

# ЧИСЛО СОЛИТОНОВ, ПОРОЖДАЕМЫХ ИЗ ИНТЕНСИВНОГО НАЧАЛЬНОГО ИМПУЛЬСА ПРИ АСИМПТОТИЧЕСКИ БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ

*А. М. Камчатнов\**

*Институт спектроскопии Российской академии наук  
108840, Троицк, Москва, Россия*

*Московский физико-технический институт  
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 31 августа 2020 г.,  
после переработки 21 сентября 2020 г.  
Принята к публикации 21 сентября 2020 г.

На основе теоремы Гуревича и Питаевского о числе осцилляций, входящих в область дисперсионной ударной волны при эволюции нелинейного импульса, предложен способ вывода формул для числа солитонов, на которые распадается достаточно интенсивный начальный импульс в виде локализованной простой волны при асимптотически больших временах. В случае интегрируемых уравнений этим методом воспроизводятся формулы типа Карпмана, следующие из квазиклассического приближения для ассоциированной с рассматриваемым уравнением линейной спектральной задачи. Показано на конкретных примерах, что в случае неинтегрируемых уравнений получают выражения, предложенные ранее путем формального продолжения решения модуляционных уравнений Уизема на бездисперсионную область волны.

DOI: 10.31857/S0044451021010065

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, если в нелинейной волновой системе могут распространяться солитоны в виде, предположим, положительных импульсов рассматриваемой физической переменной, то достаточно интенсивное начальное возмущение того же знака распадается в конечном счете на некоторое число солитонов. Поскольку число образующихся солитонов является наиболее просто измеряемым параметром в процессах, включающих рождение солитонов, методы расчета этого числа имеют большое значение в теории солитонов. В случае нелинейных волновых уравнений, к которым применим метод обратной задачи рассеяния, параметры получающихся солитонов могут быть найдены из дискретного спектра ассоциированной с уравнением линейной задачи (см., например, [1]). В частности, число солитонов равно числу дискретных собственных значений в этой

линейной задаче, и если это число велико, то к линейной спектральной задаче применим квазиклассический метод, выражающий параметры солитонов через начальную форму импульса. Например, уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ), которое мы напишем здесь в стандартных безразмерных переменных,

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

ассоциировано со спектральной задачей Шредингера [2]  $\psi_{xx} = -(\lambda + u)\psi$ , и если начальному распределению  $u = u_0(x) \geq 0$ ,  $u_0(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ , соответствует большое число собственных значений  $-\lambda_i > 0$ , то известные из квантовой механики формулы метода ВКБ дают для их числа  $N$  простое приближенное выражение Карпмана [3, 4]:

$$N \approx \frac{1}{\pi} \int \sqrt{u_0(x)} dx. \quad (2)$$

Аналогичные выражения могут быть получены и для других нелинейных волновых уравнений, являющихся полностью интегрируемыми. Однако такой подход ограничен лишь относительно узким (хотя и важным) классом таких уравнений и, кроме того,

\* E-mail: kamch@isan.troitsk.ru

он оставляет в тени процесс трансформации изначально широкого и гладкого распределения  $u_0(x)$  в набор солитонных импульсов

$$u_i(x, t) = \frac{-\lambda_i}{\operatorname{ch}^2[\sqrt{-\lambda_i}(x + 4\lambda_i t)]}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Здесь используется лишь факт, что при эволюции  $u(x, t)$  согласно уравнению КдФ (1) спектр линейной задачи не изменяется и начальная «перевернутая яма» с большим числом собственных значений трансформируется в  $N$  более узких и низких импульсов (3), каждый из которых отвечает своему собственному значению  $-\lambda_i$ .

