omega^2(|\mathbf{k}|h)^4}.$$

Для случая «чистой» электропроводящей жидкости критерий устойчивости (54) при $\mathrm{R}_n = 0$ переходит в более простой критерий, полученный в работе [39]. При $\omega_{A\varphi} = 0$ и $\mathrm{R}_n = 0$ критерий устойчивости (54) согласуется с результатом работы [40]. Очевидно, что вращающийся поток идеальной наножидкости при $\omega_\nu = \omega_\eta$ и $\omega_\nu \to 0$, на который действует азимутальное магнитное поле, устойчив относительно осесимметричных возмущений, если выполняется неравенство

$$\mathrm{Ro} > -1 + \mathrm{Rb}\frac{\omega_{A\varphi}^2}{\Omega^2}. \quad (55)$$

Течение идеальной «чистой» жидкости было рассмотрено в работе [19], в которой кинетическая и магнитная энергии равны друг другу:

$$\frac{\rho_0(\Omega R)^2}{2} = \frac{H_{0\varphi}^2}{4\pi}.$$

В [19] было найдено точное стационарное решение идеальной магнитной гидродинамики: $\Omega = H_{0\varphi}/R\sqrt{2\pi\rho_0}, P = \mathrm{const}$, называемое чандрасекаровской эквипартицией. Там же было доказано, что это течение предельно устойчиво. Из эквипартиции Чандрасекара следует, что [17]

$$\omega_{A\varphi} = \frac{\mu_e H_{0\varphi}^2}{4\pi\rho_0 R_0^2} = \Omega, \quad \mathrm{Ro} = \mathrm{Rb} = -1. \quad (56)$$

Случай чандрасекаровской эквипартиции (56) удовлетворяет неравенству (55). Следовательно, критерии устойчивости для идеальных наножидкостей и «чистых» жидкостей сопадают с (55).

Приступим к исследованию вопроса о развитии азимутальной МВН в наножидкости для осесимметричных возмущений при числах Россби $\mathrm{Ro} < \mathrm{Ro}_{cr}$. Для этой цели численным способом построим области развития неустойчивости для различных значений параметров вращения Ta (числа Тейлора), азимутального магнитного поля Q_φ (азимутальное число Чандрасекара) и магнитного числа Россби Rb. Для параметров $\mathrm{Rb} = -1$, $\mathrm{Q}_\varphi = 10$, $\mathrm{R}_n = 0.122$, $L_e = 5000$ на рис. 4 показаны области развития азимутальной МВН в плоскости (k, Ro) для различных чисел Тейлора $\mathrm{Ta} = 100, 300, 2000$. На рис. 4 видно, что наличие концентрации наночастиц способствует увеличению области неустойчивости по сравнению с «чистой» электропроводящей средой. На рис. 5 показаны области развития азимутальной МВН с положительным профилем неоднородного магнитного поля ($\mathrm{Rb} = 1/2$) в плоскости (k, Ro) для различных азимутальных чисел Чандрасекара $\mathrm{Q}_\varphi = 10, 50, 100$. Остальные параметры, $\mathrm{Ta} = 100$, $\mathrm{R}_n = 0.122$, $L_e = 5000$, считались фиксированными. Здесь мы также видим (см. рис. 5), что наличие концентрации наночастиц способствует увеличению области неустойчивости по сравнению с «чистой» электропроводящей средой. Кроме того, при увеличении величины азимутального магнитного поля (числа Q_φ) граница области неустойчивости смещается в сторону положительных чисел Россби ($\mathrm{Ro} > 0$).

С помощью численного анализа дисперсионного уравнения (53) определим зависимость инкремента ($\mathrm{Re}\,\gamma > 0$) азимутальной МВН от радиального волнового числа k для ранее приведенных па-

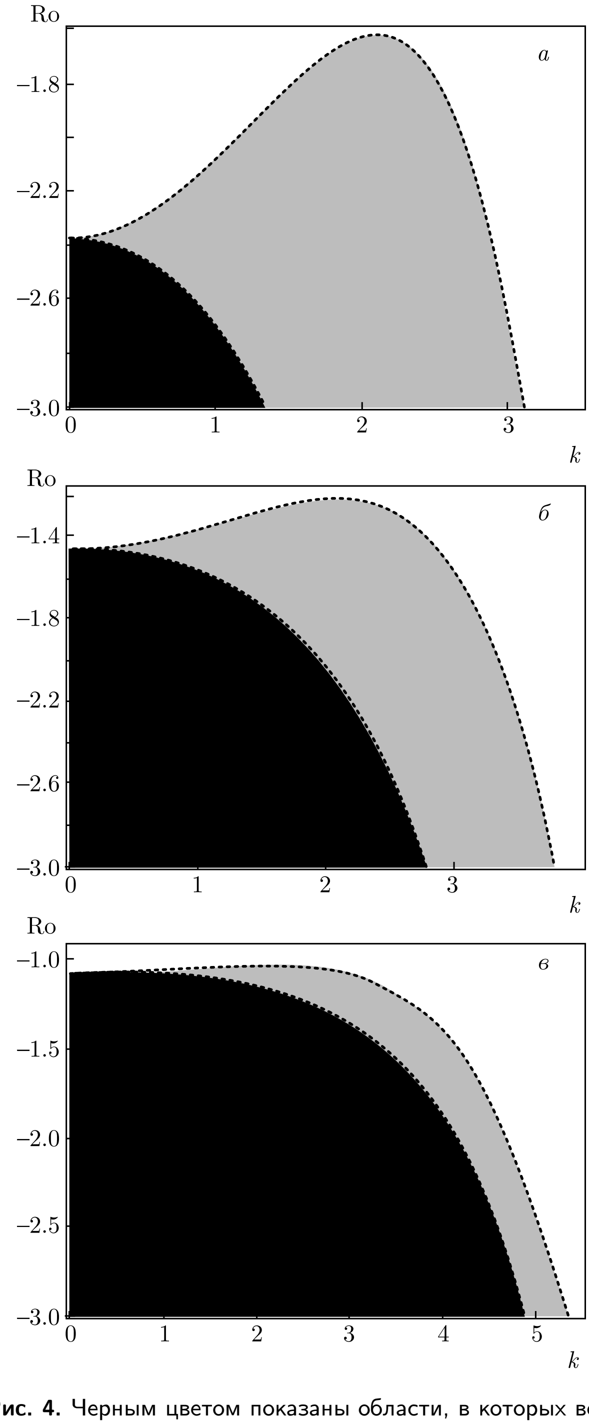

Рис. 4. Черным цветом показаны области, в которых возникает азимутальная МВН в «чистой» жидкости, и серым цветом — в наножидкости. Графики построены для чисел Тейлора $\mathrm{Ta} = 100$ (a), 300 ($б$), 2000 ($в$) при фиксированных параметрах $\mathrm{Q}_\varphi = 10$, $\mathrm{Rb} = -1$, $\mathrm{R}_n = 0.122$, $L_e = 5000$

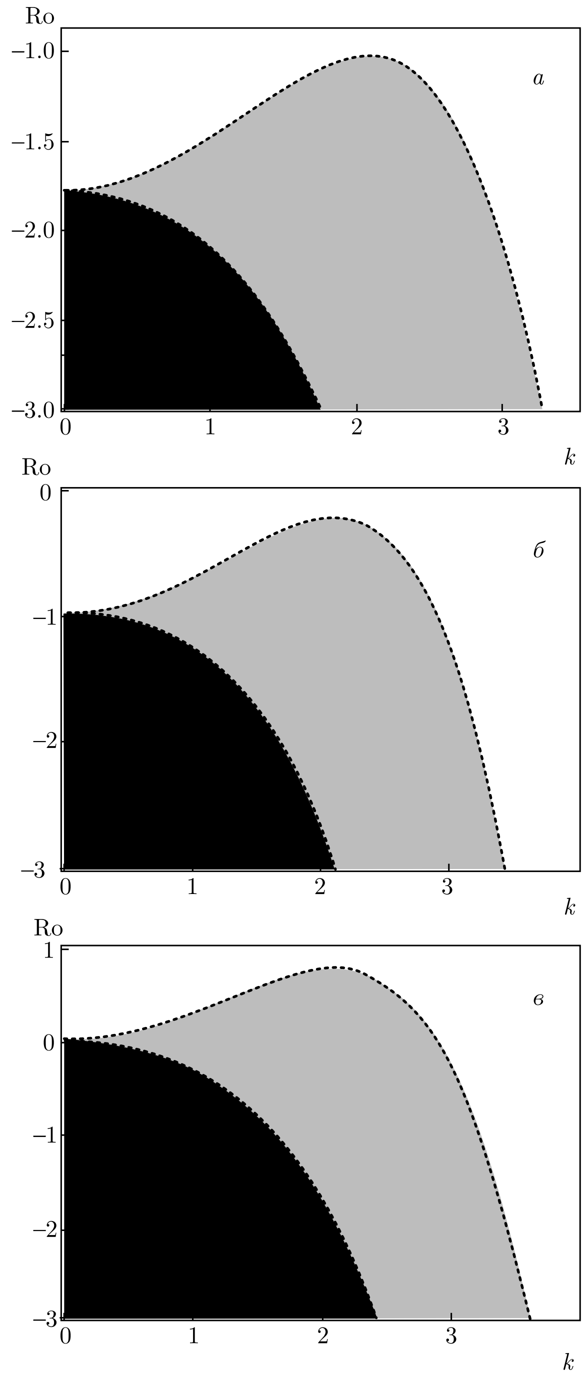

Рис. 5. Черным цветом показаны области, в которых возникает азимутальная МВН в «чистой» жидкости, и серым цветом — в наножидкости. Графики построены для азимутальных чисел Чандрасекара $\mathrm{Q}_\varphi = 10$ (a), 50 ($б$), 100 ($в$) при фиксированных параметрах $\mathrm{Ta} = 100$, $\mathrm{Rb} = 1/2$, $\mathrm{R}_n = 0.122$, $L_e = 5000$

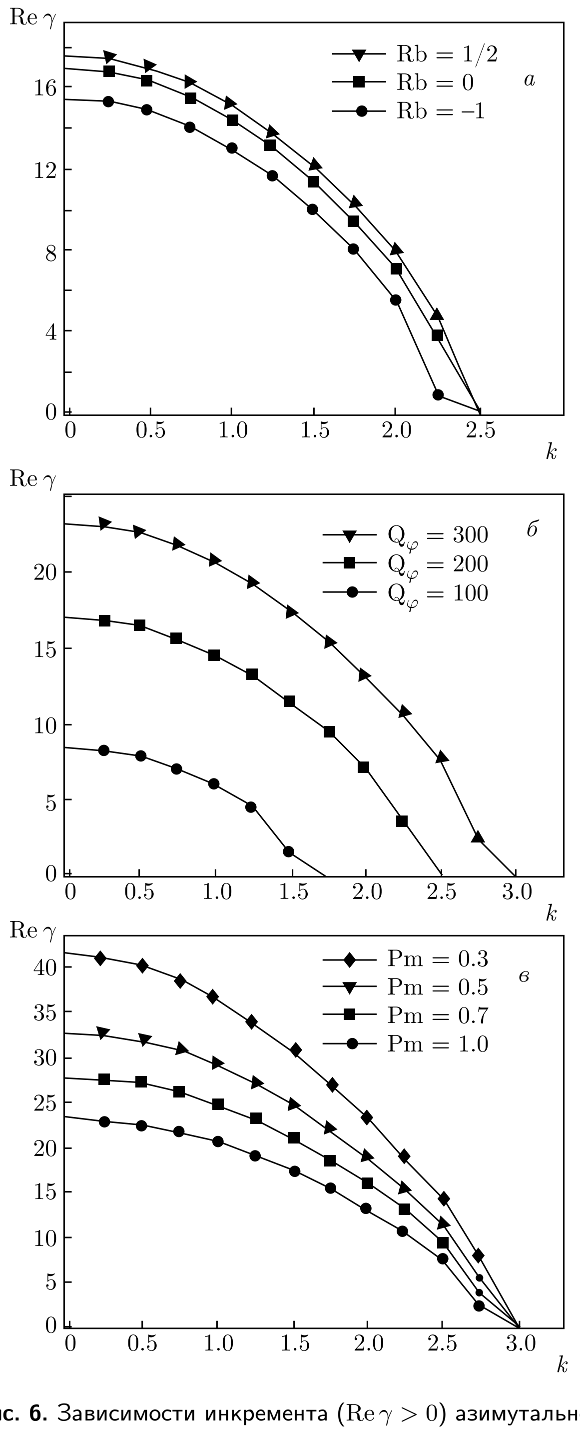

Рис. 6. Зависимости инкремента $(\mathrm{Re}\,\gamma > 0)$ азимутальной МВН в наножидкости от радиального волнового числа k. Показаны эффекты влияния неоднородного азимутального магнитного поля при $\mathrm{Rb} = -1, 0, 1/2$ (*а*), величины азимутального магнитного поля при $\mathrm{Q}_\varphi = 100, 200, 300$ (*б*) и магнитного числа Прандтля при $\mathrm{Pm} = 0.3, 0.5, 0.7, 1.0$ (*в*) на азимутальную МВН

раметров наножидкости. На рис. 6*а* показано влияние различных профилей неоднородного азимутального магнитного поля (магнитные числа Россби $\mathrm{Rb} = -1, 0, 1/2$) на инкремент азимутальной МВН для следующих параметров: $\mathrm{Ta} = 2000$, $\mathrm{Ro} = -1.2$, $\mathrm{Q}_\varphi = 10$, $\mathrm{Pm} = 1$. Отсюда мы видим, что темпы роста возмущений здесь выше для положительных магнитных чисел Россби ($\mathrm{Rb} > 0$). Далее, исследуем влияние эффекта усиления азимутального магнитного поля (азимутальные числа Чандрасекара $\mathrm{Q}_\varphi = 100$, 200, 300) на развитие азимутальной МВН для фиксированных параметров $\mathrm{Ta} = 300$, $\mathrm{Ro} = -1$, $\mathrm{Rb} = 1/2$, $\mathrm{Pm} = 1$. Как следует из результатов, показанных на рис. 6*б*, темпы роста возмущений становятся выше с увеличением напряженности азимутального магнитного поля $H_{0\varphi}$. На рис. 6*в* приведены численные результаты для инкремента $\mathrm{Re}\,\gamma(k)$ азимутальной МВН, полученные для различных значений магнитного числа Прандтля $\mathrm{Pm} = 0.3$, 0.5, 0.7, 1.0 при фиксированной величине азимутального магнитного поля $\mathrm{Q}_\varphi = 300$ и $\mathrm{Ta} = 300$, $\mathrm{Ro} = -1$, $\mathrm{Rb} = 1/2$. На рис. 6*в* видно увеличение темпов роста возмущений для магнитных чисел Прандтля $\mathrm{Pm} < 1$.

