

ПОСТРОЕНИЕ ТЕНЕЙ ЧЕРНЫХ ДЫР. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

*С. В. Чернов**

*Астрокосмический центр, Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117997, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 31 декабря 2020 г.,
после переработки 31 декабря 2020 г.
Принята к публикации 26 января 2021 г.

Рассматриваются аналитические методы построения теней черных дыр в метрике Керра–Ньюмена и возможности их наблюдения с помощью радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами (РСДБ).

DOI: 10.31857/S0044451021060031

1. ВВЕДЕНИЕ

Благодаря проекту «Телескоп горизонта событий» удалось наблюдать тень черной дыры у источника M87* [1–6], но наблюдение фотонных колец является более сложной задачей будущего [7]. Для ее решения необходимо, чтобы радиоинтерферометр имел достаточно большую базу (проекцию баз), которая превышает диаметр Земли (т. е. достаточно высокое угловое разрешение, порядка доли микросекунд) [7], высокую чувствительность приемного комплекса и большую базу численных экспериментов для моделирования фотонных колец и сопоставления данных теории и наблюдений. Одним из таких проектов, который способен решить данную задачу, является проект «Миллиметрон», который планируется запустить в 2030-х гг. [8].

Существует достаточно много свободного программного обеспечения, которое способно моделировать фотонные кольца магнитогидродинамических моделей. Эти программы решают уравнения изотропных геодезических численно (например, пакеты Raptor [9], Ipole [10, 11]) или полуаналитически (grtrans [12]). Все эти пакеты имеют как численные ошибки, так и неточности, связанные с тем, что наблюдатель расположен на конечном, относительно близком расстоянии от черной дыры ($R \approx 50R_g$). В данной работе уравнения изотропных геодезических решаются аналитически точно и строятся образы черных дыр для простейшего бесконечно тон-

кого диска. Такой подход более точно сопоставляет модельные и наблюдательные данные.

Интерферометрические наблюдения могут достаточно точно определить форму фотонного кольца [13], а это, в свою очередь, позволит более точно протестировать общую теорию относительности в сильном поле и определить параметр вращения черной дыры [14]. Существуют различные способы моделирования формы фотонных колец. В работе [15] форму фотонного кольца моделировали с помощью плоской кривой — улитка Паскаля (limaçon), в работе [13] — с помощью выпуклых овалов (phoval). Форма фотонных колец близко связана с формой критических кривых в гравитационном поле черной дыры, следовательно, точное моделирование фотонных колец поможет лучше понять физику вблизи черных дыр.

В разд. 2 выписываются точные аналитические решения уравнений изотропных геодезических в метрике Керра–Ньюмена и строятся образы черных дыр. В разд. 3 аналитически вычисляются функции видности для колец различной формы и интенсивности. В разд. 4 приводятся выводы.

В работе используется система единиц, в которой скорость света и гравитационная постоянная равны единице, $c = G = 1$. Размерность длины есть GM/c^2 , размерность времени — GM/c^3 , где M — масса черной дыры.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ТОЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Метрика вращающейся и заряженной черной дыры Керра–Ньюмена в координатах Бойера–Линдквиста (t, r, θ, ϕ) имеет вид [16]

* E-mail: chernov@lpi.ru

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} ((r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta) d\phi^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (2Mr - Q^2)}{\Sigma} dt d\phi, \quad (1c)$$

где

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2,$$

$J = Ma$ — угловой момент черной дыры. Корни уравнения

$$\Delta = (r - r_1)(r - r_2) = 0$$

соответствуют внешнему и внутреннему горизонталам событий

$$r_{1,2} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}.$$

В данной работе предполагается, что параметр вращения и заряд черной дыры ограничены неравенством $0 < a^2 + Q^2 < M^2$. Экстремальная черная дыра соответствует случаю, когда $a^2 + Q^2 \rightarrow M^2$. Случаю не вращающейся и не заряженной черной дыры отвечают пределы $a \rightarrow 0$ и $Q \rightarrow 0$ соответственно. Метрические коэффициенты и символы Кристоффеля выписаны в Приложении А.

Траектория фотонов в метрике Керра–Ньюмена описывается тремя интегралами движения. Это полная энергия на бесконечности $E = -p_t$, угловой момент вокруг вращающейся оси черной дыры $L = p_\phi$ и постоянная Картера

$$Q_c = p_\theta^2 - \cos^2 \theta \left(a^2 p_t^2 - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right),$$

где p^μ обозначает 4-импульс фотона. Четвертое уравнение получается из условия равенства нулю массы фотона, $g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = 0$. Оказывается, что интегралы движения не зависят от модуля величины полной энергии, а зависят только от знака E . Поэтому удобно ввести две новые величины, от которых зависит траектория движения фотона:

$$\lambda = \frac{L}{E}, \quad \eta = \frac{Q_c}{E^2}.$$

Тогда компоненты 4-импульса фотона записываются в виде

$$\frac{\Sigma}{E} p^t = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} (r^2 + a^2 - a\lambda) - a^2 \sin^2 \theta + a\lambda, \quad (1a)$$

$$\frac{\Sigma}{E} p^r = \pm_r \sqrt{R}, \quad (1b)$$

$$\frac{\Sigma}{E} p^\theta = \pm_\theta \sqrt{\Theta}, \quad (1c)$$

$$\frac{\Sigma}{E} p^\phi = \frac{a}{\Delta} (r^2 + a^2 - a\lambda) + \frac{\lambda}{\sin^2 \theta} - a, \quad (1d)$$

где были введены радиальный и угловой потенциалы

$$R = (r^2 + a^2 - a\lambda)^2 - \Delta(\eta + (a - \lambda)^2),$$

$$\Theta = \eta + a^2 \cos^2 \theta - \lambda^2 \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}.$$

