

УВЕЛИЧЕНИЕ РАЗБРОСА ПО ИМПУЛЬСАМ В ПОТОКЕ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ОНДУЛЯТОРЕ

*В. В. Огнивенко**

*Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
61108, Харьков, Украина*

Поступила в редакцию 30 ноября 2020 г.,
после переработки 25 декабря 2020 г.
Принята к публикации 13 января 2021 г.

Рассмотрена диффузия по импульсу в потоке ультрарелятивистских электронов, движущихся в пространственно-периодическом магнитном поле ондулятора. Получено выражение для коэффициента диффузии по импульсу электронов с учетом их начального энергетического разброса. Исследованы зависимости коэффициента диффузии как от расстояния, пройденного электронами в ондуляторе, так и от величины начального энергетического разброса электронов. Показано, что разброс по продольному импульсу электронов увеличивается по мере движения пучка в ондуляторе. Установлено, что на кинетическом этапе коэффициент диффузии не зависит от расстояния, проходимого пучком в ондуляторе. Обсуждается возможность продвижения лазеров на свободных электронах в рентгеновскую область спектра.

DOI: 10.31857/S0044451021050023

1. ВВЕДЕНИЕ

Релятивистский электронный пучок, движущийся во внешнем периодическом поле (ондуляторе), как известно, является источником интенсивного коротковолнового электромагнитного излучения. В пространственно-однородном потоке электронов электромагнитные поля, создаваемые отдельными электронами, имеют различные фазы, в результате чего суммарное электромагнитное поле потока таких электронов-излучателей является некогерентным. При движении электронов в таком некогерентном электромагнитном поле и периодическом поле ондулятора возникают силы, действующие на электроны, которые приводят к случайным отклонениям импульса от равновесного значения. Изменение квадратичных отклонений импульса от средних в потоке электронов, взаимодействующих посредством создаваемых ими электромагнитных полей, исследовано в работе [1]. В этой работе рассмотрена радиационная релаксация электронов, которые имеют одинаковую начальную энергию. В таком потоке скорость изменения квадратичных отклонений импульса от среднего увеличивается по мере движе-

ния пучка или, что то же самое, растет во времени. Такая зависимость разброса по импульсам от времени в системе, состоящей из большого числа частиц, какой является электронный пучок, соответствует предброуновскому движению частиц на начальной стадии эволюции системы [2].

Поскольку в реальных потоках электроны движутся с различными скоростями, необходимо установить количественный критерий, определяющий возможность пренебрежения различием начальных скоростей электронов при описании радиационной релаксации пучка. С другой стороны, учет различия скоростей электронов представляет физический интерес, поскольку позволяет исследовать диффузию электронов в импульсном пространстве на кинетическом этапе эволюции системы [3], когда движение электронов в процессе радиационной релаксации становится полностью случайным. Кроме того, описание диффузии по импульсам электронов в таких потоках представляет значительный интерес в связи с работами по созданию рентгеновских лазеров на свободных электронах (ЛСЭ), основанных на самопроизвольном усилении спонтанного излучения моноэнергетическим ультрарелятивистским электронным пучком при движении в ондуляторе [4–7].

В данной работе исследована диффузия по продольному импульсу в потоке ультрарелятивистских

* E-mail: ognivenko@kipt.kharkov.ua

электронов, имеющих некоторое начальное распределение по импульсам. Рассмотрено взаимодействие электронов друг с другом посредством создаваемых ими электромагнитных полей, на стадии спонтанного излучения. В приближении малого значения параметра ондулятора получено выражение для силы парного взаимодействия релятивистских электронов, движущихся с различными скоростями (разд. 2). Это выражение использовано в формулах для коэффициента диффузии по продольному импульсу электронов (разд. 3), оно справедливо на произвольном расстоянии, пройденном электронами в ондуляторе. Из общих формул получены явные выражения как для среднего квадратичного продольного импульса на предброуновской стадии движения электронов (разд. 4), так и для коэффициентов диффузии по продольному импульсу на кинетическом этапе эволюции системы, когда движение электронов становится полностью случайным (разд. 5). С помощью численных методов определен среднеквадратичный разброс по продольному импульсу на произвольном расстоянии, пройденном первоначально моноэнергетическим пучком электронов в ондуляторе (разд. 6). Обсуждение полученных результатов и следующие из них выводы содержатся в заключительной части (разд. 7).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим поток релятивистских электронов, который пересекает плоскость $z = 0$ и движется в положительном направлении оси z в пространственно-периодическом статическом магнитном поле с правой круговой поляризацией, которое при $z \geq 0$ имеет вид

$$\mathbf{H}_u = H_0[\mathbf{e}_x \cos(k_u z) + \mathbf{e}_y \sin(k_u z)], \quad (1)$$

где $k_u = 2\pi/\lambda_u$; H_0 , λ_u — амплитуда и период магнитного поля ондулятора; $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ — единичные векторы декартовой системы координат x, y, z .

Вычислим коэффициент диффузии по продольному (вдоль оси z) импульсу электронов, который характеризует среднее изменение квадрата отклонения продольного импульса от среднего по мере движения пучка в ондуляторе. Исходное уравнение для коэффициента диффузии, полученное на основе динамики движения отдельных частиц, можно записать в виде [1, 2]

$$D_z(p_z, t) = \frac{d}{2dt} \langle (\Delta p_z)^2 \rangle = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{\Omega_q} F_z^{(s)} [x^{(0)}(t), t; x_s^{(0)}(t, q_{0s})] \times F_z^{(s)} [x^{(0)}(t_1), t_1; x_s^{(0)}(t_1, q_{0s})] \times f(q_{0s}) v_z(t_{0s}) dq_{0s}, \quad (2)$$

где $\Delta p_z = p_z - \langle p_z \rangle$; \mathbf{p} — импульс электрона; $\mathbf{F}_z^{(s)}(x, t; x_s)$ — сила, действующая на электрон (пробный), находящийся в точке \mathbf{r} в момент времени t , со стороны s -го электрона-излучателя; $x = (\mathbf{r}, \mathbf{p})$, $x_s^{(0)} = (\mathbf{r}_s^{(0)}, \mathbf{p}_s^{(0)})$ — равновесные траектория и импульс s -го электрона в ондуляторе, $q_{0s} = (x_{0s}, y_{0s}, t_{0s}, \mathbf{p}_{0s})$ — начальные координаты и импульс электрона в момент времени t_{0s} , в который он пересекает плоскость $z = 0$; $dq_{0s} = dx_{0s} dy_{0s} dt_{0s} d\mathbf{p}_{0s}$; $f(q_{0s})$ — одночастичная функция распределения электронов пучка по импульсам, Ω_q — область интегрирования по начальным координатам и импульсам электронов-излучателей (s -х), в поле которых находится пробный электрон; угловые скобки означают усреднение по ансамблю.