Таким образом, азимутальная МВН в наножидкости реализуется при увеличении неоднородного азимутального магнитного поля $H_{0\varphi} = CR^\alpha$ ($\alpha > 1$) с положительным профилем $\mathrm{Rb} > 0$ для магнитных чисел Прандтля $\mathrm{Pm} \le 1$.

6. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СПИРАЛЬНОЙ МВН В ТОНКИХ СЛОЯХ НАНОЖИДКОСТИ

В случае $\mathrm{Ra} = N_A = 0$ из уравнения (47) мы получим дисперсионное уравнение для спиральной МВН в тонких слоях наножидкости:

$$\mathcal{P}(\gamma) \equiv a_0\gamma^7 + a_1\gamma^6 + a_2\gamma^5 + a_3\gamma^4 + a_4\gamma^3 + \\ + a_5\gamma^2 + a_6\gamma + a_7 = 0, \quad (57)$$

где коэффициенты a_j $(j = 0, \ldots, 7)$ имеют вид

$$a_0 = A_0, \quad a_1 = A_1, \quad a_2 = A_2 - k^2\mathrm{R}_n L_e \,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Pm}^3,$$

$$a_3 = A_3 - k^2a^2\mathrm{R}_n L_e(\mathrm{Pm}^3 + \mathrm{Pr}\,\mathrm{Pm}^2(3 + \mathrm{Pm})),$$

$$a_4 = A_4 - C_0 - k^2\mathrm{R}_n L_e(\mathrm{Pr}\,\mathrm{Pm}^2(a^4 + \pi^2\mathrm{Q}) + \\ + a^4\mathrm{Pm}(\mathrm{Pr} + \mathrm{Pm})(3 + \mathrm{Pm})),$$

$$a_5 = A_5 - C_1 - k^2\mathrm{R}_n L_e(\mathrm{Pr}(2a^2\mathrm{Pm}(a^4 + \pi^2\mathrm{Q}) + \\ + a^6(1 + \mathrm{Pm})) + a^2\mathrm{Pm}^2(a^4 + \pi^2\mathrm{Q}) + a^6\mathrm{Pm}(3 + \mathrm{Pm})),$$

$$a_6 = A_6 - C_2 - k^2 \mathrm{R}_n L_e (2a^4 \mathrm{Pm}(a^4 + \pi^2 \mathrm{Q}) + a^8(1 + \mathrm{Pm}) + a^4(a^4 + \pi^2 \mathrm{Q}) \Pr),$$

$$a_7 = A_7 - C_3 - k^2 a^6 \mathrm{R}_n L_e (a^4 + \pi^2 \mathrm{Q}).$$

Здесь введены следующие обозначения для A_n ($n = 0, \ldots, 7$) и C_m ($m = 0, \ldots, 3$):

$$A_0 = a^2 \Pr^2 \mathrm{Pm}^3 L_e,$$

$$A_1 = a^4 \mathrm{Pm}^2 \Pr[2 \Pr L_e(1 + \mathrm{Pm}) + \Pr L_e + \mathrm{Pm}(1 + L_e)],$$

$$A_2 = a^6[\mathrm{Pm}^2(\mathrm{Pm} + \Pr(1 + L_e)) + 2\mathrm{Pm}(1 + \mathrm{Pm}) \times \Pr(\Pr L_e + \mathrm{Pm}(1 + L_e))] + (a^6(1 + 4\mathrm{Pm} + \mathrm{Pm}^2) + 2a^2 \mathrm{Pm} \pi^2 \mathrm{Q} + \pi^2 \mathrm{Pm}^2 \mathrm{Ta}(1 + \mathrm{Ro}) - 4\pi^2 \mathrm{Q} \xi^2 \mathrm{Rb} \mathrm{Pm}) \mathrm{Pm} \Pr^2 L_e,$$

$$A_3 = a^8[\mathrm{Pm}^2 + 2\mathrm{Pm}(1 + \mathrm{Pm})(\mathrm{Pm} + \Pr(1 + L_e))] + a^2 \Pr(a^6(1 + 4\mathrm{Pm} + \mathrm{Pm}^2) + 2a^2 \mathrm{Pm} \pi^2 \mathrm{Q} + \pi^2 \mathrm{Pm}^2 \mathrm{Ta}(1 + \mathrm{Ro}) - 4\pi^2 \mathrm{Q} \xi^2 \mathrm{Rb} \mathrm{Pm}) \times (\Pr L_e + \mathrm{Pm}(1 + L_e)) + (2a^4(1 + \mathrm{Pm})(a^4 + \pi^2 \mathrm{Q}) + 2a^2 \pi^2 \mathrm{Ta}(1 + \mathrm{Ro}) \mathrm{Pm} - 4\pi^2 a^2 \mathrm{Q} \xi^2 \mathrm{Rb}(1 + \mathrm{Pm})) \mathrm{Pm} \Pr^2 L_e,$$

$$A_4 = 2a^{10} \mathrm{Pm}(1 + \mathrm{Pm}) + a^4(a^6(1 + 4\mathrm{Pm} + \mathrm{Pm}^2) + 2a^2 \mathrm{Pm} \pi^2 \mathrm{Q} + \pi^2 \mathrm{Pm}^2 \mathrm{Ta}(1 + \mathrm{Ro}) - 4\pi^2 \mathrm{Q} \xi^2 \mathrm{Rb} \mathrm{Pm}) \times (\mathrm{Pm} + \Pr(1 + L_e)) + a^2 \Pr(2a^4(1 + \mathrm{Pm})(a^4 + \pi^2 \mathrm{Q}) + 2a^2 \pi^2 \mathrm{Ta}(1 + \mathrm{Ro}) \mathrm{Pm} - 4\pi^2 a^2 \mathrm{Q} \xi^2 \mathrm{Rb}(1 + \mathrm{Pm})) \times (\Pr L_e + \mathrm{Pm}(1 + L_e)) + (a^2(a^4 + \pi^2 \mathrm{Q})^2 + \pi^2 a^4 \mathrm{Ta}(1 + \mathrm{Ro}) + \pi^4 \mathrm{Pm} \mathrm{Ro} \mathrm{Ta} \mathrm{Q} - 4\pi^2 \mathrm{Q} \xi^2 \mathrm{Rb}(a^4 + \pi^2 \mathrm{Q}) - 4\pi^4 \mathrm{Q}^2 \xi^2) \mathrm{Pm} \Pr^2 L_e,$$

$$A_5 = a^6(a^6(1 + 4\mathrm{Pm} + \mathrm{Pm}^2) + 2a^2 \mathrm{Pm} \pi^2 \mathrm{Q} + \pi^2 \mathrm{Pm}^2 \mathrm{Ta}(1 + \mathrm{Ro}) - 4\pi^2 \mathrm{Q} \xi^2 \mathrm{Rb} \mathrm{Pm}) + a^4(2a^4(1 + \mathrm{Pm})(a^4 + \pi^2 \mathrm{Q}) + 2a^2 \pi^2 \mathrm{Ta}(1 + \mathrm{Ro}) \mathrm{Pm} - 4\pi^2 a^2 \mathrm{Q} \xi^2 \mathrm{Rb}(1 + \mathrm{Pm}))(\mathrm{Pm} + \Pr(1 + L_e)) + a^2 \Pr(a^2(a^4 + \pi^2 \mathrm{Q})^2 + \pi^2 a^4 \mathrm{Ta}(1 + \mathrm{Ro}) + \pi^4 \mathrm{Pm} \mathrm{Ro} \mathrm{Ta} \mathrm{Q} - 4\pi^2 \mathrm{Q} \xi^2 \mathrm{Rb}(a^4 + \pi^2 \mathrm{Q}) - 4\pi^4 \mathrm{Q}^2 \xi^2)(\Pr L_e + \mathrm{Pm}(1 + L_e)),$$

$$A_6 = a^6(2a^4(1 + \mathrm{Pm})(a^4 + \pi^2 \mathrm{Q}) + 2a^2 \pi^2 \mathrm{Ta}(1 + \mathrm{Ro}) \mathrm{Pm} - 4\pi^2 a^2 \mathrm{Q} \xi^2 \mathrm{Rb}(1 + \mathrm{Pm})) + a^4(\mathrm{Pm} + \Pr(1 + L_e)) \times (a^2(a^4 + \pi^2 \mathrm{Q})^2 + \pi^2 a^4 \mathrm{Ta}(1 + \mathrm{Ro}) + \pi^4 \mathrm{Pm} \mathrm{Ro} \mathrm{Ta} \mathrm{Q} - 4\pi^2 \mathrm{Q} \xi^2 \mathrm{Rb}(a^4 + \pi^2 \mathrm{Q}) - 4\pi^4 \mathrm{Q}^2 \xi^2),$$

$$A_7 = a^6(a^2(a^4 + \pi^2 \mathrm{Q})^2 + \pi^2 a^4 \mathrm{Ta}(1 + \mathrm{Ro}) + \pi^4 \mathrm{Pm} \mathrm{Ro} \mathrm{Ta} \mathrm{Q} - 4\pi^2 \mathrm{Q} \xi^2 \mathrm{Rb}(a^4 + \pi^2 \mathrm{Q}) - 4\pi^4 \mathrm{Q}^2 \xi^2),$$

$$C_0 = 4\pi^4 \mathrm{Q} \xi \sqrt{\mathrm{Ta}} N_B \Pr \mathrm{Pm}^2,$$

$$C_1 = 2\pi^4 a^2 \mathrm{Q} \mathrm{Pm} \xi \sqrt{\mathrm{Ta}} \times \left[N_B \Pr(4 + \mathrm{Ro}(1 - \mathrm{Pm})) + \frac{2N_B}{L_e} \mathrm{Pm}\right],$$

$$C_2 = 2\pi^4 a^4 \mathrm{Q} \xi \sqrt{\mathrm{Ta}} \left[N_B \Pr(2 + \mathrm{Ro}(1 - \mathrm{Pm})) + \frac{N_B}{L_e} \mathrm{Pm}(4 + \mathrm{Ro}(1 - \mathrm{Pm}))\right],$$

$$C_3 = 2\pi^4 a^6 \mathrm{Q} \xi \sqrt{\mathrm{Ta}} \frac{N_B}{L_e}(2 + \mathrm{Ro}(1 - \mathrm{Pm})).$$

