

# ЗАКОНЫ ПОДОБИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА НЕСТАЦИОНАРНОГО СУПЕРДИФФУЗИОННОГО ПЕРЕНОСА: ПРОГУЛКИ ЛЕВИ И ПОЛЕТЫ ЛЕВИ

*А. Б. Кужушкин<sup>a,b,c\*</sup>, А. А. Куличенко<sup>a\*\*</sup>, А. В. Соколов<sup>d\*\*\*</sup>*

<sup>a</sup> *Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»  
123182, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
115409, Москва, Россия*

<sup>c</sup> *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)  
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

<sup>d</sup> *Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук  
127051, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 10 января 2021 г.,  
после переработки 29 января 2021 г.  
Принята к публикации 29 января 2021 г.

Получено аналитическое описание распространения фронта возмущения среды при нестационарном супердиффузионном (нелокальном) переносе в случае конечной фиксированной скорости движения переносчиков возмущения (так называемые «прогулки Леви с остановками»). Данная проблема охватывает такие задачи, как перенос резонансного излучения в астрофизических газах и плазме, биологическую миграцию, перенос энергии волнами в плазме. В этом подходе результат, полученный интегрированием точного решения кинетического уравнения для функции Грина, не зависит от мерности координатного пространства. Проведено сравнение с другим, более точным методом определения фронта и численными расчетами статистики траекторий методом Монте-Карло. Сравнение показало применимость полученных результатов в широком диапазоне параметров задачи. Предложено единое описание динамики фронта возмущения среды при произвольной, включая бесконечную, фиксированной скорости переносчиков возмущения. Это соответствует объединению формул для фронта при переносе полетами Леви и прогулками Леви. Обсуждаются критерии перехода между указанными режимами супердиффузионного переноса, что, в частности, соответствует условию учета конечной скорости света в переносе резонансного излучения в газах и плазме. Для прогулок Леви найдена связь интегральных характеристик возмущения среды и его переносчиков.

DOI: 10.31857/S0044451021050138

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является развитием работ [1–3], где были получены общее и приближенное атомодельное решения для функции Грина широкого класса интегродифференциальных уравнений одномерного [1, 3], двумерного и трехмерного [2] (по пространственным координатам) нестационарного су-

пердиффузионного переноса возмущения однородной среды для конечной фиксированной скорости переносчиков. Основной целью этой работы является, во-первых, получение аналитического описания динамики эффективного фронта возмущения среды в случае конечной фиксированной скорости движения переносчиков возмущения (так называемые «прогулки Леви с остановками», см. [4–7] и рис. 1 в [5]) и, во-вторых, объединение этих формул с аналогичной формулой для полетов Леви, чему соответствует предел бесконечной скорости переносчиков (эта формула в частных случаях и общем виде в теории переноса резонансного излучения в модели

\* E-mail: kukushkin\_ab@nrcki.ru

\*\* E-mail: kulichenko\_aa@nrcki.ru

\*\*\* E-mail: alexander.v.sokolov@gmail.com

Бибермана – Холстейна [8–10] получена и проанализирована в [11–18]).

Напомним, что в случае нормальной (или обыкновенной) диффузии, определяемой как броуновское движение, описываемое дифференциальным уравнением фоккер-планковского типа, функция Грина является гауссианом, чей аргумент определяет закон распространения фронта  $r_{fr}(t) \sim (Dt)^\beta$ , где  $\beta = 1/2$ ,  $D$  – коэффициент диффузии. Этот закон нарушается в широком классе явлений, где длина свободного пробега (длина шага) дается медленно, по степенному закону убывающей функцией распределения переносчиков по длине их свободного пробега (ФРСП). Это приводит к расходимости коэффициента диффузии, формально определяемого из дисперсии ФРСП, и к показателю степени  $\beta > 1/2$  в законе подобия  $r_{fr}(t) \sim (Dt)^\beta$ , что и называется супердиффузионным переносом.

Супердиффузионный перенос и связанная с ним концепция полетов Леви, введенная Мандельбротом [19, 20] (см. с. IX в [20] и, например, [21–23]), охватывает широкий круг явлений в физике и других дисциплинах. Модель «прогулок Леви с остановками» актуальна для таких задач как перенос резонансного излучения в астрофизических газах и плазме [24–26], биологическая миграция (разд. 6 в [5]), перенос энергии волнами в плазме [27]. В отличие от задач стационарного нелокального переноса, где аналитические методы хорошо развиты, как, например, в уже упомянутой теории переноса резонансного излучения при полном перераспределении по частоте в акте поглощения и излучения фотона атомом или ионом в газе или плазме [10, 12–14, 28–33], для задач нестационарного нелокального переноса с учетом конечной скорости света простых формул для практически интересующих характеристик, прежде всего динамики фронта распространения возмущения среды от мгновенного точечного источника, пока получено не было.

В разд. 2 представлены уравнения, описывающие нелокальный (супердиффузионный) перенос в случае конечной фиксированной скорости движения переносчиков возмущения («прогулки Леви с остановками»). В разд. 3 представлен универсальный, не зависящий от мерности координатного пространства метод определения закона распространения фронта возмущения среды (или фронта плотности стоящих мигрантов) при переносе прогулками Леви. Для фронта и других характеристик возмущения среды получены аналитические выражения. В разд. 4 представлен вывод характеристик возмущения переносчиков, показана их связь с характери-

стиками возмущения среды. В разд. 5 дано описание моделирования прогулок Леви методом Монте-Карло. В разд. 6 проведено сравнение результатов для числа стоящих и бегущих мигрантов для прогулок Леви, приведены результаты моделирования траекторий мигрантов методом Монте-Карло. В разд. 7 представлена единая формула фронта возмущения среды для прогулок Леви и полетов Леви, проведено сравнение разных подходов к определению фронта возмущения среды, в том числе проведено сравнение с более точным законом определения фронта и результатами моделирования траекторий методом Монте-Карло.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим задачу супердиффузионного переноса, который является либо переносом возмущения неподвижной однородной среды некими переносчиками, не принадлежащими среде (примером такого процесса является перенос возбуждения атомов или ионов путем испускания и поглощения резонансных фотонов), либо эволюцией ансамбля объектов или субъектов, которые движутся (мигрируют) в однородном пространстве с одинаковой постоянной скоростью между точками остановки при заданном среднем времени пребывания в этих точках. В этом случае уравнение для функции Грина плотности возмущения среды или плотности стоящих мигрантов,  $f(\mathbf{r}, t)$ , в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  имеет вид (вывод этого уравнения можно найти, например, в разд. 2 в [3]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = & - \left( \frac{1}{\tau} + \sigma \right) f(\mathbf{r}, t) + \\ & + \frac{1}{\tau} \int d\mathbf{r}_1 W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) \theta \left( t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}{c} \right) \times \\ & \times f \left( \mathbf{r}_1, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}{c} \right) + \delta(\mathbf{r})\delta(t), \quad (2.1) \end{aligned}$$

где  $W(\rho)$  – вероятность поглощения переносчика возмущения средой (или вероятность остановки мигранта) на расстоянии  $\rho$  от точки его последнего старта. Условие нормировки вероятности имеет стандартный вид:

$$\int_0^\infty W(\rho) S(\rho) d\rho = 1. \quad (2.2)$$

Здесь  $S(\rho)d\rho$  есть элемент объема в пространстве ( $\rho \geq 0$ ): в одномерном случае  $S(\rho) = 2$ , в двумер-

ном —  $S(\rho) = 2\pi\rho$ , в трехмерном —  $S(\rho) = 4\pi\rho^2$ . При этом функция

$$W_{step}(\rho) \equiv W(\rho)S(\rho) \quad (2.3)$$

есть ФРСП переносчиков возмущения среды или бегущих мигрантов;  $\tau$  — среднее время нахождения мигранта в точке остановки или среднее время жизни элементарного возмущения среды (например, среднее время между поглощением и последующим испусканием резонансного фотона атомом или ионом);  $c$  — постоянная скорость движения переносчиков (или бегущих мигрантов) между точками остановки;  $\sigma$  — среднее обратное время исчезновения («тушения») переносчиков (для переноса резонансного излучения это относится к нерадиационному девозбуждению среды);  $\theta(x)$  — ступенчатая функция Хевисайда;  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака. В трехмерном случае, когда переносчиками возмущения среды (а именно, возбуждения атомов или ионов) являются резонансные фотоны в среде,  $W$  и  $W_{step}$  имеют вид (ср., например, разд. 1 в [13])

$$W(\rho) = -\frac{1}{4\pi\rho^2} \frac{dT(\rho)}{d\rho} \equiv \frac{1}{4\pi\rho^2} W_{step}(\rho), \quad (2.4)$$

$$T(\rho) = \int d\omega e_\omega \exp(-\kappa_\omega\rho),$$

где  $e_\omega$  — спектральное распределение вероятности испускания фотона с частотой  $\omega$ ;  $\kappa_\omega$  — коэффициент поглощения средой фотона с частотой  $\omega$  (т.е. обратная длина свободного пробега такого фотона).

Для реализации супердиффузионного переноса ФРСП должна быть медленно спадающей функцией расстояния  $\rho$ , т.е. степенной:

$$W_{step}(\rho) = \frac{\gamma\kappa_0}{(1 + \kappa_0\rho)^{\gamma+1}}, \quad (2.5)$$

$$0 < \gamma < 2,$$

где  $1/\kappa_0$  является характерной длиной, что в случае переноса возбуждения резонансными фотонами соответствует значению коэффициента поглощения в центре спектральной линии  $\kappa_0$ . Для такого модельного вида ФРСП ранее было получено выражение для функции Грина плотности возмущения среды (или плотности стоящих мигрантов)  $f(\mathbf{r}, t)$ : в случае переноса, одномерного по пространственной координате — в [3], а для двумерного и трехмерного — в [2]. Также в [2] (формула (3.12)) было получено аналитическое выражение для полного (т.е. интегрального по пространству) количества возбужденных частиц (или стоящих мигрантов) в среде  $N(t)$  — без «тушения» переносчиков — при временах, много

больших среднего времени нахождения переносчика в точке остановки,  $t \gg \tau$ . Отметим, что этот же результат можно получить путем прямого интегрирования функции Грина.

### 3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ ФРОНТА ВОЗМУЩЕНИЯ СРЕДЫ В СЛУЧАЕ ПРОГУЛОК ЛЕВИ

Определим эффективный фронт распространения возмущения в среде (или эффективный фронт для плотности стоящих мигрантов) от точечного мгновенного источника в следующем виде:

$$r_{rest}(t) = \sqrt{\frac{M_{rest}(t)}{N_{rest}(t)}}. \quad (3.1)$$

Здесь

$$N_{rest}(t) = \int f_{rest}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$$

является полным количеством возбужденных частиц в среде в задаче переноса возбуждения однородной среды или полным количеством стоящих мигрантов в задаче миграции в однородной среде. Отметим, что  $N_{rest}(0) = 1$  (это следует из определения источника в исходном уравнении для функции Грина (2.1)), поэтому  $N_{rest}(t)$  является долей возбужденных частиц среды в полном числе частиц или долей стоящих мигрантов в полном числе мигрантов;

$$M_{rest}(t) = \int r^2 f_{rest}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r},$$

— второй момент функции Грина.