Рассматривая взаимодействие электронов в ондуляторе посредством создаваемых ими электромагнитных полей, выражение для силы парного взаимодействия можно записать в виде

$$F_z^{(s)}(x, t; x_s) = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{A}^{(s)}]_z, \quad (3)$$

$$\mathbf{A}^{(s)}(x, t; x_s) = \frac{e\mathbf{v}'_s}{c(R'_s - \beta'_s \cdot \mathbf{R}_s)}, \quad (4)$$

где $\mathbf{R}_s = \mathbf{r} - \mathbf{r}_s(t, q_{0s})$, $\beta_s = \mathbf{v}_s/c$, $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m\gamma$, e , m — заряд ($e < 0$) и масса электрона, γ — релятивистский фактор, c — скорость света в вакууме, штрих означает, что величины взяты в предшествующий момент времени

$$t' = t - R'_s/c. \quad (5)$$

Будем пренебрегать разбросом поперечного (по отношению к \mathbf{e}_z) импульса электронов на входе в ондулятор при $z = 0$, рассматривая влияние разброса продольного импульса на радиационную релаксацию электронного пучка. Тогда, учитывая (1), функцию распределения электронов по импульсам при $z = 0$ можно записать в виде

$$f(\mathbf{p}_{0s}) = n_b \delta \left(p_{x0s} - \frac{eH_0}{k_u c} \right) \delta(p_{y0s}) w(p_{z0s}), \quad (6)$$

где n_b — средняя плотность электронов, $\delta(x)$ — дельта-функция от x , $w(p_z)$ — произвольная функция. В этих условиях уравнение равновесной траектории электрона (например, s -го) при $z \geq 0$ принимает вид (ср. [1])

$$\mathbf{r}_s^{(0)}(t, q_{0s}) = \mathbf{r}_{0s} + \mathbf{r}_{us}(t, q_{0s}) + \mathbf{e}_z z_s(t), \quad (7)$$

где

$$\mathbf{r}_{us}(t, q_{0s}) = -\mathbf{e}_x r_{\perp s} \sin[k_u z_s(t)] - \mathbf{e}_y r_{\perp s} \{1 - \cos[k_u z_s(t)]\},$$

$$z_s(t, q_{0s}) = v_{zs}(t - t_{0s}), \quad \mathbf{r}_{0s} = (x_{0s}, y_{0s}, 0),$$

$$r_{\perp s} = \frac{K}{\gamma_{0s} \beta_{zs} k_u}, \quad K = \frac{|e| H_0}{m c^2 k_u},$$

$$v_{zs} = v_{0s} \sqrt{1 - \left(\frac{K}{\gamma_{0s} \beta_{0s}} \right)^2}.$$

Заметим, что по такой траектории будут двигаться электроны, имеющие только продольную составляющую скорости на некотором расстоянии z_H ($z_H < -\lambda_u/2\pi$) до входа в ондулятор и движущиеся в магнитном поле ондулятора, амплитуда которого адиабатически увеличивается ($\lambda_u (\partial/\partial z) \ln H_u \ll 2\pi$) от нуля при $z = z_H$ до H_0 при $z = 0$.

Найдем выражение для векторного потенциала $\mathbf{A}^{(s)}$. Для нахождения явных выражений векторного потенциала и силы парного взаимодействия электронов рассмотрим малые значения параметра ондулятора $K \ll 1$. Используя уравнение (5), (7), можно получить выражение для R'_s . Подставляя это выражение в формулу (4), а затем разлагая возникающее выражение по степеням параметра K с точностью до линейных членов, получим следующее выражение для векторного потенциала поля, создаваемого s -м электроном:

$$\mathbf{A}^{(s)}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{c R_*} \times \left[\mathbf{v}'_{us} + \mathbf{v}_{zs} \left(1 + \frac{\mathbf{R}_{0\perp} \cdot \mathbf{v}'_{us}}{c R_*} + \frac{\mathbf{R}_{0\perp} \cdot \mathbf{r}'_{us}}{\gamma_{zs}^2 R_*^2} \right) \right], \quad (8)$$

где

$$R_* = \sqrt{R_{0z}^2 + R_{0\perp}^2 \gamma_{zs}^{-2}}, \quad \mathbf{v}_{us} = \dot{\mathbf{r}}_{us},$$

$$\mathbf{R}_{0\perp} = \mathbf{e}_x (x - x_{0s}) + \mathbf{e}_y (y - y_{0s}),$$

$$R_{0z} = z - z_s(t, q_{0s}),$$

$$\gamma_{zs} = (1 - \beta_{zs}^2)^{-1/2} = \frac{\gamma_{0s}}{\sqrt{1 + K^2}}.$$

Поле в точке \mathbf{r} в момент времени t , создаваемое s -м электроном, определяется его координатами в

предшествующий момент времени t' , удовлетворяющий очевидному условию $t' \geq t_{0s}$. Из этого условия при учете уравнения (5) следует соотношение

$$c(t - t_{0s}) \geq |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0s}|, \quad (9)$$

определяющее координаты \mathbf{r} и момент времени t , в которых электромагнитное поле, создаваемое s -м электроном, отлично от нуля. Строго говоря, условием представления векторного потенциала в виде (8) является полное отсутствие поля s -го электрона при $t < t_{0s}$ во всех точках пространства $z \geq 0$.

Зная $\mathbf{A}^{(s)}$, можно найти силу парного взаимодействия электронов. Подставляя выражение (8) в формулу (3), пренебрегая квазистатическими полями и быстро осциллирующими по z членами при вычислении ротора вектора $\mathbf{A}^{(s)}$, получим

$$F_z^{(s)}(x, t; q_{0s}) = -\frac{e^2 K^2 \beta_{zs} \gamma_{zs}^2 k_u}{\gamma \gamma_{0s} R_*} G(\mathbf{r}, t; q_{0s}), \quad (10)$$

где

$$G(\mathbf{r}, t; q_{0s}) = \left(\beta_{zs} + \frac{R_{0z}}{R_*} - \frac{\beta_{zs}}{k_{0s}^2 R_*^2} - \frac{\beta_{zs} R_{0\perp}^2}{2 \gamma_{zs}^2 R_*^2} \right) \sin \psi + \left(\beta_{zs} + \frac{R_{0z}}{R_*} \right) \frac{\cos \psi}{k_{0s} R_*},$$

$$\psi = \gamma_{zs}^2 k_u (R_{0s} + \beta_{zs} R_*), \quad k_{0s} = \beta_{zs} \gamma_{zs}^2 k_u.$$

Формулы (10), (6) и (2) позволяют записать следующее выражение для коэффициента диффузии:

$$D_z = \frac{e^4 K^4 k_u^2}{\gamma^2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dp_{z0s} \times \gamma_{0s}^2 w(p_{z0s}) \Phi(t_1, p_{z0s}), \quad (11)$$

где

$$\Phi = \iiint_{\Omega_q} \frac{G(\mathbf{r}, t; q_{0s}) G(\mathbf{r}_1, t_1; q_{0s})}{R_*(\mathbf{r}, t; q_{0s}) R_*(\mathbf{r}_1, t_1; q_{0s})} \times n_b v_{zs} dx_{0s} dy_{0s} dt_{0s}. \quad (12)$$

Зависимость коэффициента диффузии (11) от импульса можно выявить, заменив в подынтегральном выражении уравнения (12) координаты r и r_1 координатами пробного электрона r_t в моменты времени t и t_1 соответственно, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_t(t) \equiv \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_z(t - t_0)$, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_t(t_1)$.