В предельных случаях, когда $H_{0\varphi} = 0$, дисперсионное уравнение (57) совпадает с дисперсионным уравнением (48) для стандартной МВН, а при $H_{0z} = 0$ — с дисперсионным уравнением (54) для азимутальной МВН. К дисперсионному уравнению (57) с действительными коэффициентами a_j ($j = 0, \ldots, 7$) применим классический критерий устойчивости Льенара–Шипара [38]. Из явного вида коэффициентов следует, что дестабилизация осесимметричных возмущений может быть вызвана неоднородным вращением с отрицательным профилем ($\mathrm{Ro} < 0$), спиральным магнитным полем с положительным профилем неоднородного азимутального магнитного поля ($\mathrm{Rb} > 0$), концентрацией наночастиц ($\mathrm{R}_n \neq 0$), а также совместным эффектом спирального магнитного поля и прироста наночастиц ($N_B \neq 0$), если магнитное число Прандтля $\mathrm{Pm} \neq 1$. Поскольку переход к неустойчивости происходит через точку $\gamma = 0$, получаем необходимое и достаточное условие устойчивости вращающейся наножидкости по отношению к осесимметричным возмущениям:

$$\mathrm{Ro} > \frac{-a^2(a^4 + \pi^2 \mathrm{Q})^2 - \pi^2 a^4 \mathrm{Ta} + k^2(a^4 + \pi^2 \mathrm{Q}) \mathrm{R}_n L_e}{\pi^2 \mathrm{Ta}(a^4 + \pi^2 \mathrm{Q} \mathrm{Pm}) - 2\pi^4 \mathrm{Q} \xi \sqrt{\mathrm{Ta}} \frac{N_B}{L_e}(1 - \mathrm{Pm})} + \frac{4\mathrm{Q} \xi^2(\mathrm{Rb}(a^4 + \pi^2 \mathrm{Q}) + \pi^2 \mathrm{Q}) + 4\pi^2 \mathrm{Q} \xi \sqrt{\mathrm{Ta}} \frac{N_B}{L_e}}{\mathrm{Ta}(a^4 + \pi^2 \mathrm{Q} \mathrm{Pm}) - 2\pi^2 \mathrm{Q} \xi \sqrt{\mathrm{Ta}} \frac{N_B}{L_e}(1 - \mathrm{Pm})} = \mathrm{Ro}_{cr}, \quad (58)$$

или, в размерных переменных,

$$\mathrm{Ro} > \frac{-(\omega_A^2+\omega_\nu\omega_\eta)^2 - 4\alpha^2\Omega^2\omega_\eta^2 + (1-\alpha^2)(\omega_A^2+\omega_\nu\omega_\eta)\mathrm{R}_n L_e \dfrac{\omega_\nu\omega_\eta}{(|\mathbf{k}|h)^4}}{4\alpha^2\Omega^2(\omega_A^2+\omega_\eta^2) - 4\alpha^3\Omega\omega_A\omega_{A\varphi}\dfrac{\omega_\eta}{(|\mathbf{k}|h)}\dfrac{N_B}{L_e}(1-\mathrm{Pm})} + \\ + \frac{\omega_{A\varphi}^2(\mathrm{Rb}(\omega_A^2+\omega_\nu\omega_\eta)+\omega_A^2) + 2\alpha\Omega\omega_A\omega_{A\varphi}\dfrac{\omega_\eta}{(|\mathbf{k}|h)}\dfrac{N_B}{L_e}}{\Omega^2(\omega_A^2+\omega_\eta^2) - \alpha\Omega\omega_A\omega_{A\varphi}\dfrac{\omega_\eta}{(|\mathbf{k}|h)}\dfrac{N_B}{L_e}(1-\mathrm{Pm})} = \mathrm{Ro}_{cr}.$$

Условие устойчивости (58) включает в себя полученные в предыдущих разделах критерии устойчивости для стандартной МВН при $H_{0\varphi}=0$ и азимутальной МВН при $H_{0z}=0$. Если $\mathrm{Ro}=0$ и $\mathrm{Ta}=0$, то необходимое и достаточное условие устойчивости наножидкости по отношению к осесимметричным возмущениям дает ограничение на профиль неоднородного азимутального магнитного поля:

$$\mathrm{Rb} > \mathrm{Rb}_{cr}, \\ \mathrm{Rb}_{cr} = \\ = \frac{a^2(a^4+\pi^2\mathrm{Q})^2 - 4\pi^4\mathrm{Q}^2\xi^2 - k^2\mathrm{R}_n L_e(a^4+\pi^2\mathrm{Q})}{4\pi^2\mathrm{Q}\xi^2(a^4+\pi^2\mathrm{Q})}, \tag{59}$$

или, в размерных переменных,

$$\mathrm{Rb} > \frac{(\omega_A^2+\omega_\nu\omega_\eta)^2 - 4\alpha^2\omega_A^2\omega_{A\varphi}^2}{4\alpha^2\omega_{A\varphi}^2(\omega_A^2+\omega_\nu\omega_\eta)} - \\ - \frac{(1-\alpha^2)\dfrac{\omega_\nu\omega_\eta}{(|\mathbf{k}|h)^4}\mathrm{R}_n L_e(\omega_A^2+\omega_\nu\omega_\eta)}{4\alpha^2\omega_{A\varphi}^2(\omega_A^2+\omega_\nu\omega_\eta)} = \mathrm{Rb}_{cr}.$$

Выражение (59) переходит в передельном случае «чистой» жидкости при $\mathrm{R}_n=0$ в известное выражение для критического магнитного числа Россби Rb_{cr}, которое было получено в работе [41].

Определим область развития спиральной МВН в тонком слое наножидкости, которая возникает для чисел Россби $\mathrm{Ro} < \mathrm{Ro}_{cr}$. С помощью численного анализа из выражения (58) для критического числа Россби определим области развития спиральной МВН в «чистой» жидкости и наножидкости. На рис. 7 серым цветом выделены области неустойчивости наножидкости для чисел Россби $\mathrm{Ro} < \mathrm{Ro}_{cr}$ при изменении параметра вращения $\mathrm{Ta} = 100$, 300, 2000 (числа Тейлора) в плоскости (k, Ro). Остальные параметры наножидкости считались фиксированными: $\mathrm{Q}=10$, $\mathrm{Q}_\varphi=100$, $\mathrm{Pm}=0.7$, $\mathrm{Rb}=1/2$, $\mathrm{R}_n=0.122$, $L_e=5000$, $N_B=7.5\cdot10^{-4}$. На рис. 7 видно, что наличие концентрации наночастиц способствует увеличению области неустойчивости по сравнению с «чистой» электропроводящей средой, для которой области неустойчивости показаны черным цветом на рис. 7. На рис. 8 показаны области развития спиральной МВН с положительным профилем неоднородного магнитного поля ($\mathrm{Rb}=1/2$) в плоскости (k, Ro) для различных азимутальных чисел Чандрасекара $\mathrm{Q}_\varphi = 30$, 50, 80 при фиксированных параметрах $\mathrm{Q}=10$, $\mathrm{Ta}=100, \mathrm{Pm}=0.7$, $\mathrm{Rb}=1/2$, $\mathrm{R}_n=0.122$, $L_e=5000$, $N_B=7.5\cdot10^{-4}$. Здесь мы также видим (см. рис. 8), что наличие концентрации наночастиц способствует увеличению области неустойчивости по сравнению с «чистой» электропроводящей средой. Кроме того, при увеличении величины азимутального магнитного поля (числа Q_φ), как и в случае азимутальной МВН, граница области неустойчивости смещается в сторону положительных чисел Россби ($\mathrm{Ro}>0$).

Приступим к численному анализу дисперсионного уравнения (57). На рис. 9 показана зависимость инкремента спиральной МВН от радиальных волновых чисел k для различных вариаций физических параметров наножидкости. На рис. 9*а* видно, что темп роста возмущений повышается с увеличением эффекта вращения — числа Тейлора $\mathrm{Ta}=100, 300, 2000$. Остальные параметры наножидкости считались фиксированными: $\mathrm{Q}=10$, $\mathrm{Q}_\varphi=100$, $\mathrm{Pm}=0.7$, $\mathrm{Pr}=5$, $\mathrm{Rb}=1/2$, $\mathrm{Ro}=-1$, $\mathrm{R}_n=0.122$, $L_e=5000$, $N_B=7.5\cdot10^{-4}$. Для этих же параметров на рис. 9*б* показаны графики инкремента спиральной МВН для вращающейся наножидкости с числом Тейлора $\mathrm{Ta}=100$ и различными числами Россби $\mathrm{Ro}=0, -3/4, -1$. Отсюда следует, что темпы роста осесимметричных возмущений выше для отрицательных чисел Россби ($\mathrm{Ro}<0$), чем в случае однородного вращения ($\mathrm{Ro}=0$):

$$\gamma(k)|_{\mathrm{Ro}=-1} > \gamma(k)|_{\mathrm{Ro}=-3/4} > \gamma(k)|_{\mathrm{Ro}=0}.$$

На рис. 9*в* показаны темпы роста спиральной МВН при различных значениях аксиального магнитного поля $\mathrm{Q}=10, 50, 150$ для рэлеевского профиля вращения ($\mathrm{Ro}=-1$) и числа Тейлора $\mathrm{Ta}=2000$. Отсюда мы видим, что увеличение напряженности аксиального магнитного поля H_{0z} может приводить как к увеличению инкремента неустойчивости ($\mathrm{Q}=10 \to \mathrm{Q}=50$), так и к уменьшению инкремента при $\mathrm{Q}=50 \to \mathrm{Q}=150$.

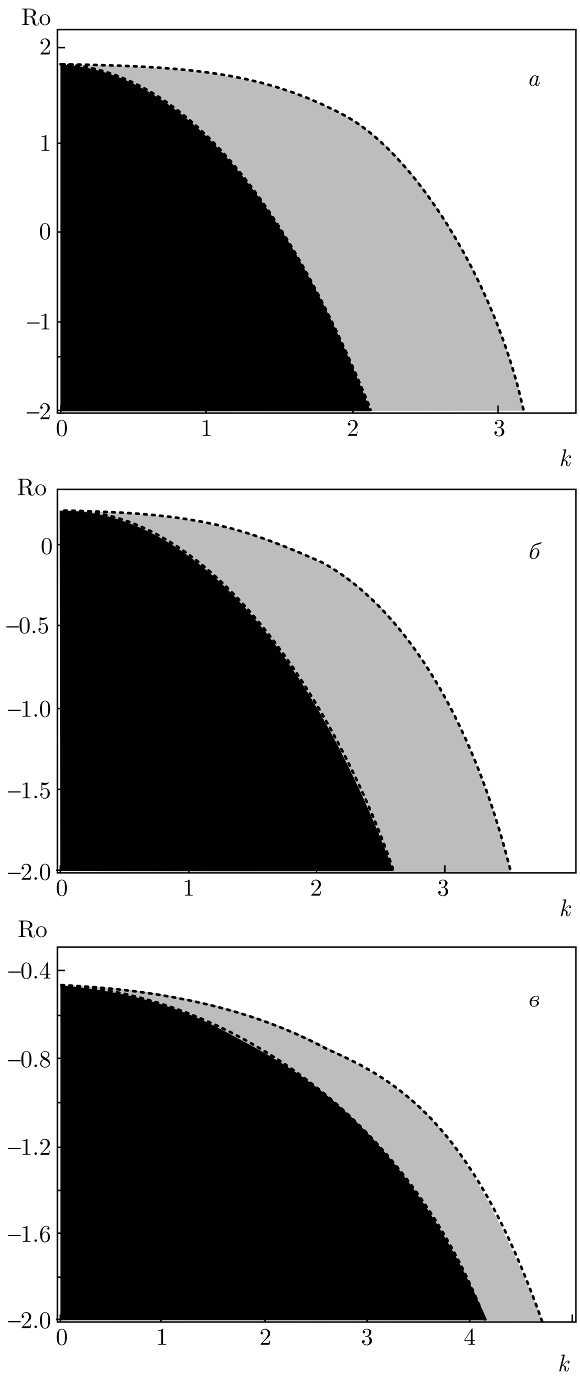

Рис. 7. Черным цветом показаны области, в которых возникает спиральная МВН в «чистой» жидкости, и серым цветом — в наножидкости. Графики построены для чисел Тейлора $\mathrm{Ta} = 100$ (*а*), 300 (*б*), 2000 (*в*) при фиксированных параметрах $\mathrm{Q} = 10$, $\mathrm{Q}_\varphi = 100$, $\mathrm{Pm} = 0.7$, $\mathrm{Rb} = 1/2$, $\mathrm{R}_n = 0.122$, $L_e = 5000$, $N_B = 7.5 \cdot 10^{-4}$

