ЖЭТФ, 2021, том 159, вып. 5, стр. 952–962

ГЕНЕРАЦИЯ ВЫСШИХ ГАРМОНИК КОГЕРЕНТНОГО СУБТЕРАГЕРЦЕВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ЛИФШИЦА В ДВУХСЛОЙНОМ ГРАФЕНЕ СО ЩЕЛЬЮ

А. Г. Казарян [*]

Центр физики сильных полей, Ереванский государственный университет
0025, Ереван, Армения

Поступила в редакцию 17 ноября 2020 г.,
после переработки 7 января 2021 г.
Принята к публикации 8 января 2021 г.

При помощи микроскопической квантовой теории нелинейного взаимодействия сильного когерентного электромагнитного излучения с двухслойным графеном со щелью рассмотрена генерация высоких гармоник при низкоэнергетическом фотонном возбуждении при переходе Лифшица. Уравнение Лиувилля – фон Неймана для матрицы плотности решается численно в режиме неадиабатического многофотонного возбуждения. С помощью численных исследований определены вероятности генерации второй и третьей гармоник при аннигиляции пары частица–дырка при переходах Лифшица в линейно поляризованной когерентной электромагнитной волне. Полученные результаты показывают, что двухслойный графен со щелью может служить эффективной средой для генерации четных и нечетных высших гармоник в субтерагерцевой области частот.

DOI: 10.31857/S0044451021050114

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие квантово-электродинамические нелинейные явления, индуцированные сильным лазерным излучением в конденсированном веществе, особенно в графене или других наноструктурах, вносят значительный вклад в физику низких энергий и нанооптоэлектронику и систематически исследовались в основном в случае однослойного графена [1], что обусловлено уникальными физическими свойствами такой двумерной (2D) наносистемы атомной толщины [1–3]. С другой стороны, для индуцированных электродинамических явлений в атомных наноструктурных 2D-системах двухслойный графен со структурой AB представляет самостоятельный интерес, так как его электронные состояния значительно богаче, чем у монослойного графена. Известно также многофотонное резонансное возбуждение с генерацией высших гармоник (ГВГ) через нелинейные каналы в двухслойном графене [4–6]. Ранние исследования лазерно-индуцированного процесса ГВГ проводились в основном в газовых средах. Однако в последнее десятилетие появилось гораздо больше исследований гармоник высокого порядка в объемных кристаллах [7–12]. Известно, что и в линейном приближении взаимодействие электромагнитной волны большой амплитуды с графеном может приводить к существенной эффективной перестройке энергетического спектра графена [13–15]. Также представляет интерес исследование ГВГ и связанных с ней процессов в низкоразмерных наноструктурах, таких как графен и его производные [13–34] , гексагональный нитрид бора [35], монослойные дихалькогениды переходных металлов [36–38], топологические изоляторы [39, 40], монослойный черный фосфор [41], выпуклые гексагональные 2D-наноструктуры [42], твердые тела [43,44] и другие 2D-системы [45–48]. Нелинейный когерентный отклик в двухслойном графене со структурой AB под действием интенсивного электромагнитного излучения приводит к модификации квазиэнергетического спектра, индукции долинных поляризованных токов [49, 50], а также к нелинейным оптическим эффектам второго и третьего порядков [51–54]. Двухслойная графеновая система представляет собой уникальную систему, в которой на топологию зонной структуры можно влиять извне и

[*] E-mail: amarkos@ysu.am

выбирать ее. Двухслойный графен — это хорошо настраиваемый материал: энергию Ферми можно «настроить» не только с помощью стандартных способов, как в однослойном графене. Зонную структуру можно изменять также внешними возмущениями: поперечным электрическим полем или деформацией [55–61]. В частности, представляет интерес рассмотрение процесса ГВГ в режиме сильной связи между волной и двухслойным графеном с запрещенной зоной, индуцированной внешним постоянным электрическим полем [58, 62–64]. Более того, с помощью современных технологий [64, 65] в двухслойном графене со структурой AB можно получить широкие щели, достаточные для создания полевых транзисторов с высоким коэффициентом входа-вывода не только при низких криогенных температурах, но и при комнатных [66, 67].

Известны фотодетекторы-счетчики на основе графена для подсчета низкоэнергетических фотонов для различных приложений в медицине, космических науках и для безопасности. Настраиваемая ширина запрещенной зоны в двухслойном графене в случае таких фотодетекторов может позволить варьировать разрешение и рабочие температуры, что в результате дает операционные преимущества. Обратим внимание на то, что широкая запрещенная зона также может сделать возможным процесс ГВГ при комнатной температуре [28], который подавляется в обычном двухслойном графене [16]. К сожалению, эффективные переходы Лифшица в поле волны накачки в двухслойном графене со структурой AB со щелью менее изучены.

Процесс ГВГ в двухслойном графене со щелью в поле когерентного электромагнитного излучения при переходе Лифшица с энергией фотона, значительно меньшей так называемой энергии Лифшица $\mathcal{E}_L \sim 1$ мэВ, имеет некоторые особенности [68–75]. Две соприкасающиеся параболы поверхности Ферми разбиваются на четыре отдельных «кармана». В отличие от обычного графена, внешние возмущения, такие как деформация [76, 77] или электрическое поле [78], могут изменять топологию электронной дисперсии и энергию перехода Лифшица, который соединяет области с разными топологиями Ферми [79]. Из-за 2D-природы двухслойного графена его химический потенциал и топология могут быть настроены с помощью электростатической щели [1], что упрощает экспериментальное исследование перехода Лифшица. Кстати, в невозмущенном двухслойном графене это достигается при низких энергиях $\mathcal{E}_L = 1$ мэВ. Чтобы вызвать асимметрию, можно использовать химическое легирование [55] или внешние возмущения [56]. Индуцированная асимметрия открывает запрещенную зону в энергетическом спектре графена [59, 71–75]. Как показано в работе [79], для индуцированной асимметрии и ширины щели $U = 100$ мэВ переход Лифшица происходит при более высокой энергии $\mathcal{E}_L = 1.6$ мэВ. Из оценки, приведенной в [79], можно заключить, что экспериментальное наблюдение перехода Лифшица обусловлено наличием запрещенной зоны, вызванной асимметрией слоев, и тем фактом, что чем шире щель, тем более заметен этот эффект.

При внутризонных переходах взаимодействие частицы с терагерцевыми (ТГц) или субТГц-фотонами низких энергий $\hbar\omega \ll \mathcal{E}_L$ характеризуется параметром эффективного взаимодействия χ [16]:

$$\chi = \frac{eE_0 v_3}{\hbar\omega^2},$$

где E_0 — напряженность электрического поля, ω — частота волны, e — заряд электрона, $v_3 = \sqrt{3}a\gamma_3/2\hbar \approx v_F/8$ — эффективная скорость, определяемая амплитудой перескока $\gamma_3 = 0.32$ эВ между слоями ($a \approx 0.246$ нм — расстояние между ближайшими A-слоями), v_F — скорость Ферми в обычном графене. При наличии запрещенной зоны U межзонные переходы характеризуются так называемым параметром Келдыша [80, 81]

$$\gamma = \frac{\omega\sqrt{mU}}{eE_0} = \frac{v_3\sqrt{mU}}{\chi\hbar\omega}.$$

Здесь U — ширина запрещенной зоны, $m = \gamma_1/2v_F^2$ — эффективная масса, $\gamma_1 \simeq 0.39$ эВ.