В уравнении (12) область интегрирования Ω_q охватывает начальные координаты электронов-излучателей (s -х), поле которых отлично от нуля в моменты времени t и t_1 . Поскольку $t_1 < t$, эта область

будет определяться соотношением (9), в котором \mathbf{r} и t следует заменить соответственно на $\mathbf{r}_t(t_1)$ и t_1 .

Для дальнейших вычислений удобно ввести вместо переменной t новую независимую переменную — координату z , по формуле $z = v_z(t - t_0)$, при этом в правой части (11) заменить переменную t_1 новой переменной z_1 , полагая $t_1 = t_0 + z_1/v_z$. Компоненты вектора \mathbf{R}_0 тогда примут вид

$$R_{0z}(z_1) = \left(1 - \frac{v_{zs}}{v_z}\right) z_1 + v_{zs}(t_{0s} - t_0) \equiv \Delta z_s(z_1),$$

$$R_{0z}(z) = \Delta z_s(z_1) + \left(1 - \frac{v_{zs}}{v_z}\right) (z - z_1),$$

$$R_{0\perp} = \sqrt{(x_0 - x_{0s})^2 + (y_0 - y_{0s})^2}.$$

Подынтегральное выражение в правой части уравнения (12) зависит от начальных координат q_{0s} через функции $\Delta z_s(z_1)$ и $R_{0\perp}$. Поэтому удобно записать условие (9), определяющее пределы интегрирования по q_{0s} , через эти функции (ср. [1]):

$$\gamma_{zs}^2 [\Delta z_s(z_1) + \beta_{zs} R_*(z_1)] \leq z_1, \quad (13)$$

где

$$R_*(z_1) = \sqrt{[\Delta z_s(z_1)]^2 + R_{0\perp}^2 \gamma_{zs}^{-2}}.$$

Для определения пределов интегрирования в (12) следует также учесть конечные поперечные размеры пучка. Полагая, что пучок является сплошным цилиндрическим радиуса r_b , имеем

$$\sqrt{x_{0s}^2 + y_{0s}^2} \leq r_b. \quad (14)$$

Будем считать, что средняя плотность пучка n_b не зависит от координат q_{0s} . Учитывая вид силы парного взаимодействия электронов, в правой части уравнения (12) целесообразно перейти от переменных интегрирования x_{0s}, y_{0s}, t_{0s} к новым переменным r', φ, θ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$), используя формулы

$$x_{0s} = x_0 - \gamma_{zs} r' \cos \varphi \sin \theta, \quad y_{0s} = y_0 - \gamma_{zs} r' \sin \varphi \sin \theta,$$

$$\Delta z_s(z_1) = r' \cos \varphi.$$

Уравнение (12) тогда примет вид

$$\Phi = \gamma_{zs}^2 n_b \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \times$$

$$\times \int_0^{r'_{max}} dr' r' \frac{G(\mathbf{r}', \xi)}{R_*(\mathbf{r}', \xi)} G(\mathbf{r}', 0), \quad (15)$$

где

$$G(\mathbf{r}, \xi) = \left(\beta_{zs} + \frac{r \cos \theta + \xi}{R_*(\mathbf{r}, \xi)} - \frac{\beta_{zs}}{k_{0s} R_*^2(\mathbf{r}, \xi)} - \frac{\beta_{zs} r^2 \sin^2 \theta}{2 R_*^2(\mathbf{r}, \xi)} \right) \sin \psi(\mathbf{r}, \xi) + \left(\beta_{zs} + \frac{r \cos \theta + \xi}{R_*(\mathbf{r}, \xi)} \right) \frac{\cos \psi(\mathbf{r}, \xi)}{k_{0s} R_*(\mathbf{r}, \xi)}, \quad (16)$$

$$R_*(\mathbf{r}, \xi) = \sqrt{r^2 + 2r\xi \cos \theta + \xi^2}, \quad \mathbf{r}' = (r', \varphi, \theta),$$

$$\psi(\mathbf{r}, \xi) = k_u \gamma_{zs}^2 [r \cos \theta + \xi + \beta_{zs} R_*(\mathbf{r}, \xi)],$$

$$\xi = \left(1 - \frac{v_{zs}}{v_z}\right) (z - z_1).$$

Легко убедиться, что подынтегральное выражение в правой части уравнения (15) при $\xi = 0$ переходит в соответствующее выражение работы [1].

3. КОЭФФИЦИЕНТ ДИФФУЗИИ

Для нахождения явного выражения для коэффициента диффузии ограничимся следующими упрощающими допущениями.

1. Рассмотрим разброс по импульсам электронов, движущихся по оси пучка, полагая $x_0 = y_0 = 0$. Тогда согласно условиям (13), (14) предел интегрирования r'_{max} в формуле (15) является наименьшим значением из следующих двух величин:

$$\frac{z_1}{\gamma_{zs}^2 (\cos \theta + \beta_{zs})}, \quad \frac{r_b}{\gamma_{zs} \sin \theta}. \quad (17)$$

2. Будем учитывать электромагнитное поле электронов-излучателей, движущихся только за рассматриваемым (пробным) электроном. При этом θ может меняться от 0 до $\pi/2$.

3. Считаем, что расстояние между электронами, парное взаимодействие которых мы рассматриваем ($|z - z_s| < r'$), значительно больше теплового разлета этих электронов относительно друг друга за время рассматриваемого процесса ($(\Delta v_z) z / v_z > \xi$), т. е. $r' \gg \xi$. Это условие, однако, не исключает возможность теплового разлета электронов на расстояние, большее длины волны ондуляторного излучения

$$\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma_{0s}^2} (1 + K^2).$$

4. Предполагаем, что радиус пучка больше длины волны ондуляторного излучения в поперечном направлении: $r_b \gg \lambda_\perp / 2\pi$, где $\lambda_\perp = \lambda_u / \beta_{zs} \gamma_{zs}$ — длина волны ондуляторного излучения в системе

отсчета, движущейся с поступательной скоростью пучка.

Принимая во внимание сделанные предположения, в подынтегральном выражении уравнения (15) разложим $R_*(\mathbf{r}', \xi)$ по малому параметру ξ/r' и всюду, за исключением фазы $\psi(\mathbf{r}', \xi)$, будем пренебрегать членами ξ/r' по сравнению с единицей. Поскольку среднеквадратичный импульс изменяется на расстоянии $z > \lambda_u$, из (17) следует, что $k_{0s}r'_{max} \gg \gg 1$. Далее, проинтегрируем по φ и r' в уравнении (15), пренебрегая быстро осциллирующими членами типа $\cos[\psi(\mathbf{r}', \xi) + \psi(\mathbf{r}', 0)]$. Подставляя полученное выражение в уравнение (11) и ограничиваясь лишь членами, пропорциональными r'_{max} , находим

$$D_z(p_z, z) = \frac{\pi e^4 K^4 k_u^2 n_b}{4\gamma^2 v_z} \times \int_0^z dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} dp_{z0s} \gamma_{0s}^2 w(p_{z0s}) \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \times \chi^4(\theta) \cos[\gamma_{zs}^2 k_u \xi \chi(\theta)] r'_{max}(z_1, \theta), \quad (18)$$

где $\chi(\theta) = 1 + \beta_{zs} \cos \theta$.