Детальная картина эволюции широкого и интенсивного начального импульса была предложена Гуревичем и Питаевским [5], согласно ей изначально гладкий импульс в процессе эволюции «опрокидывается» с образованием на его фронте дисперсионной ударной волны (ДУВ), которую можно представить в виде промодулированного периодического решения рассматриваемого уравнения. Эволюция ДУВ описывается модуляционными уравнениями для параметров, характеризующих периодическое решение, и в работе Уизема [6] такие модуляционные уравнения для периодических решений уравнения КдФ были получены путем усреднения законов сохранения. В этом случае имеются три модуляционных параметра  $r_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , являющихся римановыми инвариантами системы Уизема, которому удалось преобразовать свою систему модуляционных уравнений к диагональному виду. В работе [5] Гуревич и Питаевский рассмотрели типичные ДУВ, возникающие при опрокидывании волны. В рассматриваемом нами случае, когда начальный импульс  $u_0(x)$  представляет собой возвышение на нулевом фоне, волна опрокидывается на переднем фронте, и на этом своем крае ДУВ вырождается в солитонное решение с  $-\lambda = r_3 = r_2 > r_1 = 0$ , распространяющееся по невозмущенному фону. Задний малоамплитудный край ДУВ движется по неоднородному и, вообще говоря, эволюционирующему фону импульса с групповой скоростью, определяемой локальными значениями  $r_1 = r_2 = 0$  и  $r_3 > 0$ . Решение уравнений Уизема для общей формы локализованного начального распределения было получено в работе [7], и из него следует формула для распределения волнового числа, т. е. плотности длин волн, вдоль ДУВ. При асимптотически больших временах ДУВ распространяется на весь импульс и каждая длина волны соответствует одному солитону в пределе  $t \rightarrow \infty$ . Эта теория воспроизводит в асимптотическом пределе результаты Карпмана и, в частнос-

ти, формулу (2) для числа солитонов. Таким образом, трансформация изначально гладкого импульса в набор солитонов происходит через промежуточную стадию образования ДУВ и ее распространения на весь импульс с последующим распадом на отдельные солитоны. Развитая теория дает удовлетворительную картину явления в целом, но в количественном отношении она применима лишь к полностью интегрируемым уравнениям, и поэтому необходимо хотя бы частичное ее обобщение на любые нелинейные волновые уравнения, допускающие устойчивые солитонные решения. В настоящей работе мы покажем, что формула для числа солитонов, порождаемых начальным импульсом в виде простой волны, распространяющейся в неподвижную среду, может быть выведена для весьма широкого класса нелинейных волновых уравнений без использования метода обратной задачи рассеяния.

## 2. КВАЗИПРОСТЫЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

Обсудим здесь некоторые свойства рассматриваемого класса начальных импульсов, соответствующих однонаправленному их распространению вглубь покоящейся среды. Фактически, во многих реальных задачах такие начальные условия возникают естественным образом, так как в случае плоских волн с единственной существенной пространственной координатой  $x$  любой начальный импульс распадается со временем на два импульса, распространяющихся в противоположных направлениях оси  $x$ . Такие однонаправленные волны до момента опрокидывания, пока их форма остается достаточно плавной и поэтому дисперсионными эффектами можно пренебречь, являются простыми, т. е. в них все физические переменные могут быть выражены через одну из них. Для большого числа физических систем с двумя физическими переменными это означает, что можно ввести такие их комбинации  $r_{\pm}$ , называемые бездисперсионными римановыми инвариантами, что вдоль каждой простой волны один из этих инвариантов постоянен, а другой изменяется [8]. Если тем или иным образом учесть дисперсию, то мы придем к нелинейному волновому уравнению для однонаправленного распространения волны, и частным примером такого уравнения является уравнение КдФ (1) с единственной изменяющейся переменной  $u$ . Возникающая при опрокидывании такой волны ДУВ является квазипростой [9], когда она распро-

страняется вглубь однородной покоящейся среды с постоянными физическими параметрами, т. е. с постоянными бездисперсионными римановыми инвариантами  $r_{\pm}$ . В частности, в теории, сводящейся к уравнению КдФ, один бездисперсионный риманов инвариант (скажем,  $r_-$ ) предполагается постоянным по определению, а если, кроме того, импульс распространяется в покоящуюся среду, то внутри нее  $r_+$  также постоянен и может быть выбран равным нулю подходящим преобразованием переменных. В теории Гуревича–Питаевского он «сшивается» с римановым инвариантом  $r_1$  системы Узема, так что в квазипростой волне, динамика которой описывается уравнением КдФ, риманов инвариант  $r_1$  имеет постоянное нулевое значение и все физические переменные выражаются через  $r_2$  и  $r_3$ . В случае неинтегрируемых уравнений римановы инварианты системы Узема отсутствуют, но тем не менее квазипростые ДУВ обладают некоторыми свойствами, упрощающими их исследование.