Далее будем работать в безразмерных переменных: длину будем измерять в единицах  $1/\kappa_0$ , время — в единицах  $\tau$ , и будем искать выражение для фронта при временах, много больших характерного времени нахождения переносчика в точке остановки,  $t \gg 1$  (в безразмерных переменных) (для всех нетривиальных задач переноса, с множественными актами поглощения и переизлучения переносчиков, интересны именно такие времена).

В случае однородного трехмерного (3d) координатного пространства рассчитаем  $M_{rest}(t)$ :

$$M_{rest}(t) = 4\pi \int_0^{+\infty} f_{rest}(r, t) r^4 dr. \quad (3.2)$$

С учетом выражения для функции Грина плотности возмущения среды (плотности стоящих мигрантов)  $f_{rest}(r, t)$ , (2.20) в [2], получим

$$M_{rest}(t) = \frac{1}{2\pi^2 i} \int_{-\infty}^{+\infty} dp p \int_0^{+\infty} dr r^3 \sin(pr) \times \int_{+0-i\infty}^{+0+i\infty} e^{st} ds \left\{ s + 1 + \sigma\tau - \gamma \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u)^{\gamma+1}} \frac{\sin(pu)}{pu} \exp\left(-\frac{su}{R_c}\right) \right\}^{-1}, \quad (3.3)$$

— отношение среднего времени жизни возбужденного состояния частиц среды к среднему времени свободного пролета переносчика (фотона) (или отношение средних времен нахождения мигранта в состояниях покоя и движения). Интеграл по переменной  $r$  можно представить в виде

$$\int_0^{+\infty} dr r^3 \sin(pr) = \pi \delta'''(p). \quad (3.5)$$

где введен безразмерный параметр

$$R_c = c\tau\kappa_0 \quad (3.4)$$

С учетом (3.5) уравнение (3.3) примет вид

$$M_{rest}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+0-i\infty}^{+0+i\infty} ds e^{st} \gamma \int_0^{+\infty} \frac{du_1 u_1^2 e^{-su_1/R_c}}{(1+u_1)^{\gamma+1}} \left\{ s + 1 + \sigma\tau - \gamma \int_0^{+\infty} \frac{du e^{-su/R_c}}{(1+u)^{\gamma+1}} \right\}^{-2}. \quad (3.6)$$

Формула (3.6) не зависит от мерности координатного пространства и справедлива для случаев одномерного, двумерного и трехмерного переноса. Нетрудно видеть, что данное выражение представляет собой обратное преобразование Лапласа от функции

$$\hat{M}_{rest}(s) = \gamma \int_0^{+\infty} \frac{du_1 u_1^2 e^{-su_1/R_c}}{(1+u_1)^{\gamma+1}} \left\{ s + 1 + \sigma\tau - \gamma \int_0^{+\infty} \frac{du e^{-su/R_c}}{(1+u)^{\gamma+1}} \right\}^{-2}, \quad (3.7)$$

т. е.  $M_{rest}(t) \doteq \hat{M}_{rest}(s)$ . Отметим, что интеграл в числителе сходится, так как  $\text{Re}(s) > 0$ . Внутренние интегралы в (3.7) можно рассчитать:

$$\int_0^{+\infty} \frac{du e^{-su/R_c}}{(1+u)^{\gamma+1}} = \begin{cases} e^{s/R_c} \left(\frac{s}{R_c}\right)^\gamma \Gamma\left(-\gamma, \frac{s}{R_c}\right), & \gamma \neq 1, \\ 1 - e^{s/R_c} \frac{s}{R_c} \Gamma\left(0, \frac{s}{R_c}\right), & \gamma = 1, \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{du_1 u_1^2 e^{-su_1/R_c}}{(1+u_1)^{\gamma+1}} =$$

$$= \begin{cases} e^{s/R_c} \left(\frac{s}{R_c}\right)^\gamma \left\{ \Gamma\left(-\gamma, \frac{s}{R_c}\right) - \frac{2R_c}{s} \Gamma\left(1-\gamma, \frac{s}{R_c}\right) + \left(\frac{R_c}{s}\right)^2 \Gamma\left(2-\gamma, \frac{s}{R_c}\right) \right\}, & \gamma \neq 1, \\ 1 + \frac{R_c}{s} + e^{s/R_c} \left(2 + \frac{s}{R_c}\right) \left[ \text{Chi}\left(\frac{s}{R_c}\right) - \text{Shi}\left(\frac{s}{R_c}\right) \right], & \gamma = 1, \end{cases} \quad (3.8)$$

где

$$\Gamma(\alpha, z) = \int_z^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

— неполная гамма-функция,

$$\text{Chi}(z) = \gamma_e + \ln(z) + \int_0^z \frac{\text{ch}(x) - 1}{x} dx,$$

$$\text{Shi}(z) = \int_0^z \frac{\text{sh}(x)}{x} dx$$

— интегральные гиперболические косинус и синус соответственно,  $\gamma_e = 0.577216\dots$  — постоянная Эйлера,  $\text{ch}(x)$  и  $\text{sh}(x)$  — гиперболические косинус и синус соответственно.

Условию  $t \gg 1$  соответствует  $s \ll 1$ , поэтому будем использовать соответствующее разложение

неполной гамма-функции. Далее будем всегда рассматривать случай сохранения полного числа мигрантов (или суммы количества возбужденных ато-

мов и фотонов), т. е.  $\sigma = 0$ . После преобразования (3.7) с учетом (3.8) получаем

$$\hat{M}_{rest}(s) = \begin{cases} -\frac{1-\gamma}{\Gamma(-\gamma)} \left(\frac{R_c}{s}\right)^{2+\gamma}, & 0 < \gamma < 1, \\ \frac{1}{\ln^2(R_c/s)} \left(\frac{R_c}{s}\right)^3, & \gamma = 1, \\ \frac{\gamma(\gamma-1)^2 \Gamma(2-\gamma)}{(1/R_c + \gamma - 1)^2} \frac{R_c^{2-\gamma}}{s^{4-\gamma}}, & 1 < \gamma < 2. \end{cases} \quad (3.9)$$

Обратное преобразование Лапласа дает следующий результат:

$$M_{rest}(t) = \begin{cases} \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} R_c (tR_c)^{1+\gamma}, & 0 < \gamma < 1, \\ \frac{R_c t^2}{2[1 + \ln(tR_c)/R_c]^2}, & \gamma = 1, \\ \frac{\gamma(\gamma-1)^2}{(2-\gamma)(3-\gamma)} \frac{(tR_c)^{3-\gamma}}{R_c(1/R_c + \gamma - 1)^2}, & 1 < \gamma < 2. \end{cases} \quad (3.10)$$

Для полного количества возбужденных частиц в среде (или стоящих мигрантов) используем формулу (3.12) из [2] и дополним ее формулой для  $\gamma = 1$ , что дает

$$N_{rest}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} \frac{R_c^\gamma}{t^{1-\gamma}}, & 0 < \gamma < 1, \\ \frac{1}{1 + \ln(tR_c)/R_c}, & \gamma = 1, \\ \frac{\gamma-1}{1/R_c + \gamma - 1} \left(1 + \frac{1}{1/R_c + \gamma - 1} \frac{1}{R_c^\gamma t^{\gamma-1}}\right), & 1 < \gamma < 2. \end{cases} \quad (3.11)$$

С учетом (3.10) и (3.11) закон движения фронта (3.1) при  $t \gg 1$  принимает следующий вид:

$$r_{rest}(t) = \begin{cases} tR_c \sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}, & 0 < \gamma < 1, \\ \frac{tR_c}{\sqrt{2(R_c + \ln(tR_c))}}, & \gamma = 1, \\ (tR_c)^{(3-\gamma)/2} \left[ \frac{\gamma(\gamma-1)}{(2-\gamma)(3-\gamma)} \frac{1}{1 + R_c(\gamma-1)} \right]^{1/2}, & 1 < \gamma < 2. \end{cases} \quad (3.12)$$

Однако в окрестности точки  $\gamma = 1$  формулу (3.12) необходимо интерполировать, поскольку формулы при  $\gamma < 1$  и  $\gamma > 1$  при приближении к  $\gamma = 1$ , в соответствии с условиями их получения, неприменимы:

$$r_{rest}(t, R_c, \gamma) = \begin{cases} tR_c \sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}, & 0 < \gamma \leq 1 - \epsilon_{rest}^{(L)}(t, R_c), \\ \frac{tR_c}{\sqrt{2(R_c + \ln(tR_c))}}, & 1 - \epsilon_{rest}^{(L)}(t, R_c) < \gamma \leq 1 + \epsilon_{rest}^{(U)}(t, R_c), \\ (tR_c)^{(3-\gamma)/2} \left[ \frac{\gamma(\gamma-1)}{(2-\gamma)(3-\gamma)} \frac{1}{1 + R_c(\gamma-1)} \right]^{1/2}, & 1 + \epsilon_{rest}^{(U)}(t, R_c) < \gamma < 2, \end{cases} \quad (3.13)$$

где

$$\epsilon_{rest}^{(L)}(t, R_c) = \frac{1}{R_c + \ln(tR_c) + 0.5} \quad (3.14)$$

(здесь индекс «L» происходит от англ. lower, что означает область  $\gamma < 1$ ). Граница области вблизи  $\gamma = 1$  задается из условия непрерывности при сшивке значения функции (3.13)  $\gamma = 1$  с функцией при  $\gamma < 1$ . Аналогичная попытка «сшивки» при  $\gamma > 1$  дает функцию  $\epsilon_{rest}^{(U)}(t, R_c)$  (индекс «U» происходит от англ. upper, что означает область  $\gamma > 1$ ) (индекс «rest» в записи опустим):

$$\left[ \frac{\epsilon_U(1 + \epsilon_U)}{(1 - \epsilon_U)(2 - \epsilon_U)} \frac{1}{1 + R_c \epsilon_U} \right]^{1/2} = \frac{(tR_c)^{\epsilon_U/2}}{\sqrt{2(R_c + \ln(tR_c))}}. \quad (3.15)$$

Однако решения этого уравнения, допускающие непрерывность перехода во всей области параметров, отсутствуют: при малых  $R_c$  непрерывная сшивка невозможна. Но все же при больших значениях  $R_c$  уравнение (3.15) удастся решить с использованием теории возмущений. При этом получаем, что

$$\epsilon_{rest}^{(U)}(t, R_c) \approx \epsilon_{rest}^{(L)}(t, R_c) \approx \epsilon(t, R_c),$$

где

$$\epsilon(t, R_c) = \frac{1}{R_c + \ln(tR_c)}. \quad (3.16)$$

Анализ точности (3.13) проведен ниже, в разд. 7.