Предположим, что функция $w(p_{z0s})$ имеет вид

$$w(p_{z0s}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} p_{th}} \exp\left[-\frac{(p_{z0s} - p_{zm})^2}{2p_{th}^2}\right], \quad (19)$$

где p_{zm} и p_{th} — соответственно среднее значение и начальный разброс продольного импульса электронов.

Будем считать, что начальный тепловой разброс в пучке удовлетворяет условию $p_{th} \ll p_{zm}$. Кроме того, нас будет интересовать увеличение энергетического разброса электронов, вследствие радиационного взаимодействия, до значений $\Delta\gamma \ll \gamma_m$. Принимая во внимание эти условия, в подынтегральном выражении уравнения (18) разность скоростей запишем в виде

$$v_z - v_{zs} = \frac{p_z - p_{z0s}}{m\gamma_{zm}^2 \gamma_m}$$

и всюду, кроме этой разности, положим $v_{zs} = v_{zm}$. Здесь $v_{zm} = p_{zm}/m\gamma_m$ — среднее значение продольной скорости.

Подставив (19) в (18) и проинтегрировав по продольному импульсу, используя значение интеграла [8], получим следующее выражение для коэффициента диффузии:

$$D_z(p_z, z) = \frac{\pi e^4 K^4 k_u^2 \gamma_m^4 n_b}{4\gamma^2 v_z} \int_0^z dz_1 \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \times \chi^4(\theta) r'_{max}(z_1, \theta) \alpha[\chi(\theta)(z - z_1)], \quad (20)$$

где

$$\alpha(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{z_c^2}\right) \cos(\eta x), \quad z_c = \frac{\sqrt{2}p_z}{k_u p_{th}},$$

$$\eta = k_u \left(1 - \frac{p_{zm}}{p_z}\right).$$

Выражение для $r'_{max}(z_1, \theta)$ можно получить, используя условие (17). Так, при $0 \leq z_1 \leq z_r$ находим (ср. [1])

$$r'_{max}(z_1, \theta) = r_1(z_1, \theta) \equiv \frac{z_1}{\gamma_{zm}^2 (\beta_{zm} + \cos \theta)}. \quad (21)$$

При $z_1 > z_r$ получим

$$r'_{max}(z_1, \theta) = \begin{cases} r_1(z_1, \theta), & 0 \leq \theta \leq \theta_*(z_1), \\ r_b/\gamma_{zs} \sin \theta, & \theta_*(z_1) < \theta \leq \pi/2, \end{cases} \quad (22)$$

где $z_r = \beta_{zm} \gamma_{zm} r_b$, $\theta_*(z) = \arccos a(\gamma_{zm} r_b/z)$,

$$a(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2 \gamma_{zm}^{-2}} - \beta_{zm} x^2}{1 + x^2}.$$

Заметим, что $\theta_*(z) = 2 \arctg(z_r/z)$ при $\gamma_{zm} \gg 1$.

Используя формулы (21) и (22), запишем уравнение (20) для расстояний z меньших и больших z_r . При этом в правой части уравнения (20) заменим переменную интегрирования z_1 на новую переменную $z' = z - z_1$, а вместо θ , при интегрировании в интервале $(0, \theta_*(z_1))$, введем новую переменную интегрирования y по формуле $\beta_{zm} \cos \theta = y/z' - 1$.

При $z < z_r$ полная сила, действующая на пробный электрон со стороны электронов-излучателей, не зависит от поперечных размеров пучка; иными словами, излучение от электронов, движущихся на периферии пучка $r_{\perp s} = r_b$, не достигает пробного электрона. Изменив порядок интегрирования в формуле (20) и проинтегрировав по z' , получим следующее выражение для коэффициента диффузии:

$$D_z(p_z, z) = \frac{\pi e^4 K^4 k_u^2 \gamma_m^2 n_b}{24\gamma^2 v_z z^2} \int_0^z dy (z - y)^2 \times (y + 2z) [16\alpha(2y) - \alpha(y)]. \quad (23)$$

При $z > z_r$, как следует из выражения (22), r'_{max} зависит от поперечных размеров пучка. Коэффициент диффузии (20) теперь удобно записать в виде двух членов:

$$D_z(p_z, z) = \frac{\pi e^4 K^4 k_u^2 \gamma_m^2 n_b}{4\gamma^2 v_z} \times [U_1(z, p_z) + U_2(z, p_z)], \quad (24)$$

где

$$U_1 = \int_0^z dz' (z - z') \int_{\chi_{max}(z-z')}^{1+\beta_{zm}} d\chi \chi^3 \alpha(\chi z'), \quad (25)$$

$$U_2 = z_r \int_0^{z-z_r} dz' \int_{\theta_*(z-z')}^{\pi/2} d\theta \chi^4(\theta) \alpha[\chi(\theta) z'], \quad (26)$$

$\chi_{max}(x) = 1$ при $0 \leq x \leq z_r$, $\chi_{max}(x) = \chi_*(x)$ при $z_r < x \leq z$, $\chi_*(x) = 1 + \beta_{zm} \cos \theta_*(x)$. Заметим, что $\chi_*(x) = 2/(1 + z_r^2/x^2)$ при $\gamma_m \gg 1$.

Значительное упрощение в аналитическом решении уравнений (23), (25) и (26) возникает в двух случаях: когда в течение рассматриваемого процесса смещение электронов относительно друг друга за счет теплового движения мало либо когда это смещение велико. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

4. ПРЕДБРОУНОВСКИЙ ЭТАП

Найдем разброс по импульсам при $z \ll z_c$. В этом случае наибольший вклад в подынтегральные выражения (23), (25) и (26) будут давать значения $|p_z - p_{zm}| \ll p_{th}$ и, следовательно, можно ограничиться основным членом разложения функции α по малому параметру z/z_c , положив $\alpha = 1$.

При $z < z_r$, интегрируя в правой части выражения (23), используя определение (2), получим

$$\frac{d}{dz} \langle (\Delta p_z)^2 \rangle = \frac{15\pi e^4 K^4 k_u^2 \gamma_m^2 n_b}{16\gamma^2 v_z^2} z^2. \quad (27)$$

При $z > z_r$, вычисляя двойные интегралы в (25), (26), учитывая (24) и (2), получаем

$$\frac{d}{dz} \langle (\Delta p_z)^2 \rangle = \frac{2\pi e^4 K^4 k_u^2 \gamma_m^2 n_b}{\gamma^2 v_z^2} z_r z B\left(\frac{z}{z_r}\right), \quad (28)$$

где

$$B(x) = \frac{5}{3} \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{35}{16} \left(\arctg x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2}{x} \ln\left(\frac{1+x^2}{2}\right) + \frac{15}{32x}.$$

Заметим, что выражение (28) при $z = z_r$ переходит в (27). Легко убедиться, что выражение (27), справедливое при $z < z_r$, и выражение (28) для значений $z \gg z_r$ совпадают с соответствующими формулами работы [1].

