

ПОЯВЛЕНИЕ ТОЧКИ ПОВОРОТА В ДИНАМИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ РЕЙСНЕРА – НОРДСТРЕМА

*А. А. Шацкий**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 10 декабря 2020 г.,
после переработки 10 декабря 2020 г.
Принята к публикации 30 декабря 2021 г.

Рассмотрено самосогласованное точное решение для образующейся в результате аккреции черно-белой дыры Рейснера – Нордстрема. До образования черно-белой дыры в центре системы находится массивный заряженный шар. Исследован вопрос появления точки поворота (отскока) в образующейся черно-белой дыре. Появление точки поворота исследовано на примере решения для аккреции незаряженной сферической пылевой оболочки. Уравнения модели записываются с учетом космологического Λ -члена. В рассмотренной модели и сама черно-белая дыра, и ее точка поворота образуются в уже существующей Вселенной, поэтому черно-белая дыра в модели не является «вечной».

DOI: 10.31857/S0044451021050047

1. ВВЕДЕНИЕ

Существование черных дыр (ЧД), а также механизмы их образования практически давно уже считаются исследованными. При этом математические решения для реальных (вращающихся) черных дыр Керра и заряженных черных дыр Рейснера – Нордстрема показывают наличие в решениях точки поворота. Точкой поворота (или точкой отскока) принято называть точку, в которой траектория свободного падения частицы меняет направление от уменьшения радиальной координаты на направление ее увеличения. При этом интересны именно те точки поворота, которые расположены под обоими горизонтами черной дыры, т. е. под горизонтом Коши — во внутренней R -области пространства.

Существование в стационарном решении для ЧД внутренней точки поворота (далее просто точки поворота) связывают с существованием черно-белой дыры, а не просто черной дыры. Однако механизм появления точки поворота в самосогласованном решении коллапсирующей материи до сих пор не изучен (см., например, [1], § 34.6). Поэтому в моделях возникновения черно-белых дыр по-прежнему остается больше вопросов, чем ответов. Принято считать, что черно-белыми дырами могут быть только

«вечные» черные дыры, т. е. те, которые образовались вместе с рождением Вселенной. Поэтому одной из задач данной работы является обоснование модели, в которой и сама черно-белая дыра, и ее точка поворота могут образоваться в уже существующей Вселенной. Причем белая дыра образуется в новой расширяющейся вселенной, т. е. не в той же самой Вселенной, в которой образуется черная дыра.

В работе будет рассмотрено самосогласованное точное решение для образующейся сферически-симметричной черно-белой дыры Рейснера – Нордстрема. До образования черно-белой дыры в центре системы находится массивный заряженный шар. Появление точки поворота исследовано на примере точного решения для аккреции тонкой незаряженной сферической пылевой оболочки. Уравнения модели будут записаны с учетом космологического Λ -члена.

Ранее исследованием динамики сферических пылевых оболочек в центрально-симметричном электрическом поле занимались многие авторы — см., например, [2–4]. В частности, в работах [4] была исследована топология ЧД Рейснера – Нордстрема с помощью построения диаграмм Картера – Пенроуза, поэтому в настоящей работе мы не рассматриваем диаграммы Картера – Пенроуза и по этому вопросу отсылаем читателя к данному источнику. Исследование же топологии для реальных вращающихся черных дыр было предпринято автором в работе [5].

* E-mail: shatskiyalex@gmail.com

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Пусть в начальный момент никакой черной дыры нет и горизонты отсутствуют. Распределение материи в начальный момент описывается следующей моделью.

В центре системы существует шар, который обладает электрическим зарядом q , радиусом r_q и массой m_q . При этом пусть масса m_q недостаточна для образования черной дыры и гравитационного коллапса шара.

Пусть также в начальный момент на некотором радиусе R_1 покоится сферическая пылевая оболочка с массой m_{dust} . В течение дальнейшей эволюции эта пылевая оболочка начинает свободно падать к центру системы. При этом массы m_{dust} оказывается достаточно для дальнейшего образования черной дыры Рейснера – Нордстрема, еще до достижения оболочкой радиуса r_q . Пусть полная масса системы есть M . Соответствующие заряду q и массе M радиус горизонта черной дыры r_h^+ и радиус горизонта Коши r_h^- в координатах Рейснера – Нордстрема равны¹⁾

$$r_h^\pm = M \pm \sqrt{M^2 - q^2}. \quad (1)$$

Для удобства введем соотношение заряда и массы так, чтобы выполнялись соотношения

$$r_h^- := \beta^2 r_h^+, \quad \beta = \text{const} \leq 1. \quad (2)$$

Согласно (1), для этого необходимо, чтобы

$$q = \kappa M, \quad \kappa := \frac{2\beta}{1 + \beta^2} \leq 1. \quad (3)$$

Также введем параметр γ для связи заряда и массы с радиусом r_q :

$$r_q = \gamma r_h^- = \gamma \beta^2 r_h^+, \quad \gamma = \text{const} < 1. \quad (4)$$

Очевидно, что коэффициент γ должен быть меньше единицы, поскольку появление обоих горизонтов ЧД должно произойти еще до возможного столкновения падающей пылевой оболочки с заряженной сферой, т. е. должны выполняться условия $r_q < r_h^- \leq r_h^+$.