#### 4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ ФРОНТА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЕРЕНОСЧИКОВ В СЛУЧАЕ ПРОГУЛОК ЛЕВИ

Рассмотрим систему уравнений (2.4) в [2], описывающую перенос в двумерном (2d) случае, и решим ее относительно интенсивности переносчиков  $I_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$  при заданной плотности возмущения среды  $f(\mathbf{r}, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{rest}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= - \left( \frac{1}{\tau} + \sigma \right) f_{rest}(\mathbf{r}, t) + \int d\omega \frac{\kappa_\omega}{\hbar\omega} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi(\mathbf{n}) I_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) + \delta(\mathbf{r})\delta(t), \\ \frac{1}{c} \frac{\partial I_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)}{\partial t} + (\mathbf{n}, \nabla) I_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) &= \\ = \frac{\hbar\omega}{\tau} \frac{1}{2\pi} e_\omega f_{rest}(\mathbf{r}, t) - \kappa_\omega I_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Проинтегрируем по углам второе уравнение с учетом соотношения

$$\int_0^{2\pi} d\varphi(\mathbf{n})(\mathbf{n}, \nabla) = \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(\varphi) \frac{d}{ds} = 0$$

и введем усреднение по углам:

$$\bar{I}_\omega(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi(\mathbf{n}') I_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{n}', t).$$

Тогда

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{I}_\omega(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\hbar\omega}{\tau} e_\omega f_{rest}(\mathbf{r}, t) - \kappa_\omega \bar{I}_\omega(\mathbf{r}, t). \quad (4.2)$$

Решение указанного уравнения с начальным условием  $\bar{I}_\omega(\mathbf{r}, t = 0) = 0$  имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{I}_\omega(\mathbf{r}, t) &= \frac{\hbar\omega}{\tau} c e_\omega \times \\ &\times \int_0^t dt' \exp(-c(t-t')\kappa_\omega) f_{rest}(\mathbf{r}, t'). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Введем следующее определение для плотности переносчиков:

$$f_{mov}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int d\omega \frac{\bar{I}_\omega(\mathbf{r}, t)}{\hbar\omega}. \quad (4.4)$$

Тогда с учетом того, что

$$T(\rho) = \int d\omega e_\omega \exp(-\kappa_\omega \rho),$$

из (4.3) и (4.4) имеем

$$f_{mov}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t dt' f_{rest}(\mathbf{r}, t') T(c(t-t')). \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5), полученное путем решения задачи о переносе возбуждения среды фотонами в спектральной линии атомов или ионов, описывает также и связь плотностей стоящих и бегущих мигрантов.

В случае модельного вида ядра (2.4), которому соответствует ФРСП (2.5), после перехода к безразмерным переменным (длина — в единицах  $1/\kappa_0$ , время — в единицах  $\tau$ ) с учетом (3.4) получим

$$f_{mov}(\mathbf{r}, t) = \int_0^t \frac{dt' f_{rest}(\mathbf{r}, t')}{(1 + R_c(t-t'))^\gamma}. \quad (4.6)$$

Отсюда можно легко получить связь интегральных характеристик возмущения среды и его переносчиков (или, соответственно, стоящих и бегущих мигрантов):

$$\begin{aligned}
 N_{mov}(t) &= \int_0^t \frac{dt' N_{rest}(t')}{(1 + R_c(t - t'))^\gamma}, \\
 M_{mov}(t) &= \int_0^t \frac{dt' M_{rest}(t')}{(1 + R_c(t - t'))^\gamma}.
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

Основной вклад в интегралы (4.6), (4.7) дает область моментов времени  $t'$  вблизи  $t$ . При  $t \gg 1$  выражения (4.7) можно рассчитать в явном виде. Количество переносчиков (бегущих мигрантов) при этом описывается законом

$$N_{mov}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{\sin(\pi\gamma) R_c^\gamma}{\pi t^{1-\gamma}}, & 0 < \gamma < 1, \\ 1 - \frac{1}{1 + \ln(tR_c)/R_c}, & \gamma = 1, \\ 1 - \frac{\gamma - 1}{1/R_c + \gamma - 1} \left( 1 + \frac{1}{1/R_c + \gamma - 1} \frac{1}{R_c^\gamma t^{\gamma-1}} \right), & 1 < \gamma < 2. \end{cases}
 \tag{4.8}$$

Напомним, что  $N_{rest}(0) = 1$  (это следует из определения источника в исходном уравнении для функции Грина (2.1)), откуда  $N_{mov}(t)$ , как и  $N_{rest}(t)$ , см. (3.1), является отношением числа переносчиков к начальному числу возбужденных частиц среды или долей бегущих мигрантов в полном числе мигрантов  $N_{rest}(0)$ . Второй момент функции Грина записывается как

$$M_{mov}(t) = \begin{cases} \frac{\gamma(1-\gamma)}{2} (R_c t)^2, & 0 < \gamma < 1, \\ \frac{t^2}{2} \frac{\ln(tR_c) - 3/2}{(1 + \ln(tR_c)/R_c)^2}, & \gamma = 1, \\ \frac{\gamma(\gamma-1)}{(2-\gamma)(3-\gamma)} \frac{(R_c t)^{3-\gamma}}{(1 + R_c(\gamma-1))^2}, & 1 < \gamma < 2. \end{cases}
 \tag{4.9}$$

Согласно определению закона фронта для возмущения среды (стоящих мигрантов) (3.1) уместно ввести аналогичное определение для переносчиков (бегущих мигрантов):

$$\begin{aligned}
 r_{mov}(t) &= \sqrt{\frac{M_{mov}(t)}{N_{mov}(t)}}, \\
 M_{mov}(t) &= \int r^2 f_{mov}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \\
 N_{mov}(t) &= \int f_{mov}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}.
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

Тогда для безразмерного времени  $t \gg 1$  получим аналитическое выражение для фронта (4.10):

$$r_{mov}(t) = \begin{cases} tR_c \sqrt{\gamma(1-\gamma)/2}, & 0 < \gamma < 1, \\ \frac{tR_c}{\sqrt{2(R_c + \ln(tR_c))}}, & \gamma = 1, \\ (tR_c)^{(3-\gamma)/2} \left[ \frac{\gamma(\gamma-1)}{(2-\gamma)(3-\gamma)} \frac{1}{1 + R_c(\gamma-1)} \right]^{1/2}, & 1 < \gamma < 2. \end{cases}
 \tag{4.11}$$

Данную формулу так же, как и (3.12), необходимо интерполировать в окрестности точки  $\gamma = 1$ :

$$\begin{aligned}
 r_{mov}(t \geq t_{min}) &= \\
 &= \begin{cases} tR_c \sqrt{\gamma(1-\gamma)/2}, & 0 < \gamma \leq 1 - \epsilon_{mov}^{(L)}(t, R_c), \\ \frac{tR_c}{\sqrt{2(R_c + \ln(tR_c))}}, & 1 - \epsilon_{mov}^{(L)}(t, R_c) < \gamma \leq 1 + \epsilon_{mov}^{(U)}(t, R_c), \\ (tR_c)^{(3-\gamma)/2} \left[ \frac{\gamma(\gamma-1)}{(2-\gamma)(3-\gamma)} \frac{1}{1 + R_c(\gamma-1)} \right]^{1/2}, & 1 + \epsilon_{mov}^{(U)}(t, R_c) < \gamma < 2, \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

где  $\ln(t_{min} R_c) = 4 - R_c$ . Здесь верхние индексы («L» и «U») имеют тот же смысл, что и в (3.13),

$$\epsilon_{mov}^{(L)}(t, R_c) = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{R_c + \ln(t R_c)}} \right), \quad (4.13)$$

а  $\epsilon_{mov}^{(U)}(t, R_c) = \epsilon_{rest}^{(U)}(t, R_c)$  и задается уравнением (3.15), как и в случае стоящих переносчиков. Непрерывная спивка в этой области оказывается, как можно было ожидать, такой же, как и для стоящих мигрантов: она возможна только при больших  $R_c$ . В этом случае имеем  $t_{min} \rightarrow 0$ , что дает

$$\epsilon_{mov}^{(U)}(t, R_c) \approx \epsilon_{mov}^{(L)}(t, R_c) \approx \epsilon(t, R_c),$$

где  $\epsilon(t, R_c)$  определено в (3.16) и является универсальной величиной для фронта возмущения среды и фронта переносчиков.

Результаты сравнения аналитического описания динамических характеристик с результатами численных расчетов, полученных путем интегрирования (3.1) общего решения кинетического уравнения (2.1) и путем моделирования траекторий методом Монте-Карло, представлены ниже, в разд. 6.

### 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОГУЛОК ЛЕВИ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Уравнению (2.1) соответствует следующий тип траекторий мигрантов. В заданной точке (возьмем ее за начало координат) один мигрант находится (стоит) в течение времени  $t$ . Время стоянки мигранта (которое в литературе называют «временем ожидания», «waiting time») является случайной величиной и описывается распределением  $U(t)$ :

$$U(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (5.1)$$

$$\int_0^{\infty} U(t) dt = 1,$$

где  $\tau$  — среднее время нахождения в точке остановки (в задаче переноса резонансного излучения этому времени соответствует радиационное время жизни возбужденного атома или иона). В указанный момент времени мигрант начинает двигаться с равной вероятностью в любом направлении (т. е. однородно по всем направлениям в координатном пространстве) по прямой траектории с постоянной скоростью  $c$ . Вдоль этой прямой мигрант проходит путь, длина которого является случайной величиной, определяемой распределением по длине свободного пробега

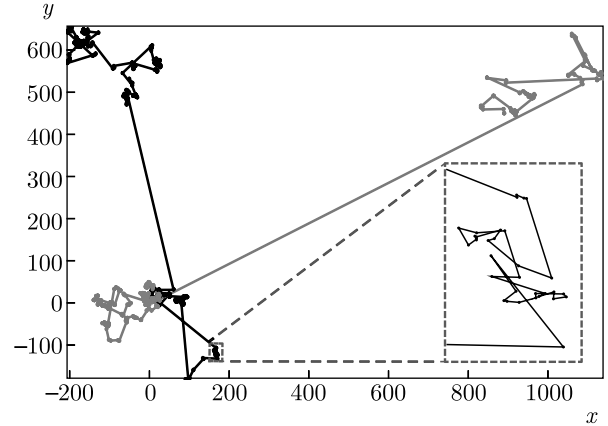


Рис. 1. Типичные траектории мигрантов (красная и черная кривые), стоявших в начале координат в нулевой момент времени, для  $\gamma = 1, \kappa_0 = 1, \tau = 1, c = 10$  за период времени 1000 в зависимости от безразмерных координат (т. е. умноженных на  $\kappa_0$ ). Моменты остановки показаны точками. Крупно показан фрагмент, соответствующий синему пунктирному прямоугольнику

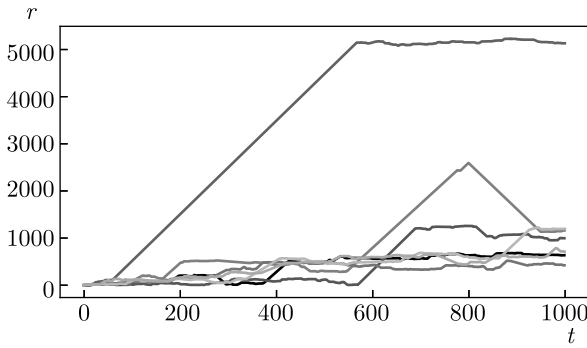
$W_{step}(\rho)$  в (2.5). В точке остановки мигрант находится время  $t$ , определяемое распределением (5.1), и далее снова движется равномерно по всем направлениям, уходя на расстояние, которое определяется распределением  $W_{step}(\rho)$  в (2.5). Такой процесс повторяется снова и снова.

На рис. 1 приведены в качестве примера в двумерном пространстве  $(x, y)$  две искусственные траектории указанного типа, полученные для  $\gamma = 1, \kappa_0 = 1, \tau = 1, c = 10$  (что соответствует в безразмерных переменных случаю  $R_c = 10$ ) с использованием датчика псевдослучайных чисел. Видна характерная структура траекторий с длинными пробегами (полетами Леви), которые соединяют участки с (преимущественно многократными) короткими пробегами, формирующими блуждание, близкое к броуновскому (см. вставку на рис. 1).