Символы \pm_r и \pm_θ означают знаки импульсов фотона p^r и p^θ соответственно. Траектория движения фотона в плоскости r – θ определяется точками остановки в радиальном и угловом потенциалах. Поэтому удобно представить потенциалы в виде

$$R = (r - r_a)(r - r_b)(r - r_c)(r - r_d),$$

где корни уравнения расположены в следующем порядке: $r_a > r_b > r_c > r_d$, и

$$\Theta = a^2 \frac{(u_+ - u)(u - u_-)}{1 - u},$$

где введено обозначение $u = \cos^2 \theta$ и

$$u_\pm = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\eta + \lambda^2}{a^2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{\eta + \lambda^2}{a^2} \right)^2 + \frac{\eta}{a^2}}.$$

Уравнение радиального потенциала является алгебраическим уравнением четвертой степени, решение которого можно выписать аналитически (см. Приложение В). Уравнение углового потенциала является алгебраическим уравнением второго порядка относительно u , решение которого имеет вид

$$u = u_\pm, \quad \theta_\pm = \arccos(\mp \sqrt{u_\pm}),$$

где $\theta_+ > \theta_-$.

Если ввести аффинный параметр τ ,

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\Sigma}{E} p^\mu,$$

то уравнения (1) переписутся в дифференциальном виде. Нас будет интересовать интегральная форма этих уравнений. Последовательно выражая аффинный параметр из каждого уравнения, легко получить интегральную форму вида [17, 18]

$$I_r = G_\theta, \quad (2a)$$

$$\phi_o - \phi_s = I_\phi + \lambda G_\phi, \quad (2b)$$

$$t_o - t_s = I_t + a^2 G_t, \quad (2c)$$

где интегралы равны

$$I_r = \int_{r_s}^{r_o} \frac{dr}{\pm r \sqrt{R}}, \quad G_\theta = \int_{\theta_s}^{\theta_o} \frac{d\theta}{\pm \theta \sqrt{\Theta}},$$

$$I_\phi = \int_{r_s}^{r_o} \frac{a(2Mr - Q^2 - a\lambda)}{\pm r \Delta \sqrt{R}} dr,$$

$$I_t = \int_{r_s}^{r_o} \frac{(r^2 \Delta + (2Mr - Q^2)(r^2 + a^2 - a\lambda)) dr}{\pm r \Delta \sqrt{R}},$$

$$G_\phi = \int_{r_s}^{r_o} \frac{d\theta}{\pm \theta \sin^2 \theta \sqrt{\Theta}}, \quad G_t = \int_{\theta_s}^{\theta_o} \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\pm \theta \sqrt{\Theta}},$$

а обозначения «s» и «o» означают положение источника излучения и наблюдателя соответственно. Все эти интегралы легко взять в явном виде. Для этого представим интеграл I как сумму двух интегралов

$$I = \int_{r_s}^{r_o} \square dr = \int_{r_a}^{r_o} \square dr + w \int_{r_a}^{r_s} \square dr,$$

где $w = \pm 1$. Если траектория фотона имеет точку остановки в радиальном потенциале, то $w = 1$, если точка остановки совпадает с источником излучения $r_s = r_a$, то $w = 0$, если точка остановки отсутствует, то $w = -1$.

В Приложении С показаны способы разложения интегралов I в табличные и представлены значения этих табличных интегралов. Здесь выпишем явные решения для интегралов I . Явные решения для интегралов G представлены в работе [17]. Решения имеют вид

$$I_r = \frac{2(F(\nu_o, k) + wF(\nu_s, k))}{\sqrt{(r_a - r_c)(r_b - r_d)}}, \quad (3)$$

$$I_\phi = ga \sum_{i=1}^2 \Gamma_i \left[(1 - \beta_i^2) (\Pi(\nu_o, \gamma_i^2, k) + w\Pi(\nu_s, \gamma_i^2, k)) + \beta_i^2 (F(\nu_o, k) + wF(\nu_s, k)) \right], \quad (4)$$

$$G_\theta = \frac{1}{\sqrt{-a^2 u_-}} \left[2mK \left(\frac{u_+}{u_-} \right) - (\pm_s) F \left(\arcsin \left(\frac{\cos \theta_s}{\sqrt{u_+}} \right), \frac{u_+}{u_-} \right) + (\pm_o) F \left(\arcsin \left(\frac{\cos \theta_o}{\sqrt{u_+}} \right), \frac{u_+}{u_-} \right) \right], \quad (5)$$

$$G_\phi = \frac{1}{\sqrt{-a^2 u_-}} \left[2m\Pi \left(u_+, \frac{u_+}{u_-} \right) - (\pm_s) \Pi \left(u_+, \arcsin \left(\frac{\cos \theta_s}{\sqrt{u_+}} \right), \frac{u_+}{u_-} \right) + (\pm_o) \Pi \left(u_+, \arcsin \left(\frac{\cos \theta_o}{\sqrt{u_+}} \right), \frac{u_+}{u_-} \right) \right], \quad (6)$$

$$G_t = -\frac{2u_+}{\sqrt{-a^2 u_-}} \left[2mE' \left(\frac{u_+}{u_-} \right) - (\pm_s) E' \left(\arcsin \left(\frac{\cos \theta_s}{\sqrt{u_+}} \right), \frac{u_+}{u_-} \right) + (\pm_o) E' \left(\arcsin \left(\frac{\cos \theta_o}{\sqrt{u_+}} \right), \frac{u_+}{u_-} \right) \right], \quad (7)$$