Из приведенных выше выражений получаем

$$r_q = \beta \gamma q = \beta \gamma \kappa M, \quad r_h^- = \beta q, \quad r_h^+ = \frac{q}{\beta}. \quad (5)$$

Ниже будет доказана возможность существования появляющейся в решении точки поворота r_t в промежутке между радиусами r_q и r_h^- .

Для дальнейшего необходимо определиться с ограничением на размер шара r_q . В этом вопросе главным ограничением является напряженность электрического поля E . Максимальная величина напряженности $E = q/r^2$ должна быть меньше величины пробоя вакуума $\sim 10^4$ В/см. Поскольку максимальное значение напряженности достигается около поверхности шара r_q , величина $E_q = q/r_q^2$ должна быть меньше 10^4 В/см. Пусть эта величина равна

$$E_q = 10^3 \text{ В/см} = 3 \cdot (3) \text{ ед. СГСЭ}. \quad (6)$$

Из (5) получаем

$$E_q := \frac{q}{r_q^2} = \frac{\beta^{-2} \gamma^{-2}}{q}. \quad (7)$$

Отсюда можно выразить электрический заряд q как

$$q = \frac{\beta^{-2} \gamma^{-2}}{E_q}. \quad (8)$$

Допустим, величины $\beta^2 = 0.5$, $\gamma = 0.5$, тогда $\kappa = \sqrt{8}/3$ и, если выражение (8) переписать в единицах СГСЭ, то до конца раздела в этих единицах получаем

$$q = \frac{\beta^{-2} \gamma^{-2} c^4}{G E_q} \approx 2.915 \cdot 10^{49} \text{ ед. СГСЭ} \approx 6.073 \cdot 10^{58} e. \quad (9)$$

Соответственно для полной массы ЧД M получаем

$$M = \frac{q}{\kappa \sqrt{G}} \approx 1.197 \cdot 10^{53} \text{ г} \approx 6.02 \cdot 10^{20} M_\odot. \quad (10)$$

Из (5) и (9) для радиуса заряженного шара r_q имеем

$$r_q = \frac{q \beta \gamma \sqrt{G}}{c^2} = \frac{c^2}{\beta \gamma \sqrt{G} E_q} \approx 2.957 \cdot 10^{24} \text{ см} \approx 958\,000 \text{ пк} \sim 1 \text{ Мпк}. \quad (11)$$

Оценим плотность избытка (или недостатка) элементарных зарядов, составляющих заряд q шара радиусом r_q . Согласно (9) и (11), величина этой поверхностной плотности заряда будет всего-навсего $\sigma_q \approx 5.46 \cdot 10^8 e/\text{см}^2 \approx 8.74 \cdot 10^{-7} \text{ Кл/м}^2$.

Если предположить, что материя заряженной сферы имеет плотность порядка 1 г/см^3 , то при $q^2 = G m_q^2$ толщина d_q такой заряженной сферической оболочки, согласно (9) и (11), оказывается равной примерно 70 м. По сравнению с радиусом r_q из

¹⁾ В этой работе, там где не оговорено отдельно, мы используем теоретическую систему единиц, в которой скорость света и гравитационная постоянная равны соответственно $c = 1$ и $G = 1$.

(11) это просто тончайшая пленка, но по сравнению с толщиной слоя, в котором сосредоточен избыток (или недостаток) электронов заряда q (т. е. с размерами атома), это огромная величина.

Можно также вычислить поверхностное натяжение N , которое создает электрическая сила отталкивания для поверхностного заряда q на сфере радиуса r_q :

$$N = \frac{q^2}{4\pi r_q^3} = \frac{\beta^{-2}\gamma^{-2}c^4}{4\pi G r_q} \approx 2.616 \cdot 10^{24} \text{ дин/см.} \quad (12)$$

Если пренебречь гравитационной силой притяжения, то для вычисления минимальной толщины пленки d_{min} , удерживающей заряд своим поверхностным натяжением, необходимо натяжение N разделить на удельную прочность материала пленки. Пусть это будет сталь с удельной прочностью $P_s = 10^{10}$ дин/см². Тогда из (12) получаем

$$d_{min} = \frac{N}{P_s} = \frac{q^2}{4\pi P_s r_q^3} \approx 2.616 \cdot 10^{14} \text{ см.} \quad (13)$$

Однако тогда масса этой стали будет примерно на 13 порядков превышать полную массу M , что невозможно... Таким образом, установление равновесия с помощью компенсации электрической силы отталкивания силой упругости материала невозможно.

Отметим, что сила поверхностного натяжения является почти тангенциальной по отношению к малому элементу поверхности заряженной сферы, поэтому для компенсации радиальной электрической силы сила поверхностного натяжения должна быть гораздо больше электрической силы, причем тем больше, чем больше радиус r_q .

Если вычислить давление P , с которым сила электрического отталкивания давит на поверхность заряженной сферы, то оно оказывается равным

$$P = \frac{q^2}{4\pi r_q^4} \approx 0.88 \text{ дин/см}^2. \quad (14)$$

При столь больших радиусах это очень маленькая величина давления, которое способны выдержать практически любые материалы. Столь большая разница между величиной поверхностного натяжения N и давлением P связана с тем, что $N \propto 1/r_q^3$, а $P \propto 1/r_q^4$, отсюда $P/N \propto 1/r_q$. Поэтому если есть другая радиальная сила, действующая в противоположном направлении (сила гравитации), то этой силой оказывается теоретически возможно уравновесить электрическую силу, см. ниже.