Другое представление типичных траекторий мигрантов приведено на рис. 2: зависимость безразмерного расстояния  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  относительно начала координат от времени  $t$  (для  $\gamma = 1, \kappa_0 = 1, \tau = 1, c = 10$ ). Приведенные семь траекторий иллюстрируют факт существенно неравномерного заполнения пространства: в соответствии с описанным законом поведения основная часть мигрантов не уходит далеко от начала координат.

Такое неравномерное заполнение пространства приводит к трудностям при использовании метода Монте-Карло для оценки функции  $f(r, t)$  и ее моментов: чтобы удовлетворительно заполнить про-





**Рис. 2.** Типичные траектории мигрантов, стоявших в начале координат в нулевой момент времени, зависимость безразмерного расстояния  $r$  относительно начала координат от времени  $t$  для  $\gamma = 1, \kappa_0 = 1, \tau = 1, c = 10$

странство  $r \times t$  мигрантами требуется сгенерировать массив данных, содержащий от 10 до 500 тысяч траекторий. Но даже в этом случае для удовлетворительного заполнения пространства задачи, при котором можно найти искомую функцию Грина и ее моменты, во избежание значительного роста времени численного моделирования требуется использовать процедуру оптимизации. Здесь мы используем метод, которой разработан в [34, 35]. Опишем получение оценки функции  $f(r, t)$  (и ее моментов, входящих в (3.1)) для мигрантов, находящихся в покое (оценка для движущихся получается аналогично). Для этого рассмотрим функцию распределения, связанную с функцией  $f(r, t)$  соотношением

$$F(r, t) = 2\pi \int_0^r f(r', t) r' dr'. \quad (5.2)$$

Преобразуем сгенерированный массив траекторий в набор данных, содержащий значения функции распределения:

$$\Omega : \{F_{i,j}, r_i, t_j\}, \quad i \in R_j, \\ R = 1 \dots r^{max}, \quad j \in 1 \dots t^{max}, \quad (5.3)$$

где  $F_{i,j}$  — количество частиц, находящихся в покое в момент времени  $t_j$  и отстоящих от начала координат (точки старта) не более, чем на  $r_i: r \leq r_i$ .

Задача состоит в поиске функций  $F(r, t)$  и  $f(r, t)$ , соответствующих набору данных  $\Omega$ . Очевидно, что такая задача является некорректной. Для ее регуляризации рассмотрим критерий

$$Q(F, f, \Omega, \alpha) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{j \in T} \sum_{i \in R} (F_{i,j} - F(r_i, t_j))^2 + \\ + \int_0^{t^{max}} dt' \int_0^{r^{max}} dr' \left[ \alpha_1^2 \left( \frac{d^2 f}{dr^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \alpha_1 \alpha_2 \left( \frac{d^2 f}{dr dt} \right)^2 + \alpha_2^2 \left( \frac{d^2 f}{dt^2} \right)^2 \right] \rightarrow \min_{F, f}, \quad (5.4)$$

где первое слагаемое представляет собой меру близости решения к набору данных  $\Omega$ , а второе — регуляризующая добавка, или мера кривизны функции  $f(r, t)$ , или мера сложности рассматриваемой математической модели (5.1). Мы не приводим технические подробности поиска решения (5.2)–(5.4), так как подробное описание используемой для этого технологии сбалансированной идентификации можно найти в [34, 35].

## 6. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ ЧИСЛА СТОЯЩИХ И БЕГУЩИХ МИГРАНТОВ ДЛЯ ПРОГУЛОК ЛЕВИ

На рис. 3–5 представлено сравнение полного количества стоящих мигрантов  $N$  в (3.1) (возбужденных частиц среды) для  $\gamma = 0.5$  (рис. 3),  $\gamma = 1$  (рис. 4) и  $\gamma = 1.5$  (рис. 5).

## 7. ЕДИНАЯ ФОРМУЛА ФРОНТА ВОЗМУЩЕНИЯ СРЕДЫ ДЛЯ ПРОГУЛОК ЛЕВИ И ПОЛЕТОВ ЛЕВИ. СРАВНЕНИЕ РАЗНЫХ ПОДХОДОВ

Определение фронта возмущения среды (3.1) отличается от ранее рассмотренных нами в [15–17] и [1, 2, 18]. Так, в работах [15–17] для случая полетов Леви (Lévy flight), чему соответствует условие  $R_c = \infty$ , дефиниция фронта  $r_f(t)$  (здесь индекс « $f$ » происходит от англ. flight) имела следующий вид (в размерных единицах):

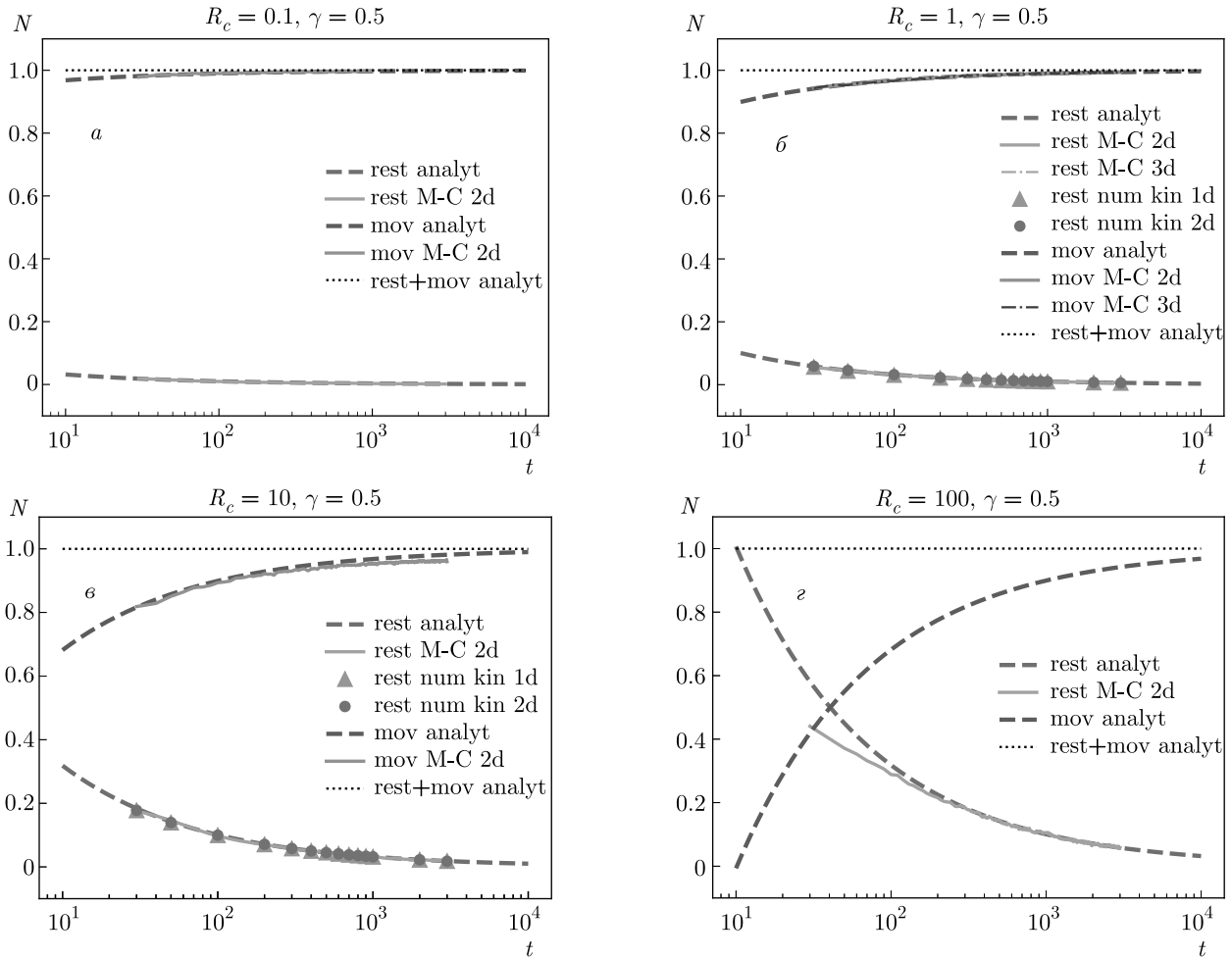
$$\left( \frac{t}{\tau} + 1 \right) T(r_f(t)) = 1, \quad (7.1)$$

где  $T(\rho)$  определено в (2.4). Решение этого уравнения для модельного ядра (2.5) имеет вид [15] (в безразмерных координатах и времени)

$$r_f(t, \gamma) = (t + 1)^{1/\gamma} - 1 \approx t^{1/\gamma}. \quad (7.2)$$

Массовые численные расчеты точного решения (2.1) в одномерном случае с приближенным автомодельным решением [15] при условиях

$$t \gg \tau, \quad \kappa_0 r \gg 1 \quad (7.3)$$



**Рис. 3.** Зависимости полного числа стоящих мигрантов  $N_{rest}$  в (3.1) от безразмерного времени: аналитический расчет (3.11) (синие штриховые кривые); расчет методом Монте-Карло (оранжевые (2d) и зеленая штрихпунктирная (3d) кривые); расчет для точной функции Грина (4) в [1] (зеленые треугольники (1d), красные круги (2d)). Зависимости полного числа бегущих мигрантов  $N_{mov}$  в (4.10) от времени: аналитический расчет (4.8) (коричневые штриховые кривые); расчет методом Монте-Карло (сиреневые (2d) и темно-синяя штрихпунктирная (3d) кривые). Сумма аналитических результатов для числа стоящих и бегущих мигрантов (черные пунктирные кривые). Сравнение представлено для  $\gamma = 0.5$  и значений параметра  $R_c = 0.1$  (а), 1 (б), 10 (в), 100 (г)

показали в [17] высокую точность этого автомодельного решения в широком диапазоне значений  $r$ ,  $t$  и  $\gamma$ . В работе [18] для улучшения точности автомодельных решений было предложено другое определение фронта. Это оказалось необходимым в том случае, когда ядро  $W$  в (2.1) имеет более сложный вид, а именно, является сверткой степенных ядер с разными показателями степени  $\gamma$ . Конкретно, в [18] это касалось задачи переноса резонансного излучения в случае фойгтовского контура спектральной линии, который является сверткой доплеровского ( $\gamma \approx 1$ ) и лоренцевского ( $\gamma = 0.5$ ) контуров линии. Более точная версия формулы фронта для полетов Леви имеет вид [18]

$$f_{exact}(0, t) = \frac{t}{\tau} W(r_f(t)), \quad (7.4)$$

где  $f_{exact}(r, t)$  — точное решение уравнения (2.1).

Для случая учета конечной скорости (прогулки Леви) в [1] предложено обобщение дефиниции фронта (7.4) с учетом эффекта запаздывания вследствие конечной скорости переносчиков, имеющее вид (в безразмерных единицах)

$$\left(t - \frac{r_w}{R_c}\right) W(r_w) \theta\left(t - \frac{r_w}{R_c}\right) = f_{exact}(0, t, R_c), \quad (7.5)$$

где  $r_w(t, R_c, \gamma)$  обозначает фронт плотности возбуждения среды (или плотности стоящих мигрантов) для прогулок Леви (индекс «w» происходит от англ.