Для материалов со щелью параметр Келдыша определяет характер процесса ионизации, который с образованием электронно-дырочной пары является первым этапом ГВГ. В пределе $\gamma \gg 1$ доминирует многофотонная ионизация. В так называемом неадиабатическом режиме ($\gamma \sim 1$) могут иметь место как многофотонная, так и туннельная ионизация. В пределе $\gamma \ll 1$ преобладает туннельная ионизация. В рассматриваемом случае процесс ионизации сводится к переносу электрона из валентной зоны в зону проводимости, т. е. к созданию пары электрон–дырка. Поскольку при $\gamma \gg 1$ межзонными переходами можно пренебречь, волновое поле не может обеспечить достаточно энергии для создания пары электрон–дырка, и генерация гармоник подавляется. Таким образом, в неадиабатическом режиме из-за большой вероятности ионизации интенсивность гармоник может быть значительно увеличена по сравнению с туннельным переходом [28, 33]. Если

$\gamma \sim 1$ или $\gamma \ll 1$, то имеют место межзонные переходы. С этой точки зрения, материалы конденсированного состояния с двухслойным графеном предпочтительнее, благодаря настраиваемой запрещенной зоне с нетривиальной топологией.

В настоящей работе мы будем рассматривать неадибатический режим ГВГ при $\gamma \sim 1$ и $\gamma \ll 1$, когда становятся существенными многофотонные процессы. Наше рассмотрение охватывает в основном фотоны низких энергий. Средняя интенсивность волны выражается через χ как

$$I_\chi = \chi^2 \cdot 1.96 \cdot 10^{13}\ \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}\left(\frac{\hbar\omega}{\text{эВ}}\right)^4,$$

и требуемая интенсивность I_χ для нелинейного режима строго зависит от энергии фотона. В частности, для фотонов с энергиями 0.4–0.9 мэВ режим многофотонного взаимодействия может быть реализован при интенсивностях $I_\chi = 1$–10^2 Вт/см^2. Современные источники на основе фотонов в ТГц- и субТГц-диапазонах (с энергиями 0.4–1.24 мэВ) включают квантовые каскадные лазеры и могут достигать значительной выходной мощности (в основном при криогенных температурах), тогда как их использование в сочетании с нелинейными кристаллами позволяет получить перестраиваемую непрерывную ТГц-волну с энергией несколько микроватт при комнатной температуре [82]. Эффективность таких источников довольно высока, но, к сожалению, до сих пор они с трудом интегрируются в более крупные цифровые электронные системы, что, возможно, является самым большим недостатком таких систем связи [82, 83].

В настоящей статье с помощью микроскопической нелинейной квантовой теории численно исследовано взаимодействие двухслойного графена со структурой AB с мощным лазерным излучением. Определены оптимальные значения основных параметров: ширины запрещенной зоны, интенсивности волны накачки, температуры графена для практически значимого случая ГВГ в низкоэнергетической области перехода Лифшица (разбиение односвязной линии Ферми на четыре отдельные части) [59,68–70]. Уравнение Лиувилля – фон Неймана рассматривается численно для генерации высших (здесь второй и третьей) гармоник в режиме многофотонного возбуждения вблизи точек Дирака зоны Бриллюэна. Мы рассматриваем процесс генерации гармоник в неадиабатическом режиме взаимодействия, когда параметр Келдыша имеет порядок единицы. Выявлены также картина многофотонного возбуждения моря Ферми – Дирака и эффект тригонального искривления. Мы исследуем вероятности ГВГ при аннигиляции пары частица–дырка в сильном эффективном поле линейно-поляризованной электромагнитной волны для практически оптимальных параметров рассматриваемой системы. Полученные результаты показывают, что при специально выбранных значениях соответствующих характерных параметров этого процесса мы можем использовать двухслойный графен со щелью в качестве удобной нелинейной среды для ГВГ волны накачки с эффективным выходом в субТГц- и ТГц-областях спектра при температуре графена выше криогенной.

Работа организована следующим образом. В разд. 2 формулируется и численно решается система уравнений для одночастичной матрицы плотности в режиме многофотонного взаимодействия. В разд. 3 рассматривается проблема генерации гармоник при низкоэнергетическом возбуждении двухслойного графена со щелью. Основные выводы приведены в разд. 4, а громоздкие формулы вынесены в Приложение.

2. ОСНОВНАЯ ТЕОРИЯ

В дальнейшем мы используем микроскопическую нелинейную квантовую теорию взаимодействия когерентного электромагнитного излучения с двухслойным графеном со щелью, которая развита в работах [28,33]. Представим линейно поляризованную электромагнитную волну с несущей частотой ω и медленно меняющейся амплитудой $f(t)E_0$ электрического поля $\mathbf{E}$ в плоскости xy слоя графена в виде

$$\mathbf{E}\left(t\right) = f\left(t\right) E_0 \mathbf{e} \cos\omega t, \tag{1}$$

где $\mathbf{e}$ — единичный вектор поляризации. Медленно меняющуюся огибающую волны накачки представим формулой

$$f\left(t\right) = \begin{cases} \sin^2\left(\pi t/\mathcal{T}\right), & 0 \le t \le \mathcal{T}, \\ 0, & t < 0, \quad t > \mathcal{T}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\mathcal{T}$ характеризует длительность импульса, $\mathcal{T} = 10\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_0 = 2\pi/\omega$.

Эффективный одночастичный гамильтониан [58–60] для низкочастотных переходов ($|\mathcal{E}_\sigma| < \gamma_1 \simeq 0.39$ эВ) в двухслойном графене со структурой AB со щелью вблизи дираковских точек K_ζ имеет вид

$$\widehat{H}_\zeta = \begin{pmatrix} U/2 & q_\zeta^*\left(\mathbf{p}\right) \\ q_\zeta\left(\mathbf{p}\right) & -U/2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $\hat{\mathbf{p}} = \{\widehat{p}_x, \widehat{p}_y\}$ — оператор импульса электрона, $\zeta = \pm 1$ — квантовое число долины, U — ширина щели и

$$q_\zeta(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2m_*}(\zeta p_x + ip_y)^2 + v_3(\zeta p_x - ip_y). \quad (4)$$

Первый член в формуле (4) связан с парой параболических зон $\mathcal{E} = \pm p^2/2m$.

Квантовые числа спина и долины сохраняются. Междолинных переходов нет, и индекс долины ζ можно рассматривать как параметр. Собственные состояния эффективного гамильтониана (3) есть спиноры

$$\Psi_\sigma(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{S}}|\sigma, \mathbf{p}\rangle \exp\left(\frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right), \quad (5)$$

где

$$|\sigma, \mathbf{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{S}}\sqrt{\frac{\mathcal{E}_\sigma + U/2}{2\mathcal{E}_\sigma}}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{\mathcal{E}_\sigma + U/2}\Upsilon(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\Upsilon(\mathbf{p}) = -\frac{p^2}{2m}e^{2i\zeta\vartheta} + \zeta v_3 p e^{-i\zeta\vartheta}, \quad (7)$$

$\vartheta = \operatorname{arctg}(p_y/p_x)$, σ — индекс зоны ($\sigma = 1$ для валентной зоны и $\sigma = -1$ для зоны проводимости) и S — область квантования,

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathbf{p}) = \\ = \sigma\sqrt{\frac{U^2}{4} + (v_3 p)^2 - \zeta\frac{v_3 p^3}{m}\cos 3\vartheta + \left(\frac{p^2}{2m}\right)^2} \quad (8)$$

— соответствующая энергия состояния.