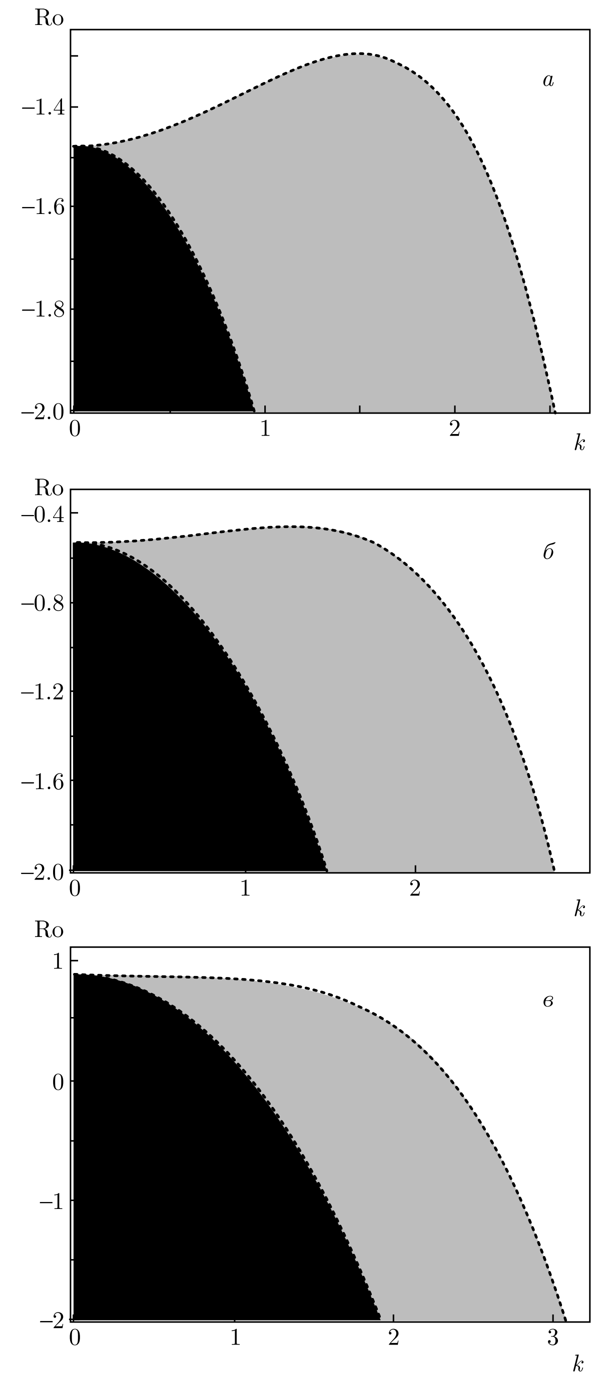

Рис. 8. Черным цветом показаны области, в которых возникает спиральная МВН в «чистой» жидкости, и серым цветом — в наножидкости. Графики построены для азимутального числа Чандрасекара $\mathrm{Q}_\varphi = 30$ (*а*), 50 (*б*), 80 (*в*) при фиксированных параметрах $\mathrm{Q} = 10$, $\mathrm{Ta} = 100$, $\mathrm{Pm} = 0.7$, $\mathrm{Rb} = 1/2$, $\mathrm{R}_n = 0.122$, $L_e = 5000$, $N_B = 7.5 \cdot 10^{-4}$

Аналогичная ситуация наблюдалась и для стандартной МВН. Эффект влияния азимутального магнитного поля $\mathrm{Q}_\varphi = 100, 200, 300$ на спиральную МВН для параметров $\mathrm{Ta} = 2000$ и $\mathrm{Ro} = -1$ показан на рис. 10*а*. Здесь, как и для случая азимутальной МВН, темпы роста возмущений становятся выше с увеличением напряженности азимутального

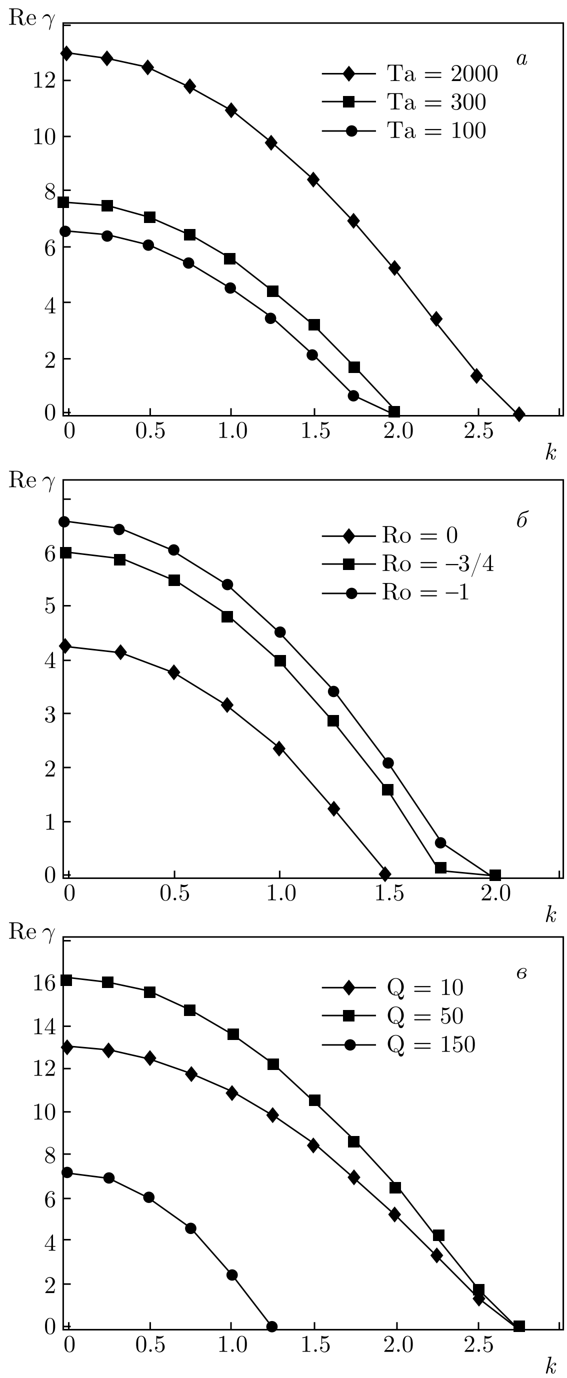

Рис. 9. Зависимости инкремента ($\mathrm{Re}\,\gamma > 0$) спиральной МВН в наножидкости от радиального волнового числа k. Показано влияние эффекта вращения $\mathrm{Ta} = 100$, 300, 2000 (*а*), числа Россби $\mathrm{Ro} = 0, -3/4, -1$ (*б*) и аксиального магнитного поля $\mathrm{Q} = 10, 50, 150$ (*в*)

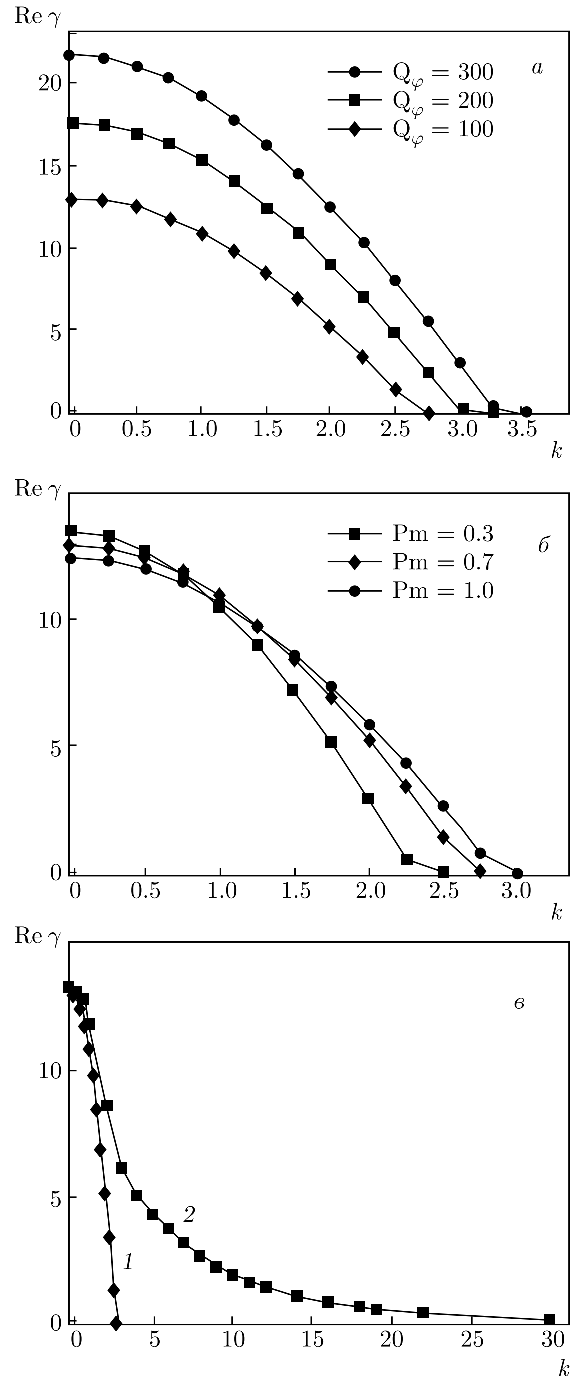

Рис. 10. Зависимости инкремента ($\mathrm{Re}\,\gamma > 0$) спиральной МВН в наножидкости от радиального волнового числа k. Показано влияние азимутального магнитного поля $\mathrm{Q}_\varphi = 100, 200, 300$ (*а*), магнитного числа Прандтля $\mathrm{Pm} = 0.3, 0.7, 1.0$ (*б*) и концентрации наночастиц на спиральную МВН (*в*)

магнитного поля $H_{0\varphi}$. На рис. 10*б* показаны графики инкремента спиральной МВН для значений магнитного числа Прандтля $\mathrm{Pm} = 0.3, 0.7, 1.0$. Из этих результатов следует, что увеличение темпов роста $\mathrm{Re}\,\gamma(k)$ для магнитных чисел Прандтля $\mathrm{Pm} < 1$ происходит при смещении в длинноволновую (малые k) область спектра возмущений. Результаты влияния на спиральную МВН эффекта концентрации наночастиц приведены на рис. 10*в*. Кривая *1* построена для следующих параметров наножидкости: $\mathrm{Q} = 10$, $\mathrm{Q}_\varphi = 100$, $\mathrm{Ta} = 2000$, $\mathrm{Pm} = 0.7$, $\mathrm{Pr} = 5$, $\mathrm{Rb} = 1/2$, $\mathrm{Ro} = -1$, $\mathrm{R}_n = 0.122$, $L_e = 5000$, $N_B = 7.5 \cdot 10^{-4}$. При увеличении концентрации наночастиц, т. е. при увеличении объемной доли наночастиц на верхней границе слоя, ϕ_u, мы принимаем, что изменяются параметры для следующих величин: концентрационного числа Рэлея $\mathrm{R}_n = 1200$, рождения наночастиц $N_B = 750$ и числа Льюиса $L_e = 1000$, а остальные безразмерные числа $(\mathrm{Q}, \mathrm{Q}_\varphi, \mathrm{Ta}, \mathrm{Pm}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Rb}, \mathrm{Ro})$ остаются без изменений. Кривая *2* на рис. 10*в* соответствует результатам повышенной концентрации наночастиц. Здесь видно, что при повышенной концентрации наночастиц инкремент спиральной МВН выше, $\gamma_2(0) = 13.28 > \gamma_1(0) = 12.9$, и неустойчивость уже начинает развиваться в коротковолновой (большие k) части спектра возмущений.

В результате повышения концентрации наночастиц увеличиваются темпы роста спиральной МВН из-за совместного эффекта прироста наночастиц, $N_B \gg 1$, и спирального магнитного поля для магнитных чисел Прандтля $\mathrm{Pm} < 1$.

7. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ МАГНИТНОЙ КОНВЕКЦИИ

Приступим к исследованию случая, когда есть разности температур и концентраций наночастиц на границах слоя наножидкости ($\mathrm{Ra} \neq 0$, $N_A \neq 0$), который неоднородно вращается ($\mathrm{Ro} \neq 0$) в спиральном магнитном поле ($\xi \neq 0$). Будем рассматривать конвективное течение в плоском неоднородно вращающемся слое в виде валов (ячеек). Скорость γ роста возмущений в общем случае является комплексной, $\gamma = \gamma_r + i\omega_i$. Очевидно, что система устойчива, если $\gamma_r < 0$, и неустойчива, если $\gamma_r > 0$. Перейдем к определению границы устойчивости для монотонных ($\omega_i = 0$) и колебательных ($\omega_i \neq 0$) возмущений. На границе устойчивости (нейтральные состояния) $\gamma_r = 0$, поэтому, сделав в уравнении (47) замену $\gamma = i\omega_i$, находим

$$\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}_r + i\omega_i \mathrm{Ra}_i, \tag{60}$$

где Ra_r и Ra_i — действительная и мнимая части дисперсионного уравнения для Ra. Так как величина Ra является действительной, мнимая часть в (60) должна обращаться в нуль. При этом возможна ситуация $\omega_i = 0$ или $\mathrm{Ra}_i = 0$. Рассмотрим случай $\omega_i = 0$. В результате получаем критическое значение числа Рэлея Ra_c для монотонных или стационарных возмущений: $\mathrm{Ra}_c = \mathrm{Ra}_{st}$.