где $\nu_{o,s} = \nu(r = r_{o,s})$, m – число точек остановок в угловом потенциале, $(\pm_s) = (\pm_o)(-1)^m$ [17], $(\pm_o = \text{sign}(\theta_o))$. Значение интеграла I_t имеет более сложный вид:

$$I_t = (4M^2 - Q^2)I_r + gr_a^2 \frac{\alpha_1^4}{\alpha^4} \times \left[V_0(\nu_o) + 2\frac{\alpha^2 - \alpha_1^2}{\alpha_1^2} V_1(\nu_o) + \frac{(\alpha^2 - \alpha_1^2)^2}{\alpha_1^4} V_2(\nu_o) \right] + wgr_a^2 \frac{\alpha^4}{\alpha^4} \left[V_0(\nu_s) + 2\frac{\alpha^2 - \alpha_1^2}{\alpha_1^2} V_1(\nu_s) + \frac{(\alpha^2 - \alpha_1^2)^2}{\alpha_1^4} V_2(\nu_s) \right] + \sum_{i=1}^2 \frac{gA_i}{r_a - r_i} \left[(1 - \beta_i^2) (\Pi(\nu_o, \gamma_i^2, k) + w\Pi(\nu_s, \gamma_i^2, k)) + \beta_i^2 (F(\nu_o, k) + wF(\nu_s, k)) \right] + 2Mg \left[(r_a - r_b) (\Pi(\nu_o, \delta, k) + w\Pi(\nu_s, \delta, k)) + r_b (F(\nu_o, k) + wF(\nu_s, k)) \right]. \quad (8)$$

Решения (3)–(8) полностью аналитически описывают траекторию фотона в метрике Керра – Ньюмена. Для построения тени черной дыры удобно воспользоваться параметрами (α, β) , впервые введенными в работе [19]. Считаем, что наблюдатель расположен под некоторым углом θ_o к оси вращения черной дыры в диапазоне $\theta_o \in (0, \pi/2)$. Запишем параметры (α, β) в виде

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\sin \theta_o}, \quad \beta = \pm_o \sqrt{\eta + a^2 \cos^2 \theta_o - \lambda^2 \frac{\cos^2 \theta_o}{\sin^2 \theta_o}}.$$

Для построения тени черной дыры нам достаточно воспользоваться только решением уравнения (2а). Из этого уравнения можно вывести радиус источника через радиус наблюдателя r_o и углы источника θ_s и наблюдателя θ_o

$$r_s = \frac{r_a(r_b - r_d) - r_b(r_a - r_d) \operatorname{sn}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{(r_a - r_c)(r_b - r_d)} I_r - F(\nu_o, q) | k \right)}{r_b - r_d - (r_a - r_d) \operatorname{sn}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{(r_a - r_c)(r_b - r_d)} I_r - F(\nu_o, q) | k \right)}, \quad (9)$$

где sn — эллиптический синус Якоби. Для построения образа воспользуемся методом обратной трассировки лучей. Будем запускать лучи от наблюдателя к источнику. Пусть источником излучения является бесконечно тонкий диск, расположенный в экваториальной плоскости вращения черной дыры с внутренним радиусом $r_{in} = 6$. Тогда $\theta_s = \pi/2$. Наблюдатель расположен на расстоянии $r_o = 10^{10}$ под углом $\theta_o = 17^\circ$, что приблизительно соответствует источнику M87*. Для каждого значения параметров α и β вычисляем положение источника r_s и сравниваем с положением внутреннего радиуса диска $r_s \geq r_{in}$, таким образом определяем образ диска (черной дыры) в картинной плоскости наблюдателя. На рис. 1 показан пример образа черной дыры Керра–Ньюмена, полученный по аналитическим формулам (3) и (5) для параметров черной дыры, равных $a = 0.9$, $Q = 0.3$. На рис. 1 показана тень черной дыры, первое фотонное кольцо и второе подкольцо (subring). Из-за того, что внутренний радиус диска $r_{in} = 6$ близок к фотонной сфере, происходит наложение образа диска и первого фотонного кольца.

Для построения распределения угла ϕ в картинной плоскости наблюдателя надо воспользоваться решениями уравнений (2а) и (2b). Определяя радиус (9) и подставляя в (4), с помощью (2b) определяем распределения угла ϕ . На рис. 2 цветом показан график распределения угла ϕ , нормированный на угол 2π , в картинной плоскости.

Таким же образом можно найти образ распределения времени t в картинной плоскости. Для этого надо воспользоваться решениями уравнений (2а) и (2с).

3. ФУНКЦИЯ ВИДНОСТИ

В этом разделе рассмотрим наблюдательное проявление колец посредством функции видности и представим точные аналитические решения проявления колец с неоднородной плотностью и конечной толщиной.

Комплексная функция видности V двух элементов интерферометра является фурье-образом распределения интенсивности сигнала на небе I и определяется формулой [20]

$$V(\mathbf{u}) = \int I(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}} d^2x,$$

где u — безразмерная проекция базы интерферометра в единицах длин волн, x — безразмерный размер образа в радианах. Если ввести полярные координаты $\mathbf{x} = (\rho, \phi_\rho)$ и $\mathbf{u} = (u, \phi_u)$, то функция видности переписывается в виде

$$V(u, \phi_u) = \iint I(\rho, \phi_\rho) e^{-2\pi i u \rho \cos(\phi_\rho - \phi_u)} \rho d\rho d\phi_\rho.$$

Если интенсивность кольца образа черной дыры описывается бесконечно тонким кольцом с однородной интенсивностью

$$I(\rho, \phi_\rho) = \frac{1}{\pi d} \delta \left(\rho - \frac{d}{2} \right),$$

то функция видности имеет простой вид [7] (в Приложении D выписаны табличные интегралы, которые использовались при вычислении интегралов в этом разделе)

$$V(u, \phi_u) = J_0(\pi du), \quad (10)$$

где d — диаметр кольца, J_0 — функция Бесселя. Если фотонное кольцо имеет конечную толщину, то для конечного кольца с однородной интенсивностью

$$I(\rho, \phi_\rho) = \frac{1}{\pi dw}$$

получаем функцию видности

$$\begin{aligned} V(u) &= \int_a^b \int_0^{2\pi} e^{-2\pi i u \rho \cos(\phi_\rho - \phi_u)} \frac{\rho d\rho d\phi_\rho}{\pi dw} = \\ &= \frac{2}{dw} \int_a^b \rho J_0(2\pi \rho u) d\rho = \\ &= \frac{1}{\pi dwu} \left(b J_1(2\pi bu) - a J_1(2\pi au) \right), \quad (11) \end{aligned}$$