Оператор поля Ферми–Дирака в виде разложения по свободным состояниям (5) может быть описан с использованием техники вторичного квантования:

$$\widehat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{p},\sigma}\widehat{a}_{\mathbf{p},\sigma}(t)\Psi_\sigma(\mathbf{r}), \quad (9)$$

где $\widehat{a}_{\mathbf{p},\sigma}(t)$ ($\widehat{a}^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}(t)$) — оператор уничтожения (рождения) электрона с импульсом $\mathbf{p}$, который удовлетворяет обычным правилам антикоммутативности. Одночастичный гамильтониан при наличии однородного зависящего от времени электрического поля $\mathbf{E}(t)$ можно представить как

$$\widehat{H}_{int} = \widehat{H}_\zeta + \begin{pmatrix} e\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(t) & 0 \\ 0 & e\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(t) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где для гамильтониана взаимодействия мы использовали калибровку длины [84,85]. Используя разложение (9), полный гамильтониан вторичного квантования можем записать в виде

$$\widehat{H} = \sum_{\sigma,\mathbf{p}}\mathcal{E}_\sigma(\mathbf{p})\,\widehat{a}^\dagger_{\sigma\mathbf{p}}\widehat{a}_{\sigma\mathbf{p}} + \widehat{H}_{int}, \quad (11)$$

где взаимодействие излучения с веществом задано не зависящим от калибровки полем $\mathbf{E}(t)$ следующей формулой:

$$\widehat{H}_{int} = ie\sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}',\sigma}\delta_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}\partial_{\mathbf{p}'}\mathbf{E}(t)\,\widehat{a}^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\widehat{a}_{\mathbf{p}',\sigma'} + \\ + \sum_{\mathbf{p},\sigma}\mathbf{E}(t)\left(\mathbf{D}_t(\sigma,\mathbf{p})\,\widehat{a}^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\widehat{a}_{\mathbf{p},-\sigma} + \\ + \mathbf{D}_m(\sigma,\mathbf{p})\,\widehat{a}^\dagger_{\mathbf{p},\sigma}\widehat{a}_{\mathbf{p},\sigma}\right). \quad (12)$$

Здесь

$$\mathbf{D}_m(\sigma,\mathbf{p}) = \hbar e\langle\sigma,\mathbf{p}|i\partial_{\mathbf{p}}|\sigma,\mathbf{p}\rangle \quad (13)$$

— средний дипольный момент, или берри-связь,

$$\mathbf{D}_t(\sigma,\mathbf{p}) = \hbar e\langle\sigma,\mathbf{p}|i\partial_{\mathbf{p}}| -\sigma,\mathbf{p}\rangle \quad (14)$$

— дипольный момент перехода (оба даны в Приложении, см. также работу [28]).

Многофотонное взаимодействие двухслойного графена с сильным полем излучения описывается уравнением Лиувилля–фон Неймана для одночастичной матрицы плотности (см. уравнения (25), (26) Приложения). Мы предполагаем, что изначально идеальный ферми-газ находится в равновесии. Отметим, что мы включили релаксационные процессы в уравнение Лиувилля–фон Неймана при помощи неоднородной феноменологической вероятности затухания Γ, поскольку однородные релаксационные процессы медленнее неоднородных. Мы решим систему уравнений (27) и вытекающую из нее замкнутую систему дифференциальных уравнений (28), (29), приведенных в Приложении, для функций $N_v(\mathbf{p},t)$, $N_c(\mathbf{p},t)$, $P(\mathbf{p},t)$ (определения функций см. в Приложении) с учетом следующих начальных условий ($P(\mathbf{p},0) = 0$):

$$N_c(\mathbf{p},0) = \frac{1}{1+\exp[(\mathcal{E}-\mu)/T]}, \quad (15)$$

$$N_v(\mathbf{p},0) = 1 - N_c(\mathbf{p},0). \quad (16)$$

Здесь T и μ — соответственно температура и химический потенциал в единицах энергии.

Систему уравнений (28)–(30) не удается решить аналитически в общем случае. При численном решении проведена замена переменных и преобразование уравнений с частными производными в обыкновенные. Новые переменные есть t и $\widetilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_E(t)$, где

$$\mathbf{p}_E(t) = -e\int_0^t \mathbf{E}(t')\,dt' \quad (17)$$

— переданный волновым полем классический импульс.

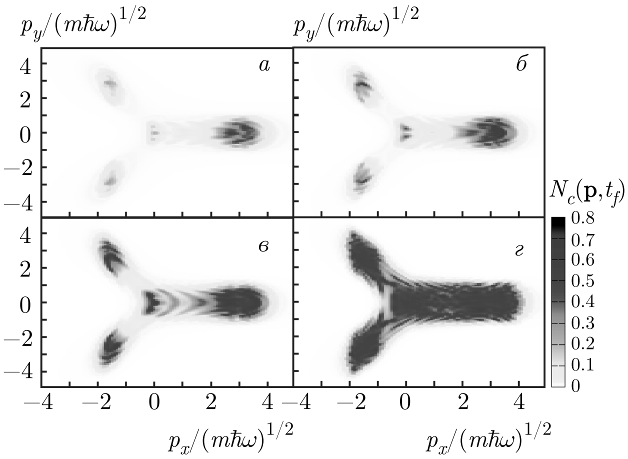

Рис. 1. (В цвете онлайн) Функция распределения частиц $N_c(\mathbf{p}, t_f)$ (в относительных единицах) после взаимодействия в момент $t_f = 10\mathcal{T}_0$ в зависимости от безразмерных компонент импульса при ширинах щели $U = 5$ мэВ (*а*), 4 мэВ (*б*), 3 мэВ (*в*), 0.0008 мэВ (*г*). Волна накачки считается линейно поляризованной вдоль оси y. Демонстрируется многофотонное возбуждение с эффектом тригонального искривления для низкоэнергетических переходов Лифшица, индуцированных возбуждением фотонов при энергии $\hbar\omega = \mathcal{E}_L/1.1 \simeq 0.8$ мэВ, температуре $T/\hbar\omega = 0.4$ и безразмерном параметре интенсивности $\chi = 1$ для долины с индексом $\zeta = -1$