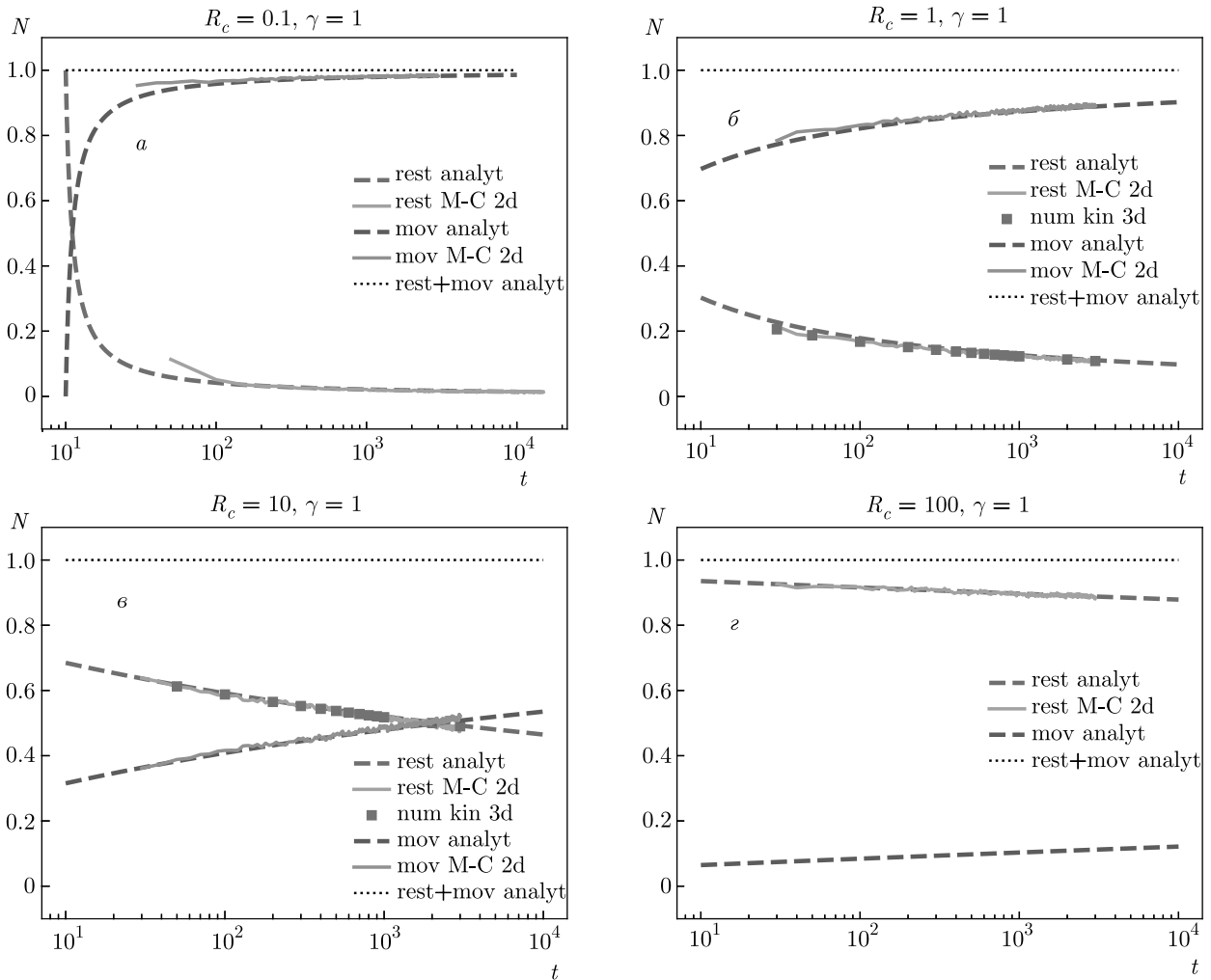


Рис. 4. То же, что на рис. 3, но для  $\gamma = 1$

walks [4, 5]). Нахождение фронта (7.5) необходимо для построения приближенного автомодельного решения, точность которого для модельного ядра при разных значениях параметра  $\gamma$  проанализирована в одномерном (1d) случае в [1], а в 2d- и 3d-случаях — в [2].

Выше получено аналитическое выражение для  $r_{rest}(t, R_c, \gamma)$  (3.13) для фронта возмущения среды от точечного мгновенного источника при условии  $t \gg \tau$  (в размерных единицах). Напомним, что для  $0 < \gamma < 1$  и  $1 < \gamma < 2$  функция (3.12) имеет разные аналитические представления, причем в них при  $\gamma = 1$  имеется особенность, которую мы удалили в (3.13) путем интерполяции. Предварительное сравнение (3.13) со значениями фронта, рассчитанными в [1,2], показало, что различие имеется, но оно заведомо в пределах порядка величины, что для по-

строения единого скейлинга в широком диапазоне параметров вполне приемлемо.

Для  $0 < \gamma < 1$  можно показать, что выражения (7.2) и (3.13) являются пределами более общей формулы, интерполирующей случаи предельно больших и умеренно больших значений времени. Этим двум пределам соответствуют предельные значения относительного числа возмущений среды (т.е. возбужденных атомов или ионов, или стоящих мигрантов) во всем объеме от точечного мгновенного источника (здесь относительность означает, например, долю возбужденных атомов по отношению к их числу в начальный момент). Эта интегральная по объему характеристика описывается формулой (3.11) (см. также (3.12) в [2]):

$$N(t, R_c, \gamma) \equiv \int f(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \sim \frac{R_c^\gamma}{t^{1-\gamma}} \leq 1. \quad (7.6)$$

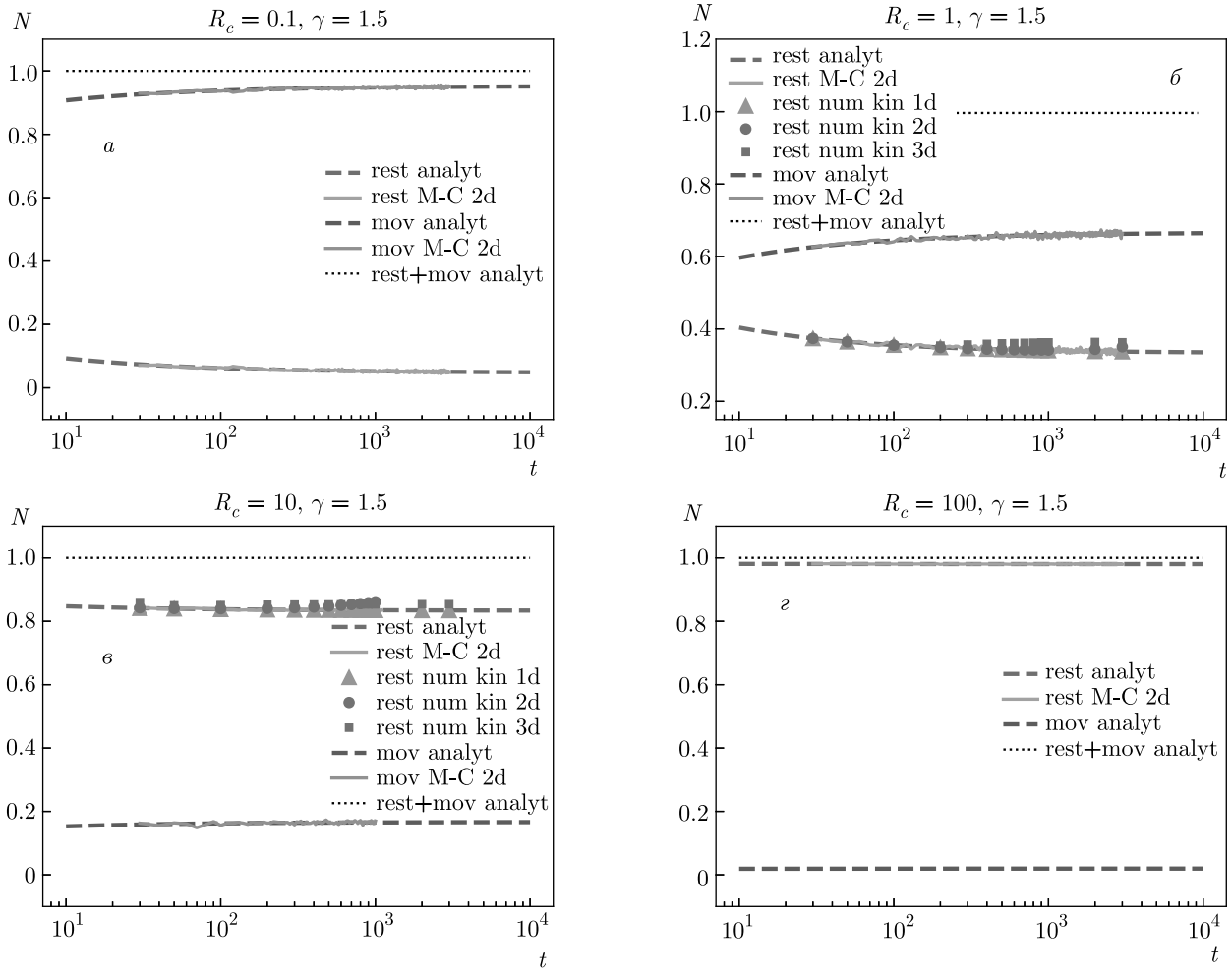


Рис. 5. То же, что на рис. 3, 4, но для  $\gamma = 1.5$

Сначала, при  $N \sim 1$ , имеем перенос в режиме полетов Леви (например, в виде (7.2)), а при  $N \ll 1$  и накоплении эффекта запаздывания имеем выход на режим прогулок Леви (например, в виде (3.13)). Простейшая интерполяция имеет вид (с точностью до коэффициентов порядка единицы, зависящих от  $\gamma$ )

$$r_{f+w}^{rest}(t, R_c, \gamma) \sim \frac{t^{1/\gamma}}{1 + \sim 1/N^{1/\gamma}}, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (7.7)$$