где a, b — соответственно внутренний и внешний радиус кольца, $d = a + b$ — средний диаметр кольца, $w = b - a$ — толщина кольца. При $a \rightarrow b$ решение (11) сводится к решению (10). Для конечного неоднородного кольца, интенсивность которого растет линейно с увеличением радиуса,

$$I(\rho, \phi_\rho) = \frac{1}{\pi dw} \left(\frac{\rho}{a} - 1 \right),$$

получаем функцию видности

$$\begin{aligned} V(u) &= \int_a^b \frac{2\rho}{dw} \left(\frac{\rho}{a} - 1 \right) J_0(2\pi u \rho) d\rho = \\ &= \frac{1}{4dw\pi u} \left[4b \left(\frac{b}{a} - 1 \right) J_1(2\pi ub) + \right. \\ &+ \frac{b}{au} (J_0(2\pi bu)H_1(2\pi ub) - J_1(2\pi ub)H_0(2\pi ub)) - \\ &- \frac{a}{au} (J_0(2\pi au)H_1(2\pi ua) - \\ &\left. - J_1(2\pi ua)H_0(2\pi ua)) \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

Для конечного неоднородного кольца, интенсивность которого зависит параболически от радиуса,

$$I(\rho, \phi_\rho) = \frac{1}{\pi dw} \left(1 - \left(\frac{2}{b-a} \right)^2 \left(\rho - \frac{a+b}{2} \right)^2 \right),$$

получаем более громоздкое решение:

$$\begin{aligned} V(u) &= \frac{2}{dw} \int_a^b \left(1 - \left(\frac{2}{b-a} \right)^2 \left(\rho - \frac{a+b}{2} \right)^2 \right) \times \\ &\times \rho J_0(2\pi u \rho) d\rho = \frac{4}{dw^3} \left[\frac{b}{(2\pi u)^3} (-8\pi bu J_0(2\pi bu) + \right. \\ &+ 8J_1(2\pi bu) - 2d\pi^2 u J_1(2\pi bu)H_0(2\pi bu) + \\ &+ 2d\pi^2 u J_0(2\pi bu)H_1(2\pi bu)) - \frac{a}{(2\pi u)^3} \times \\ &(-8\pi au J_0(2\pi au) + 8J_1(2\pi au) - \\ &- 2d\pi^2 u J_1(2\pi au)H_0(2\pi au) + \\ &\left. + 2d\pi^2 u J_0(2\pi au)H_1(2\pi au)) \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

Для конечного анизотропного кольца, интенсивность которого зависит от угла ϕ_ρ ,

$$I(\rho, \phi_\rho) = \frac{\sin \phi_\rho}{2dw},$$

функция видности равна

$$\begin{aligned} V(u) &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \sin \phi_\rho e^{-2\pi i \rho u \cos(\phi_\rho - \phi_u)} \frac{\rho d\rho d\phi_\rho}{2dw} = \\ &= -\frac{i\pi \sin \phi_u}{dw} \int_a^b \rho J_1(2\pi u \rho) d\rho = \\ &= \frac{\pi i \sin \phi_u}{4udw} \left[a(J_1(2\pi ua)H_0(2\pi ua) - \right. \\ &- J_0(2\pi ua)H_1(2\pi ua)) - b(J_1(2\pi ub)H_0(2\pi ub) - \\ &\left. - J_0(2\pi ub)H_1(2\pi ub)) \right]. \quad (14) \end{aligned}$$

Данная функция видности является мнимой. Это означает, что фаза функции видности равна $\pi/2$. Амплитуда функции видности равна модулю от выражения (14).

На рис. 3 показаны модуль функции видности для рассмотренных колец в зависимости от проекции баз интерферометра в единицах миллиард длин волн (Гл). Синяя кривая соответствует бесконечно тонкому кольцу, зеленая кривая — однородному кольцу с конечной толщиной, красная кривая — неоднородному кольцу, интенсивность которого растет линейно с увеличением радиуса, и черная кривая — неоднородному кольцу, интенсивность которого зависит параболически от радиуса. На данном рисунке толщина кольца равна $w = 2\mu\text{ас}$ (микросекунд дуги), а диаметр $d = 34\mu\text{ас}$. Все кривые нормированы на единицу функции видности $V = 1$ при нулевых проекциях баз $u = 0$. Наибольшую скорость уменьшения функции видности в зависимости от проекции баз имеет неоднородное кольцо с параболическим профилем изменения интенсивности. Для того чтобы разрешить однородное кольцо, проекция баз интерферометра должна быть больше обратной толщины, $u > 1/w$ [7]. Для толщины $w = 2\mu\text{ас}$ это соответствует проекциям базы $u > 100\text{Гл}$. При условиях $u \gg 1/w$ наблюдается периодичность функции видности V с периодом $1/w$ и асимптотикой $V \sim 1/u^{3/2}$. Неоднородное кольцо с линейным ростом интенсивности имеет такую же асимптотику вида $V \sim 1/u^{3/2}$, но периодичность выражена не так ярко. Асимптотика функции видности неоднородного кольца, интенсивность которого зависит параболически от радиуса, имеет вид $V \sim 1/u^{5/2}$, т.е. функция видности убывает быстрее, и периодичность не проявляется.

На рис. 4 показана амплитуда двумерной функции видности в зависимости от координат проекции баз (u, v) в единицах Гл. Функция видности не симметрична. Вдоль оси x она имеет нулевое значение ($\sin \phi_u = 0$).