3. ВОЗМОЖНОСТЬ РАВНОВЕСИЯ НА ЗАРЯЖЕННОМ ШАРЕ В НАЧАЛЬНЫЙ МОМЕНТ

Рассмотрим возможность установления равновесия заряженной сферы с массой m_q , радиусом r_q и зарядом q . Это равновесие будет поддерживаться компенсацией электростатического отталкивания зарядов на сфере самогравитацией сферы. Такое равновесие возможно только вне гравитационного радиуса сферы. Как будет видно из дальнейших вычислений, горизонт черной дыры при таких массах и зарядах вообще не сможет образоваться.

Как известно из курса общей физики, потенциал электрического поля A_t должен быть константой внутри заряженной сферы, а вне сферы — убывать обратно пропорционально радиусу. Поэтому электрическое поле внутри сферы должно быть равно нулю, а вне сферы — равно q/r^2 . Но нас будет интересовать электрическое поле на самой сфере. Очевидно, что оно равно среднему арифметическому от пределов поля внутри и вне сферы при стремлении радиусов к r_q , т. е. на самой сфере электрическое поле есть $q/(2r_q^2)$.

Все то же самое касается и гравитационного заряда (массы), но мы будем считать, что масса равномерно распределена внутри конечного слоя d — физической толщины пленки сферы, причем ниже будет показано, что толщина d должна быть много меньше радиуса сферы r_q , но все же d является макроскопическим размером. В то же время заряд q сосредоточен исключительно на поверхности сферы — в слое, толщина которого имеет атомные размеры. Будем считать, что заряд определяется недостатком электронов на сфере, т. е. положительный заряд ядер кристаллической решетки материи сферы не до конца скомпенсирован зарядом электронов. Размер электронов и ядер много меньше толщины сферы d , поэтому по разные стороны от внешней поверхности сферы гравитационное поле ведет себя одинаково, а электрическое поле под внешней поверхностью сферы принимает нулевое значение, в соответствии со сказанным выше.

Рассмотрим на сфере элемент заряда e и соответствующий ему элемент массы μ , причем

$$e := \xi q, \quad \mu := \xi m_q, \quad \xi = \text{const} \ll 1. \quad (15)$$

Запишем теперь уравнения движения заряженной частицы в гравитационном и электромагнитном полях (см. [6], § 90):

$$\begin{aligned} \mu \frac{du^i}{ds} &= eF^{ij}u_j - \mu \Gamma_{km}^i u^k u^m, \\ \Gamma_{km}^i &= \frac{1}{2}g^{in} \left(\frac{\partial g_{nk}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{nm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь F_{ik} — тензор электромагнитного поля, u^k — 4-вектор скорости частицы с массой μ и зарядом e , g_{in} — компоненты метрического тензора.

Выбираем для этого раздела статичную систему отсчета и метрику Рейснера – Нордстрема для нее:

$$\begin{aligned} ds^2 &= f dt^2 - f^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \\ f(r) &:= 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для этой метрики имеем

$$\begin{aligned} u^k &= \delta_t^k u^t, \quad u^t = f^{-1/2}, \quad F_{ik} := \partial_i A_k - \partial_k A_i, \\ A_i &= \delta_i^t A_t. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь A_i — 4-вектор-потенциал электромагнитного поля, $A_t = q/r$ при $r \geq r_q$ и $A_t = q/r_q$ при $r \leq r_q$.

Все величины будут зависеть только от радиуса и уравнение (16) переписывается в виде

$$\mu \frac{du^r}{ds} = -e \sqrt{f} F_{rt} - \frac{\mu}{2} \frac{df}{dr}. \quad (19)$$

В соответствии со сказанным выше, на самой сфере получаем для единственной компоненты тензора F_{ik} :

$$F_{rt}|_{r_q} = -0.5q/r_q^2.$$

Кроме того, коэффициент 0.5 должен появиться и в члене с q^2 у производной $\partial_r f$ формулы (19), которая для точки равновесия переписывается в виде

$$\begin{aligned} \mu \frac{du^r}{ds} \Big|_{r=r_q} &= 0.5 \frac{eq \sqrt{f(r_q)}}{r_q^2} - \frac{\mu}{2} \times \\ &\times \left(\frac{2m_q}{r_q^2} - 0.5 \frac{2q^2}{r_q^3} \right) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Отсюда видно, что эта точка равновесия является устойчивой, так как положительная сила отталкивания убывает как $1/r_q^3$, а отрицательная сила притяжения — как $1/r_q^2$.

С помощью выражений (15) заменяем в уравнении (20) величины (e, μ) на (q, m_q) и получаем

$$\begin{aligned} (4m_q^4 - q^4)r_q^2 - 2q^2 m_q (2m_q^2 - q^2)r_q + \\ + q^4 (m_q^2 - q^2) = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$r_q(q, m_q) = \frac{m_q q^2 (2m_q^2 - q^2) + q^4 \sqrt{2m_q^2 - q^2}}{4m_q^4 - q^4}. \quad (22)$$