Прежде всего, Гуревич и Мещеркин предположили в работе [10], что даже в неинтегрируемом случае опрокидывание простой волны, распространяющейся в неподвижную среду, ведет к образованию единственной ДУВ, соединяющей состояния среды с одинаковыми значениями одного из бездисперсионных римановых инвариантов. Сравнение с результатами численных расчетов показывает, что это предположение выполняется с хорошей точностью для не слишком большой амплитуды волны, и мы ограничимся обсуждением именно такого случая.

Далее, малоамплитудный край ДУВ распространяется с групповой скоростью линейной волны, отвечающей закону дисперсии  $\omega = \omega(u, k)$ , где  $u$  — локальное значение примыкающего к этому краю фона, а волновое число  $k$  удовлетворяет указанному Уземом [6] закону сохранения числа волн:

$$k_t + \omega_x = 0. \tag{4}$$

Здесь  $k/(2\pi)$  имеет смысл «плотности волн», т. е. числа длин волн, приходящихся на единицу длины, а  $\omega/(2\pi)$  играет роль «плотности потока волн». В силу известной оптико-механической аналогии (см., например, [11]) движение малоамплитудного края, являющегося пакетом из группы линейных волн с частотой несущей волны  $\omega(k)$ , подчиняется уравнениям Гамильтона

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \quad \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}, \tag{5}$$

где первое уравнение соответствует определению групповой скорости, а второе согласуется с (4) при

дифференцировании вдоль траектории пакета. В нашей задаче существенно, что зависимость гамильтониана от  $x$  и  $t$  осуществляется через посредство фоновой амплитуды  $u = u(x, t)$ , примыкающей к малоамплитудному краю и являющейся решением бездисперсионного уравнения

$$u_t + V_0(u)u_x = 0. \tag{6}$$

В частности, из этого уравнения и второго уравнения (5) получаем соотношения

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dt} &= -\frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} - V_0 \right) \frac{\partial u}{\partial x}, \end{aligned} \tag{7}$$

так что их отношение дает обыкновенное дифференциальное уравнение для  $k(u)$ :

$$\frac{dk}{du} = \frac{\partial \omega / \partial u}{V_0(u) - \partial \omega / \partial k}. \tag{8}$$

Оно было выведено Элем в работе [12] из закона сохранения числа волн (4) на основе анализа свойств характеристик системы Узема. Начальное условие для этого уравнения можно определить из того обстоятельства, что в момент опрокидывания на границе с покоящейся средой, где  $u = 0$ , в приближении Узема ДУВ сжимается в точку, так что малоамплитудный край соединяется с солитонным краем, на котором  $k = 0$ , и, следовательно,

$$k(0) = 0. \tag{9}$$

Решение уравнения (8) с начальным условием (9) дает нам волновое число  $k$  вдоль пути малоамплитудного края ДУВ как функцию от локального значения примыкающего фона  $u$ . Например, в случае эволюции начального импульса, подчиняющегося уравнению КдФ, решение указанной задачи с  $V_0 = 6u$  и  $\omega(u, k) = 6uk - k^3$  дает для этого волнового числа значение  $k = 2\sqrt{u}$ . Поэтому при эволюции импульса в форме ступеньки с амплитудой  $u_0$  волновое число на малоамплитудном крае ДУВ равно  $k_0 = 2\sqrt{u_0}$  и групповая скорость движения этого края равна  $v_g = 6u_0 - 3k_0^2 = -6u_0$  в согласии с полным решением задачи Гуревича–Питаевского, полученным в работе [5]. Этот подход допускает обобщение на солитонный край квазипростых ДУВ [12], что позволило найти основные параметры ДУВ в задаче об эволюции ступеньки для большого числа физически важных неинтегрируемых уравнений [12–20].

Если не накладывать на решение уравнения (8) граничных условий, то оно будет содержать постоянную интегрирования  $q$ :

$$k = k(u, q). \tag{10}$$

При подстановке этой функции в первое уравнение Гамильтона (5) мы получим в качестве его решения некую траекторию движения волнового пакета на неоднородном и изменяющемся со временем фоне  $u = u(x, t)$ , причем вдоль этой траектории  $q = \text{const}$ , т.е.  $q_t + v_g q_x = 0$ . На малоамплитудном крае ДУВ это уравнение совпадает с одним из предельных уравнений Уизема, тогда как другим предельным уравнением является (6). Таким образом, система

$$u_t + V_0(u)u_x = 0, \quad q_t + v_g q_x = 0 \tag{11}$$

продолжает систему модуляционных уравнений Уизема за пределы дисперсионной ударной волны, а переменная  $q$  является римановым инвариантом модуляционных уравнений для линейных волн. Система (11) была недавно получена в работе [21] путем непосредственной диагонализации модуляционных уравнений (для солитонного края аналогичная система получена в [22]; общее обсуждение гамильтонова подхода к теории квазипростых ДУВ имеется в [23]).