5. КИНЕТИЧЕСКИЙ ЭТАП

Найдем теперь коэффициент диффузии при $z \gg \gg z_c$. Получим сначала асимптотическое выражение коэффициента диффузии при $z < z_r$. Для этого в уравнении (23), устремляя верхний предел интегрирования к бесконечности и пренебрегая слагаемыми, пропорциональными $\exp(-z^2/z_c^2)$, при интегрировании с помощью [8] получим

$$D_z(p_z) = \frac{7\pi^{3/2} e^4 K^4 \gamma_m^2 n_b k_u^2 z_c}{24\gamma^2 v_z} \times \left\{ z \exp\left[-\frac{(p_z - p_{zm})^2}{2p_{th}^2}\right] - \frac{9z_c}{14\sqrt{\pi}} \phi\left(\frac{p_z - p_{zm}}{\sqrt{2}p_{th}}\right) \right\}, \quad (29)$$

где

$$\phi(x) = 1 - 2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt.$$

Численные значения функции $\phi(x)$, а также представление в виде степенного ряда для малых x и асимптотическое разложение для $x \gg 1$ можно получить, например, с помощью [9].

Первый член в выражении (29) зависит линейно от z . Это связано с тем, что с ростом z увеличивается число электронов-излучателей, в области влияния которых находится пробный электрон.

Вычислим теперь коэффициент диффузии при $z > z_r$. Переходя к вычислению интегралов (25), (26), прежде всего, заметим, что при $z - z_r \gg z_c$ основной вклад в значение этих интегралов дает область $z' < z_c \ll z$, поскольку при больших z' подынтегральная функция в (25), (26) быстро убывает. Воспользовавшись этим неравенством, вычислим сначала U_1 . Разлагая внутренний интеграл в уравнении (25) по малому параметру z'/z до линейных членов включительно и затем меняя порядок интегрирования в двойных интегралах, получим

$$U_1 = \int_1^{1+\beta_{zm}} d\chi \chi \int_{(z-z_r)\chi}^{\chi z} dy (z\chi - y) \alpha(y) + \int_{\chi_*(z)}^{1+\beta_{zm}} d\chi \chi \int_0^{(z-z_r)\chi} dy (z\chi - y) \alpha(y) + \frac{4\beta_{zm} z_r^2 z}{(z_r^2 + z^2)^2} \int_0^{(z-z_r)\chi_*(z)} dy y [z\chi_*(z) - y] \alpha(y). \quad (30)$$

Здесь вместо переменной z' мы ввели новую переменную $y = \chi z'$ в первом и втором двойных интегралах и переменную $y = z'\chi_*(z)$ в третьем интеграле.

Найдем теперь асимптотическое выражение интегралов (30) в предельном случае $z - z_r \gg z_c$. Первый двойной интеграл в уравнении (30) по порядку величины равен

$$z_r z_c^4 (z - z_r)^{-3} e^{-z^2/z_c^2}.$$

Вычисляя второй двойной и третий интегралы в уравнении (30) с помощью [8] в том же приближении, что и (29), удерживая члены до z_r^2/z^2 , получим

$$U_1 = \frac{2z_r^2 z_c}{z} \left[2\sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{(p_z - p_{zm})^2}{2p_{th}^2}\right) + \frac{z_c}{z} \phi\left(\frac{p_z - p_{zm}}{\sqrt{2}p_{th}}\right) \right]. \quad (31)$$

Перейдем теперь к вычислению U_2 . В правой части уравнения (26), разлагая внутренний интеграл в ряд по малому параметру z'/z до линейных членов включительно и меняя порядок интегрирования в двойном интеграле, получим

$$U_2 = z_r \int_{\theta_*(z)}^{\pi/2} d\theta \chi^3(\theta) \int_0^{(z-z_r)\chi(\theta)} dy \alpha(y) - \frac{2z_r^2}{z_r^2 + z^2} \chi_*^2(z) \int_0^{(z-z_r)\chi_*(z)} dy y \alpha(y). \quad (32)$$

Здесь вместо переменной z' мы ввели новую переменную интегрирования y по формуле $y = z'\chi(\theta)$ в первом слагаемом и $y = z'\chi_*(z)$ — во втором. Интегрируя в уравнении (32) так же, как в (31), получим следующее асимптотическое выражение:

$$U_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} z_r z_c B_1 \left(\frac{z}{z_c}\right) \exp\left(-\frac{(p_z - p_{zm})^2}{2p_{th}^2}\right) - \frac{4z_r^2 z_c^2}{z^2} \phi\left(\frac{p_z - p_{zm}}{\sqrt{2}p_{th}}\right), \quad (33)$$

где

$$B_1(x) = \int_{\theta_*(x)}^{\pi/2} d\theta (1 + \beta_{zm} \cos \theta)^3.$$

При $\gamma_{zm} \gg 1$ имеем

$$B_1(x) = 5 \left(\arctg x - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{11}{3} - \frac{2}{x} (1 - \mu) \left(\frac{11}{2} - \frac{13}{3} \mu + \frac{4}{3} \mu^2 \right),$$

где $\mu = (1 + x^2)^{-1}$.

Подставляя выражения (31) и (33) в уравнение (24), окончательно получаем следующее выражение для коэффициента диффузии:

$$D_z(p_z, z) = \frac{5\pi^{5/2} e^4 K^4 \gamma_m^2 n_b k_u^2 z_r z_c}{16\gamma^2 v_z} \times \left[B_2\left(\frac{z}{z_r}\right) \exp\left(-\frac{(p_z - p_{zm})^2}{2p_{th}^2}\right) - \frac{8z_r z_c}{5\pi^{3/2} z^2} \phi\left(\frac{p_z - p_{zm}}{\sqrt{2}p_{th}}\right) \right], \quad (34)$$

где

$$B_2(x) = \frac{2}{\pi} \arctg x - \frac{1}{2} + \frac{22}{15\pi} - \frac{6}{5\pi x}.$$

При $z \gg z_r$ выражение (34) для малых отклонений импульса от среднего, $|p_z - p_{zm}| < p_{th}$, принимает вид

$$D_z(p_z) = \frac{5\pi^{5/2} e^4 K^4 \gamma_m^2 n_b k_u^2 z_r z_c}{16\gamma^2 v_z} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{22}{15\pi} \right) \exp\left(-\frac{(p_z - p_{zm})^2}{2p_{th}^2}\right). \quad (35)$$

Для больших отклонений импульса от среднего, $|p_z - p_{zm}| \gg p_{th}$, при

$$z < \frac{\sqrt{2^{1/2}} \lambda_u z_r p_z p_{th} / \pi}{|p_z - p_{zm}|} \exp\left(\frac{(p_z - p_{zm})^2}{4p_{th}^2}\right) \equiv z_p$$

коэффициент диффузии (34) обратно пропорционален квадрату этого отклонения:

$$D_z(p_z, z) = \frac{\pi e^4 K^4 n_b \beta_z z_r^2 p_{zm}^2}{v_{zm} z^2 (p_z - p_{zm})^2}.$$

Для значений $z > z_p$ выражение (34) принимает вид (35). Таким образом, на больших расстояниях коэффициент диффузии не зависит от z . Такая зависимость коэффициента диффузии от координаты или же от времени соответствует кинетическому этапу эволюции системы, состоящей из большого числа частиц (см., например, [3, 10, 11]).