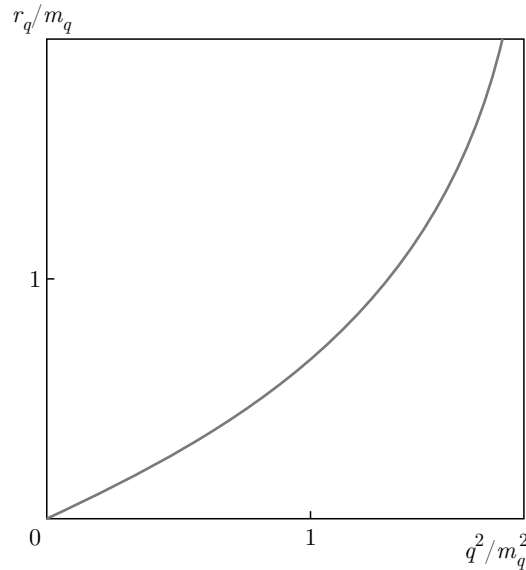


Рис. 1. Зависимость радиуса заряженной сферы r_q от q^2 в единицах массы m_q , см. (22)

Из выражения (22) видно, что функция $r_q(q)$ является возрастающей, см. рис. 1. При этом поскольку согласно (5) нас интересуют только $r_q < q$, ограничение на заряд q принимает вид

$$m_q^2 < q^2 < 2m_q^2. \quad (23)$$

Поэтому при нахождении корня r_q в уравнении (21) мы выбрали знак «+». Из формулы (23) следует, что шар с массой m_q и зарядом q не может образовать черную дыру, иначе выражения (1) для горизонтов стали бы комплексными величинами.

4. УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

Более удобной для дальнейшего аналитического исследования оказывается синхронно-сопутствующая материи система отсчета²⁾, описываемая координатами τ и R :

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\tau^2 - e^{\lambda(\tau,R)} dR^2 - r^2(\tau, R) \times \\ &\times (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \end{aligned} \quad (24)$$

Пусть аккрецирующая материя представляет собой гравитирующую пыль с плотностью энергии ε , распределение которой зависит только от радиуса r . Учтем также в уравнениях влияние космологического Λ -члена на динамику материи в нашей модели.

²⁾ Синхронно-сопутствующая материи система отсчета применима к пылевидной материи, благодаря отсутствию у пыли давления (временная компонента метрики равна 1).

Тогда полный тензор энергии-импульса вне сферы радиусом r_q представляется в следующем виде:

$$T_m^n = \begin{pmatrix} \frac{q^2}{8\pi r^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q^2}{8\pi r^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{q^2}{8\pi r^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{q^2}{8\pi r^4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta_m^n \Lambda. \quad (25)$$

Первое слагаемое в правой части (25) соответствует тензору энергии-импульса электромагнитного поля точечного заряда q , второе слагаемое — тензору энергии-импульса пыли, а слагаемое $\delta_m^n \Lambda$ — это космологический Λ -член. При этом внутри сферы радиусом r_q тензор энергии-импульса электромагнитного поля должен быть нулевым, так как электрическое поле внутри заряженной сферы отсутствует. Что же касается тензора энергии-импульса электромагнитного поля на самой сфере радиусом r_q , то, в соответствии со сказанным в разд. 3, на этой сфере все компоненты тензора нужно разделить на 2, так как электрическое поле на самой сфере есть среднее между величиной поля внутри сферы и вне сферы.

Благодаря гидродинамической независимости слоев пыли друг относительно друга, можно проинтегрировать уравнения движения для пыли аналогично решению задачи Толмена (см. [7, 8]). По сути, это та же задача Толмена в центрально-симметричном электрическом поле для незаряженной пыли.

Уравнения Эйнштейна, соответствующие метрике (24), можно записать в виде³⁾

$$8\pi T_\tau^\tau = 8\pi\varepsilon + \frac{q^2}{r^4} + 8\pi\Lambda = \frac{1}{r^2} [1 + rr_{,\tau}\lambda_{,\tau} + r_{,\tau}^2 - e^{-\lambda}(2rr_{,RR} + r_{,R}^2 - rr_{,R}\lambda_{,R})], \quad (26)$$

$$8\pi T_R^R = \frac{q^2}{r^4} + 8\pi\Lambda = \frac{1}{r^2} (1 + 2rr_{,\tau\tau} + r_{,\tau}^2 - e^{-\lambda}r_{,R}^2), \quad (27)$$

³⁾ Вывод уравнений (26)–(29) можно посмотреть, например, в [6] (§ 100, задача 5).

$$8\pi T_\tau^R = 0 = (2r_{,R\tau} - r_{,R}\lambda_{,\tau}) \frac{e^{-\lambda}}{r}, \quad (28)$$

$$8\pi T_\theta^\theta = 8\pi T_\varphi^\varphi = -\frac{q^2}{r^4} + 8\pi\Lambda = \frac{r_{,\tau\tau}}{r} + \frac{\lambda_{,\tau\tau}}{2} + \frac{\lambda_{,\tau}^2}{4} + \frac{r_{,\tau}\lambda_{,\tau}}{2r} - \left(r_{,RR} - \frac{1}{2}r_{,R}\lambda_{,R}\right) \frac{e^{-\lambda}}{r}. \quad (29)$$

Интегрируя по времени уравнение (28), получаем

$$e^{-\lambda}r_{,R}^2 = F_1(R). \quad (30)$$

Функция $F_1(R)$, как будет видно ниже, определяет начальные условия для распределения скорости пыли.