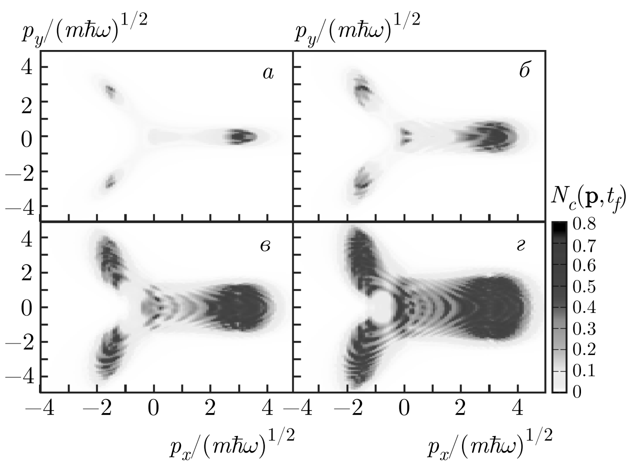

Рис. 2. (В цвете онлайн) Создание пары частица–дырка в двухслойном графене при многофотонном резонансном возбуждении. Функция распределения частиц $N_c(\mathbf{p}, t_f)$ (в относительных единицах) после взаимодействия в момент $t_f = 10\mathcal{T}_0$ для $\chi = 0.5$ (*а*), $\chi = 1.0$ (*б*), $\chi = 1.5$ (*в*), $\chi = 2.0$ (*г*). Температура $T/\hbar\omega = 0.4$. Предполагается, что поле поляризовано линейно вдоль оси y с энергией фотона $\hbar\omega = \mathcal{E}_L/1.1 \simeq 0.8$ мэВ, а ширина щели $U = 2$ мэВ. Результаты приведены для долины с индексом $\zeta = -1$

Фотовозбуждения моря Ферми–Дирака, индуцированные переходами Лифшица, представлены на рис. 1, 2. Эффективная волна линейно поляризована по оси y. После соответствующих преобразований выполняется интегрирование уравнений (28)–(30) на однородной сетке из 10^4 точек $(\widetilde{p}_x, \widetilde{p}_y)$. В качестве максимального импульса возьмем $\widetilde{p}_{max}/\sqrt{m\hbar\omega} = 5$. Интегрирование по времени выполняется стандартным алгоритмом Рунге–Кутты четвертого порядка. Для вероятности затухания берем $\Gamma = t_0(\mu, T)\mathcal{T}^{-1}$.

Оценим время релаксации $t_0(\mu, T)$. Мы изучили когерентное взаимодействие двухслойного графена с волной накачки в режиме сверхбыстрого возбуждения, что верно только для времен $t < \tau_{min}$, где τ_{min} — наименьшее из всех релаксационных времен. Для возбуждений с энергиями $\mu \ll \gamma_1 = 0.39$ эВ доминирующим механизмом релаксации считается электрон-фононная связь между продольными акустическими фононами [86, 87]. Для низкотемпературного предела

$$T \ll 2\frac{c_{ph}}{v_F}\sqrt{\mu\gamma_1},$$

где $c_{ph} \simeq 2 \cdot 10^6$ см/с — скорость продольного акустического фонона, время релаксации для уровня с энергией μ можно оценить как [87]

$$t_0(\mu, T) \simeq \left(\frac{\pi D^2 T^2}{8\rho_m \hbar^3 c_{ph}^3 v_F}\sqrt{\frac{\gamma_1}{\mu}}\right)^{-1}. \tag{18}$$

Здесь$D \simeq 20$ эВ — константа электрон-фононного взаимодействия, а $\rho_m \simeq 15 \cdot 10^{-8}$ г/см^2 — массовая плотность двухслойного графена. Для $\mu \simeq 0.8$ мэВ при температуре $T = 0.4\hbar\omega$ из уравнения (18) получаем $\tau \simeq 60$ пс. Для энергий $\mu \ll \gamma_1$ можно когерентно управлять многофотонными переходами в двухслойном графене в диапазоне времени $t \lesssim 60$ пс, пренебрегая столкновениями частиц.

На рис. 1 представлен график плотности функции распределения частиц $N_c(\mathbf{p}, t_f)$ в зависимости от безразмерных компонент импульса после взаимодействия для различных значений ширины щели. Длительность импульса волны накачки $\mathcal{T} = 10\mathcal{T}_0 \approx 50$ пс. Хорошо виден эффект тригонального искажения (warping) — отклонение возбужденных изоэнергетических контуров от кругов, которые размываются с увеличением ширины щели U. Во всех рассмотренных случаях две соприкасающиеся параболы превращаются в четыре отдельных «кармана». Заметим, что тригональное искривление имеет решающее значение для четного порядка нелинейности. Как видно на рис. 1, с ростом U наступает пертурбативный режим $\gamma > 1$, и возможны только слабые возбуждения моря Ферми–Дирака.

На рис. 2 показана зависимость фотовозбуждения от интенсивности волны накачки на фиксированной частоте субТГц-диапазона. Для больших значений χ, когда $\gamma = 1.1$, отчетливо видны многофотонные возбуждения. С увеличением интенсивности волны в ферми-дираковском море увеличивается число состояний с поглощением большего числа фотонов. При $\chi \gtrsim 1$, когда $\gamma \simeq 1$, происходит многофотонное возбуждение моря Ферми–Дирака по тригонально искривленным волновым полем изолиниям квазиэнергетического спектра. Таким образом, многофотонные вероятности рождения пар частица–дырка имеют максимальные значения для энергетических изолиний, определяемых резонансным условием

$$\mathcal{T}_0^{-1}\int\limits_0^{\mathcal{T}_0} 2\mathcal{E}_1\left(\widetilde{\mathbf{p}}+\mathbf{p}_E\left(t\right),t\right)dt = n\hbar\omega, \quad n=1,2,3,\ldots$$

Эти контуры также видны на рис. 1. Исследования температурной зависимости возбуждения ферми-дираковского моря показало, что для рассматриваемого случая оно слабо зависит от оптимальных температур: возбужденные изолинии слегка размываются с повышением температуры. Этот эффект невелик, поскольку $U \gg T$, и можно ожидать, что спектры гармоник будут устойчивы к изменению температуры в отличие от случая $U = 0$, когда излучение гармоник подавляется при повышении температуры [28,33]. Таким образом, температурная зависимость отсутствует.

В следующем разделе мы исследуем нелинейный отклик двухслойного графена со щелью в процессе генерации второй и третьей гармоник под воздействием лазерного поля субТГц-частоты $\omega = 0.4$–0.9 мэВ$/\hbar$ в неадиабатическом режиме $\gamma \simeq \simeq 1$.

3. ГЕНЕРАЦИЯ ГАРМОНИК ПРИ ИНДУЦИРОВАННЫХ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПЕРЕХОДАХ В ДВУХСЛОЙНОММ ГРАФЕНЕ СО ЩЕЛЬЮ

Здесь мы исследуем нелинейный отклик двухслойного графена на процесс генерации гармоник в неадиабатическом режиме индуцированных переходов Лифшица, когда параметр Келдыша имеет порядок единицы. Для когерентной части спектра излучения введем среднее значение оператора плотности тока:

$$j_\zeta = -2e\left\langle \widehat{\Psi}(\mathbf{r},t)\left|\widehat{\mathbf{v}}_\zeta\right|\widehat{\Psi}(\mathbf{r},t)\right\rangle. \tag{19}$$

Оператор скорости $\widehat{\mathbf{v}}_\zeta = \partial\widehat{H}/\partial\widehat{\mathbf{p}}$ приводится в Приложении (см. уравнения (35), (36), а также работу [30]). Используя уравнения (19)–(36), формулу тока для долины ζ можно записать в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{j}_\zeta\left(t\right) = &-\frac{2e}{(2\pi\hbar)^2}\times\\ &\times\int d\mathbf{p}\left\{\mathbf{V}'\left(\mathbf{p}\right)\left(N_c(\mathbf{p},t)-N_v(\mathbf{p},t)\right)+\frac{2i}{\hbar}i\mathcal{E}_1\left(\mathbf{p}\right)\times\right.\\ &\left.\times\left[\mathbf{D}_t\left(\mathbf{p}\right)P^*(\mathbf{p},t)-\mathbf{D}_{\mathrm{t}}^*\left(\mathbf{p}\right)P(\mathbf{p},t)\right]\right\},\end{aligned} \tag{20}$$

где $\mathbf{V}'\left(\mathbf{p}\right)$ — внутризонная скорость (37). В уравнении (20) первый член — это внутризонный ток, который обусловлен независимым движением носителей в соответствующих зонах. Второй член в формуле (20) описывает высшие гармоники, возникающие в результате рекомбинации ускоренных электронно-дырочных пар. Поскольку мы изучаем неадиабатический режим, вклад обоих механизмов существен.