6. ПЕРВОНАЧАЛЬНО МОНОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОТОК ЭЛЕКТРОНОВ

Для получения ультракоротковолнового когерентного электромагнитного излучения в процессе самопроизвольного усиления спонтанного излучения релятивистские электроны должны иметь малый разброс по импульсу, удовлетворяющий условию $p_{th} \ll p_{zm} \lambda_u / L_u$ (см., например, [12–14]). Это

неравенство можно переписать в виде $L_u \ll 2z_c$, где $L_u = \lambda_u/\rho_{1D}$ — длина ондулятора, определяемая расстоянием, на котором интенсивность электромагнитного излучения достигает максимального значения,

$$\rho_{1D} = \left(\frac{K\lambda_u}{4\pi r_b}\right)^{2/3} \left(\frac{I_b}{I_A}\right)^{1/3} \gamma_0^{-1},$$

$$I_b = \pi|e|v_{z0}r_b^2n_b, \quad I_A = \frac{mc^3}{|e|} = 17 \text{ кА}.$$

Поэтому для определения энергетического разброса, обусловленного радиационным взаимодействием электронов на стадии спонтанного излучения ($z < L_u$), можно пренебречь начальным энергетическим разбросом электронов, считая, что электроны являются моноэнергетическими: $w(p_{zs}) = \delta(p_{zs} - p_{z0})$. В этом случае, используя уравнения (11), (12) и (21), (22), в которых переменную θ заменим на $y = \cos\theta$, а вместо r' введем новую переменную $x = \gamma_{z0}^2 k_u r' (y + \beta_{z0})$, выражение для среднего квадратичного разброса продольного импульса можно записать в виде

$$\langle(\Delta p_z)^2\rangle = \frac{\pi e^4 K^4 n_b}{c^2 k_u} V, \quad (36)$$

$$V = \int_0^\zeta d\zeta_1 (\zeta - \zeta_1) \int_0^1 dy (\beta_{z0} + y)^3 \times$$

$$\times \int_0^{x_{max}(\zeta_1, y)} dx g^2(x), \quad (37)$$

где

$$g(x) = \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) \sin x + 2\frac{\cos x}{x},$$

$$x_{max} = \begin{cases} \psi_m(y), & 0 \leq y \leq y_*(\zeta_1), \\ \zeta_1, & y_*(\zeta_1) < y \leq 1, \end{cases}$$

$$\psi_m(y) = \frac{\zeta_r(\beta_{z0} + y)}{\beta_{z0}\sqrt{1-y^2}}, \quad y_*(\zeta_1) = \max\left(0, \frac{\zeta_1^2 - \zeta_r^2}{\zeta_1^2 + \zeta_r^2}\right),$$

$$\zeta = k_u z, \quad \zeta_1 = k_u z_1, \quad \zeta_r = \beta_{z0}\gamma_{z0}r_b k_u = \frac{2\pi r_b}{\lambda_\perp}.$$

Преобразуем формулу (37) к более простому виду. При $\zeta \leq \zeta_r$ верхний предел интегрирования по x не зависит от y . Поэтому в уравнении (37) сначала проинтегрируем по y , а затем, меняя порядок интегрирования по ζ_1 и x , проинтегрируем по ζ_1 . В результате получим

$$V = \frac{15}{8} \int_0^\zeta (\zeta - x)^2 g^2(x) dx. \quad (38)$$

При $\zeta > \zeta_r$, учитывая пределы интегрирования по x , тройной интеграл в формуле (37) запишем в виде

$$\int_0^{\zeta_r} d\zeta_1 \int_0^{\zeta_1} dx \int_0^1 dy + \int_{\zeta_r}^\zeta d\zeta_1 \int_0^{\zeta_1} dx \int_{y_*(\zeta_1)}^1 dy +$$

$$+ \int_{\zeta_r}^\zeta d\zeta_1 \int_0^{y_*(\zeta_1)} dy \int_0^{\psi_m(y)} dx.$$

В первом и втором слагаемых этого выражения можно непосредственно проинтегрировать по y , учитывая подынтегральные выражения в уравнении (37). В третьем слагаемом поменяем порядок интегрирования по y и x , проинтегрируем по y . Затем, меняя всюду порядок интегрирования по ζ_1 и x , проинтегрируем по ζ_1 в каждом слагаемом. В результате формула (37) примет вид

$$V = \frac{15}{8} \int_0^{\zeta_r} (\zeta - x)^2 g^2(x) dx +$$

$$+ 2 \int_{\zeta_r}^\zeta (\zeta - x)^2 \left[1 - \frac{x^8}{(\zeta_r^2 + x^2)^4}\right] g^2(x) dx. \quad (39)$$

Легко видеть, что при $\zeta = \zeta_r$ формулы (39) и (38) совпадают, как это и должно быть.

Асимптотические значения выражений (38) и (39) при $\zeta > 1$ и $\zeta_r > 1$ получим, интегрируя в этих формулах с точностью до слагаемых, обратно пропорциональных ζ и ζ_r :

$$V = \frac{5}{16}\zeta^3, \quad \zeta < \zeta_r;$$

$$V = \zeta_r^3 A\left(\frac{\zeta}{\zeta_r}\right), \quad \zeta > \zeta_r, \quad (40)$$

где

$$A(x) = (x^2 - 1) \left[\frac{5}{3} + \frac{35}{16} \left(\arctg x - \frac{\pi}{4}\right)\right] -$$

$$- 4x \ln \frac{1+x^2}{2} + 3(x-1) + \frac{5}{16}.$$

Можно показать, что поправка к решению (40) при $\zeta > \zeta_r > 1$ имеет вид

$$V - \zeta_r^3 A\left(\frac{\zeta}{\zeta_r}\right) = \frac{4}{\zeta_r} B_3\left(\frac{\zeta}{\zeta_r}\right),$$

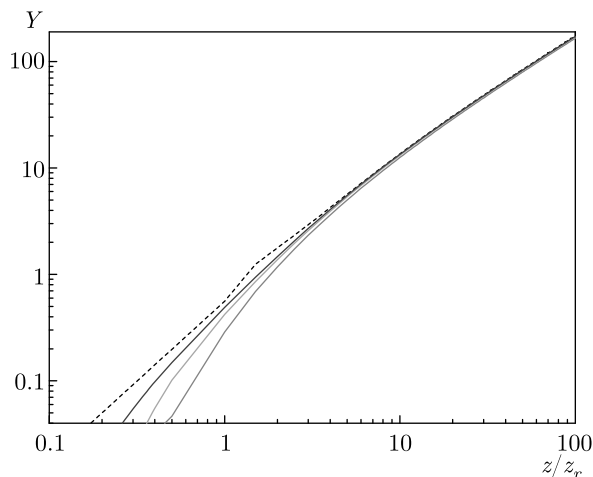


Рис. 1. (В цвете онлайн) Зависимости функции $Y = \sqrt{V/\zeta_r^3}$ от нормированной продольной координаты z/z_r , полученные численно (цветные кривые) для значений $r_b/\lambda_\perp = 1$ (красная), 2 (зеленая), 4 (синяя) и на основании формулы (40) (пунктирная кривая)

где

$$B_3(x) \approx (x^2 - 1)(4 \operatorname{arctg} x - \pi - 3) + 4x [\ln 2 - \ln(1 + x^{-2})] - x + 2.$$

Легко убедиться, что в предельном случае $\zeta \gg 1$, $\zeta_r \gg 1$ выражение (40) совпадает с выражением (28), а также с соответствующим выражением работы [1]. Заметим, что в этой работе зависимость разброса по импульсам от координаты z найдена в предположении, что $g^2 = 1/2$.