Подставляя (30) в уравнение (27), находим, что

$$\frac{q^2}{r^2} + 8\pi\Lambda r^2 = \frac{(rr_{,\tau})_{,\tau}}{r_{,\tau}} - F_1 + 1. \quad (31)$$

Умножая это уравнение на $r_{,\tau}$ и интегрируя затем по времени, получаем

$$\frac{q^2}{r} - \frac{8\pi}{3}\Lambda r^3 + r(1 - F_1) + rr_{,\tau}^2 = F_2(R). \quad (32)$$

Функция $F_2(R)$, как будет видно ниже, определяет начальные условия для распределения плотности пыли.

5. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Далее индексом « i » будем обозначать все величины в начальный момент времени $\tau = 0$.

Выберем в начальный момент масштаб координаты R в (24) так, что

$$r_i := R. \quad (33)$$

Это возможно сделать в случае монотонного изменения функции r по координате R в начальный момент.

Будем считать также, что в начальный момент вся материя покоится и все производные по τ равны нулю:

$$r_{,\tau}|_i = 0. \quad (34)$$

Тогда из (32) получаем

$$F_2(R) = \frac{q^2}{R} - \frac{8\pi}{3}\Lambda R^3 + R(1 - F_1) \quad (35)$$

или

$$F_1(R) = 1 - \frac{F_2}{R} + \frac{q^2}{R^2} - \frac{8\pi}{3}\Lambda R^2. \quad (36)$$

Умножая уравнение (26) на $r^2 r_{,R}$ и выражая $\lambda_{,\tau}$ из уравнения (28), получаем

$$8\pi\epsilon r^2 r_{,R} = \left[\frac{q^2}{r} - \frac{8\pi}{3} \Lambda r^3 + r(1-F_1) + r r_{,\tau}^2 \right]_{,R}. \quad (37)$$

Сопоставляя это выражение с (32), видим, что

$$8\pi\epsilon r^2 r_{,R} = \frac{dF_2}{dR}. \quad (38)$$

Из уравнения (38) заключаем, что величина $8\pi\epsilon r^2 r_{,R}$ не зависит от времени:

$$8\pi\epsilon r^2 r_{,R} = 8\pi\epsilon_i r_i^2. \quad (39)$$

Введем массовую функцию $m(R)$:

$$m(R) := \int_0^R 4\pi\epsilon_i R^2 dR = \int_0^{r_i} 4\pi\epsilon r^2 dr. \quad (40)$$

В нашей модели какая-либо материя и электрическое поле при радиусах, меньших r_q , отсутствуют (кроме Λ -члена), а на радиусе r_q находится заряженная тонкая пленка с массой m_q , поэтому⁴⁾ $m(r_q^-) \equiv 0$ и $m(r_q^+) \equiv m_q$ и выражение (40) можно интегрировать не от нуля, а от r_q^- , или от r_q^+ :

$$m(R > r_q^-) = \int_{r_q^-}^R 4\pi\epsilon_i R^2 dR, \quad (41)$$

$$m(R > r_q^+) = m_q + \int_{r_q^+}^R 4\pi\epsilon_i R^2 dR. \quad (42)$$

Интегрируя выражение (38) в пределах от r_q^- до R и от r_q^+ до R , из (41), (42) убеждаемся, что

$$2m(R > r_q^-) = F_2(R > r_q^-) - F_2(r_q^-), \quad (43)$$

$$2m(R > r_q^+) - 2m_q = F_2(R > r_q^+) - F_2(r_q^+). \quad (44)$$

Для получения значений F_1 и F_2 в точке r_q учтем, что заряженная сфера находится в равновесии, поэтому там должно быть $r_{,\tau} = 0$ и $r_{,\tau\tau} = 0$. Кроме того, под заряженной сферой (на r_q^-) электрическое поле отсутствует (т. е. там должны быть исключены члены с q^2), а сразу над заряженной сферой электрическое поле равно q/r_q^2 , поэтому на самой заряженной сфере члены с q^2 должны быть умножены

⁴⁾ Индексы «-» и «+» у радиуса r_q означают нижний и верхний пределы, т. е. под и над заряженной пленкой с массой m_q соответственно.

на 1/2. Тогда из уравнений (27), (30) и (35) получаем на самой заряженной сфере

$$F_1(r_q) = 1 - \frac{q^2}{2r_q^2} - 8\pi\Lambda r_q^2, \quad (45)$$

$$F_2(r_q) = \frac{q^2}{r_q} + \frac{16\pi\Lambda}{3} r_q^3. \quad (46)$$

При этом, как было сказано в разд. 2, на радиусе самого заряда масса материи m_q уже накопилась полностью, поэтому в вычислениях необходимо использовать выражения для r_q^+ . Тогда из выражений (42), (44) и (46) получаем для $F_2(R > r_q^+)$:

$$\begin{aligned} F_2(R > r_q^+) &= \frac{q^2}{r_q} + \int_{r_q^+}^R 8\pi\epsilon_i R^2 dR + \frac{16\pi\Lambda}{3} r_q^3 = \\ &= \frac{q^2}{r_q} + 2m_{dust}(R) + \frac{16\pi\Lambda}{3} r_q^3. \end{aligned} \quad (47)$$

Введем также массу $m^\Lambda(R)$, связанную с Λ -членом:

$$m^\Lambda(R) := \int_0^R 4\pi\Lambda R^2 dR = \frac{4\pi}{3} \Lambda R^3. \quad (48)$$

Из (40) видно, что учет космологического Λ -члена можно свести к вычитанию из массы $m(R)$ величины $4\pi\Lambda R^3/3$. Согласно космологическим наблюдениям $\Lambda \sim 10^{-29}$ г/см³, поэтому на масштабах порядка r_q , определяемых выражением (11), масса, связанная с Λ -членом, примерно на 8 порядков меньше полной массы M (см. (10)). Это значит, что при $R \sim r_q$ учет космологического Λ -члена необязателен.