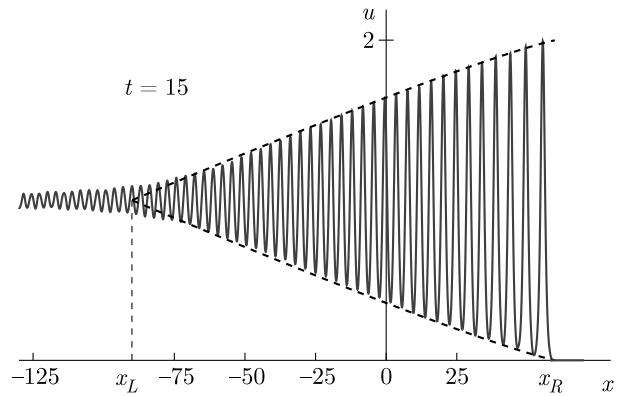
Наконец, в конце работы [24] Гуревич и Питаевский высказали важное замечание, что групповая скорость малоамплитудного края  $v_g$  отличается от фазовой скорости волны  $V$  в этой точке, и поэтому длина области колебаний увеличивается за единицу времени на  $|v_g - V|$ , где знак модуля учитывает возможность разных знаков дисперсии и нелинейности. Следовательно, число периодов волны в ДУВ увеличивается со скоростью

$$\frac{dN}{dt} \approx \frac{1}{2\pi} |k(v_g - V)|, \tag{12}$$

где  $k$  — волновое число на малоамплитудном крае. Например, в задаче Гуревича–Питаевского о ступеньке в теории КдФ [5] мы имеем  $k = k_0 = 2\sqrt{u_0}$ ,  $v_g = \partial\omega/\partial k|_{k=k_0} = -6u_0$ ,  $V = \omega/k|_{k=k_0} = 2u_0$ , так что число осцилляций в ДУВ через время  $t$  равно

$$N \approx (8/\pi)u_0^{3/2}t. \tag{13}$$

Для времени  $t = 15$  эта формула при  $u_0 = 1$  предсказывает значение числа осцилляций  $N \approx 38$ , попадающих в область ДУВ. Это число совпадает с числом осцилляций на графике рис. 1, полученном численным решением уравнения КдФ, где область



**Рис. 1.** Профиль ДУВ, образующейся в теории уравнения КдФ при эволюции начального разрыва. Начальная высота «ступеньки» при  $x < 0$  равна единице. Сплошной линией показан результат численного решения уравнения КдФ (1), а штриховыми линиями изображены огибающие промодулированной волны согласно решению уравнений Уизема, полученному в работе [5]. На левой границе ДУВ при  $x = x_L(t)$  амплитуда ДУВ в приближении Гуревича–Питаевского обращается в нуль

ДУВ определена огибающими промодулированной волны согласно теории Гуревича–Питаевского.

Если обратиться к задаче о числе солитонов, образующихся из локализованного импульса, то, интегрируя формулу (12) вдоль пути малоамплитудного края  $x_L(t)$  от момента опрокидывания  $t = 0$  до времени полного поглощения импульса ударной волной, получаем выражение [25]

$$N \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |k(v_g - V)| dt. \tag{14}$$

Групповая скорость малоамплитудного края, являющаяся в теории Уизема гидродинамической величиной, имеет в этом случае смысл скорости границы, отделяющей колебания, превращающиеся при  $t \rightarrow \infty$  в солитоны, от линейного волнового пакета. Неточность в определении положения малоамплитудного края ДУВ в приближении Гуревича–Питаевского становится несущественной в асимптотическом пределе большого числа солитонов  $N \gg 1$ . Это основное предположение нашего подхода к вычислению числа солитонов подтверждается также тем, что в частном случае теории КдФ на этом пути, как будет показано ниже, воспроизводится формула Карпмана (2). Кроме того, в работах [26, 27] теория Гуревича–Питаевского для уравнения КдФ воспроизведена строгим асимптотическим анализом в рамках метода задачи Римана–Гильберта, что подтверждает основные предположения приближенной тео-

рии Уизема. Поэтому мы будем предполагать применимость общего метода Уизема и теории Гуревича–Питаевского для ДУВ также и к неинтегрируемым уравнениям. При этом подразумевается, что возникающие в процессе эволюции солитоны должны быть устойчивы [28], что мы будем предполагать в дальнейшем.