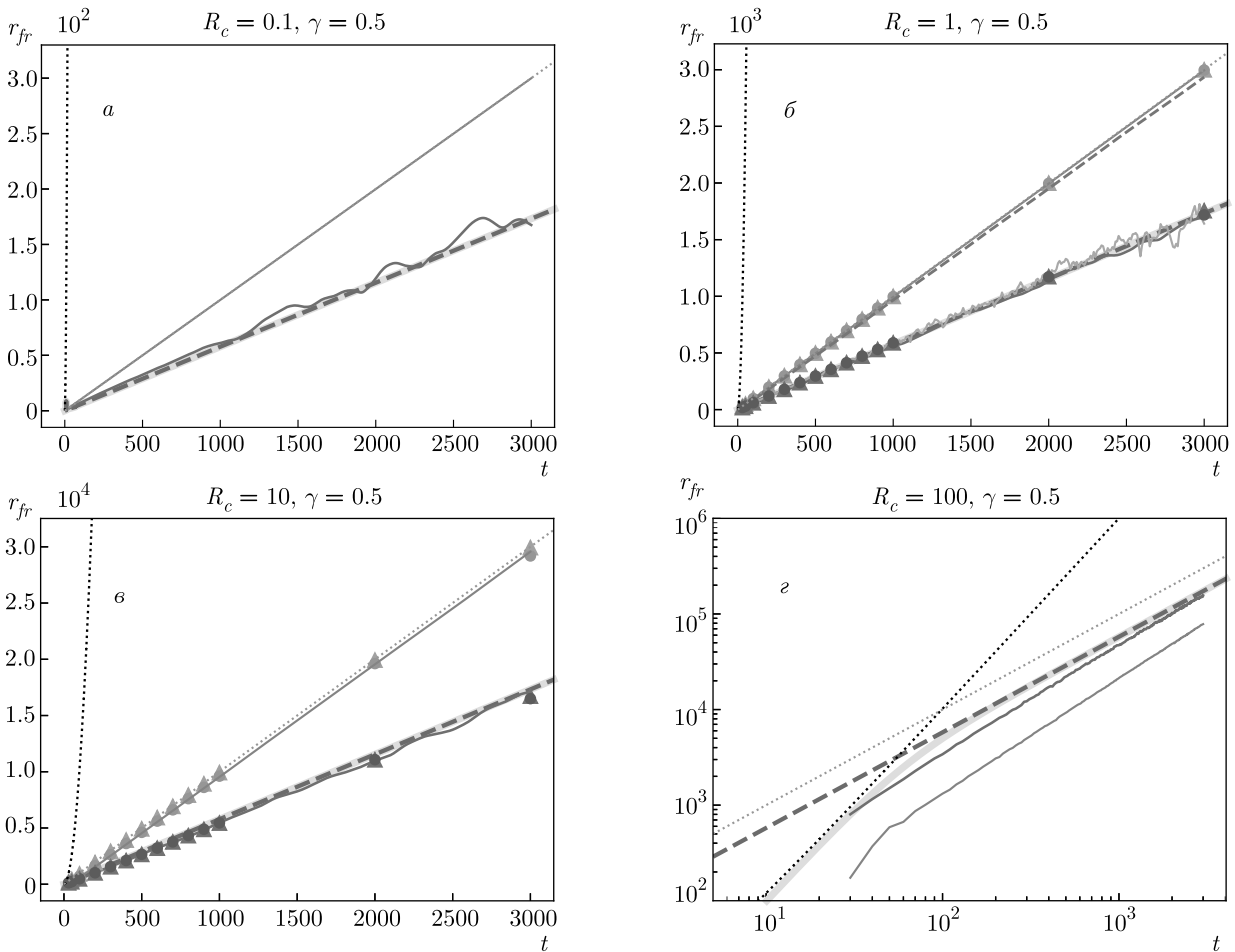
Например, при  $\gamma = 2/3$  имеем следующую формулу, обеспечивающую выход на оба известных предела:

$$r_{f+w}^{rest}(t, R_c, 2/3) = \frac{t^{3/2}}{1 + \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{t}}{R_c}}. \quad (7.8)$$

Для лучшей аппроксимации результатов численных расчетов можно оптимизировать вид функции, обес-

печивающей должные пределы (7.2) и (3.13). Однако для интересующего нас построения формулы с точностью до порядка величины и проверки этой точности путем сравнения с точными численными расчетами по формулам (3.1) и (7.5) вполне можно ограничиться (7.7) или близкой формулой.

Можно ожидать, что при  $1 < \gamma < 2$  формула, аналогичная (7.7), будет применима, поскольку в этом диапазоне и  $N \sim 1$  (если только  $R_c$  не очень мало, но мы исключаем этот случай из нашего рассмотрения по причине неприменимости концепции «потери памяти» и, соответственно, самого феномена полетов Леви при малом среднем времени ожидания при остановке). Легко видеть, что при  $1 < \gamma < 2$  в законах фронта (7.2) и (3.13) показатели степени у параметра  $t$  численно весьма близки (для  $\gamma = 3/2$  разность показателей составляет величину  $1/12$ ). Поэтому можно представить закон фронта



**Рис. 6.** Аналитический фронт (3.13) для прогулок Леви, полученный расчетом формулы (3.1) для общего аналитического решения кинетического уравнения (2.1) (сиреневая штриховая кривая); расчет фронта (3.1) для прогулок Леви, использующий результаты расчета статистики траекторий методом Монте-Карло (разд. 5) (темно-синяя (2d) и голубая (3d) кривые); численный расчет фронта (3.1) для прогулок Леви, использующий численный расчет общего аналитического решения кинетического уравнения (2.1) (фиолетовые треугольники (1d), коричневые круги (2d) и розовые квадраты (3d)); фронт (7.5) для прогулок Леви, использующий численный расчет общего аналитического решения кинетического уравнения (2.1) (оранжевые треугольники (1d), зеленые круги (2d) и красные квадраты (3d)); фронт (7.5) для прогулок Леви, использующий результаты расчета статистики траекторий методом Монте-Карло (красные (2d) и светло-коричневая штриховая (3d) кривые); фронт (7.2) для полетов Леви (черные пунктирные кривые); аналитическое представление (7.10) обобщенного фронта (желтая кривая); баллистический фронт (розовые пунктирные кривые). Сравнение представлено для  $\gamma = 0.5$  и значений параметра  $R_c = 0.1$  (а), 1 (б), 10 (в), 100 (г)

единой формулой:

$$r_{f+w}^{rest}(t, R_c, \gamma) = \frac{r_f(t, \gamma)}{1 + \frac{r_f(t, \gamma)}{r_w(t, R_c, \gamma)}} = \frac{r_f(t, \gamma)}{1 + \frac{B_N(R_c, \gamma)}{N(t, R_c, \gamma)^{1/\gamma}}}, \quad 0 < \gamma < 2, \quad (7.9)$$

где функция  $B_N(R_c, \gamma)$  соответствует известному пределу (3.13) с учетом (3.11). Ниже мы примем сле-

дующую простую формулу:

$$r_{f+w}^{rest}(t, R_c, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{1/r_w^2(t, R_c, \gamma) + 1/r_f^2(t, \gamma)}}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1.5, \quad (7.10)$$

где

$$r_w(t, R_c, \gamma) \equiv r_{rest}(t, R_c, \gamma),$$

задается формулой (3.13).

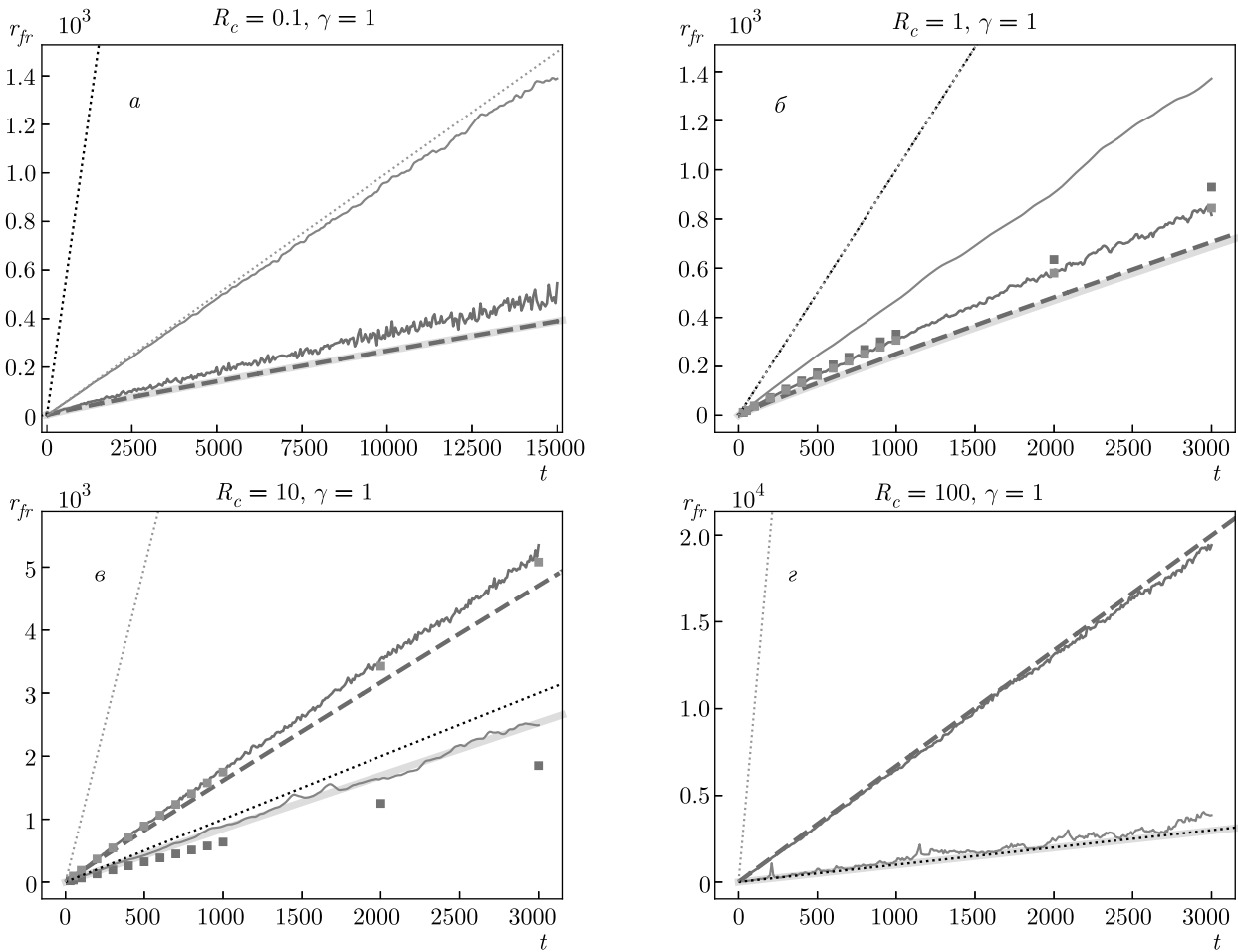


Рис. 7. То же, что на рис. 6, но для  $\gamma = 1$

Ниже представлено сравнение результатов различных подходов к оценке фронта распространения возбуждения среды (или фронта плотности стоящих мигрантов), включая

- 1) аналитический расчет фронта (3.13) для прогулок Леви, полученный расчетом формулы (3.1) для общего аналитического решения кинетического уравнения (2.1);
- 2) расчет фронта (3.1) для прогулок Леви, использующий результаты расчета статистики траекторий методом Монте-Карло (разд. 5);
- 3) численный расчет фронта (3.1) для прогулок Леви, использующий численный расчет общего аналитического решения кинетического уравнения (2.1);
- 4) фронт (7.5) для прогулок Леви, использующий численный расчет общего аналитического решения кинетического уравнения (2.1);

5) фронт (7.5) для прогулок Леви, использующий результаты расчета статистики траекторий методом Монте-Карло;

6) фронт (7.2) для полетов Леви (бесконечная скорость переносчиков);

7) аналитическое представление (7.10) обобщенного фронта;

8) баллистический фронт  $tR_c$ .

Сравнения представлены для  $\gamma = 0.5, 1, 1.5$  и значений параметра  $R_c = 0.1, 1, 10, 100$  (рис. 6–8). Для проверки интерполяции вблизи  $\gamma = 1$  в формуле (3.13) также представлены сравнения для  $R_c = 10$  и  $\gamma = 0.9, 0.99, 1.01, 1.1$  (рис. 9).