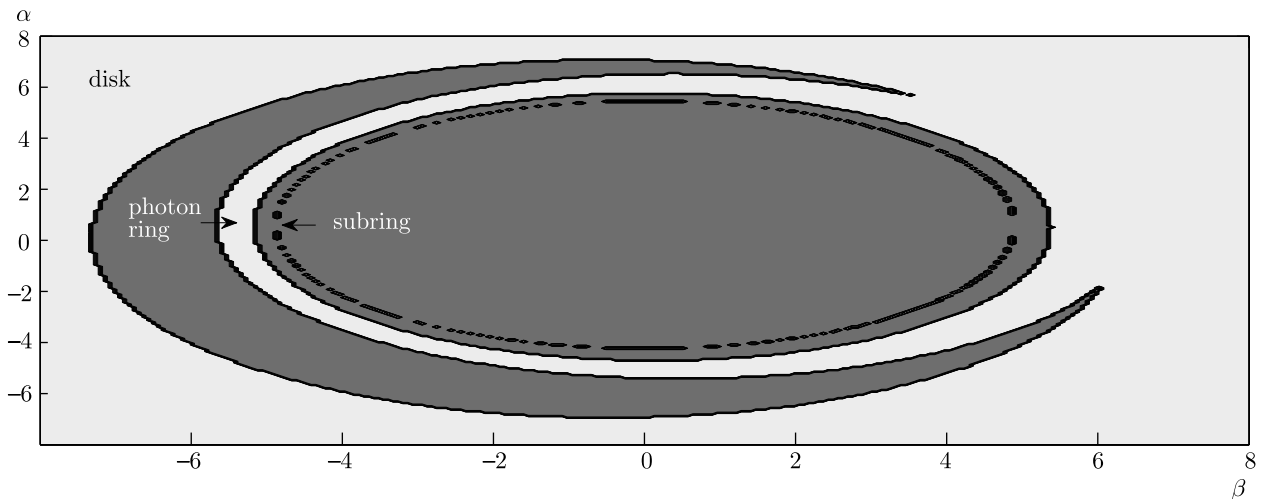


Рис. 1. Аналитический образ черной дыры, полученный по формулам (3) и (5), в зависимости от α и β

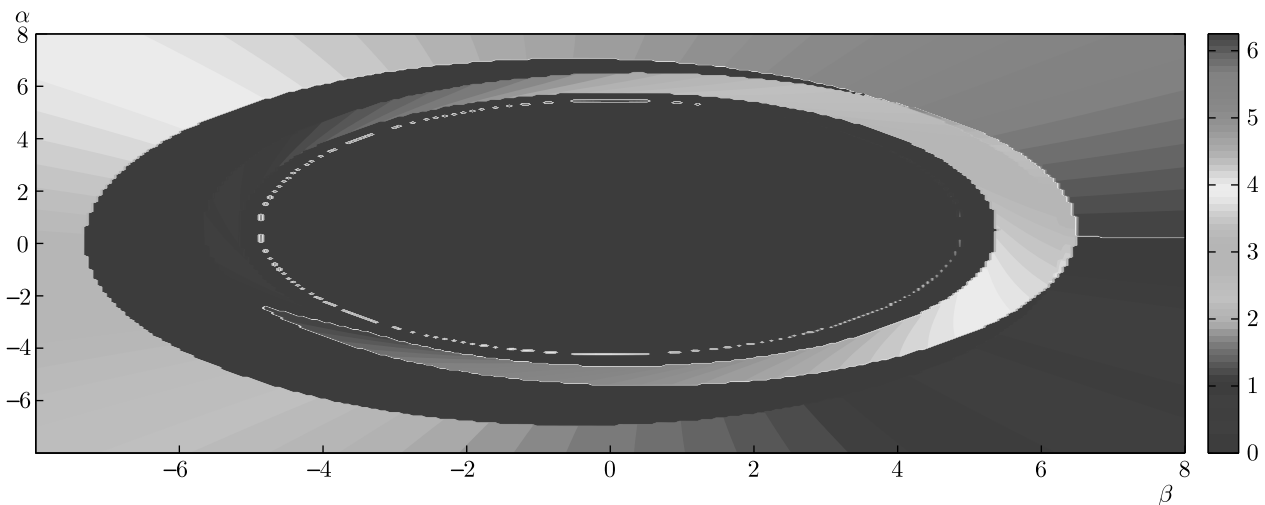


Рис. 2. (В цвете онлайн) Аналитический образ распределения угла ϕ в зависимости от параметров α , β , полученный по формулам (3)–(6)

Из сказанного выше можно сделать следующие выводы. Интерферометрическое проявление фотонных колец черных дыр зависит от степени неоднородности распределения интенсивности по ширине кольца. С увеличением неоднородности требуются более чувствительные детекторы, способные фиксировать функцию видности от фотонных колец.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривались аналитические методы построения образа черной дыры Керра–Ньюмена. Были выписаны точные аналитические

решения и в качестве примера построены образы и фотонные кольца бесконечно тонкого диска. Для простейшей формы образа кольца черной дыры были вычислены аналитически функции видности и была показана возможность детектирования колец черной дыры на базах $u > 1/w$, что соответствует расстоянию порядка расстояния от Земли до Луны и больше [7].

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-02-00469-а) и Государственного задания по научной программе ОКР «Миллиметр».