Исключив фазовую скорость  $V = \omega/k$ , представим формулу (14) в виде

$$N \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left| k \frac{\partial \omega}{\partial k} - \omega \right| dt, \quad (15)$$

где подынтегральное выражение (с точностью до знака модуля) имеет простой физический смысл: согласно закону сохранения числа волн (4) величина  $\omega/(2\pi)$ , вычисленная на малоамплитудном крае ДУВ, является потоком числа волн в область ДУВ, но из-за движения этого края с групповой скоростью  $\partial\omega/\partial k$  частоту  $\omega$  надо вычислять с учетом сдвига Доплера. Если связать теперь с волновым пакетом, движущимся вдоль малоамплитудного края, движение классической частицы с импульсом  $k$  и гамильтонианом  $\omega(u, k)$ , то подынтегральное выражение становится лагранжианом этой частицы, а интеграл представляет собой классическое действие  $S$ , соответствующее движению этой частицы вдоль всего импульса:

$$N \approx \frac{S}{2\pi}. \quad (16)$$

Таким образом, если мы можем найти подынтегральное выражение в (15) вдоль пути малоамплитудного края в зависимости от времени, то тем самым мы определим число солитонов, порождаемых импульсом. Задача о движении малоамплитудного края ДУВ для неинтегрируемых уравнений была решена в [29,30] и здесь мы применим развитую в этих работах теорию к вычислению числа солитонов для ряда неинтегрируемых уравнений. Приведем здесь необходимые формулы.

Пусть начальный импульс имеет профиль  $u = u_0(x)$ . Тогда в момент времени  $t$  его гладкий профиль вплоть до границы с ДУВ представляется известным решением уравнения (6):

$$x - V_0(u)t = \bar{x}(u), \quad (17)$$

где  $\bar{x}(u)$  — функция, обратная начальному профилю  $u_0(x)$ . Нас интересует случай локализованного импульса, имеющего максимум  $u_m$  в некоторой точке  $x_m$ . Кроме того, мы считаем импульс равным нулю в области покоящейся среды  $x > 0$  и стремимся

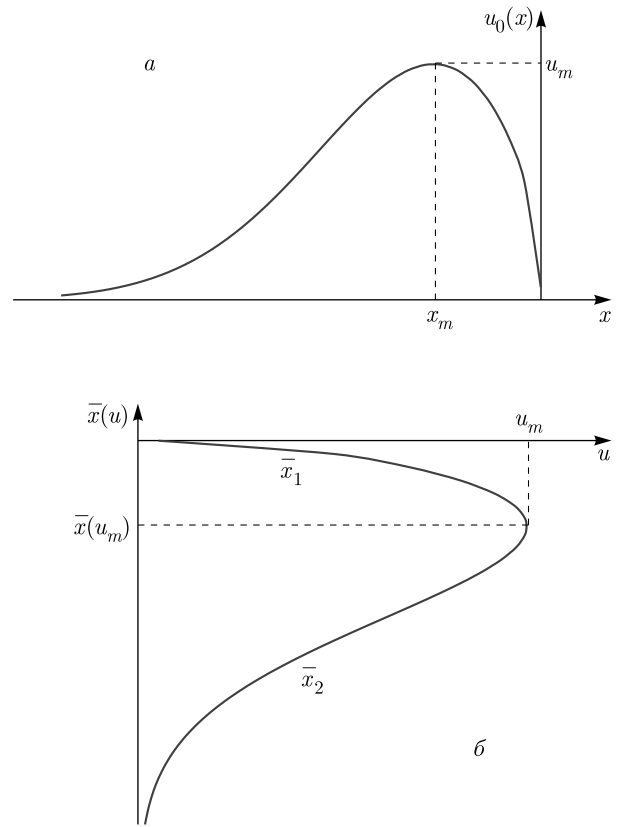


Рис. 2. а) Начальный профиль  $u_0(x)$  импульса. б) Обратная функция  $\bar{x}(u)$ , состоящая из двух ветвей  $\bar{x}_1(u)$  и  $\bar{x}_2(u)$