Хотя все сравниваемые результаты для фронта на рис. 6 довольно близки в рамках того, что сама дефиниция фронта является условной, имеющей смысл оценки (см. кривые для  $\gamma = 0.5$  на рис. 1 в [2] для  $R_c = 10$ ), можно сделать вывод о том, что на рис. 6г виден переход между двумя режимами пере-

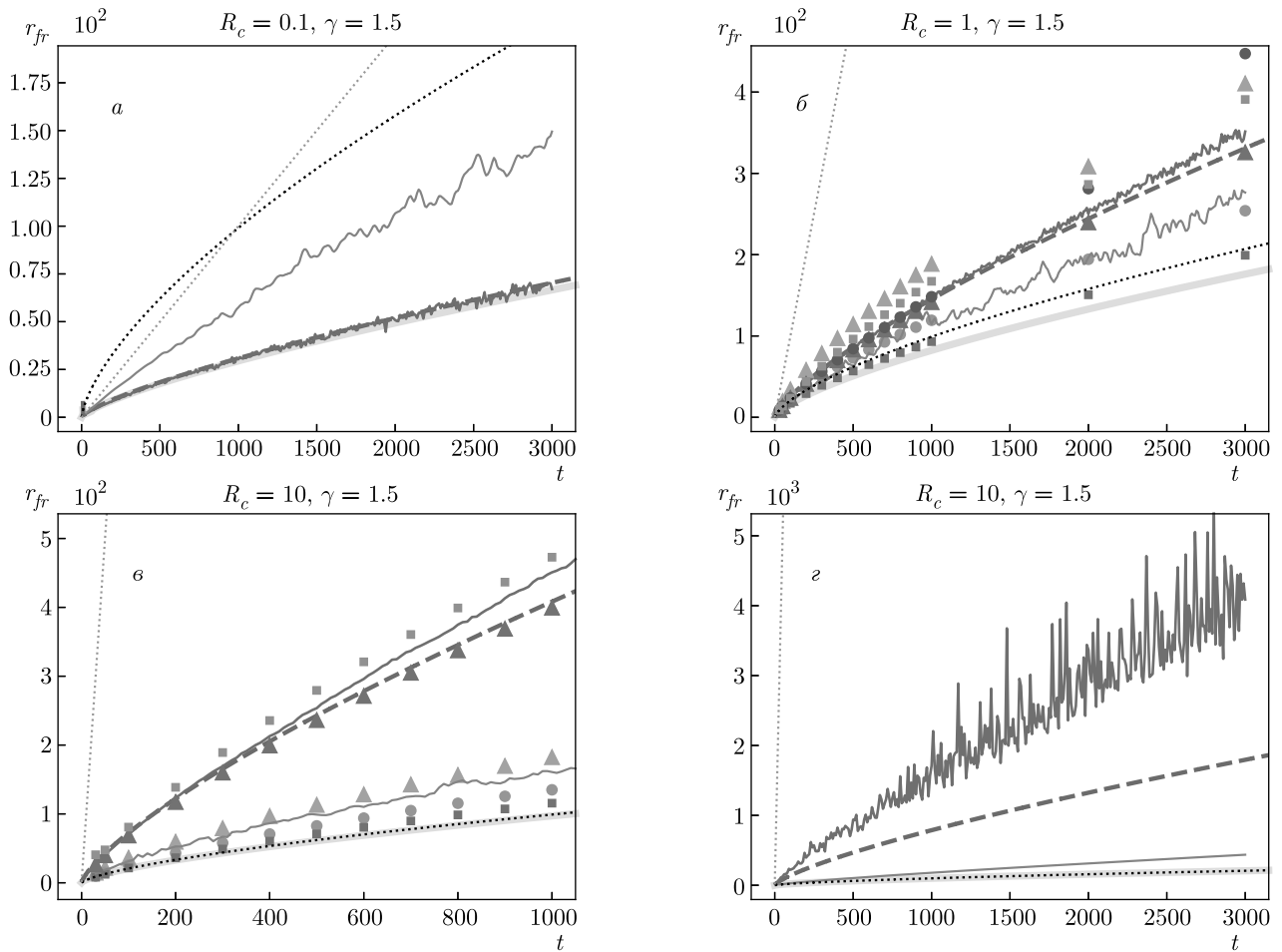


Рис. 8. То же, что на рис. 6, 7, но для  $\gamma = 1.5$

носа: полетами и прогулками Леви. При относительно малых временах (но при безразмерном времени  $t \gg 1$ ) доминируют полеты Леви (черный пунктир), а с увеличением времени доминирует режим прогулок Леви и нужен учет эффекта запаздывания даже при весьма больших значениях параметра  $R_c$ : в момент перехода виден излом на кривой для динамики фронта при его наиболее точном представлении, а именно, на красной кривой, рассчитанной по (7.5) с использованием расчетов методом Монте-Карло значений точной функции Грина в начале координат.

Рисунок 7 показывает, что с уменьшением нелокальности (т. е. при переходе к большим значениям параметра  $\gamma$  по сравнению с рис. 6) и увеличением  $R_c$  дефиниция (3.1) при  $\gamma = 1$  оказывается менее адекватной, поскольку второй момент оказывается достаточно сильно зависим от значений функции Грина при таких больших значениях расстоя-

ния, где довольно мало возбужденных атомов или стоящих мигрантов (рис. 7з).

На рис. 8 тенденция потери адекватности дефиниции фронта (3.1) с ростом  $\gamma$  и  $R_c$  усиливается: на рис. 8г можно видеть достаточно большое ( $\sim 100\%$ ) различие результатов аналитического расчета (3.1) и расчета с использованием численного моделирования методом Монте-Карло. Хотя для задач нелокального переноса это все еще вполне высокая точность, видна тенденция потери адекватности дефиниции фронта (3.1).

В связи с уже обсужденным на рис. 6 переходом между двумя режимами переноса — полетами Леви и прогулками Леви — уместно получить его количественное описание. Определим момент такого перехода как момент времени  $t^*(R_c, \gamma)$ , при котором фронт  $r_w$  для прогулок Леви равен фронту  $r_f$  для полетов Леви:

$$r_w(t^*, R_c, \gamma) = r_f(t^*, \gamma). \quad (7.11)$$

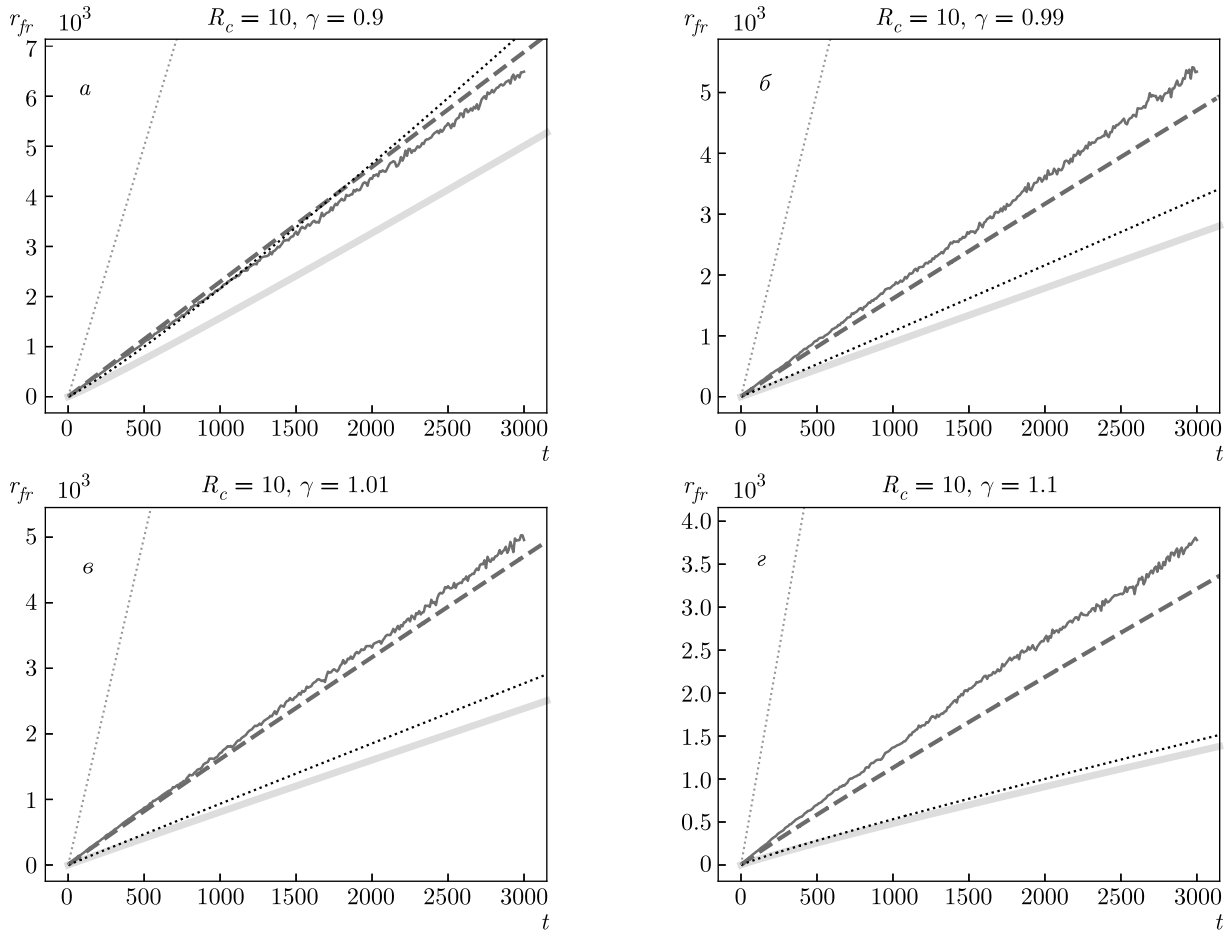


Рис. 9. То же, что на рис. 6–8, но для  $R_c = 1$ ,  $\gamma = 0.9$  (а),  $0.99$  (б),  $1.01$  (в),  $1.1$  (г)

Тогда для  $t^*(R_c, \gamma)$  можно получить следующее выражение:

$$t^*(R_c, \gamma) = \begin{cases} \left[ R_c \sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}} \right]^{\gamma/(1-\gamma)}, & 0 < \gamma < 1, \\ \frac{\exp(R_c^2/2 - R_c)}{R_c}, & \gamma = 1, \\ \left[ \frac{(2-\gamma)(3-\gamma)}{\gamma(\gamma-1)} \times \frac{1+R_c(\gamma-1)}{R_c^{3-\gamma}} \right]^{1/(3-\gamma-2/\gamma)}, & 1 < \gamma < 2. \end{cases} \quad (7.12)$$

Результаты расчета (7.12) для трех значений  $\gamma$  приведены на рис. 10.

Прежде всего отметим, что формула (7.12) хорошо описывает переход между режимами переноса

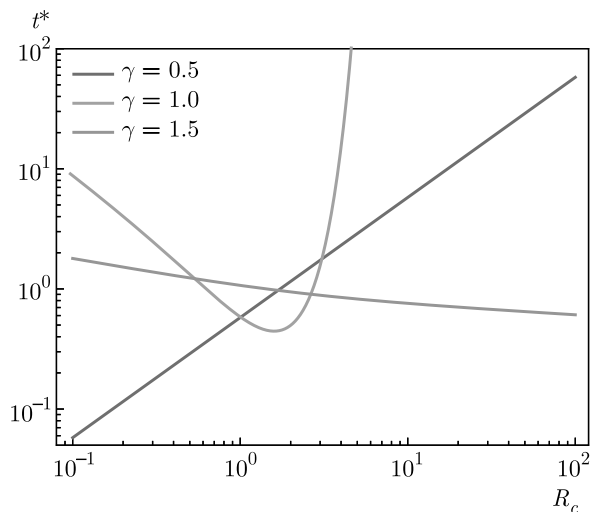


Рис. 10. Зависимости характерного времени (7.12) от параметра  $R_c$  при  $\gamma = 0.5, 1.0, 1.5$



лишь при  $0 < \gamma < 1$  (см. рис. 6з), когда степень нелокальности (супердиффузионности) процесса переноса особенно высока. При этом всегда имеем смену режима переноса полетами Леви на режим переноса прогулками Леви, поэтому для моментов времени  $t > t^*$  следует учитывать эффекты запаздывания при описании такого процесса.