6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ

В сопутствующих координатах определением радиусов горизонтов r_h^\pm является равенство единице модуля инвариантной скорости V :

$$V^2|_{r_h^\pm} = 1, \quad V^2(\tau, R) := \frac{r_{,\tau}^2 e^\lambda}{r_{,R}^2}. \quad (49)$$

Здесь функция $V^2(\tau, R)$ является квадратом инвариантной скорости, см. [3,9]. С помощью выражения (30) уравнение (49) переписываем в виде

$$r_{,\tau}^2|_{r_h^\pm} = F_1(R). \quad (50)$$

Выражая с помощью (36) в уравнении (32) функцию F_1 через F_2 , переписываем (32) в виде, удобном для интегрирования и получения функции $r(\tau, R)$:

$$r_{,\tau} = \pm \sqrt{\left(\frac{F_2}{r} - \frac{q^2}{r^2} + \frac{8\pi\Lambda r^2}{3}\right) - \left(\frac{F_2}{R} - \frac{q^2}{R^2} + \frac{8\pi\Lambda R^2}{3}\right)}. \quad (51)$$

Из этого выражения, в частности, видно, что динамика частицы зависит только от распределения материи под радиусом нахождения самой частицы и не зависит от материи над этим радиусом.

Из (51) с учетом (36) и (50) получаем уравнение для вычисления радиусов горизонтов r_h^\pm :

$$1 - \frac{F_2}{r_h^\pm} + \frac{q^2}{r_h^{\pm 2}} - \frac{8\pi}{3}\Lambda r_h^{\pm 2} = 0. \quad (52)$$

Это выражение без учета Λ -члена практически эквивалентно равенству $f(r_h^\pm) = 0$ из определения (17), т. е. функция F_2 имеет смысл удвоенной массы m в сопутствующих материи координатах. Поэтому далее мы пренебрегаем Λ -членом и из (52) получаем аналог выражения (1) для радиусов горизонтов в сопутствующих материи координатах:

$$r_h^\pm = \frac{1}{2}F_2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}F_2^2 - q^2}. \quad (53)$$

Отсюда в соответствии с выражением (3) имеем

$$q = \frac{\kappa F_2}{2}, \quad \kappa := \frac{2\beta}{1 + \beta^2}. \quad (54)$$

Из уравнения (51) можно получить две точки остановки пылевой оболочки — это точки поворота, при которых $r_{,\tau} = 0$. Из (51) сразу видно тривиальную точку остановки — это просто начальная точка $r_i := R$, с которой пылевая оболочка начинает движение. А для искомой второй точки остановки из (51) получаем

$$r_t = \frac{q^2}{F_2 - q^2/R} = \frac{\kappa q}{2 - \kappa q/R}. \quad (55)$$

Отсюда видно, что $r_t \geq 0.5\kappa q$, причем равенство достигается только при $q/R \rightarrow 0$.

Рассмотрим сначала движение пробных частиц под внешней пылевой оболочкой. Пробные частицы не могут образовать горизонта, согласно (47) и (55) для них

$$F_2^0 = \frac{q^2}{r_q}, \quad r_t^0 = \frac{r_q R}{R - r_q}. \quad (56)$$

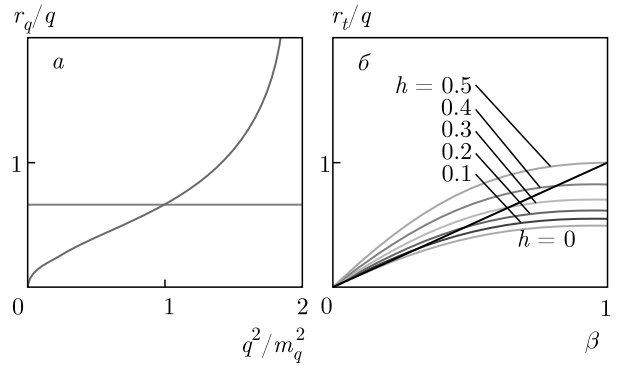


Рис. 2. а) Зависимость r_q/q от q^2/m_q^2 . б) Зависимости r_t/q от β при разных h для неравенства (59)

Поэтому в случае $r_q < R < 2r_q$ для пробных частиц радиус остановки r_t^0 даже больше первоначального радиуса r_i , что означает направление их движения — наружу. Соответственно в диапазоне $2r_q < R < \infty$ пробные частицы начнут двигаться внутрь. Для точки остановки пробной частицы $r_t^0 \rightarrow r_q$ из (56) получаем $R \rightarrow \infty$. Таким образом, сферические слои пробных частиц при движении будут постоянно пересекаться друг с другом.