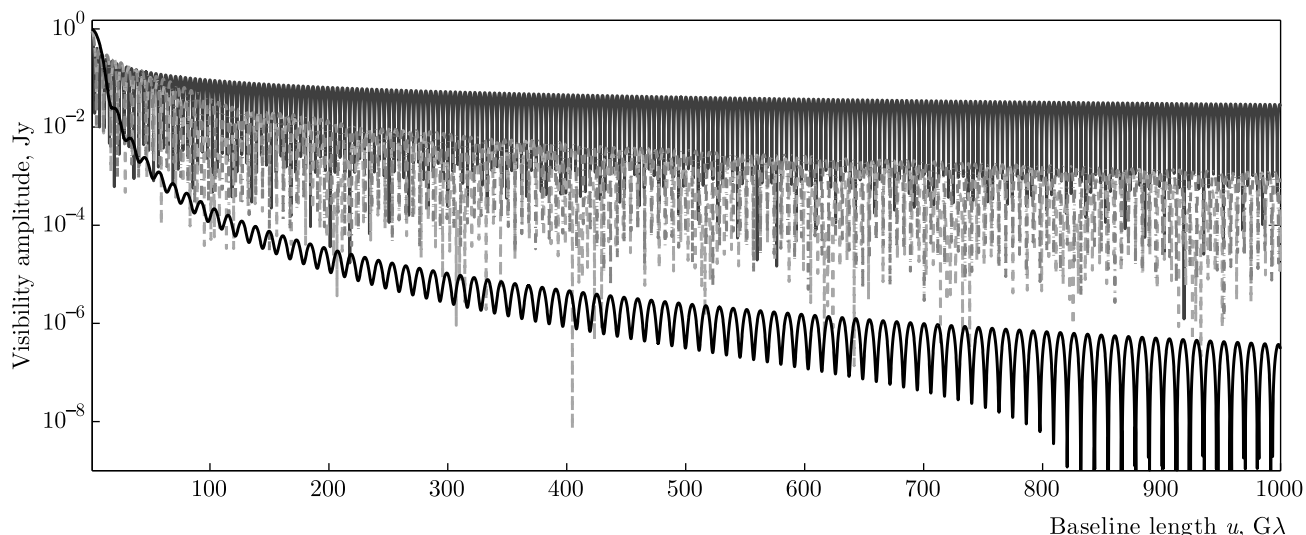


Рис. 3. (В цвете онлайн) Одномерные функции видности в зависимости от u

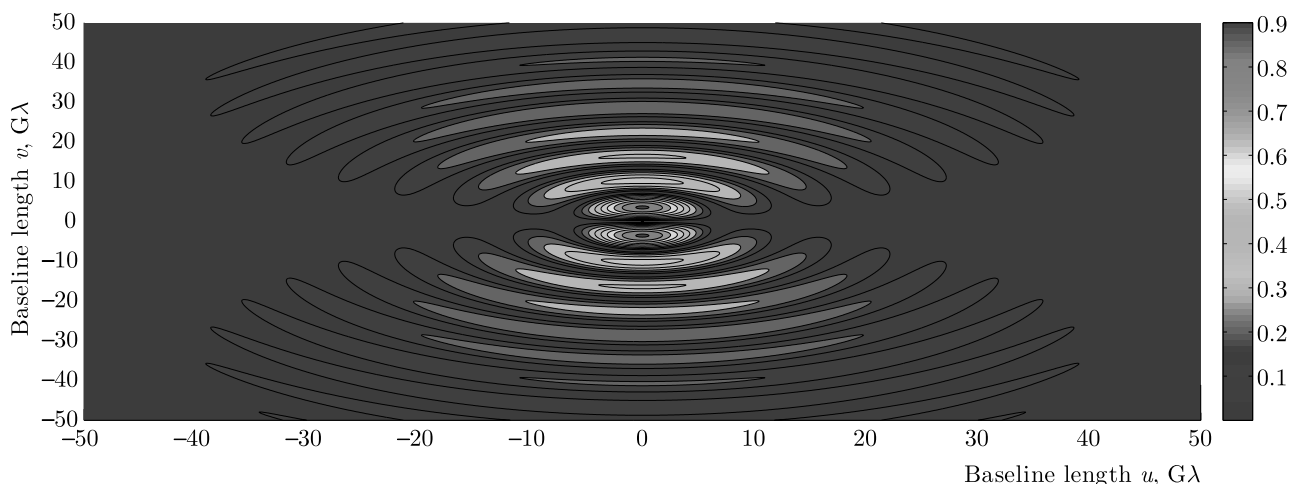


Рис. 4. (В цвете онлайн) Двумерная функция видности в зависимости от u, v для неоднородного анизотропного кольца

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Метрические коэффициенты метрики Керра–Ньюмена равны [16]

$$g_{tt} = - \left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\Sigma} \right), \quad g_{rr} = \frac{\Sigma}{\Delta}, \quad g_{\theta\theta} = \Sigma,$$

$$g_{\phi\phi} = \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} \left((r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta \right),$$

$$g_{t\phi} = - \frac{(2Mr - Q^2)a \sin^2 \theta}{\Sigma}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{\Sigma},$$

$$g^{tt} = - \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta}, \quad g^{rr} = \frac{\Delta}{\Sigma},$$

$$g^{\phi\phi} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Delta \Sigma \sin^2 \theta}, \quad g^{t\phi} = - \frac{(2Mr - Q^2)a}{\Sigma \Delta}.$$

Определитель метрики равен [16]

$$g = -\Sigma^2 \sin^2 \theta.$$

Символы Кристоффеля равны [16]

$$\Gamma_{tr}^t = -\frac{pb}{\Delta}, \quad \Gamma_{r\phi}^t = \frac{a \sin^2 \theta}{\Delta} (pb + 2qr),$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^t = -\frac{qa^3}{\Sigma} \sin^2 \theta \sin 2\theta, \quad \Gamma_{tt}^r = -\frac{\Delta p}{\Sigma},$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{r}{\Sigma} + \frac{M-r}{\Delta}, \quad \Gamma_{r\theta}^r = -\frac{a^2 \sin 2\theta}{2\Sigma},$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^\theta &= -\frac{a^2 \sin 2\theta}{2\Sigma}, & \Gamma_{rr}^\theta &= \frac{a^2 \sin 2\theta}{2\Sigma\Delta}, \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r\Delta}{\Sigma}, & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{r}{\Sigma}, \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{\Delta \sin^2 \theta}{\Sigma}(r + pa^2 \sin^2 \theta), & \Gamma_{t\theta}^t &= \frac{qa^2 \sin 2\theta}{\Sigma}, \\ \Gamma_{tt}^\theta &= \frac{qa^2 \sin 2\theta}{\Sigma^2}, & \Gamma_{t\phi}^r &= \frac{a\Delta p \sin^2 \theta}{\Sigma}, \\ \Gamma_{t\phi}^\theta &= -\frac{qab \sin 2\theta}{\Sigma^2}, & \Gamma_{t\theta}^\phi &= \frac{2qa \cos \theta}{\Sigma \sin \theta}, \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\frac{\sin 2\theta}{2\Sigma} \left[b - 2a^2 q \sin^2 \theta \left(2 + \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \right], \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{r}{\Delta} (1 + 2q) + a^2 p \frac{\sin^2 \theta}{\Delta}, \\ \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \frac{\cos \theta}{\Delta \sin \theta} \left[(1 + 2q)(b - 2qa^2 \sin^2 \theta) - \frac{2qa^2 b \sin^2 \theta}{\Sigma} \right], \\ \Gamma_{tr}^\phi &= -a \frac{rQ^2 + M(\Sigma - 2r^2)}{\Delta \Sigma^2}, \end{aligned}$$