к нулю при  $x \rightarrow -\infty$ ; см. рис. 2а. Тогда обратная функция состоит из двух ветвей  $\bar{x}_1(u)$  и  $\bar{x}_2(u)$ , показанных на рис. 2б, и каждой ветви соответствует решение (17). Сначала малоамплитудный край ДУВ движется по однозначной части решения, соответствующего ветви  $\bar{x}_1(u)$ , а после достижения точки максимума  $u_m$  он движется вдоль решения, соответствующего ветви  $\bar{x}_2(u)$ . За время  $dt$  этот край пройдет расстояние  $dx = v_g dt$  и, предполагая параметрическую зависимость  $t = t(u), x = x(u)$  вдоль пути малоамплитудного края, находим, что вдоль него удовлетворяется уравнение

$$\frac{dx}{du} - v_g \frac{dt}{du} = 0. \quad (18)$$

Этот же элемент пути  $dx$  за время  $dt$  соответствует прохождению малоамплитудным краем ДУВ участка граничащего с ДУВ гладкого решения (17), так что, продифференцировав (17) по  $u$  и исключив  $dx/du$  с помощью (18), мы придем к уравнению

$$(v_g - V_0) \frac{dt}{du} - \frac{dV_0}{du} t = \frac{d\bar{x}}{du}. \quad (19)$$

Его коэффициенты зависят от  $u$  и  $k$ , но вдоль малоамплитудного края зависимость  $k(u)$  нам известна из решения уравнения (8), так что уравнение (19) представляет собой простое линейное уравнение для функции  $t(u)$ , которое для ветви  $\bar{x}_1(u)$  должно решаться с начальным условием, гласящим, что опрокидывание происходит в момент  $t = 0$  в точке с  $u = 0$ , т. е.  $t(0) = 0$ . Полученное решение справедливо до момента времени  $t_m = t(u_m)$ , в который малоамплитудный край достигает точки максимума распределения. При  $t > t_m$  уравнение (19) решается для ветви  $\bar{x}_2(u)$  с условием  $t(u_m) = t_m$ . В частном случае уравнения КдФ эта процедура была предложена в работе [9] с использованием преобразования годографа, а ее обобщение на неинтегрируемые уравнения было дано в работах [29, 30]. В результате подынтегральное выражение в (14) может быть представлено как функция от  $u$ , а функция  $t(u)$  нам известна из решения линейного уравнения (19), так что нахождение числа солитонов сводится к вычислению интеграла от известной функции от фоновой амплитуды  $u$ . Рассмотрим несколько примеров, когда такое вычисление может быть проведено относительно просто.

### 3. ПРИМЕРЫ

Мы начнем с уравнений, в которых уже учтен переход к однонаправленному течению среды, так что не требуется вводить бездисперсионные римановы инварианты  $r_{\pm}$ .

#### 3.1. Обобщенное уравнение КдФ

Введение дисперсионной поправки в уравнение (6) приводит к обобщенному уравнению КдФ:

$$u_t + V_0(u)u_x + u_{xxx} = 0, \quad V_0(0) = 0. \quad (20)$$

Условия, которые накладываются на функцию  $V_0(u)$  для существования солитонов и их устойчивости, были получены в работе [31], и мы предполагаем их выполненными.

Линеаризуя уравнение (20), находим закон дисперсии линейных волн

$$\omega(u, r) = V_0(u)k - k^3, \quad (21)$$

так что уравнение (8) сводится [12] к уравнению

$$3k \frac{dk}{du} = V_0'(u),$$

решение которого с начальным условием (7) имеет вид (см. [12])

$$k(u) = \sqrt{\frac{2}{3}V_0(u)}. \quad (22)$$

Следовательно, групповая скорость волны на малоамплитудном крае с фоновым значением  $u$  равна  $v_g(u) = -V_0(u)$ . Поэтому (19) превращается в уравнение

$$-2V_0(u) \frac{dt}{du} - V_0'(u)t = \bar{x}'(u) \quad (23)$$

с решением [29]

$$t(u) = -\frac{1}{2\sqrt{V(u)}} \int_0^u \frac{\bar{x}'_1(u_1)}{\sqrt{V(u_1)}} du_1, \quad 0 < t < t_m,$$

$$t(u) = -\frac{1}{2\sqrt{V(u)}} \left\{ \int_0^{u_m} \frac{\bar{x}'_1(u)}{\sqrt{V(u_1)}} du_1 + \int_{u_m}^u \frac{\bar{x}'_2(u)}{\sqrt{V(u_1)}} du_1 \right\}, \quad t > t_m. \quad (24)$$