7.1. Стационарный режим конвекции в аксиальном магнитном поле

Из дисперсионного уравнения (60) найдем критическое значение числа Рэлея Ra_{st} для стационарной ($\gamma = 0$) конвекции в аксиальном магнитном поле:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ra}_{st} = \frac{a^6}{k^2} + \frac{\pi^2 a^2 \mathrm{Q}}{k^2} + \frac{\pi^2 a^4 \mathrm{Ta}}{k^2(a^4 + \pi^2 \mathrm{Q})} + \\ + \frac{\pi^2 \mathrm{Ta}\mathrm{Ro}(a^4 + \pi^2 \mathrm{Q}\mathrm{Pm})}{k^2(a^4 + \pi^2\mathrm{Q})} - \mathrm{R}_n(L_e + N_A). \end{aligned}\tag{61}$$

Минимальное значение критического числа Рэлея находится из условия $\partial \mathrm{Ra}_{st}/\partial k = 0$ и соответствует волновым числам $k = k_c$, удовлетворяющим уравнению

$$\begin{aligned}\frac{2k_c^2 - \pi^2}{k_c} - \frac{\pi^4 \mathrm{Q}}{k_c(\pi^2 + k_c^2)^2} + \\ + \frac{2\pi^2 k_c \mathrm{Ta}(1 + \mathrm{Ro})}{(\pi^2 + k_c^2)\left((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2\mathrm{Q}\right)} - \\ - \frac{\pi^2 \mathrm{Ta}((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 \mathrm{Q} + 2k_c^2(\pi^2 + k_c^2))}{k_c((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2\mathrm{Q})^2} - \\ - \frac{\pi^2 \mathrm{Ta}\mathrm{Ro}((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2 \mathrm{Q}\mathrm{Pm})}{k_c(\pi^2 + k_c^2)^2((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2\mathrm{Q})^2} \times \\ \times ((\pi^2 + k_c^2)^2 + \pi^2\mathrm{Q} + 2k_c^2(\pi^2 + k_c^2)) = 0. \end{aligned}\tag{62}$$

Из уравнения (62) видно, что критическое волновое число не зависит от параметров наножидкостей и совпадает с результатом работы [12]. На рис. 11*а* минимальному значению критического числа Рэлея Ra_{st}^{min} соответствует точка на нейтральной кривой, разделяющей области устойчивых и неустойчивых возмущений. Здесь видно, что для положительного профиля числа Россби ($\mathrm{Ro} \geqslant 0$) минимальное значение критического числа Рэлея Ra_{st}^{min} больше, чем для отрицательных профилей вращения, например рэлеевского ($\mathrm{Ro} = -1$). Следовательно, для отрицательных профилей вращения мы получаем более низкий порог развития неустойчивости по сравнению со случаем однородного ($\mathrm{Ro} = 0$) и неоднородного ($\mathrm{Ro} = 2$) вращения. На рис. 11*б* показано, что

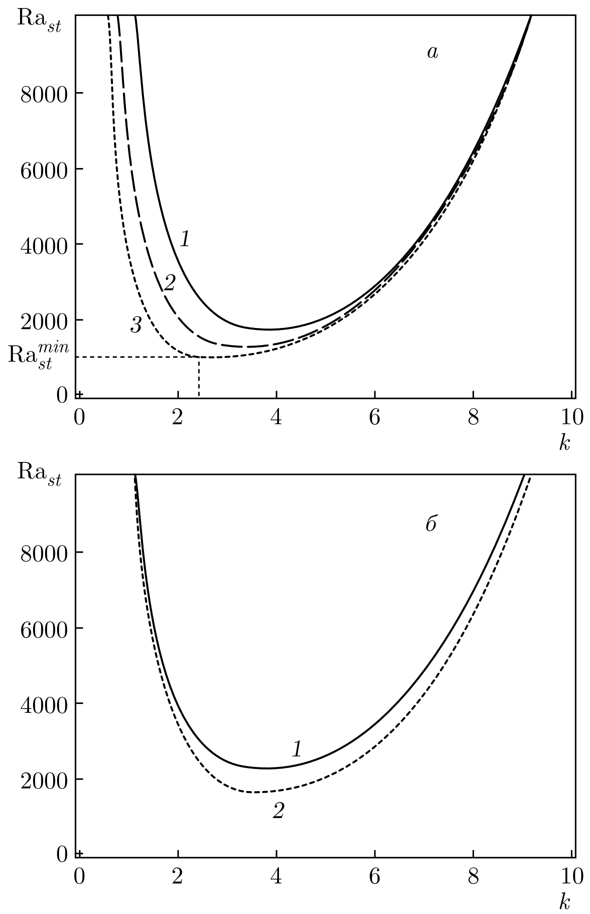

Рис. 11. Зависимости стационарного числа Рэлея Ra_{st} от волновых чисел k для неоднородно вращающейся наножидкости в аксиальном магнитном поле: *а* — для чисел Россби $\mathrm{Ro} = 2$ (кривая *1*), 0 (кривая *2*), -1 (кривая *3*); *б* — кривая *1* соответствует «чистой» электропроводящей жидкости, кривая *2* — электропроводящей наножидкости для числа Россби $\mathrm{Ro} = 2$

концентрация наночастиц способствует понижению порога стационарной конвекции. Здесь кривые *1*, *2* построены для числа Россби $\mathrm{Ro} = 2$, но сделанные выводы остаются в силе при любых числах Ro.

В некоторых предельных случаях выражение (61) содержит уже известные результаты. При отсутствии наночастиц ($\mathrm{R}_n = 0$) из (61) получаем критическое число Рэлея для стационарной неоднородно вращающейся ($\mathrm{Ro} \neq 0$) конвекции в постоянном аксиальном магнитном поле [12]. Если в (61) положить $\mathrm{Ro} = 0$, то мы получим результат работы [11]. Для случая $\mathrm{Ro} = 0$ и $\mathrm{R}_n = 0$ мы получаем классический результат Чандрасекара [8]. При отсутствии вращения и магнитного поля ($\mathrm{Ta} = \mathrm{Q} = 0$) выражение (61) дает результат работы [42].

Для исследования эффектов вращения, числа Россби, магнитного поля, числа Люиса, модифицированного коэффициента диффузии и концентрации наночастиц вычислим производные

$$\frac{d\mathrm{R}_1}{d\mathrm{T}_1},\ \frac{d\mathrm{R}_1}{d\mathrm{Ro}},\ \frac{d\mathrm{R}_1}{d\mathrm{Q}_1},\ \frac{d\mathrm{R}_1}{dL_e},\ \frac{d\mathrm{R}_1}{dN_A},\ \frac{d\mathrm{R}_1}{d\mathrm{R}_n}$$

в переменных Чандрасекара

$$\mathrm{R}_1 = \frac{\mathrm{Ra}_{st}}{\pi^4}, \quad \mathrm{T}_1 = \frac{\mathrm{Ta}}{\pi^4}, \quad \mathrm{Q}_1 = \frac{\mathrm{Q}}{\pi^2}, \quad \mathrm{x} = \frac{k^2}{\pi^2}.$$

Для этих переменных выражение (61) примет вид

$$\mathrm{R}_1 = \frac{(1+\mathrm{x})((1+\mathrm{x})^2+\mathrm{Q}_1)^2+(1+\mathrm{x})^2(1+\mathrm{Ro})\mathrm{T}_1}{\mathrm{x}((1+\mathrm{x})^2+\mathrm{Q}_1)} + \\ + \frac{\mathrm{Ro}\mathrm{Pm}\mathrm{Q}_1\mathrm{T}_1}{\mathrm{x}((1+\mathrm{x})^2+\mathrm{Q}_1)} - \mathrm{R}_n(L_e + N_A). \quad (63)$$

Из выражения (63) находим производные

$$\frac{d\mathrm{R}_1}{d\mathrm{T}_1} = \frac{(1+\mathrm{x})^2}{\mathrm{x}((1+\mathrm{x})^2+\mathrm{Q}_1)} + \\ + \frac{\mathrm{Ro}((1+\mathrm{x})^2+\mathrm{Q}_1\mathrm{Pm})}{\mathrm{x}((1+\mathrm{x})^2+\mathrm{Q}_1)}, \quad (64)$$

$$\frac{d\mathrm{R}_1}{d\mathrm{Ro}} = \frac{\mathrm{T}_1((1+\mathrm{x})^2+\mathrm{Q}_1\mathrm{Pm})}{\mathrm{x}((1+\mathrm{x})^2+\mathrm{Q}_1)}, \quad (65)$$

$$\frac{d\mathrm{R}_1}{d\mathrm{Q}_1} = \frac{1+\mathrm{x}}{\mathrm{x}} - \frac{(1+\mathrm{x})^2\mathrm{T}_1(1+\mathrm{Ro}(1-\mathrm{Pm}))}{\mathrm{x}((1+\mathrm{x})^2+\mathrm{Q}_1)^2}, \quad (66)$$

$$\frac{d\mathrm{R}_1}{dL_e} = \frac{d\mathrm{R}_1}{dN_A} = -\mathrm{R}_n, \quad (67)$$

$$\frac{d\mathrm{R}_1}{d\mathrm{R}_n} = -(L_e + N_A). \quad (68)$$

Из формулы (64) видно, что в случае однородного вращения ($\mathrm{Ro} = 0$) сила Кориолиса всегда оказывает стабилизирующее действие на конвекцию [8, 9]. Однако при неоднородном вращении (даже в отсутствие внешнего магнитного поля, $\mathrm{Q}_1 = 0$ (см. формулу (64)) сила Кориолиса может оказывать дестабилизирующее действие на конвекцию в зависимости от профиля угловой скорости вращения. Для рэлеевского профиля вращения ($\mathrm{Ro} = -1$) угловая скорость уменьшается с расстоянием, $\Omega = \mathrm{const}\cdot R^{-2}$. Наоборот, при положительных $\mathrm{Ro} > 0$, например при $\mathrm{Ro} = 1$, угловая скорость вращения увеличивается с расстоянием, $\Omega = \mathrm{const}\cdot R^2$. Таким образом, вращение при $\mathrm{Ro} > 0$ стабилизирует конвекцию, а при $\mathrm{Ro} < 0$ дестабилизирует. Известно, что для конечной электропроводности среды имеет место частичная «вмороженность» магнитного поля и неоднородное вращение приводит к искажению силовых линий магнитного поля [37]. В случае $\mathrm{Ro} > 0$ линии магнитного поля смещаются от оси вращения, т. е. в сторону увеличения Ω, и наоборот, при $\mathrm{Ro} < 0$ происходит смещение к оси вращения. Эффекту влияния неоднородного (дифференциального) вращения на магнитное поле и, как следствие, на конвекцию, соответствуют члены, пропорциональные RoPm в выражениях (64), (66).

Аналогичные выводы следуют из соотношения (65): при увеличении параметра вращения T_1 на стационарную конвекцию оказывает влияние профиль неоднородного вращения, от которого зависит знак числа Россби. Так, при числах Россби $\mathrm{Ro} > 0$ мы также получаем стабилизирующий эффект, поскольку производная $d\mathrm{R}_1/d\mathrm{Ro}$ всегда положительна, а при отрицательных числах Россби $\mathrm{Ro} < 0$ — дестабилизирующий эффект, так как производная $d\mathrm{R}_1/d\mathrm{Ro}$ отрицательная.

Из формулы (66) видно, что величина $d\mathrm{R}_1/d\mathrm{Q}_1$ может быть положительной или отрицательной, т. е. аксиальное магнитное поле (число Чандрасекара Q_1) оказывает стабилизирующее или дестабилизирующее действие на стационарную конвекцию. Поскольку магнитное поле тормозит движение проводящей жидкости (наножидкости), оно вполне может оказывать стабилизирующее действие. В свою очередь, взаимодействие между полем и токами, индуцируемыми в движущейся среде, оказывает влияние на конвективное движение, т. е. на устойчивость равновесия среды, подогреваемой снизу. Опять же из-за частичной «вмороженности» магнитного поля неоднородное вращение приводит к искажению силовых линий магнитного поля, что создает дестабилизирующий эффект, когда для профиля неоднородного вращения (числа Россби Ro) выполняется условие

$$\mathrm{Ro}(\mathrm{Pm}-1) < 1.$$

Это неравенство справедливо для положительных чисел Россби $\mathrm{Ro} \geqslant 0$ и магнитных числах Прандтля $\mathrm{Pm} < 1$ либо $\mathrm{Ro} < 0$ и $\mathrm{Pm} > 1$, а также при $\mathrm{Pm} = 1$ для любых чисел Россби Ro.

Формула (67) показывает, что число Льюиса L_e и модифицированный коэффициент диффузии N_A имеют дестабилизирующий эффект, когда число Рэлея наночастиц положительно, $\mathrm{R}_n > 0$. Поскольку для большинства наножидкостей сумма числа Льюиса и модифицированного коэффициента диффузии всегда положительна, $L_e + N_A > 0$ [11], то из (68) следует, что концентрационное число Рэлея всегда имеет дестабилизирующий эффект. Формулы (67) и (68) совпадают с результатами работы [11], где исследовалась конвективная неустойчивость однородно вращающегося слоя наножидкости в постоянном вертикальном магнитном поле.

Таким образом, влияние эффектов вращения, числа Россби, магнитного поля на стационарную конвекцию в аксиальном магнитном поле происходит независимо от концентрации наночастиц.