где

$$b = r^2 + a^2, \quad p = \frac{rQ^2 + M(\Sigma - 2r^2)}{\Sigma^2}, \quad q = \frac{Q^2 - 2Mr}{2\Sigma}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Выражение для радиального потенциала является алгебраическим уравнением четвертого порядка, которое удобно представить в виде [17]

$$R = (r - r_a)(r - r_b)(r - r_c)(r - r_d),$$

где корни уравнения записаны в порядке убывания, $r_a > r_b > r_c > r_d$. Явный вид решения этого уравнения записывается в виде [17]

$$\begin{aligned} r_a &= z + \sqrt{-\frac{A}{2} - z^2 - \frac{B}{4z}}, \\ r_b &= z - \sqrt{-\frac{A}{2} - z^2 - \frac{B}{4z}}, \\ r_c &= -z + \sqrt{-\frac{A}{2} - z^2 + \frac{B}{4z}}, \\ r_d &= -z - \sqrt{-\frac{A}{2} - z^2 + \frac{B}{4z}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A &= a^2 - \eta - \lambda^2, \\ B &= 2M(\eta + (\lambda - a)^2), \\ C &= -a^2\eta - Q^2(\eta + (a - \lambda)^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= -\frac{A^2}{12} - C, \\ \mathcal{Q} &= -\frac{A}{3} \left[\left(\frac{A}{6} \right)^2 - C \right] - \frac{B^2}{8}, \\ \omega_{\pm} &= \sqrt[3]{-\frac{\mathcal{Q}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathcal{P}}{3} \right)^3 + \left(\frac{\mathcal{Q}}{2} \right)^2}}, \\ z &= \sqrt{\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} - \frac{A}{6}} > 0. \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Неполные эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} F(\phi, k) &= \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k \sin^2 \theta}}, \\ E(\phi, k) &= \int_0^\phi \sqrt{1 - k \sin^2 \theta} d\theta, \\ \Pi(\alpha^2, \phi, k) &= \int_0^\phi \frac{1}{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k \sin^2 \theta}}. \end{aligned}$$

Производная эллиптического интеграла второго рода E по параметру k задается как

$$E'(\phi, k) = \frac{\partial E(\phi, k)}{\partial k} = \frac{E(\phi, k) - F(\phi, k)}{2k}.$$

Полные эллиптические интегралы определяются условием $\phi = \pi/2$ и обозначаются как

$$\begin{aligned} K(k) &= F(\pi/2, k), & E(k) &= E(\pi/2, k), \\ \Pi(n, k) &= \Pi(n, \pi/2, k). \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \nu &= \arcsin \sqrt{\frac{(r_b - r_d)(r - r_a)}{(r_a - r_d)(r - r_b)}}, & \alpha^2 &= \frac{r_a - r_d}{r_b - r_d}, \\ g &= \frac{2}{\sqrt{(r_a - r_c)(r_b - r_d)}}, & k &= \frac{(r_b - r_c)(r_a - r_d)}{(r_a - r_c)(r_b - r_d)}. \end{aligned}$$

Для вычисления интегралов I в работе использовались следующие табличные значения интегралов для случая, когда $r > r_a$. Данный интеграл вычисляется на с. 256 [21]:

$$\int_{r_a}^r \frac{dx}{\sqrt{(x - r_a)(x - r_b)(x - r_c)(x - r_d)}} = gF(\nu, k).$$

Этот интеграл вычисляется на с. 257 [21]:

$$\int_{r_a}^r \frac{x dx}{\sqrt{(x-r_a)(x-r_b)(x-r_c)(x-r_d)}} = g \left[(r_a - r_b) \Pi(\alpha^2, \nu, k) + r_b F(\nu, k) \right].$$

Этот интеграл вычисляется на с. 259 [21]:

$$\int_{r_a}^r \frac{dx}{(p-x)\sqrt{(x-r_a)(x-r_b)(x-r_c)(x-r_d)}} = \frac{g}{(p-r_a)(p-r_b)} \left[(r_a - r_b) \Pi\left(\alpha^2 \frac{p-r_b}{p-r_a}, \nu, k\right) + (p-r_a) F(\nu, k) \right].$$

Этот интеграл вычисляется на с. 130 [22]:

$$\int_{r_a}^r \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x-r_a)(x-r_b)(x-r_c)(x-r_d)}} = gr_a^2 \int_0^{u_1} \frac{(1 - \alpha_1^2 \text{sn}^2 u)^2}{(1 - \alpha^2 \text{sn}^2 u)^2} du,$$

где

$$\text{am } u_1 = \arcsin \sqrt{\frac{(r_b - r_d)(r - r_a)}{(r_a - r_d)(r - r_b)}}, \quad \alpha_1^2 = \frac{r_a - r_d}{r_b - r_d} \frac{r_b}{r_a}$$

и am обозначает амплитуду u_1 .

Данный интеграл вычисляется на с. 205 [22]:

$$\int \frac{(1 - \alpha_1^2 \text{sn}^2 u)^2}{(1 - \alpha^2 \text{sn}^2 u)^2} du = \frac{\alpha_1^4}{\alpha^4} \left[V_0 + 2 \frac{\alpha^2 - \alpha_1^2}{\alpha_1^2} V_1 + \frac{(\alpha^2 - \alpha_1^2)^2}{\alpha_1^4} V_2 \right],$$

где (см. с. 201 [22])

$$V_0 = \int du = F(\nu, k),$$

$$V_1 = \int \frac{du}{1 - \alpha^2 \text{sn}^2 u} = \Pi(\alpha^2, \nu, k),$$

$$V_2 = \int \frac{du}{(1 - \alpha^2 \text{sn}^2 u)^2} = \frac{1}{2(\alpha^2 - 1)(k - \alpha^2)} \left[\alpha^2 E(u) + (k - \alpha^2)u + (2\alpha^2 k + 2\alpha^2 - \alpha^4 - 3k) \Pi(\alpha^2, \nu, k) - \frac{\alpha^4 \text{sn } u \text{ cn } u \text{ dn } u}{1 - \alpha^2 \text{sn}^2 u} \right],$$

$\text{sn } u$, $\text{cn } u$ и $\text{dn } u$ — эллиптические функции Якоби.