Теперь перейдем к рассмотрению непробных частиц пылевой сферы с массой m_{dust} , радиус которой равен R_1 в начальный момент. В соответствии с (5), условие расположения радиуса точки поворота r_t для частиц пылевой сферы между радиусом сферы заряда r_q и радиусом горизонта Коши r_h^- принимает вид

$$r_q = \beta\gamma q < r_t < r_h^- = \beta q, \quad m_q < q. \quad (57)$$

Вводя обозначение

$$h := \frac{\kappa q}{2R_1} \quad (58)$$

и учитывая (22), (55), переписываем (57) в виде

$$\frac{r_q}{q} = \frac{m_q q(2m_q^2 - q^2) + q^3 \sqrt{2m_q^2 - q^2}}{4m_q^4 - q^4} < \frac{r_t}{q} = \frac{\beta}{(1 + \beta^2)(1 - h)} < \beta, \quad \frac{q}{m_q} > 1. \quad (59)$$

Диапазон параметров, соответствующих выполнению этих неравенств, можно определить из графиков, представленных на рис. 2.

Здесь также стоит рассмотреть одно кажущееся противоречие, связанное с возможным пересечением слоев пыли. Как было показано для пробных частиц, они не достигают радиуса r_q при конечных значениях R . То же самое можно утверждать и для внутренних слоев пылевой оболочки, поскольку для

этих внутренних слоев гравитационный потенциал еще недостаточен даже для образования горизонтов ЧД. Поэтому в какой-то момент внутренние слои пылевой оболочки начнут движение от центра. При этом внешние слои пылевой оболочки обладают уже достаточным гравитационным потенциалом для образования горизонтов ЧД и достижения точки поворота r_t . Таким образом, внутренние слои в какой-то момент пересекутся со внешними слоями и поменяются ролями. Теоретически наша модель не может корректно работать после пересечения непробных слоев пыли, но практически мы имеем дело с достаточно тонкой пылевой оболочкой, толщина которой выбрана нами несоизмеримо меньше радиуса r_q , см. (11). Поэтому под и над этой тонкой пылевой оболочкой мы можем пренебречь внутренним пересечением ее слоев. А внутри пылевой оболочки будет постоянно происходить перемешивание ее внутренних и внешних слоев. В целом это не должно повлиять на динамику модели. Кроме того, мы можем слегка модифицировать нашу модель и считать, что массивные слои пыли состоят всего из одного слоя, причем размеры каждой «пылинки» в этом слое порядка толщины всего слоя пыли d_{dust} , при этом $d_{dust} \ll r_q$. В этом случае никакого пересечения слоев пыли не будет и каждая массивная «пылинка» будет двигаться в самосогласованном гравитационном поле. Согласно оценкам разд. 2, в нашей модели $m_{dust} \sim m_q \sim M$, поэтому при плотности материи «пылинок» $\sim 1 \text{ г/см}^3$ можно получить ограничение на размер «пылинок»: $d_{dust} \lesssim d_q \approx 70 \text{ м}$. Поэтому наши «пылинки» в пылевом слое могут быть просто мелкими астероидами или булыжниками.

7. ПОДБОР ПОДХОДЯЩИХ ПАРАМЕТРОВ

Учитывая (23), далее обозначим

$$\alpha := \frac{q}{m_q} > 1. \quad (60)$$

Для того чтобы электростатическо-гравитационное равновесие заряда q на шаре с массой m_q и радиусом r_q стало возможным, необходимо подобрать параметры α , β и h так, чтобы неравенства (59) были выполнены. Это возможно, например, при параметрах

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= 1.1, & \beta &= 0.9, & h &= 0.4, \\ \Rightarrow \frac{r_q}{q} &\approx 0.731 < \frac{r_t}{q} &\approx 0.829, & & & (61) \\ \kappa &\approx 0.997, & \frac{R_1}{r_q} &\approx 1.706 \end{aligned}$$

или при параметрах

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= 1.01, & \beta &= 0.8, & h &= 0.3, \\ \Rightarrow \frac{r_q}{q} &\approx 0.673 < \frac{r_t}{q} &\approx 0.697, & & & (62) \\ \kappa &\approx 0.988, & \frac{R_1}{r_q} &\approx 2.447. \end{aligned}$$

Таким образом, задачу вычисления равновесия заряда q на шаре можно считать решенной.

8. АККРЕЦИЯ МАТЕРИИ НА УЖЕ СУЩЕСТВУЮЩУЮ ЧЕРНУЮ ДЫРУ РЕЙСНЕРА – НОРДСТРЕМА

Аккрецию пылевой оболочки на заряженный шар, находящийся в равновесии, в отсутствие ЧД мы рассмотрели. Рассмотрим теперь аккрецию пылевой оболочки на ЧД Рейснера – Нордстрема.

В соответствии с (1) для любой заряженной ЧД с массой M и зарядом q верно неравенство

$$r_h^- \leq q \leq M \leq r_h^+. \quad (63)$$

Но тогда отсюда следует, что если в начальный момент ЧД уже существует и в дальнейшем ее заряд не меняется, а увеличивается только ее масса, то для любых двух моментов времени a и b можно утверждать, что всегда будет выполняться неравенство

$$r_{ha}^- \leq r_{hb}^+. \quad (64)$$

Здесь индексы « a » и « b » соответствуют радиусам горизонтов ЧД, которые будут у нее в соответствующие (любые) моменты времени. То есть ситуация, когда в какой-то момент времени a внутренний горизонт Коши окажется больше, чем внешний горизонт ЧД в какой-то другой момент времени b , невозможна. Отсюда следует, что независимо от особенностей аккреции незаряженной материи на ЧД, точка поворота у ЧД будет только одна, поэтому ситуация, когда еще одна точка поворота возникла бы над первоначальным горизонтом ЧД (в результате образования еще одной внешней T -области), невозможна.