Нет вырождения по квантовому числу ζ-долины, поэтому полный ток может быть получен суммированием по ζ:

$$j_x = j_{1,x} + j_{-1,x}, \tag{21}$$

$$j_y = j_{1,y} + j_{-1,y}. \tag{22}$$

Компоненты плотности тока $j_{x,y}$ определены как

$$\frac{j_{x,y}}{j_0} = G_{x,y}\left(\omega t, \chi, \gamma, \frac{\mathcal{E}_L}{\hbar\omega}, \frac{T}{\hbar\omega}, \frac{U}{\hbar\omega}\right). \tag{23}$$

Здесь

$$j_0 = \frac{e\omega}{\pi^2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, \tag{24}$$

G_x и G_y — безразмерные периодические (при монохроматической волне) функции, которые зависят от параметров взаимодействия χ, γ, энергии Лифшица и температуры. Таким образом, используя решения уравнений (28)–(30) и проводя интегрирование в уравнении (20), можно вычислить спектры излучения гармоник с помощью фурье-преобразования функций $G_{x,y}(t)$. Вероятность испускания n-й гармоники пропорциональна $n^2|j_n|^2$, где $|j_n|^2 = |j_{xn}|^2 + |j_{yn}|^2$, j_{xn} и j_{yn} являются n-ми компонентами Фурье полного тока, индуцированного полем. Для нахождения j_n использован алгоритм быстрого преобразования Фурье. Для построения графиков мы используем формулу для нормированной плотности тока (23).

Отметим, что при сравнении с обычным монослойным графеном [14,15] значение j_0 для двухслойного графена больше в $\sqrt{\gamma_1/2\hbar\omega}$ раз. Кроме того, предел обрезания гармоник больше, чем в случае

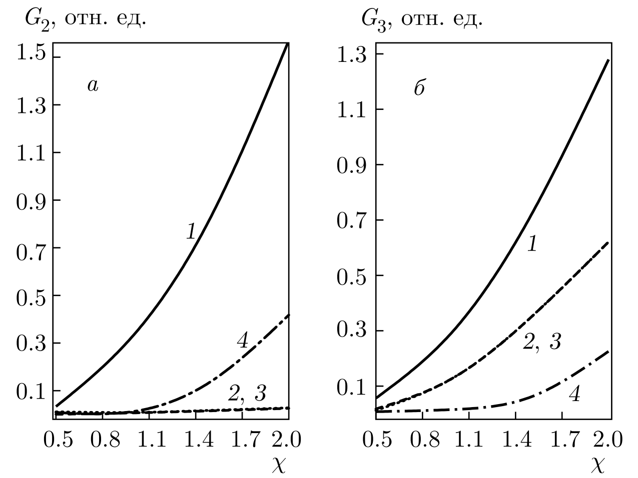

Рис. 3. Вероятности испускания гармоник второго G_2 (*а*) и третьего G_3 (*б*) порядков в двухслойном графене при переходе Лифшица в зависимости от параметра интенсивности χ для значений ширины щели $U = 3$ мэВ (кривая *1*), 4 мэВ (кривая *2*), 5 мэВ (кривая *3*), 6 мэВ (кривая *4*). Температура принята равной $T/\hbar\omega = 0.4$. Предполагается, что волна с частотой $\omega = 0.8$ мэВ$/\hbar$ поляризована линейно

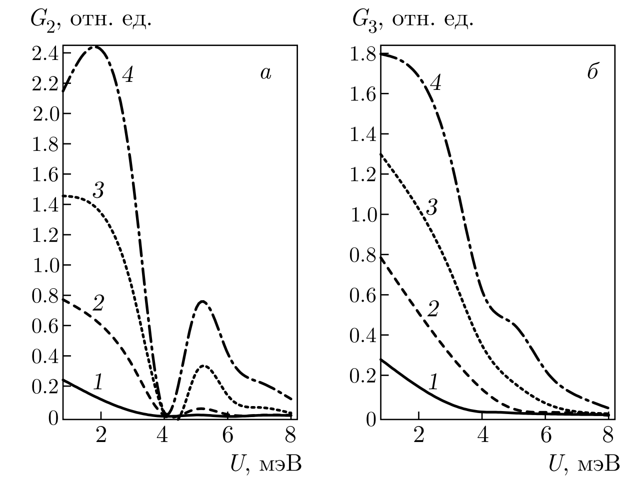

Рис. 4. Вероятности испускания второй G_2 (*а*) и третьей G_3 (*б*) гармоник в зависимости от ширины запрещенной зоны U для $\chi = 0.5$ (кривая *1*), 1.0 (*2*), 1.5 (*3*), 2.0 (*4*). Другие параметры, как на рис. 3

монослойного графена [14], что является результатом сильной нелинейности, вызванной тригональным искажением. Следовательно, для рассматриваемого случая $\hbar\omega \ll \gamma_1$ интенсивность излучения гармоник как минимум на порядок больше, чем в монослойном графене.

Для исследования генерации гармоник за счет многофотонного резонансного возбуждения и аннигиляции пары частица–дырка из когерентных состояний суперпозиции при $\gamma \simeq 1$ сначала исследуем вероятности генерации второй и третьей гармоник. Эти вероятности в зависимости от мощности волны накачки, определяемой параметром χ на одной и той же частоте, показана на рис. 3 для различных значений ширины щели.

На рис. 3 графики для $U = 4$ мэВ и $U = 5$ мэВ совпадают. Как видно на рисунке, для параметров интенсивности $\chi \gtrsim 1$ при рассматриваемых значениях ширины щели U мы имеем сильное отклонение от степенного закона для скоростей излучения второй и третьей гармоник, которые, в соответствии с теорией возмущений, пропорциональны соответственно χ^2 и χ^3. На рис. 4 вероятности генерации второй и третьей гармоник показаны как функции ширины щели при различных интенсивностях, определяемых параметром χ на одной и той же частоте. Как видно на рис. 4, все графики имеют максимальные значения при $U \simeq 2$ мэВ. В результате находим оптимальные параметры, и интенсивность излучения гармоник тем больше, чем выше интенсивность волны накачки.

Итак, в соответствии с результатами рис. 3 и 4, интенсивное излучение второй и третьей гармоник при индуцированных волной накачки ускорении и аннигиляции частицы или дырки в графене со щелью может быть получено, когда частота волны накачки находится в субТГц-области. Как и в случае аналогичных расчетов для интенсивной волны накачки при большой ширине запрещенной зоны U ($U \gg T$), скорость излучения слабо зависит от температуры.