Интеграл I_ϕ легко представить в виде табличных интегралов. Для этого разложим I_ϕ как [23]

$$I_\phi = \int_{r_a}^r \frac{a(2rM - Q^2 - a\lambda)}{\Delta\sqrt{R}} dr = a \sum_{i=1}^{i=2} \int_{r_a}^r \frac{K_i dr}{(r - r_i)\sqrt{R}} = ga \sum_{i=1}^2 \Gamma_i \left[(1 - \beta_i^2) \Pi(\nu, \gamma_i^2, k) + \beta_i^2 F(\nu, k) \right],$$

где

$$\gamma_i^2 = \frac{r_a - r_d}{r_b - r_d} \frac{r_i - r_b}{r_i - r_a}, \quad \beta_i^2 = \frac{r_i - r_a}{r_i - r_b},$$

$$r_i = M + (-1)^{i+1} \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}, \quad \Gamma_i = \frac{K_i}{r_a - r_i},$$

$$K_i = M + (-1)^{i+1} \frac{M^2 - Q^2/2 - a\lambda/2}{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}},$$

Аналогично представим интеграл I_t в виде табличных интегралов как

$$I_t = \int_{r_a}^r \left[\frac{A_1}{r - r_1} + \frac{A_2}{r - r_2} + 4M^2 - Q^2 + 2Mr + r^2 \right] \frac{dr}{\pm r\sqrt{R}},$$

где

$$A_1(r_1 - r_2) = (2Mr_1 - Q^2)(r_1^2 + a^2 - a\lambda),$$

$$A_2(r_1 - r_2) = -(2Mr_2 - Q^2)(r_2^2 + a^2 - a\lambda).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ D

Для вычисления функции видности использовались следующие табличные значения интегралов. Для вычисления интеграла (10) использовался табличный интеграл

$$\int_0^{2\pi} e^{-2\pi i u \rho \cos(\phi_\rho - \phi_u)} d\phi_\rho = 2\pi J_0(2\pi u \rho).$$

Для вычисления интеграла (11)–(13), использовались табличные интегралы (с. 484 [24])

$$\int_0^z t J_0(ut) dt = \frac{z}{u} J_1(uz),$$

$$\int_0^z t^2 J_0(ut) dt = \\ = \frac{z}{2u^2} [2uzJ_1(uz) - \pi J_1(uz)H_0(uz) + \pi J_0(uz)H_1(uz)],$$

$$\int_0^z t^3 J_0(ut) dt = \frac{z^2}{u^2} (2J_2(uz) - uzJ_3(uz)) = \\ = \frac{z^2}{u^2} [uzJ_1(uz) - 2J_2(uz)] = \\ = \frac{z^2}{u^2} [uzJ_1(uz) - \frac{4}{uz}J_1(uz) + 2J_0(uz)],$$

где H — функция Струве. Для вычисления интеграла (14) использовался табличный интеграл

$$\frac{2u}{\pi} \int_0^x t J_1(ut) dt = x [J_1(ux)H_0(ux) - J_0(ux)H_1(ux)].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Event Horizon Telescope Collaboration, *Astrophys. J. Lett.* **875**, L1 (2019).
2. Event Horizon Telescope Collaboration, *Astrophys. J. Lett.* **875**, L2 (2019).
3. Event Horizon Telescope Collaboration, *Astrophys. J. Lett.* **875**, L3 (2019).
4. Event Horizon Telescope Collaboration, *Astrophys. J. Lett.* **875**, L4 (2019).
5. Event Horizon Telescope Collaboration, *Astrophys. J. Lett.* **875**, L5 (2019).
6. Event Horizon Telescope Collaboration, *Astrophys. J. Lett.* **875**, L6 (2019).
7. M. D. Johnson et al., *Sci. Adv.* **6**, 1310 (2020).
8. Н. С. Кардашёв и др., *УФН* **184**, 1319 (2014).
9. T. Bronzwaer et al., *Astron. Astrophys.* **613**, 2 (2018).
10. M. Moscibrodzka and C. F. Gammie, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **475**, 43 (2018).
11. S. C. Noble, P. K. Leung, C. F. Gammie, and L. G. Book, *Class. Quant. Grav.* **24**, 259 (2007).
12. J. Dexter, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **462**, 115 (2016).
13. S. E. Gralla and A. Lupsasca, arXiv:2007.10336.
14. S. E. Gralla and A. Lupsasca, arXiv:2008.03879.
15. J. R. Farah, D. W. Pesce, M. D. Johnson, and L. L. Blackburn, *Astrophys. J.* **900**, 77 (2020).
16. Д. В. Гальцов, *Частицы и поля в окрестности черных дыр*, МГУ, Москва (1986).
17. S. E. Gralla and A. Lupsasca, *Phys. Rev. D* **101**, 044031 (2020).
18. S. E. Gralla, A. Lupsasca, *Phys. Rev. D* **101**, 044032 (2020).
19. C. T. Cunningham and J. M. Bardeen, *Astrophys. J.* **173**, L137 (1972).
20. A. R. Thompson, J. M. Moran, and G. W. J. George, *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy*, Springer (2017).
21. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1963).
22. P. F. Byrd and M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Springer (1971).
23. S. E. Vázquez and E. P. Esteban, *Nuovo Cim. B* **119**, 489 (2004).
24. M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Nat. Bureau Stand. (1972).