Важно отметить, что область  $0 < \gamma < 1$  охватывает, в частности, перенос резонансного излучения при лоренцевском контуре спектральных линий атомов и ионов в газах и плазме. Отмеченная выше необходимость учета запаздывания касается задач нестационарного переноса излучения при сильно локализованном (во времени и в координатном пространстве) источнике возбуждения. В случае слабой локализации такого источника основной вклад в плотность возбужденных атомов будет вносит область, не столь удаленная от наблюдаемой точки, и потому учет запаздывания, вызванного конечной скоростью света, будет мал, что вполне оправдывает пренебрежение этим эффектом во многих практических задачах с слабой локализацией источника возбуждения атомов или ионов. Однако для задач с сильной локализацией, прежде всего во вспышечных явлениях в астрофизической плазме, полученные нами результаты весьма актуальны.

Поскольку для задач переноса интересны большие безразмерные времена, для случая  $\gamma = 1$  актуальна только часть кривой, уходящая резко вверх. Видно, что в этом случае переход от полетов к прогулкам происходит при столь больших (экспоненциально больших) значениях времени, что, с учетом сказанного выше о связи характерных времен и характерных расстояний, вклад запаздывания актуален только при небольших значениях  $R_c$ .

С увеличением  $\gamma$  точность оценки фронта по (3.1), как было отмечено выше, уменьшается, но тем не менее результат использования аналитической формулы фронта при  $1 < \gamma < 2$  для оценки области актуальности прогулок Леви согласуется с ожиданием того, что с ростом  $\gamma$  и  $R_c$  вклад эффекта запаздывания из-за конечной фиксированной скорости переносчиков возмущения среды или мигрантов (и, соответственно, вклад переноса в режиме прогулок Леви) уменьшается.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные в работе результаты по ряду аспектов завершают цикл работ [1–3, 15–18], нацеленных на создание нового метода в теории нестационарного нелокального (так называемого супердиффузионного, выходящего за рамки стандартной, броуновской диффузии) переноса. Этот метод уместно назвать методом интерполируемой автоматичности. В основе метода лежит алгоритм получения приближенного автоматического решения для функции Грина широкого класса интегродифференциальных уравнений нестационарного переноса, охватывающего явления переноса с доминирующим вкладом переносчиков с большой длиной свободного пробега: «полетов Леви» [20–23], включая задачу нестационарного переноса резонансного излучения в модели Бибермана – Холстейна [8–14, 28–33], или, в случае учета конечной скорости переносчиков, «прогулок Леви» [4–7], точнее, «прогулок Леви с остановками» (см. рис. 1 в обзоре [5]), что охватывает такие задачи как перенос резонансного излучения в астрофизических газах и плазме, биологическую миграцию, перенос энергии волнами в плазме. В основе метода лежит интерполяция законов автоматичности для асимптотик далеко впереди и далеко позади эффективного фронта волны возмущения, требующая прямого решения задачи (численного расчета функции Грина) только в относительно небольшой области переменных задачи (вблизи фронта) (см. обсуждение вопроса об экономии расчетного времени в работе [17]).

В развитие ранее полученных общих и приближенных автоматических решений для функции Грина широкого класса интегродифференциальных уравнений одномерного [1, 3], двумерного и трехмерного [2] (по пространственным координатам) нестационарного супердиффузионного переноса возмущения однородной среды для конечной фиксированной скорости переносчиков в настоящей работе получено простое аналитическое описание распространения фронта возмущения среды при нестационарном супердиффузионном (нелокальном) переносе в режиме «прогулок Леви с остановками». Для используемой нами дефиниции фронта (3.1) результат, как показало интегрирование точного решения кинетического уравнения для функции Грина, не зависит от мерности координатного пространства. Сравнение результатов для фронта (3.1) с другим, более точным методом определения фронта из [1–3, 18] и проведенными в этой работе численными расчетами статистики траекторий методом Монте-Карло показало применимость полученных аналитических выражений в широком диапазоне параметров задачи. Для прогулок Леви найдена связь интегральных характеристик стоящих и бегущих мигрантов, позволяющая получить простое аналитическое описание

ционарного нелокального (так называемого супердиффузионного, выходящего за рамки стандартной, броуновской диффузии) переноса. Этот метод уместно назвать методом интерполируемой автоматичности. В основе метода лежит алгоритм получения приближенного автоматического решения для функции Грина широкого класса интегродифференциальных уравнений нестационарного переноса, охватывающего явления переноса с доминирующим вкладом переносчиков с большой длиной свободного пробега: «полетов Леви» [20–23], включая задачу нестационарного переноса резонансного излучения в модели Бибермана – Холстейна [8–14, 28–33], или, в случае учета конечной скорости переносчиков, «прогулок Леви» [4–7], точнее, «прогулок Леви с остановками» (см. рис. 1 в обзоре [5]), что охватывает такие задачи как перенос резонансного излучения в астрофизических газах и плазме, биологическую миграцию, перенос энергии волнами в плазме. В основе метода лежит интерполяция законов автоматичности для асимптотик далеко впереди и далеко позади эффективного фронта волны возмущения, требующая прямого решения задачи (численного расчета функции Грина) только в относительно небольшой области переменных задачи (вблизи фронта) (см. обсуждение вопроса об экономии расчетного времени в работе [17]).

для фронта переносчиков или бегущих мигрантов в дополнение к фронту возбуждения среды (возбужденных атомов или ионов) или стоящих мигрантов.

Достигнутый прогресс в описании фронта для прогулок Леви позволил предложить единое описание динамики фронта возмущения среды при произвольной, включая бесконечную, фиксированной скорости переносчиков. Это соответствует объединению формул для фронта при переносе полетами Леви и прогулками Леви. Полученный критерий перехода между указанными режимами супердиффузионного переноса для сильной нелокальности функции распределения по длине свободного пробега хорошо согласуется с результатами численного расчета (см. рис. 6z). Этот критерий, в частности, определяет область параметров, в которой необходимо учитывать конечную скорость света в переносе резонансного излучения в газах и плазме в случае сильной нелокальности (сюда относится нестационарный перенос в случае лоренцевского контура спектральной линии атомов или ионов в газах и плазме).

**Благодарности.** Авторы благодарны К. В. Чукбару за обсуждение работ [6, 7].

**Финансирование.** Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 18-07-01269-а, 19-32-90281), а также в рамках программы повышения конкурентоспособности НИЯУ МИФИ.

Работа выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса» НИЦ «Курчатовский институт», <http://ckp.nrcki.ru/>.

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. B. Kukushkin and A. A. Kulichenko, *Phys. Scripta* **94**, 115009 (2019).
2. A. A. Куличенко, А. Б. Кукушкин *ЖЭТФ* **157**, 1036 (2020).
3. A. A. Kulichenko and A. B. Kukushkin, *Int. Rev. Atom. Mol. Phys.* **8**(1), 5 (2017).
4. M. F. Shlesinger, J. Klafter, and J. Wong, *J. Stat. Phys.* **27**, 499 (1982).
5. V. Zaburdaev, S. Denisov, and J. Klafter, *Rev. Mod. Phys.* **87**, 483 (2015).
6. В. Ю. Забурдаев, К. В. Чукбар, *ЖЭТФ* **121**, 299 (2002).
7. В. Ю. Забурдаев, К. В. Чукбар, *Письма в ЖЭТФ* **77**, 654 (2003).
8. Л. М. Биберман, *ЖЭТФ* **17**, 416 (1947).
9. T. Holstein, *Phys. Rev.* **72**, 1212 (1947).
10. Л. М. Биберман, В. С. Воробьев, И. Т. Якубов, *Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы*, Наука, Москва (1982).
11. Б. А. Векленко, *ЖЭТФ* **36**, 204 (1959).
12. V. I. Kogan, in *Proc. 8th Int. Conf. on Phenomena in Ionized Gases ICPIG*, IAEA, Vienna (1968), p. 583.
13. В. А. Абрамов, В. И. Коган, В. С. Лисица, в сб. *Вопросы теории плазмы*, под ред. М. А. Леонтовича, Б. Б. Кадомцева, Энергоатомиздат, Москва (1982), вып. 12, с. 114.
14. В. И. Коган, *Запирание излучения в плазме*, Энциклопедия низкотемпературной плазмы, под ред. В. Е. Фортова, Наука, Москва (2000), т. 1, с. 481.
15. A. B. Kukushkin and P. A. Sdvizhenskii, *J. Phys. A: Math. Theor.* **49**, 255002 (2016).
16. A. B. Kukushkin and P. A. Sdvizhenskii, *J. Phys.: Conf. Ser.* **941**, 012050 (2017).
17. A. B. Kukushkin, V. S. Neverov, P. A. Sdvizhenskii, and V. V. Voloshinov, *Int. J. Open Inform. Technol.* **6**, 38 (2018).
18. A. B. Kukushkin, V. S. Neverov, P. A. Sdvizhenskii, and V. V. Voloshinov, *Atoms* **6**, 43 (2018).
19. B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York (1982).
20. M. Shlesinger, G. M. Zaslavsky, and U. Frisch, *Lévy Flights and Related Topics in Physics*, Springer, New York (1995).
21. A. A. Dubkov, B. Spagnolo, and V. V. Uchaikin, *Int. J. Bifurcation Chaos* **18**, 2649 (2008).
22. J. Klafter and I. M. Sokolov, *Phys. World* **18**, 29 (2005).
23. I. I. Eliazar and M. F. Shlesinger, *Phys. Rep.* **527**, 101 (2013).
24. В. В. Иванов, *Перенос излучения и спектры небесных тел*, Наука, Москва (1969).
25. И. Н. Минин, *Теория переноса излучения в атмосферах планет*, Наука, Москва (1988).
26. *Radiation Mechanisms of Astrophysical Objects: Classics Today (in honor of V. V. Sobolev)*, ed. by V. Grinin et al., St. Petersburg (2015).

27. А. Б. Кукушкин, В. С. Лисица, Ю. А. Савельев, Письма в ЖЭТФ **46**, 356 (1987).
28. Л. М. Биберман, ДАН СССР **49**, 659 (1948).
29. *Methods in Radiative Transfer*, ed. by W. Kalkofen, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1984).
30. G. B. Rybicki, in *Methods in Radiative Transfer*, ed. by W. Kalkofen, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1984), Ch. 1.
31. Л. М. Биберман, В. С. Воробьев, А. Н. Лагарьков, Опт. и спектр. **19**, 326 (1965).
32. А. П. Напартович, ТВТ **9**, 26 (1971).
33. А. Н. Старостин, *Перенос резонансного излучения*, Энциклопедия низкотемпературной плазмы, под ред. В. Е. Фортова, Наука, Москва (2000), т. 1, с. 471.
34. A. V. Sokolov and V. V. Voloshinov, Int. J. Open Inform. Technol. **6**(9), 33 (2018).
35. A. V. Sokolov and V. V. Voloshinov, Open Comp. Sci. **10**, 283 (2020).