9. ОБСУЖДЕНИЕ

Итак, образование еще одной точки поворота для заряженной ЧД невозможно уже после образования самой ЧД. Поэтому обязательным начальным условием для образования точки поворота является отсутствие самой ЧД в начальный момент. Следовательно, возникновение новой черной дыры и новой вселенной (вместе с возникновением белой дыры) возможно только в момент появления горизонтов новой ЧД Рейснера – Нордстрема (или, возможно, ЧД Керра).

Поэтому рассмотренный выше механизм образования точки поворота в ЧД Рейснера – Нордстрема является единственным для такой ЧД. То есть в нашей модели в начальный момент есть заряженный шар, заряд и вся материя этого шара сосредоточены в тонкой заряженной сферической пленке. Вне этого шара материя отсутствует вплоть до некоторого радиуса $r_i = R_1$. На этом радиусе R_1 покоится пылевая сферическая оболочка с массой m_{dust} , толщиной этой пылевой сферы d_{dust} мы пренебрегаем (по сравнению с радиусом r_q). Горизонты в начальный момент отсутствуют (черной дыры нет). Материей вне радиуса $r_i = R_1$ мы не интересуемся.

В последующие моменты времени пылевая сфера под действием гравитации начинает падать к центру (в сторону заряженного шара). В некоторый момент пылевая сфера достигает своего гравитационного радиуса r_h^+ , см. (53), и в следующий момент оказывается под горизонтом образовавшейся черной дыры Рейснера – Нордстрема.

Когда пылевая сфера достигает радиуса точки поворота, то согласно (49) ее скорость V уменьшается до нуля, а затем пылевая сфера отскакивает. . . в другую вселенную. Так происходит, потому что пылевая сфера уже находится во внутренней R -области (под обоими горизонтами ЧД). Поэтому обратно пылевая сфера вылететь уже не может, а решение говорит о том, что ее радиус должен увеличиваться после отскока. То есть единственной возможностью остается вылет пылевой сферы в другую вселенную. Это событие является моментом образования новой белой дыры и новой расширяющейся вселенной. По-видимому, вселенная, в которую вылетает пылевая сфера, появляется вместе с образованием обоих горизонтов ЧД Рейснера – Нордстрема.

Один из наиболее интересных выводов, которые можно сделать, состоит в том, что падающая пылевая сфера в рассмотренной модели так и не достигает заряженного шара радиусом r_q . Это происходит потому, что точка поворота для пылевой сферы r_t находится вне заряженного шара. Поэтому вне заряженного шара возникнет черно-белая дыра Рейснера – Нордстрема со всеми ее горизонтами и R - T -областями. По-видимому, внутри заряженного шара радиусом r_q ничего измениться не должно: электрическое поле и сингулярность отсутствуют даже после образования снаружи шара ЧД Рейснера – Нордстрема. При этом метрические коэффициенты в модели должны оставаться везде такими, чтобы постоянно и непрерывно сшивались две области — внутри и вне заряженного шара.

Таким образом, в работе была предложена модель, в которой и сама черно-белая дыра, и ее точка поворота образуются в уже существующей Вселенной, т.е. черно-белая дыра в модели не является «вечной». Решить аналитически аналогичную самосогласованную задачу аккреции для реальной вращающейся черной дыры Керра было бы практически невозможно ввиду ее сложности. Однако можно сделать предположение, что образование новой черно-белой дыры Керра при коллапсе вращающейся звезды имеет похожий механизм. Важным отличием от динамического решения Рейснера – Нордстрема является то, что в решении Керра нет ограничений, рассмотренных в разд. 2, на величину электрического поля, а значит, на размеры и массу черно-белой дыры. Особенности возникающей сложной топологии в черно-белой дыре Керра были рассмотрены, например, в работах [5, 10, 11].

Благодарности. Автор благодарен организаторам и всем участникам семинаров по гравитации и космологии им. А. Л. Зельманова в Государственном астрономическом институте им. П. К. Штернберга Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова за вопросы, обсуждения и высказанные ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, *Гравитация*, т. 3, Мир, Москва (1977).
2. D. A. Tretyakova, A. A. Shatskiy, I. D. Novikov, and S. Alexeyev, *Phys. Rev. D* **85**, 124059 (2012).
3. А. А. Шацкий, А. Г. Дорошкевич, Д. И. Новиков, И. Д. Новиков, *ЖЭТФ* **137**, 268 (2010) [A. A. Shatskiy, A. G. Doroshkevich, D. I. Novikov, and I. D. Novikov, *JETP* **110**, 235 (2010)].
4. V. A. Berezin and V. I. Dokuchaev, arXiv:gr-qc/1404.2726, gr-qc/1404.2727.
5. А. А. Шацкий, *ЖЭТФ* **157**, 487 (2020) [A. A. Shatskiy, *JETP* **130**, 409 (2020)].
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, т. 2, Наука, Москва (1988).
7. R. C. Tolman, *Proc. Nat. Acad. Sci. US* **20**, 169 (1934).
8. J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **56**, 455 (1939).
9. А. Шацкий, А. Ю. Андреев, *ЖЭТФ* **116**, 353 (1999).
10. B. Carter, *Phys. Lett.* **21**, 423 (1966).
11. B. Carter, *Comm. Math. Phys.* **10**, 280 (1968).