7.2. Стационарный режим конвекции в спиральном магнитном поле

Подобным образом из дисперсионного уравнения (60) найдем критическое значение числа Рэлея Ra_{st} для стационарной конвекции в спиральном магнитном поле:

$$\mathrm{Ra}_{st} = \Bigg[\mathrm{Ra}_{st}^{(0)} - \mathrm{R}_n(L_e + N_A) + \frac{2\pi^4\mathrm{Q}\xi\sqrt{\mathrm{Ta}}(2+\mathrm{Ro}(1-\mathrm{Pm}))N_B(N_A-1)}{k^2(a^4+\pi^2\mathrm{Q})L_e}\Bigg] \times \left[1 - \frac{2\pi^4\mathrm{Q}\xi\sqrt{\mathrm{Ta}}(2+\mathrm{Ro}(1-\mathrm{Pm}))(N_A-N_B)}{a^2(a^4+\pi^2\mathrm{Q})^2L_e}\right]^{-1} = D_1(k)D_2^{-1}(k), \quad (69)$$

где $\mathrm{Ra}_{st}^{(0)}$ — критическое число Рэлея для стационарной конвекции «чистой» жидкости в спиральном магнитном поле, совпадающее с результатом [15]

$$\mathrm{Ra}_{st}^{(0)} = \frac{a^6}{k^2} + \frac{\pi^2a^2\mathrm{Q}}{k^2} + \frac{\pi^2a^4\mathrm{Ta}}{k^2(a^4+\pi^2\mathrm{Q})} + \frac{\pi^2\mathrm{Ta}\mathrm{Ro}(a^4+\pi^2\mathrm{Q}\mathrm{Pm}) - 4\pi^4\xi^2\mathrm{Q}^2}{k^2(a^4+\pi^2\mathrm{Q})} - \frac{4\pi^2}{k^2}\xi^2\mathrm{Q}\mathrm{Rb}.$$

Минимальное значение критического числа Рэлея находится из условия $\partial\mathrm{Ra}_{st}/\partial k = 0$ и соответствует волновым числам $k = k_c$, удовлетворяющим следующему уравнению:

$$\left[\left(\frac{\partial \mathrm{Ra}_{st}^{(0)}}{\partial k}\right)_{k=k_c} - 4\pi^4 \mathrm{Q}\xi\sqrt{\mathrm{Ta}}(2+\mathrm{Ro}(1-\mathrm{Pm})) \times \right.$$
$$\left. \times N_B(N_A-1)\frac{(\pi^2+k_c^2)^2+\pi^2\mathrm{Q}+2k_c^2(\pi^2+k_c^2)}{k_c^3((\pi^2+k_c^2)^2+\pi^2\mathrm{Q})^2 L_e}\right] \times$$
$$\times D_2^{-1}(k_c) - D_2^{-2}(k_c)\cdot 4k_c\pi^4\mathrm{Q}\xi\sqrt{\mathrm{Ta}}(2+\mathrm{Ro}(1-\mathrm{Pm})) \times$$
$$\times (N_A-N_B)\frac{(\pi^2+k_c^2)^2+\pi^2\mathrm{Q}+2(\pi^2+k_c^2)}{(\pi^2+k_c^2)((\pi^2+k_c^2)^2+\pi^2\mathrm{Q})^3 L_e}\times$$
$$\times D_1(k_c) = 0, \quad (70)$$

где

$$\left(\frac{\partial \mathrm{Ra}_{st}^{(0)}}{\partial k}\right)_{k=k_c} = \frac{2k_c^2-\pi^2}{k_c} - \frac{\pi^4\mathrm{Q}}{k_c(\pi^2+k_c^2)^2} +$$
$$+ \frac{2\pi^2 k_c \mathrm{Ta}(1+\mathrm{Ro})}{(\pi^2+k_c^2)\left((\pi^2+k_c^2)^2+\pi^2\mathrm{Q}\right)} -$$
$$- \frac{\pi^2\mathrm{Ta}((\pi^2+k_c^2)^2+\pi^2\mathrm{Q}+2k_c^2(\pi^2+k_c^2))}{k_c((\pi^2+k_c^2)^2+\pi^2\mathrm{Q})^2} -$$
$$- \frac{\pi^2\mathrm{TaRo}((\pi^2+k_c^2)^2+\pi^2\mathrm{QPm})}{k_c(\pi^2+k_c^2)^2((\pi^2+k_c^2)^2+\pi^2\mathrm{Q})^2}\times$$
$$\times((\pi^2+k_c^2)^2+\pi^2\mathrm{Q}+2k_c^2(\pi^2+k_c^2)) +$$
$$+ 4\pi^4\xi^2\mathrm{Q}^2\frac{2((\pi^2+k_c^2)^2+\pi^2\mathrm{Q})+4k_c^4(\pi^2+k_c^2)}{k_c^3((\pi^2+k_c^2)^2+\pi^2\mathrm{Q})^2} +$$
$$+ 4\pi^2\xi^2\mathrm{QRb}\,\frac{2}{k_c^3}.$$

Если азимутальное магнитное поле отсутствует ($\xi = 0$), то выражение (70) совпадает с (62) и результатом работы [15]. Следовательно, критическое волновое число k_c зависит от параметров наножидкости только в спиральном магнитном поле. На рис. 12 показаны зависимости стационарного числа Рэлея Ra_{st} от волновых чисел k для различных профилей неоднородного вращения (Ro) и магнитного поля (Rb). Численные результаты, представленные на рис. 12, получены при следующих фиксированных параметрах: $\mathrm{Ta} = 300$, $\mathrm{Q} = 50$, $\mathrm{Pm} = 0.7$, $\mathrm{R}_n = 0.122$, $L_e = 5000$, $N_A = 5$, $N_B = 7.5\cdot 10^{-4}$. Минимальному числу Ra_{st}^{min} на рис. 12 соответствует точка на нейтральной кривой, разделяющей области устойчивых и неустойчивых возмущений. На рис. 12*а* показан случай однородного ($\mathrm{Rb} = -1/2$) азимутального магнитного поля с параметром $\xi = 1$. Здесь видно, что с возрастанием положительного профиля числа Россби Ro (кривая *1* — $\mathrm{Ro} = 2$, кривая *2* — $\mathrm{Ro} = 0$) минимальное значение стационарного числа Рэлея Ra_{st}^{min} также возрастает, т. е. повышается порог развития неустойчивости. С другой стороны, для отрицательных профилей вращения: кеплеровского ($\mathrm{Ro} = -3/4$) (кривая *3*) и рэлеевского ($\mathrm{Ro} = -1$) (кривая *4*) наблюдаем уменьшение критического числа Рэлея, т. е. более низкий порог развития неустойчивости по сравнению со случаем однородного ($\mathrm{Ro} = 0$) и неоднородного ($\mathrm{Ro} = 2$) вращения. На рис. 13*а* показано, что концентрация наночастиц (кривая *2*) способствует понижению порога стационарной конвекции по сравнению с «чистой» жидкостью (кривая *1*). Здесь кривые *1*, *2* построены для числа Россби $\mathrm{Ro} = -3/4$, но сделанные выводы остаются в силе при любых числах Ro.

Проведем анализ влияния азимутального магнитного поля на стационарную конвекцию, фиксируя параметр Ro для различных магнитных чисел Россби ($\mathrm{Rb} = -1, -1/2, 0, 1/2$) и $\xi = 1$. На рис. 12*б* показаны результаты для случая однородного вращения ($\mathrm{Ro} = 0$). Здесь мы видим, что для положительных чисел $\mathrm{Rb} \geqslant 0$ (кривая *3* — $\mathrm{Rb} = 0$, кривая *4* — $\mathrm{Rb} = 1/2$) критические числа Рэлея меньше, чем для отрицательных чисел $\mathrm{Rb} < 0$ (кривая *1* — $\mathrm{Rb} = -1$, кривая *2* — $\mathrm{Rb} = -1/2$). Следовательно, в зависимости от профиля неоднородности азимутального магнитного поля $H_{0\varphi}(R) = CR^\alpha$ ($C = \mathrm{const}$, α — произвольное вещественное число) порог неустойчивости может либо увеличиваться ($\mathrm{Rb} < 0$), либо уменьшаться ($\mathrm{Rb} > 0$). На рис. 13*б* кривая *1* соответствует «чистой» электропроводящей жидкости, кривая *2* — электропроводящей наножидкости. Кривые *1*, *2* построены для чисел Россби $\mathrm{Ro} = 0$, $\mathrm{Rb} = -1$. Здесь мы видим, что концентрация наночастиц способствует понижению порога стационарной конвекции. Этот вывод остается в силе при любых профилях неоднородного азимутального магнитного поля (магнитного числа Россби Rb). Аналогичная картина наблюдается для кеплеровского профиля вращения $\mathrm{Ro} = -3/4$ (см. рис. 12*в* и 13*в*). Сравнивая результаты на рис. 12*б*, 13*б* и рис. 12*в*, 13*в* можно заметить, что для профиля вращения $\mathrm{Ro} = -3/4$ пороги неустойчивости меньше, чем для случая $\mathrm{Ro} = 0$ при любых профилях неоднородного азимутального магнитного поля.

Приступим к исследованию влияния вращения, числа Россби, азимутального магнитного поля, спирального магнитного поля, числа Льюиса, модифицированного коэффициента диффузии и концентрации наночастиц на стационарную конвекцию. Для этой цели вычислим производные

$$\frac{d\widetilde{\mathrm{R}}}{d\widetilde{\mathrm{T}}},\ \frac{d\widetilde{\mathrm{R}}}{d\mathrm{Ro}},\ \frac{d\widetilde{\mathrm{R}}}{d\widetilde{\mathrm{Q}}},\ \frac{d\widetilde{\mathrm{R}}}{d\widetilde{\xi}},\ \frac{d\widetilde{\mathrm{R}}}{d\mathrm{Rb}},\ \frac{d\widetilde{\mathrm{R}}}{dL_e},\ \frac{d\widetilde{\mathrm{R}}}{dN_A},\ \frac{d\widetilde{\mathrm{R}}}{d\mathrm{R}_n}.$$

Здесь мы ввели переменные Чандрасекара

$$\widetilde{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{Ra}_{st}}{\pi^4},\quad \widetilde{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{Ta}}{\pi^4},\quad \widetilde{\mathrm{Q}} = \frac{\mathrm{Q}}{\pi^2},\quad \mathrm{x} = \frac{k^2}{\pi^2},\quad \widetilde{\xi} = \frac{\xi}{\pi}.$$

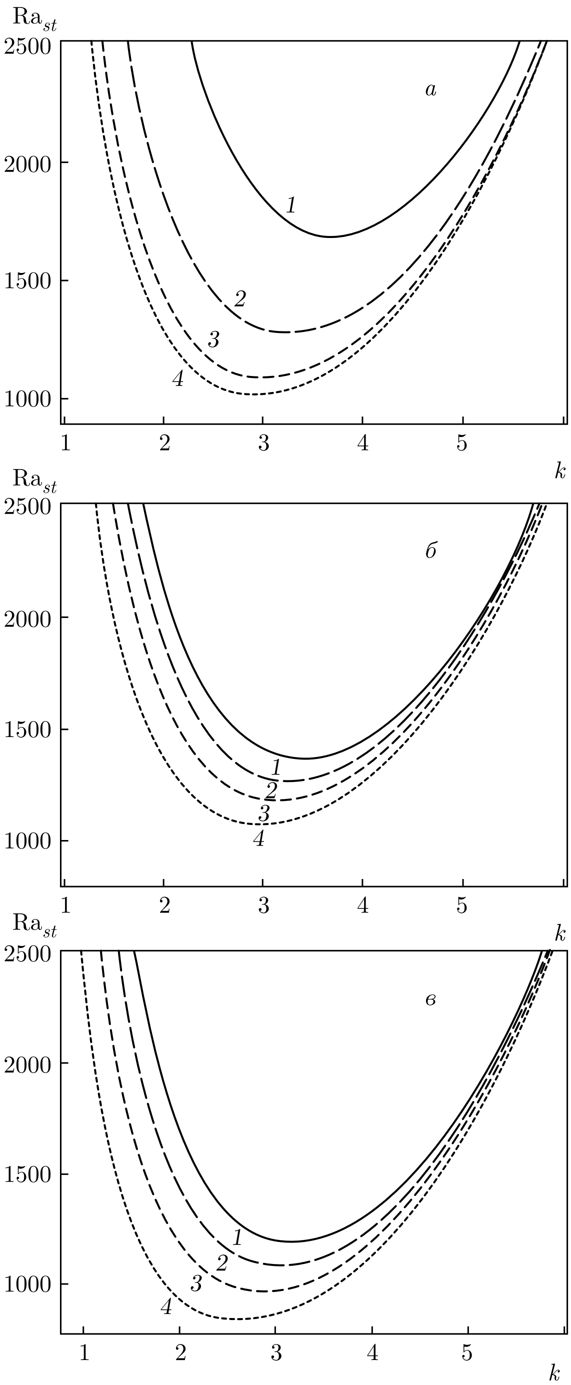

Рис. 12. Зависимости стационарного числа Рэлея Ra_{st} от волновых чисел k для неоднородно вращающейся наножидкости в спиральном магнитном поле: *а* — $\mathrm{Rb} = -1/2$, $\xi = 1$ и $\mathrm{Ro} = 2$ (кривая *1*), 0 (кривая *2*), $-3/4$ (кривая *3*), -1 (кривая *4*); *б* — $\mathrm{Ro} = 0$, $\xi = 1$ и $\mathrm{Rb} = -1$ (кривая *1*), $-1/2$ (кривая *2*), 0 (кривая *3*), $1/2$ (кривая *4*); *в* — $\mathrm{Ro} = -3/4$, $\xi = 1$ и $\mathrm{Rb} = -1$ (кривая *1*), $-1/2$ (кривая *2*), 0 (кривая *3*), $1/2$ (кривая *4*)