На рис. 5 показаны зависимости вероятностей генерации второй и третьей гармоник для двухслойного графена со щелью в зависимости от частоты накачки для различных параметрах взаимодействия при $U = 2$ мэВ. Показаны максимумы скорости излучения при различных энергиях фотонов. Для генерации третьей гармоники максимальное значение достигается на частоте $\omega \simeq 0.8$ мэВ$/\hbar$. Что касается ГВГ вплоть до дальнего инфракрасного диапазона, как показано в работе [33], она может быть получена с помощью квантовых каскадных лазеров с высокой мощностью.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью микроскопической нелинейной теории представлено взаимодействие двухслойного графена со щелью и сильного когерентного поля излучения при низкоэнергетическом переходе Лифши-

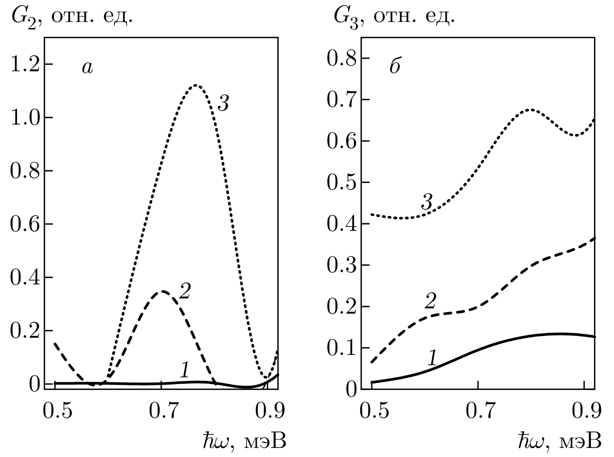

Рис. 5. Вероятности испускания второй G_2 (*а*) и третьей G_3 (*б*) гармоник для двухслойного графена в зависимости от энергии фотона $\hbar\omega$ для $\chi = 1.0$ (кривая *1*), 1.5 (*2*), 2.0 (*3*). Температура принята равной $T/\hbar\omega = 0.4$, а ширина щели $U = 2$ мэВ. Предполагается, что поле линейно поляризовано вдоль оси y

ца. Замкнутая система дифференциальных уравнений для одночастичной матрицы плотности решается численно для двухслойного графена в приближении дираковского конуса в поле линейно поляризованной электромагнитной волны субТГц-частоты. Мы рассмотрели неадиабатические волновые переходы Лифшица для моря Ферми–Дирака, включая процессы ГВГ. Показано, что роль щели в нелинейно-оптическом отклике двухслойного графена весьма значительна. В частности, присутствуют нелинейные процессы четного порядка, обрезание гармоник увеличивается, а процессы излучения гармоник становятся устойчивыми к повышению температуры. Полученные результаты показывают, что двухслойный графен со щелью может служить эффективной средой для генерации четных и нечетных высших гармоник в ТГц- и субТГц-областях частот, что важно для разработки систем новой высокоскоростной беспроводной связи [82, 83]. Полученные результаты свидетельствуют о том, что процесс ГВГ для субТГц-фотонов (с длинами волн от 0.3 до 1 мм) может наблюдаться уже при интенсивностях $I_\chi = 1$–10^3 Вт/см^2 при температуре образца $T < \hbar\omega$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Уравнение Лиувилля – фон Неймана для одночастичной матрицы плотности можно представить в виде

$$\rho_{\alpha,\beta}(\mathbf{p},t) = \langle \widehat{a}^\dagger_{\mathbf{p},\beta}(t)\,\widehat{a}_{\mathbf{p},\alpha}(t)\rangle, \tag{25}$$

где $\widehat{a}_{\mathbf{p},\alpha}(t)$ удовлетворяет уравнению Гейзенберга

$$i\hbar\frac{\partial\widehat{a}_{\mathbf{p},\alpha}(t)}{\partial t} = \left[\widehat{a}_{\mathbf{p},\alpha}(t), \widehat{H}\right]. \tag{26}$$

Из-за однородности задачи нам нужны только диагональные $\mathbf{p}$-элементы матрицы плотности. С учетом формул (11)–(26) эволюционное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\rho_{\alpha,\beta}(\mathbf{p},t)}{\partial t} - i\hbar e\mathbf{E}(t)\frac{\partial\rho_{\alpha,\beta}(\mathbf{p},t)}{\partial\mathbf{p}} &= \\ = \left(\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{p}) - \mathcal{E}_\beta(\mathbf{p}) - i\hbar\Gamma(1-\delta_{\alpha\beta})\right)\rho_{\alpha,\beta}(\mathbf{p},t) &+ \\ + \mathbf{E}(t)\left(\mathbf{D}_m(\alpha,\mathbf{p}) - \mathbf{D}_m(\beta,\mathbf{p})\right)\rho_{\alpha,\beta}(\mathbf{p},t) &+ \\ + \mathbf{E}(t)\left[\mathbf{D}_t(\alpha,\mathbf{p})\,\rho_{-\alpha,\beta}(\mathbf{p},t)\right. &- \\ \left. - \mathbf{D}_t(-\beta,\mathbf{p})\,\rho_{\alpha,-\beta}(\mathbf{p},t)\right]&, \end{aligned} \tag{27}$$

где Γ — скорость затухания. В уравнении (27) недиагональными элементами являются межзонная поляризация $\rho_{1,-1}(\mathbf{p},t) = P(\mathbf{p},t)$ и ее комплексно-сопряженная величина $\rho_{-1,1}(\mathbf{p},t) = P^*(\mathbf{p},t)$, а диагональными — функции распределения частиц для зоны проводимости, $N_c(\mathbf{p},t) = \rho_{1,1}(\mathbf{p},t)$, и валентной зоны, $N_v(\mathbf{p},t) = \rho_{-1,-1}(\mathbf{p},t)$. Необходимо решить систему дифференциальных уравнений для этих функций:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial N_c(\mathbf{p},t)}{\partial t} - i\hbar e\mathbf{E}(t)\frac{\partial N_c(\mathbf{p},t)}{\partial\mathbf{p}} &= \\ = \mathbf{E}(t)\,\mathbf{D}_t(\mathbf{p})\,P^*(\mathbf{p},t) - \mathbf{E}(t)\,\mathbf{D}_t^*(\mathbf{p})\,P(\mathbf{p},t)&, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial N_v(\mathbf{p},t)}{\partial t} - i\hbar e\mathbf{E}(t)\frac{\partial N_v(\mathbf{p},t)}{\partial\mathbf{p}} &= \\ = -\mathbf{E}(t)\,\mathbf{D}_t(\mathbf{p})\,P^*(\mathbf{p},t) + \mathbf{E}(t)\,\mathbf{D}_t^*(\mathbf{p})\,P(\mathbf{p},t)&, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial P(\mathbf{p},t)}{\partial t} - i\hbar e\mathbf{E}(t)\frac{\partial P(\mathbf{p},t)}{\partial\mathbf{p}} &= \\ = \left[2\mathcal{E}_1(\mathbf{p}) + \mathbf{E}(t)\,\mathbf{D}_m(\mathbf{p}) - i\hbar\Gamma\right]P(\mathbf{p},t) &+ \\ + \mathbf{E}(t)\,\mathbf{D}_t(\mathbf{p})\left[N_v(\mathbf{p},t) - N_c(\mathbf{p},t)\right]&. \end{aligned} \tag{30}$$