На рис. 1 приведены графики, полученные численным интегрированием уравнений (38) и (39) (цветные кривые) и полученные согласно формуле (40) (пунктирная кривая). Величина $\sqrt{V/\zeta_r^3}$ пропорциональна среднеквадратичному значению продольного импульса электронов:

$$\sqrt{V/\zeta_r^3} = \frac{\langle(\Delta p_z)^2\rangle^{1/2}}{mc\nu},$$

где

$$\nu = \beta_{z0} k_u \left(\frac{K\gamma_{z0}}{\gamma_0} \right)^2 \left(\frac{\gamma_{z0}^3 r_e r_b I_b}{I_A} \right)^{1/2}, \quad r_e = e^2/mc^2.$$

Заметим, что для ультрарелятивистских электронов $\langle(\Delta p_z)^2\rangle = m^2 c^2 \langle(\Delta \gamma)^2\rangle$.

Как видно из рис. 1, при $z \gg z_r \equiv \beta_{z0} \gamma_{z0} r_b$ (практически при $z > 3z_r$) приближенные формулы (40) достаточно хорошо передают зависимость V от z/z_r . Это связано с тем, что поправка к выражению (40)

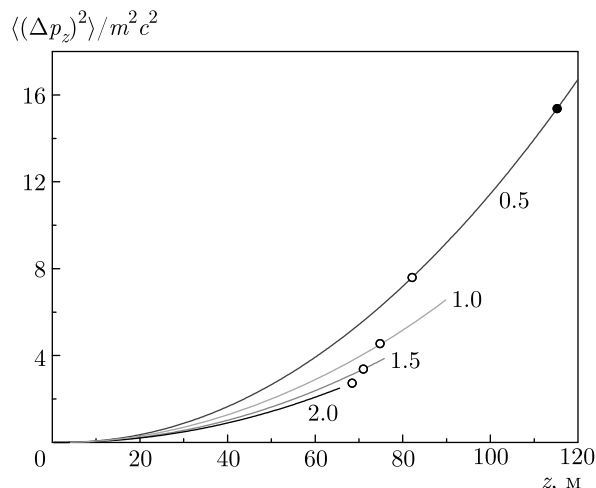


Рис. 2. Зависимости нормированного разброса продольного импульса $\langle(\Delta p_z)^2\rangle/m^2 c^2$ от координаты z . Числа у кривых обозначают длину волны излучения λ в ангстремах

пропорциональна обратной степени ζ_r , в то время как главный член V пропорционален ζ_r^3 .

Как известно, уменьшение длины электромагнитной волны, излучаемой электронами при движении в ондуляторе, достигается путем увеличения энергии электронов. Поэтому представляет интерес определить разброс по импульсам, обусловленный радиационными эффектами, для разных значений энергии электронов. На рис. 2 приведены зависимости $\langle(\Delta p_z)^2\rangle/m^2 c^2$ от z , вычисленные по формулам (36), (38) и (39), когда параметры ондулятора, радиус и ток пучка остаются постоянными, а энергия пучка увеличивается. Вычисления проведены для значений $H_0 = 1.4$ кГс, $\lambda_u = 4$ см, $I_b = 5$ кА, $r_b = 50$ мкм ($n_b = 1.32 \cdot 10^{16}$ см $^{-3}$), которые примерно соответствуют параметрам экспериментов [4–6]. Кривые соответствуют длине волны излучения λ : 2 Å (черная), 1.5 Å (красная), 1 Å (зеленая), 0.5 Å (синяя), при энергии электронов $E_b = mc^2 \gamma_0$: 5.76 ГэВ (черная), 6.65 ГэВ (красная), 8.15 ГэВ (зеленая), 11.53 ГэВ (синяя). Зависимости от координаты z рассчитаны до значений L_u . Кружками (белыми) на кривых обозначены значения разброса по импульсам в координатах z_{rel} , в которых смещение электронов относительно равновесной траектории, вследствие радиационного разброса по импульсам, достигает половины длины электромагнитной волны:

$$2z_{rel} \sqrt{\langle(\Delta p_z)^2\rangle} |_{z=z_{rel}} = \gamma_{z0}^2 p_{z0} \lambda.$$

При энергии электронов, соответствующей длине волны излучения 2 \AA (черная кривая), расстояние z_{rel} больше L_u . Черный кружок на синей кривой соответствует смещению электронов на длину электромагнитной волны λ .

Из рис. 2 видно, что разброс по импульсам увеличивается по мере движения электронов в ондуляторе, а также с ростом энергии электронов. Расстояние z_{rel} также увеличивается с ростом энергии электронов. Это связано с тем, что расстояние z_{rel} обратно пропорционально относительному разбросу по продольному импульсу, который, как следует из формул (36) и (40), при $z > z_r$ обратно пропорционален $\gamma_0^{1/2}$. Заметим, что длина ондулятора L_u зависит от энергии электронов линейно. Поэтому относительное расстояние z_{rel}/L_u , на котором смещение электронов в продольном направлении относительно равновесной траектории достигает половины длины электромагнитной волны, уменьшается с ростом энергии электронов.

7. ВЫВОДЫ

Таким образом, в данной работе исследована диффузия по импульсу в потоке ультрарелятивистских электронов, взаимодействующих между собой посредством создаваемых ими электромагнитных полей при движении в ондуляторе. С помощью метода нахождения коэффициентов диффузии в пространстве импульсов непосредственно из динамики движения отдельных частиц под действием суммарной силы со стороны каждой из них, в приближении малого значения параметра ондулятора получены явные выражения для скорости изменения среднего квадратичного продольного импульса электронов с учетом их начального разброса по импульсу.

Показано, что на начальном этапе движения пучка, когда пройденное им расстояние в ондуляторе мало по сравнению с расстоянием z_c , среднеквадратичный разброс $\langle(\Delta p_z)^2\rangle^{1/2}$ линейно зависит от координаты z при $z > z_r$. Это связано с тем, что при $z \ll z_c$ силы парного взаимодействия электронов друг с другом посредством электромагнитных волн практически не меняются по мере движения пучка. На расстояниях $z < z_r$, помимо постоянства сил парного взаимодействия, происходит увеличение числа электронов-излучателей, в области влияния которых находится пробный электрон. Поэтому при $z < z_r$ среднеквадратичный разброс увеличивается пропорционально $z^{3/2}$ (см. [1]). В целом эволюция электронов в пространстве импульсов при

$z \ll z_c$ соответствует предброуновскому движению электронов в электромагнитном поле.