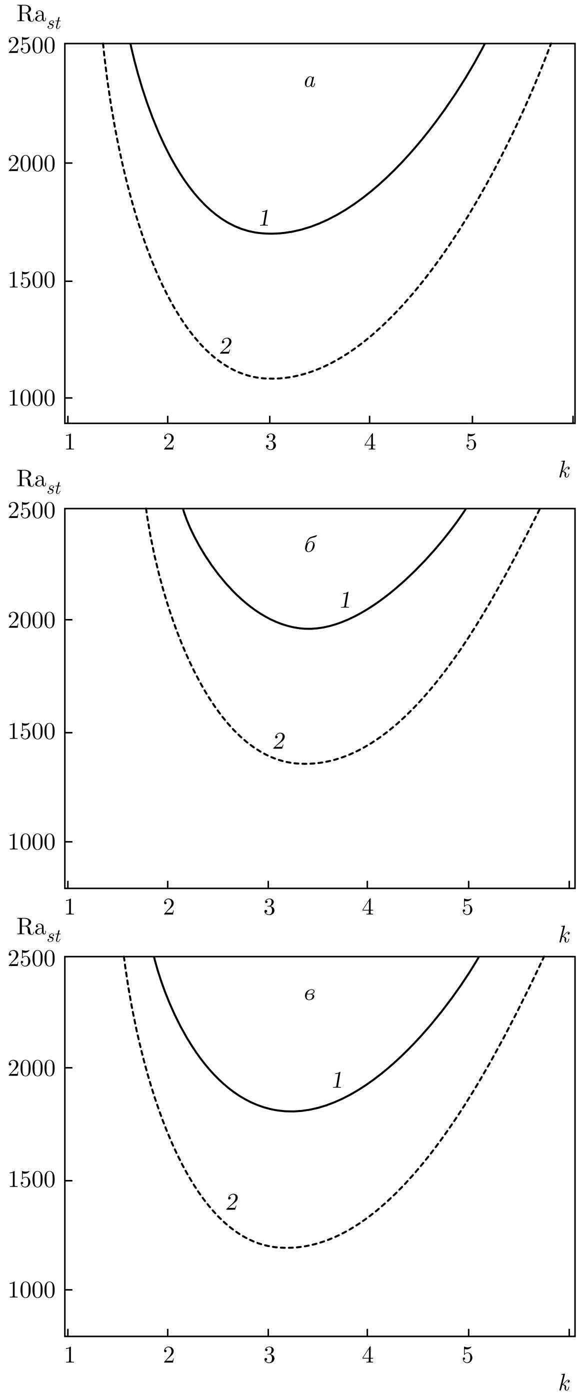

Рис. 13. Зависимости стационарного числа Рэлея Ra_{st} от волновых чисел k: *а* — $\mathrm{Rb} = -1/2$, $\mathrm{Ro} = -3/4$, $\xi = 1$; *б* — $\mathrm{Ro} = 0$, $\mathrm{Rb} = -1$, $\xi = 1$; *в* — $\mathrm{Ro} = -3/4$, $\mathrm{Rb} = -1$, $\xi = 1$. На всех графиках кривая *1* соответствует «чистой» электропроводящей жидкости, кривая *2* — электропроводящей наножидкости

В этих переменных выражение для критического числа Рэлея (69) принимает вид

$$\widetilde{\mathrm{R}} = \left[\widetilde{\mathrm{R}}^{(0)} - \mathrm{R}_n(L_e + N_A) + \right.$$
$$\left. + \frac{2\pi^3\widetilde{\mathrm{Q}}\widetilde{\xi}\sqrt{\widetilde{\mathrm{T}}}(2+\mathrm{Ro}(1-\mathrm{Pm}))N_B(N_A-1)}{\mathrm{x}((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})L_e}\right] \times$$
$$\times \left[1 - \frac{2\widetilde{\mathrm{Q}}\widetilde{\xi}\sqrt{\widetilde{\mathrm{T}}}(2+\mathrm{Ro}(1-\mathrm{Pm}))(N_A-N_B)}{\pi(1+\mathrm{x})((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})^2L_e}\right]^{-1} =$$
$$= \widetilde{D}_1(k)\widetilde{D}_2^{-1}(k),$$

где

$$\widetilde{\mathrm{R}}^{(0)} = \frac{(1+\mathrm{x})((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})^2+\widetilde{\mathrm{T}}(1+\mathrm{x})^2(1+\mathrm{Ro})}{\mathrm{x}((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})} +$$
$$+ \frac{\widetilde{\mathrm{T}}\mathrm{Ro}\mathrm{Pm}\widetilde{\mathrm{Q}} - 4\widetilde{\xi}^2\widetilde{\mathrm{Q}}^2}{\mathrm{x}((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})} - \frac{4\widetilde{\xi}^2\widetilde{\mathrm{Q}}}{\mathrm{x}}\mathrm{Rb}.$$

Используя эти выражения, нетрудно вычислить искомые производные

$$\frac{d\widetilde{\mathrm{R}}}{d\widetilde{\mathrm{T}}} = \left[\frac{d\widetilde{\mathrm{R}}^{(0)}}{d\widetilde{\mathrm{T}}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\pi^3\widetilde{\mathrm{Q}}\widetilde{\xi}(2+\mathrm{Ro}(1-\mathrm{Pm}))N_B(N_A-1)}{\mathrm{x}((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})L_e\sqrt{\widetilde{\mathrm{T}}}}\right]\widetilde{D}_2^{-1} + \widetilde{D}_2^{-2}\widetilde{D}_1 \times$$
$$\times \frac{\widetilde{\mathrm{Q}}\widetilde{\xi}(2+\mathrm{Ro}(1-\mathrm{Pm}))(N_A-N_B)}{\pi(1+\mathrm{x})((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})^2L_e\sqrt{\widetilde{\mathrm{T}}}}, \quad (71)$$

$$\frac{d\widetilde{\mathrm{R}}^{(0)}}{d\widetilde{\mathrm{T}}} = \frac{(1+\mathrm{x})^2}{\mathrm{x}((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})} +$$
$$+ \frac{\mathrm{Ro}((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}}\mathrm{Pm})}{\mathrm{x}((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})}, \quad (72)$$

$$\frac{d\widetilde{\mathrm{R}}}{d\mathrm{Ro}} = \left[\frac{d\widetilde{\mathrm{R}}^{(0)}}{d\mathrm{Ro}} + \frac{2\pi^3\widetilde{\mathrm{Q}}\widetilde{\xi}\sqrt{\widetilde{\mathrm{T}}}(1-\mathrm{Pm})N_B(N_A-1)}{\mathrm{x}((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})L_e}\right] \times$$
$$\times \widetilde{D}_2^{-1} + \widetilde{D}_2^{-2}\widetilde{D}_1\frac{2\widetilde{\mathrm{Q}}\widetilde{\xi}\sqrt{\widetilde{\mathrm{T}}}(1-\mathrm{Pm})(N_A-N_B)}{\pi(1+\mathrm{x})((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})^2L_e}, \quad (73)$$

$$\frac{d\widetilde{\mathrm{R}}^{(0)}}{d\mathrm{Ro}} = \frac{\widetilde{\mathrm{T}}((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}}\mathrm{Pm})}{\mathrm{x}((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})}, \quad (74)$$

$$\frac{d\widetilde{\mathrm{R}}}{d\widetilde{\mathrm{Q}}} = \left[\frac{d\widetilde{\mathrm{R}}^{(0)}}{d\widetilde{\mathrm{Q}}} + \right.$$
$$\left. + \frac{2\pi^3\widetilde{\xi}\sqrt{\widetilde{\mathrm{T}}}(2+\mathrm{Ro}(1-\mathrm{Pm}))N_B(N_A-1)(1+\mathrm{x})^2}{\mathrm{x}((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})L_e}\right] \times$$
$$\times \widetilde{D}_2^{-1} + \widetilde{D}_2^{-2}\widetilde{D}_1 \times$$
$$\times \frac{2\widetilde{\xi}\sqrt{\widetilde{\mathrm{T}}}(2+\mathrm{Ro}(1-\mathrm{Pm}))(N_A-N_B)((1+\mathrm{x})^2-\widetilde{\mathrm{Q}})}{\pi(1+\mathrm{x})((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})^2L_e}, \quad (75)$$

$$\frac{d\widetilde{\mathrm{R}}^{(0)}}{d\widetilde{\mathrm{Q}}} = \frac{1+\mathrm{x}}{\mathrm{x}} - \frac{(1+\mathrm{x})^2\widetilde{T}(1+\mathrm{Ro}(1-\mathrm{Pm}))}{\mathrm{x}((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})^2} -$$
$$- \frac{4\widetilde{\xi}^2}{\mathrm{x}}\left(\mathrm{Rb} + \frac{\widetilde{\mathrm{Q}}(2(1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})}{(1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})^2}\right), \quad (76)$$

$$\frac{d\widetilde{\mathrm{R}}}{d\widetilde{\xi}} = \left[\frac{d\widetilde{\mathrm{R}}^{(0)}}{d\widetilde{\xi}} + \right.$$
$$\left. + \frac{2\pi^3\widetilde{\mathrm{Q}}\sqrt{\widetilde{\mathrm{T}}}(2+\mathrm{Ro}(1-\mathrm{Pm}))N_B(N_A-1)}{\mathrm{x}((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})L_e}\right]\widetilde{D}_2^{-1} +$$
$$+ \widetilde{D}_2^{-2}\widetilde{D}_1\frac{2\widetilde{\mathrm{Q}}\sqrt{\widetilde{\mathrm{T}}}(2+\mathrm{Ro}(1-\mathrm{Pm}))(N_A-N_B)}{\pi(1+\mathrm{x})((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})^2L_e}, \quad (77)$$

$$\frac{d\widetilde{\mathrm{R}}^{(0)}}{d\widetilde{\xi}} = -\frac{8\widetilde{\xi}\widetilde{\mathrm{Q}}}{\mathrm{x}}\,\frac{\widetilde{\mathrm{Q}}(1+\mathrm{Rb})+\mathrm{Rb}(1+\mathrm{x})^2}{(1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}}}, \quad (78)$$

$$\frac{d\widetilde{\mathrm{R}}}{d\mathrm{Rb}} = \frac{d\widetilde{\mathrm{R}}^{(0)}}{d\mathrm{Rb}} = -\frac{4\widetilde{\xi}^2\widetilde{Q}}{\mathrm{x}}, \quad (79)$$

$$\frac{d\widetilde{\mathrm{R}}}{dL_e} = \left[-\mathrm{R}_n - \right.$$
$$\left. - \frac{2\pi^3\widetilde{\mathrm{Q}}\widetilde{\xi}\sqrt{\widetilde{\mathrm{T}}}(2+\mathrm{Ro}(1-\mathrm{Pm}))N_B(N_A-1)}{\mathrm{x}((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})L_e^2}\right]\widetilde{D}_2^{-1} -$$
$$- \widetilde{D}_2^{-2}\widetilde{D}_1\frac{2\widetilde{\mathrm{Q}}\widetilde{\xi}\sqrt{\widetilde{\mathrm{T}}}(2+\mathrm{Ro}(1-\mathrm{Pm}))(N_A-N_B)}{\pi(1+\mathrm{x})((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})^2L_e^2}, \quad (80)$$

$$\frac{d\widetilde{\mathrm{R}}}{dN_A} =$$
$$= \left[-\mathrm{R}_n + \frac{2\pi^3\widetilde{\mathrm{Q}}\widetilde{\xi}\sqrt{\widetilde{\mathrm{T}}}(2+\mathrm{Ro}(1-\mathrm{Pm}))N_B}{\mathrm{x}((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})L_e}\right]\widetilde{D}_2^{-1} +$$
$$+ \widetilde{D}_2^{-2}\widetilde{D}_1\frac{2\widetilde{\mathrm{Q}}\widetilde{\xi}\sqrt{\widetilde{\mathrm{T}}}(2+\mathrm{Ro}(1-\mathrm{Pm}))}{\pi(1+\mathrm{x})((1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})^2L_e}, \quad (81)$$

$$\frac{d\widetilde{\mathrm{R}}}{d\mathrm{R}_n} = -(N_A + L_e)\widetilde{D}_2^{-1}. \qquad (82)$$

Нетрудно заметить, что в выражениях (71)–(82) содержатся члены порядка $\widetilde{\mathrm{Q}}\widetilde{\xi}N_B(N_A-1)/L_e$, которые связаны совместным действием эффектов прироста наночастиц (N_B) и спирального магнитного поля ($\widetilde{\mathrm{Q}}\widetilde{\xi}$). Оценки этих эффектов при известных параметрах наножидкости (N_A, N_B, L_e) дают достаточно малый вклад. Однако произведения типа $\widetilde{D}_1\widetilde{\mathrm{Q}}\widetilde{\xi}N_B(N_A-1)/L_e$ дают вклад в дестабилизацию конвекции, если концентрационное число Рэлея положительно, $\mathrm{R}_n > 0$. Следовательно, во всех формулах (71)–(82) дестабилизирующим фактором является концентрация наночастиц (число R_n).