Полные средние дипольные моменты есть

$$\begin{aligned} D_{xm}(\mathbf{p}) = -\frac{e\hbar U}{2\mathcal{E}_1(\mathbf{p})\left(\mathcal{E}_1^2(\mathbf{p}) - U^2/4\right)} &\times \\ \times\left[\left(\frac{p^2}{2m} - mv_3^2\right)\frac{\zeta p_y}{m} + \frac{v_3}{m}p_xp_y\right]&, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} D_{ym}(\mathbf{p}) - \frac{e\hbar U}{2\mathcal{E}_1(\mathbf{p})\left(\mathcal{E}_1^2(\mathbf{p}) - U^2/4\right)} &\times \\ \times\left[\left(-\frac{p^2}{2m} + mv_3^2\right)\frac{\zeta p_x}{m} + \frac{v_3}{2m}\left(p_x^2 - p_y^2\right)\right]&. \end{aligned} \tag{32}$$

Компоненты дипольных моментов перехода рассчитываются по формуле (14) с помощью спинорных волновых функций (6) (см. также [30, 33]):

$$D_{tx}(\mathbf{p}) = -\frac{e\hbar}{2\mathcal{E}_1(\mathbf{p})\sqrt{\mathcal{E}_1^2(\mathbf{p}) - U^2/4}} \times \\ \times \left(\left[\left(\frac{p^2}{2m} - mv_3^2 \right) \frac{\zeta p_y}{m} + \frac{v_3}{m} p_x p_y \right] - \\ - i\frac{U}{2\mathcal{E}_1} \left\{ \left(\frac{p^2}{2m} + m\mathrm{v}_3^2 \right) \frac{p_x}{m} - \frac{3\zeta v_3}{2m} \left(p_x^2 - p_y^2 \right) \right\} \right), \quad (33)$$

$$D_{ty}(\mathbf{p}) = -\frac{e\hbar}{2\mathcal{E}_1(\mathbf{p})\sqrt{\mathcal{E}_1^2(\mathbf{p}) - U^2/4}} \times \\ \times \left(\left[\left(-\frac{p^2}{2m} + mv_3^2 \right) \frac{\zeta p_x}{m} + \frac{v_3}{2m} \left(p_x^2 - p_y^2 \right) \right] - \\ - i\frac{U}{2\mathcal{E}_1} \left\{ \left(\frac{p^2}{2m} + m\mathrm{v}_3^2 \right) \frac{p_y}{m} + \frac{3\zeta v_3}{m} p_x p_y \right\} \right). \quad (34)$$

Компоненты оператора скорости, определяемого соотношением $\widehat{\mathbf{v}}_\zeta = \partial\widehat{H}/\partial\widehat{\mathbf{p}}$ для эффективного 2×2-гамильтониана (3), можно представить следующими формулами:

$$\widehat{v}_{\zeta x} = \zeta \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{m}\left(\zeta\widehat{p}_x - i\widehat{p}_y\right) + v_3 \\ -\frac{1}{m}\left(\zeta\widehat{p}_x + i\widehat{p}_y\right) + v_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

$$\widehat{v}_{\zeta y} = i \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m}\left(\zeta\widehat{p}_x - i\widehat{p}_y\right) + \mathrm{v}_3 \\ -\frac{1}{m}\left(\zeta\widehat{p}_x + i\widehat{p}_y\right) - v_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Внутризонная скорость $\mathbf{V}'(\mathbf{p})$ при ГВГ в двухслойном графена со структурой AB определяется формулой

$$\mathbf{V}'(\mathbf{p}) = \left[v_3\mathbf{p} - 3\zeta\frac{v_3 p}{2m}\mathbf{p}\cos 3\vartheta + 3\zeta\frac{v_3 p^3}{2m}\sin 3\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial\mathbf{p}} + \\ + 2\frac{\mathbf{p}^3}{(2m)^2} \right] \mathcal{E}_1^{-1}(\mathbf{p}). \quad (37)$$

Благодарности. Хочу выразить признательность Г. К. Аветисяну за многочисленные обсуждения и постоянное внимание к работе.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке Министерства образования, науки, культуры и спорта Республики Армения.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov et al., Science **306**, 666 (2004).
2. A. K. Geim, Science **324**, 1530 (2009).
3. A. V. Rozhkov, A. O. Sboychakov, A. L. Rakhmanov, and Franco Nori, Phys. Rep. **648**, 1 (2016).
4. A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres et al., Rev. Mod. Phys. **81**, 109 (2009).
5. T. Brabec and F. Krausz, Rev. Mod. Phys. **72**, 545 (2000).
6. H. K. Avetissian, *Relativistic Nonlinear Electrodynamics, The QED Vacuum and Matter in Super-Strong Radiation Fields*, Springer (2016).
7. Sh. Ghimire, A. D. DiChiara, E. Sistrunk et al., Nature **7**, 138 (2011).
8. O. Schubert, M. Hohenleutner, F. Langer et al., Nature Photon. **8**, 119 (2014).
9. G. Vampa, T. J. Hammond, N. Thirat et al., Nature **522**, 462 (2015).
10. G. Ndabashimiye, S. Ghimire, M. Wu et al., Nature **534**, 520 (2016).
11. Y. S. You, D. A. Reis, S. Ghimire, Nature Phys. **13**, 345 (2017).
12. H. Liu, C. Guo, G. Vampa et al., Nature Phys. **14**, 1006 (2018).
13. S. A. Mikhailov and K. Ziegler, J. Phys. Condens. Matter **20**, 384204 (2008).
14. S. V. Syzranov, Ya. I. Rodionov, K. I. Kugel, and F. Nori, Phys. Rev. B **88**, 241112(R) (2013).
15. Ya. I. Rodionov, K. I. Kugel, and F. Nori,, Phys. Rev. B **94**, 195108 (2016).