Что же касается расстояния z_c , то оно равно по порядку величины расстоянию, за время прохождения которого τ_c ($\tau_c = z_c/v_z$) тепловой разлет двух электронов относительно друг друга достигает половины длины электромагнитной волны: $v_{th}\tau_c = \sqrt{2}\lambda/\pi \approx \lambda/2$. Здесь использовано соотношение $p_{th} = m\gamma_0\gamma_{z0}^2v_{th}$. Действительно, по порядку величины скорость v_{th} равна разности продольных скоростей двух электронов. Поэтому $v_{th}z/v_z$ дает то смещение, на которое изменяется расстояние между двумя электронами за время z/v_z . Само же время τ_c (время хаотизации) не зависит ни от плотности пучка, ни от силы парного взаимодействия электронов и представляет собой продолжительность «синхронного» взаимодействия двух электронов. За это время фаза силы, действующей на электрон (пробный) со стороны электрона-излучателя, меняется в пределах от 0 до π : $\psi(t+\tau) - \psi(t) \leq \pi$ при $\tau \leq \tau_c$.

На расстояниях, значительно больших z_c (или, другими словами, по прошествии отрезка времени, достаточно большого по сравнению с τ_c), сила парного взаимодействия претерпевает существенное изменение, она стремится к значению, не зависящему от первоначального значения этой силы. В результате этого на больших расстояниях ($z \gg z_r$) коэффициент диффузии не зависит от координаты, а среднеквадратичный разброс по продольному импульсу пропорционален $z^{1/2}$. В этом случае реализуется кинетический этап диффузии электронов в импульсном пространстве, их движение становится полностью случайным. Заметим, что при $z_c \ll z < z_r$ коэффициент диффузии зависит линейно от координаты z . Это связано с увеличением числа электронов-излучателей, в области влияния которых находится пробный электрон. При этом увеличение числа таких электронов-излучателей происходит благодаря увеличению линейных размеров области влияния с ростом z .

Как следует из приведенных выше расчетов, радиационное взаимодействие электронов может приводить к увеличению энергетического разброса в пучках, которые используются для получения когерентного электромагнитного излучения нанометрового и более коротковолнового диапазонов длин волн. Действительно, на входе в ондулятор такие пучки должны иметь малый энергетический разброс. На начальной стадии самопроизвольного усиления спонтанного излучения отдельные электроны движутся в некогерентном электромагнитном поле своих соседей под действием случайных сил. Это

приводит к случайным отклонениям импульса электронов от среднего значения и увеличению их энергетического разброса. Например, для электронного пучка и ондулятора с параметрами, приведенными выше (см. рис. 2), увеличение энергетического разброса в результате радиационной релаксации может препятствовать получению когерентного излучения с длиной волны меньшей одного ангстрема.

При движении релятивистских электронов по криволинейным траекториям их энергетический разброс может изменяться также из-за квантовых флуктуаций, обусловленных дискретностью случайных актов излучения фотонов отдельными электронами [15–17]. Увеличение энергетического разброса электронов при движении в ондуляторе, связанного с квантовыми флуктуациями излучения, рассмотрено в работе [18]. При $K^2 \ll 1$ выражение для энергетического разброса, обусловленного квантовыми эффектами, принимает вид

$$\langle (\Delta\gamma)^2 \rangle_{qf} = \lambda_c r_e \gamma_0^4 k_u^3 K^2 z,$$

где $\lambda_c = \hbar/mc = 3.86 \cdot 10^{-11}$ см. Отношение энергетического разброса, обусловленного классическим (неквантовым) эффектом, к разбросу, обусловленному квантовыми флуктуациями излучения, при $z > z_r$ можно записать в виде

$$\frac{\langle (\Delta\gamma)^2 \rangle}{\langle (\Delta\gamma)^2 \rangle_{qf}} = \frac{K^2 I_b \lambda_u z}{2\gamma_0^3 I_A r_b \lambda_c}.$$

Так, например, для параметров электронного пучка и ондулятора, представленных выше (см. рис. 2), на расстоянии z_{rel} превышение энергетического разброса, обусловленного классическим радиационным эффектом $\langle (\Delta\gamma)^2 \rangle$, по сравнению с разбросом из-за квантовых флуктуаций излучения $\langle (\Delta\gamma)^2 \rangle_{qf}$ достигает примерно $5.8 \cdot 10^2$ при $\lambda = 0.5 \text{ \AA}$ и $2.6 \cdot 10^3$ при $\lambda = 1.5 \text{ \AA}$. Таким образом, увеличение энергетического разброса в электронных пучках, необходимых для реализации самопроизвольного усиления спонтанного излучения при движении в ондуляторе, будет определяться классическими радиационными эффектами, обусловленными влиянием некогерентных электромагнитных полей на движение электронов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Огнивенко, ЖЭТФ **142**, 1067 (2012).
2. В. В. Огнивенко, ЖЭТФ **149**, 230 (2016).
3. Н. Н. Боголюбов, *Проблемы динамической теории в статистической физике*, Гостехиздат, Москва (1946).
4. P. Emma, R. Akre, J. Arthur et al., *Nature Photon.* **4**, 641 (2010).
5. Hitoshi Tanaka, Makina Yabashi et al., *Nature Photon.* **6**, 540 (2012).
6. H. Weise and W. Decking, *Proc. 38th Free-Electron Laser Conf.*, USA, Santa Fe (2017), p. 9.
7. R. Ganter, G. Aeppli, J. Alex et al., *Proc. 39th Free-Electron Laser Conf.*, Germany, Hamburg (2019), p. 753.
8. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, т. 1, *Элементарные функции*, Наука, Москва (1981).
9. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, под ред. М. Абрамовица, И. Стиган, Наука, Москва (1979); Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, *Специальные функции. Формулы, графики, таблицы*, Наука, Москва (1977).
10. Д. Уленбек, Д. Форд, *Лекции по статистической механике*, Мир, Москва (1965).
11. В. П. Силин, *Введение в кинетическую теорию газов*, Наука, Москва (1971).
12. P. Sprangle and R. A. Smith, *Phys. Rev. A* **21**, 293 (1980).
13. K. J. Kim, *Nucl. Instr. Meth. A* **250**, 396 (1986).
14. C. Pellegrini, *Particle Accelerators* **33**, 159 (1990).
15. А. А. Соколов, И. М. Тернов, *ДАН СССР* **97**, 823 (1954).
16. M. Sands, *Phys. Rev.* **97**, 470 (1955).
17. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, ЖЭТФ **30**, 207 (1956).
18. E. L. Saldin, E. A. Schneidmiller, and M. V. Yurkov, *Nucl. Instr. Meth. A* **381**, 545 (1996).