Из формул (72), (74) следует, что неоднородное вращение оказывает стабилизирующий эффект ($d\widetilde{\mathrm{R}}^{(0)}/d\widetilde{\mathrm{T}} > 0$, $d\widetilde{\mathrm{R}}^{(0)}/d\mathrm{Ro} > 0$) в случае положительных чисел Россби, $\mathrm{Ro} > 0$, и в обратном случае, для $\mathrm{Ro} < 0$, неоднородное вращение может оказывать дестабилизирующий эффект ($d\widetilde{\mathrm{R}}^{(0)}/d\widetilde{\mathrm{T}} < 0$, $d\widetilde{\mathrm{R}}^{(0)}/d\mathrm{Ro} < 0$).

Из формулы (76) видно, что величина $d\widetilde{\mathrm{R}}^{(0)}/d\widetilde{\mathrm{Q}}$ может быть положительной или отрицательной, т. е. аксиальное магнитное поле (число Чандрасекара $\widetilde{Q}$) оказывает стабилизирующее или дестабилизирующее действие на стационарную конвекцию. Дестабилизирующий эффект возникает при выполнении условий для профилей неоднородного вращения (числа Россби Ro) и неоднородного азимутального магнитного поля (магнитного числа Россби Rb):

$$\mathrm{Ro}(\mathrm{Pm}-1) < 1,$$

$$\mathrm{Rb} > \frac{\widetilde{\mathrm{Q}}(2(1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})}{(1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})^2} \quad (\text{при } \mathrm{Rb} > 0),$$

$$\mathrm{Rb} < \frac{\widetilde{\mathrm{Q}}(2(1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})}{(1+\mathrm{x})^2+\widetilde{\mathrm{Q}})^2} \quad (\text{при } \mathrm{Rb} < 0).$$

Первое неравенство справедливо для положительных чисел Россби, $\mathrm{Ro} > 0$, и магнитных числах Прандтля $\mathrm{Pm} < 1$, либо $\mathrm{Ro} < 0$ и $\mathrm{Pm} > 1$.

Влияние неднородного азимутального магнитного поля на стационарную конвекцию выясним с помощью формул (78) и (79). В силу неоднородности азимутального магнитного поля в силе Лоренца появляется градиент магнитного поля, вызывающий дрейф течения жидкости. В зависимости от знака градиента магнитного поля (число Rb) изменяется направление дрейфа течения, влияющего на устойчивость конвективных течений. Так, при $\mathrm{Rb} > 0$ (для профиля $H_{0\varphi} = CR^\alpha$, $\alpha > 1$) происходит дестабилизация конвекции, а при $\mathrm{Rb} < 0$ ($\alpha < 1$) — стабилизация конвекции. Это явление наблюдается в стационарной неустойчивости (см. рис. 11).

Неоднородное азимутальное магнитное поле с профилем неоднородности $\mathrm{Rb} = -1$ оказывает стабилизирующий эффект, поскольку $d\widetilde{R}/d\widetilde{\xi} > 0$. Для магнитных чисел Россби $\mathrm{Rb} \geqslant 1$ неоднородное азимутальное магнитное поле оказывает дестабилизирующий эффект, $d\widetilde{R}/d\widetilde{\xi} < 0$. Из формулы (78) видно, что однородное азимутальное магнитное поле ($\mathrm{Rb} = -1/2$) может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее действие на стационарную конвекцию. Формула (79) показывает, что эффекты стабилизации ($\mathrm{Rb} < 0$) и дестабилизации ($\mathrm{Rb} > 0$) зависят от знака магнитного числа Россби, т. е. от профиля неоднородного азимутального магнитного поля $H_{0\varphi}(R)$.

Из формул (80), (81) видно, что число Льюиса L_e и модифицированный коэффициент диффузии N_A имеют дестабилизирующий эффект, когда число Рэлея наночастиц положительно, $\mathrm{R}_n > 0$. Для большинства видов наножидкостей сумма числа Льюиса и модифицированного коэффициента диффузии всегда положительна, $L_e + N_A > 0$ [11], тогда из (82) следует, что концентрационное число Рэлея всегда имеет дестабилизирующий эффект.

В отличие от стационарной конвекции в аксиальном магнитном поле, влияние эффектов вращения, числа Россби, азимутального магнитного поля, спирального магнитного поля на стационарную неоднородно вращающуюся конвекцию наножидкости в спиральном магнитном поле происходит при дестабилизирующем вкладе концентрации наночастиц.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получена линейная система магнитогидродинамических уравнений для неоднородно вращающейся наножидкости в спиральном магнитном поле с постоянными градиентами температуры и концентрации наночастиц в поле силы тяжести. Для этой системы уравнений в приближении локального метода ВКБ получено дисперсионное уравнение для эволюции малых возмущений в тонком слое наножидкости. Рассмотрены различные типы гидромагнитных неустойчивостей, возникающих в отсутствие градиента температуры, но с учетом градиента концентрации наночастиц. В случае, когда неоднородно вращающаяся наножидкость помещена только в аксиальное ($H_{0z} \neq 0$) магнитное поле, возникает стандартная МВН или просто МВН. Если наножидкость помещена только в неоднородное азимутальное ($H_{0\varphi}(R) \neq 0$) магнитное поле, то возникает азимутальная МВН. При наличии спирального магнитного поля $\mathbf{H}_0 = H_{0\varphi}(R)\mathbf{e}_\varphi + H_{0z}\mathbf{e}_z$ возникает спиральная МВН. Для каждого типа МВН получены дисперсионные уравнения и проведен анализ их асимптотической устойчивости с помощью критерия Льенара – Шипара. Используя этот критерий, мы определили области развития МВН, азимутальной и спиральной МВН в плоскости (k, Ro) для различных вариаций параметра вращения Та и азимутального числа Чандрасекара Q_φ. Также получены критические числа Россби $(\mathrm{Ro}_{cr}, \mathrm{Rb}_{cr})$, характеризующие пороговое значение для профилей неоднородного вращения (числа Россби Ro) и неоднородного азимутального магнитного поля (магнитные числа Россби Rb). Области развития МВН, азимутальной и спиральной МВН для наножидкости имеют бóльшие размеры в плоскости (k, Ro), чем для «чистой» жидкости.

При наличии градиентов температуры и концентрации наночастиц рассмотрены стационарные режимы конвекции в аксиальном и спиральном магнитных полях в зависимости от профилей неоднородного вращения (числа Россби Ro) и неоднородного азимутального магнитного поля (магнитные числа Россби Rb). Для обоих типов конвективной неустойчивости получены выражения для критических чисел Рэлея Ra_{st} и построены кривые нейтральной устойчивости. Показано, что при наличии концентрации наночастиц пороговое значение стационарного критического числа Рэлея Ra_{st}^{min} становится меньше как в аксиальной, так и в спиральной магнитоконвекции.

Развитая в настоящей работе теория может применяться для проведения лабораторных экспериментов с неоднородно вращающейся стратифицированной электропроводящей наножидкостью в магнитном поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. K. Das, S. U. S. Choi , W. Yu, and T. Pradeep, *Nanofluids: Science and Technology,* Wiley–Interscience, Hoboken, New Jersey (2008).
2. В. Я. Рудяк, А. В. Минаков, *Современные проблемы микро- и нанофлюидики*, Наука, Новосибирск (2016).
3. J. Buongiorno, J. Heat Trans. **128**, 240 (2006).
4. В. Я. Рудяк, А. В. Минаков, М. И. Пряжников, Письма в ЖТФ **45** (9), 36 (2019).
5. B. Ghasemi and S. M. Aminossadati, Int. J. Therm. Sci. **50**, 1748 (2011).
6. M. A. A. Hamada, I. Pop, and A. I. Md. Ismail, Nonlinear Anal. Real World Appl. **12**, 1338 (2011).
7. D. Yadav, R. Bhargava, and G. S. Agrawal, J. Eng. Math. **80**, 147 (2013).
8. S. Chandrasekhar, *Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability*, Oxford Univ. Press, London (1961).
9. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости,* Наука, Москва (1972).
10. А. В. Гетлинг, *Конвекция Рэлея – Бенара. Структура и динамика,* Эдиториал УРСС, Москва (1999).
11. Dhananjay Yadav, R. Bhargava, G. S. Agrawal, Gyeong S. Hwang, Jinho Lee, and M. C. Kim, Asia-Pac. J. Chem. Eng. **9**(5), 663 (2014).
12. М. И. Копп, А. В. Тур, В. В. Яновский, ЖЭТФ **154**, 1281 (2018).
13. M. Kopp, A. Tur, and V. Yanovsky, East Eur. J. Phys. **1**, 4 (2019).
14. М. И. Копп, А. В. Тур, В. В. Яновский, ЖЭТФ **157**, 901 (2020).
15. M. I. Kopp, A. V. Tur, and V. V. Yanovsky, Fluid Dyn. Res. **53**, 015509 (2021) .
16. В. П. Лахин, В. И. Ильгисонис, ЖЭТФ **137**, 783 (2010).
17. O. N. Kirillov and F. Stefani, Proc. Internat. Astron. Union **8**, 233 (2012).
18. O. N. Kirillov, F. Stefani, and Y. Fukumoto, J. Fluid Mech. **760**, 591 (2014).
19. S. Chandrasekhar, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **42**, 273 (1956).
20. Е. П. Велихов, ЖЭТФ **36**, 1398 (1959).
21. А. Б. Михайловский, Дж. Г. Ломинадзе, А. П. Чуриков, В. Д. Пустовитов, Физика плазмы **35**, 307 (2009).
22. H. Ji, J. Goodman and A. Kageyama, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **325**, L1 (2001).
23. K. Noguchi, V. I. Pariev, S. A. Colgate, H. F. Beckley, and J. Nordhaus, Astrophys. J. **575**, 1151 (2002).
24. G. Rüdiger and Y. Zhang, Astron. Astroph. **378**, 302 (2001).

25. J. Goodman and H. Ji, J. Fluid. Mech. **462**, 365 (2002).

26. A. P. Willis and C. F. Barenghi, Astron. Astroph. **388**, 688 (2002).

27. G. Rüdiger, M. Schultz, and D. Shalybkov, Phys. Rev. E **67**, 046312 (2003).

28. E. P. Velikhov, A. A. Ivanov, V. P. Lakhin, and K. S. Serebrennikov, Phys. Lett. A **356**, 357 (2006).

29. V. I. Ilgisonis, I. V. Khalzov, V. P. Lakhin, and A. I. Smolyakov, AIP Conf. Proc. **1242**, 23 (2010).

30. R. Hollerbach and G. Rüdiger, Phys. Rev. Lett. **95**, 124501 (2005).

31. G. Rüdiger, R. Hollerbach, M. Schultz, and D. A. Shalybkov, Astron. Nachr. **326**, 409 (2005).

32. V. P. Lakhin and E. P. Velikhov, Phys. Lett. A **369**, 98 (2007).

33. H. Ji and S. Balbus, Phys. Today **66**(8), 27 (2013).

34. S. Boldyrev, D. Huynh, and V. Pariev, Phys. Rev. E **80**, 066310 (2009).

35. G. I. Ogilvie and J. E. Pringle, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **279**, 152 (1996).

36. G. I. Ogilvie and A. T. Potter, Phys. Rev. Lett. **100**, 074503 (2008).

37. Г. Моффат, *Возбуждение магнитного поля в проводящей среде*, Мир, Москва (1980).

38. Ф. Р. Гантмахер, *Лекции по аналитической механике*, Физматлит, Москва (2005).

39. D. H. Michael, Mathematika **1**, 45 (1954).

40. B. Eckhardt and D. Yao, Chaos Solitons Fractals **5**(11), 2073 (1995).

41. G. Rüdiger and M. Schultz, Astron. Nachr. **331**, 121 (2010).

42. D. A. Nield and A. V. Kuznetsov, Eur. J. Mech. B **29**, 217 (2010).