16. H. K. Avetissian, G. F. Mkrtchian, K. G. Batrakov et al., Phys. Rev. B **88**, 165411 (2013).

17. P. Bowlan, E. Martinez-Moreno, K. Reimann et al., Phys. Rev. B **89**, 041408 (2014).

18. I. Al-Naib, J. E. Sipe, and M. M. Dignam, New J. Phys. **17**, 113018 (2015).

19. L. A. Chizhova, F. Libisch, and J. Burgdorfer, Phys. Rev. B **94**, 075412 (2016).

20. H. K. Avetissian and G. F. Mkrtchian, Phys. Rev. B **94**, 045419 (2016).

21. H. K. Avetissian, A. G. Ghazaryan, G. F. Mkrtchian et al., J. Nanophoton. **11**, 016004 (2017).

22. H. K. Avetissian, B. R Avchyan, G. F. Mkrtchian et al., J. Nanophoton. **14**, 026018 (2020).

23. L. A. Chizhova, F. Libisch, and J. Burgdorfer, Phys. Rev. B **95**, 085436 (2017).

24. D. Dimitrovski, L. B. Madsen, and T. G. Pedersen, Phys. Rev. B **95**, 035405 (2017).

25. N. Yoshikawa, T. Tamaya, and K. Tanaka, Science **356**, 736 (2017).

26. A. Golub, R. Egger, C. Muller et al., Phys. Rev. Lett. **124**, 110403 (2020).

27. H. K. Avetissian and G. F. Mkrtchian, Phys. Rev. B **97**, 115454 (2018).

28. A. K. Avetissian, A. G. Ghazaryan, and Kh. V. Sedrakian, J. Nanophoton. **13**, 036010 (2019).

29. A. G. Ghazaryan and Kh. V. Sedrakian, J. Nanophoton. **13**, 046004 (2019).

30. A. G. Ghazaryan and Kh. V. Sedrakian, J. Nanophoton. **13**, 046008 (2019).

31. A. K. Avetissian, A. G. Ghazaryan, K. V. Sedrakian et al., J. Nanophoton. **11**, 036004 (2017).

32. A. K. Avetissian, A. G. Ghazaryan, K. V. Sedrakian et al., J. Nanophoton. **12**, 016006 (2018).

33. H. K. Avetissian, A. K. Avetissian, A. G. Ghazaryan et al., J. Nanophoton. **14**, 026004 (2020).

34. Yu. Bludov, N. Peres, and M. Vasilevskiy, Phys. Rev. B **101**, 075415 (2020).

35. G. L. Breton, A. Rubio, and N. Tancogne-Dejean, Phys. Rev. B **98**, 165308 (2018).

36. H. Liu, Y. Li, Y. S. You et al., Nature Phys. **13**, 262 (2017).

37. G. F. Mkrtchian, A. Knorr, and M. Selig, Phys. Rev. B **100**, 125401 (2020).

38. H. K. Avetissian, G. F. Mkrtchian, and K. Z. Hatsagortsyan, Phys. Rev. Res. **2**, 023072 (2020).

39. H. K. Avetissian, A. K. Avetissian, B. R. Avchyan et al., J. Phys.: Condens. Matter **30**, 185302 (2018).

40. H. K. Avetissian, A. K. Avetissian, B. R. Avchyan et al., Phys. Rev. B **100**, 035434 (2019).

41. T. G. Pedersen, Phys. Rev. B **95**, 235419 (2017).

42. H. K. Avetissian and G. F. Mkrtchian, Phys. Rev. B **99**, 085432 (2019).

43. S. Almalki, A. M. Parks, G. Bart et al., Phys. Rev. B **98**, 144307 (2018).

44. B. Cheng, N. Kanda, T. N. Ikeda et al., Rev. Lett. **124**, 117402 (2020).

45. T. Cao, Z. Li, and S. G. Louie, Phys. Rev. Lett. **114**, 236602 (2015).

46. L. Seixas, A. S. Rodin, A. Carvalho et al., Phys. Rev. Lett. **116**, 206803 (2016).

47. H. Sevinzli, Nano Lett. **17**, 2589 (2017).

48. J. Faist, F. Capasso, D. L. Sivco et al., Science **264**, 553 (1994).

49. D. S. L. Abergel and T. Chakraborty, Appl. Phys. Lett. **95**, 062107 (2009).

50. E. Suarez Morell and L. E. F. Foa Torres, Phys. Rev. B **86**, 125449 (2012).

51. J. J. Dean and H. M. van Driel, Phys. Rev. B **82**, 125411 (2010).

52. S. Wu, L. Mao, A. M. Jones et al., Nano Lett. **12**, 2032 (2012).

53. Y. S. Ang, S. Sultan, and C. Zhang, Appl. Phys. Lett. **97**, 243110 (2010).

54. N. Kumar, J. Kumar, C. Gerstenkornet et al., Phys. Rev. B **87**, 121406 (2013).

55. E. V. Castro, K. S. Novoselov, S. V. Morozov et al., Phys. Rev. Lett. **99**, 216802 (2007).

56. J. B. Oostinga, H. B. Heersche, X. Liu et al., Nature Mater. **7**, 151 (2008).

57. Y. B. Zhang, T.-T. Tang, C. Girit et al., Nature **459**, 820 (2009).

58. F. Guinea, A. H. C. Neto, and N. M. R. Peres, Phys. Rev. B **73**, 245426 (2006).

59. E. McCann and V. I. Falko, Phys. Rev. Lett. **96**, 086805 (2006).

60. M. Koshino and T. Ando, Phys. Rev. B **73**, 245403 (2006).

61. A. Varleta, M. Mucha-Kruczynski, D. Bischoff et al., Synth. Met. **210**, 19 (2015).

62. M. Aoki and H. Amawashi, Sol. St. Comm. **142**, 123 (2007).

63. L. A. Falkovsky, ЖЭТФ **137**, 319 (2010) [JETP **110**, 319 (2010)].

64. K. Tang, R. Qin, J. Zhou et al., J. Phys. Chem. C **115,** 9458(2011).

65. D. Xiao, M. C. Chang, and Q. Niu, Rev. Mod. Phys. **82**, 1959 (2010).

66. L. Vicarelli, M. S Vitiello, D. Coquillat et al., Nature Mater. **11**, 865 (2012).

67. K. Wang, M. M. Elahi, L. Wang et al., Proc. Nat. Acad. Sci. **116**, 201816119 (2019).

68. I. M. Lifshitz, ЖЭТФ **38**, 1569 (1960) [JETP **11**, 1130 (1960)].

69. J. L. Manes, F. Guinea, and M. A. H. Vozmediano, Phys. Rev. B **75**, 155424 (2007).

70. G. P. Mikitik and Yu. V. Sharlai, Phys. Rev. B **77** 113407 (2008).

71. E. McCann, Phys. Rev. B **74**, 161403 (2006).

72. H. Min, B. Sahu, S. Banerjee, and A. H. MacDonald, Phys. Rev. B **75**, 155115 (2007).

73. E. McCann, D. Abergel, and V. Falko, Sol. St. Comm. **143** 110 (2007).

74. M. Mucha-Kruczynski, E. McCann, and V. I. Falko, Sol. St. Comm. **149**, 1111 (2009).

75. D. Suszalski, G. Rut, and A. Rycerz, Phys. Rev. B **97**, 125403 (2018).

76. M. Mucha-Kruczynski, I. L. Aleiner, and V. I. Falko, Phys. Rev. B **84**, 041404 (2011).

77. M. Mucha-Kruczynski, I. L. Aleiner, and V. I. Falko, Sol. St. Comm. **151**, 1088 (2011).

78. A. Varlet, D. Bischo, P. Simonet et al., Phys. Rev. Lett. **113**, 116602 (2014).

79. A. Varlet, M. Mucha-Kruczynski, D. Bischo et al., Synth. Met. **210**, 19 (2015).

80. L. V. Keldysh, ЖЭТФ **34**, 1138 (1958) [JETP **7**, 788 (1958)].

81. L. V. Keldysh, ЖЭТФ **47**, 1945 (1964) [JETP **20**, 1307 (1965)].

82. I. F. Akyildiz, J. M. Jornet, and C. Han, Phys. Comm. **12**, 16 (2014).

83. H. Vettikalladi, W. T. Sethi, A. F. Bin Abas et al., Int. J. Anten. Propagat. **2019**, 9573647:1 (2019).

84. M. Lewenstein, Ph. Balcou, M. Yu. Ivanov et al., Phys. Rev. A **49** 2117 (1994).

85. C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Photons and Atoms. Introduction to Quantum Electrodynamics*, Wiley, New York (1989).

86. E. H. Hwang and S. Das Sarma, Phys. Rev. B **77**, 115449 (2008).

87. J. K. Viljas and T. T. Heikkila, Phys. Rev. B **81**, 245404 (2010).