Подстановка всех этих выражений в (14) сводит задачу после простых преобразований к вычислению интеграла

$$N = \frac{(2/3)^{3/2}}{2\pi} \left\{ \int_0^{u_m} du \frac{V_0'(u)}{2} \int_u^{u_m} \frac{(\bar{x}'_2 - \bar{x}'_1) du_1}{\sqrt{V_0(u_1)}} + \int_0^{u_m} \sqrt{V_0(u)} (\bar{x}'_2 - \bar{x}'_1) du \right\}. \quad (25)$$

Здесь двойной интеграл сводится к однократному с помощью очевидного интегрирования по частям с учетом  $V_0(0) = 0$ , так что согласно определению функции  $\bar{x}(u)$  мы получаем окончательное выражение:

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{u_m} \sqrt{\frac{2}{3}V_0(u)} (\bar{x}'_2 - \bar{x}'_1) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \sqrt{\frac{2}{3}V_0(u_0(x))} dx. \quad (26)$$

Вспоминая выражение (22) для волнового числа, мы видим, что полученный результат можно записать как

$$N \approx \frac{1}{2\pi} \int k[u_0(x)] dx, \quad (27)$$

что совпадает с известной формулой Карпмана (2) в частном случае интегрируемого уравнения КдФ, когда  $V_0(u) = 6u$  и  $k(u) = 2\sqrt{u}$ .

Следует подчеркнуть, что в случае уравнения КдФ соотношение  $k(u) = 2\sqrt{u}$  является непосредственным следствием ассоциированной с уравнением КдФ спектральной задачи Шредингера  $\psi_{xx} = -(u + \lambda)\psi$  с «потенциалом»  $u$  в пределе  $\lambda \rightarrow 0$ . В случае неинтегрируемых уравнений ассоциированная спектральная задача отсутствует и соотношение (22) получается интегрированием соответствующего уравнения (8), которое является следствием уравнений Гамильтона для движения волнового пакета на малоамплитудном крае ДУВ вдоль эволюционирующего со временем гладкого фона.

### 3.2. Уравнение «магмы»

Другим интересным примером однонаправленного распространения нелинейных волн с дисперсией являются волны, распространяющиеся вдоль струи вязкой жидкости, всплывающей в окружении упругой среды. Такие волны описываются так называемым уравнением «магмы», впервые выведенным в геофизических приложениях для описания течения магмы [32, 33] через земную мантию. Это уравнение имеет солитонные решения [34], что было подтверждено в экспериментах со струями жидкости [35, 36]. Простой вывод уравнения магмы, а также теория ДУВ в задаче Гуревича – Питаевского о распаде начального распределения в виде ступеньки, представлены в работе [16], где можно найти ссылки на более ранние работы. Мы запишем уравнение магмы в форме

$$u_t + (u^2)_x - [u^2(u^{-1}u_t)_x]_x = 0, \quad (28)$$

где  $u(x, t)$  имеет смысл локальной площади сечения всплывающей струи на высоте  $x$  в момент времени  $t$ . Линеаризация этого уравнения приводит к закону дисперсии

$$\omega(u, k) = \frac{2uk}{1 + uk^2}. \quad (29)$$

Фазовая скорость  $V(u, k) = \omega/k = 2u/(1 + uk^2)$  в бездисперсионном пределе  $k \rightarrow 0$  равна  $V_0(u) = 2u$ , так что эволюция плавных волн подчиняется уравнению

$$u_t + 2uu_x = 0. \quad (30)$$

Для описания движения малоамплитудного края ДУВ, где  $k = k(u)$ , удобно ввести переменную [16]

$$\alpha(u) = \frac{1}{1 + uk^2(u)}. \quad (31)$$

Тогда вдоль пути этого края уравнение (8) сводится к следующему:

$$\frac{d\alpha}{du} = -\frac{(\alpha + 1)\alpha}{u(2\alpha + 1)}. \quad (32)$$

Считая, что импульс распространяется в область с единичной площадью  $u = 1$ , откуда следует начальное условие  $\alpha(1) = 1$ , получаем решение этого уравнения в форме [16]

$$u = \frac{2}{\alpha(\alpha + 1)}, \quad k(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \alpha^2)}. \quad (33)$$

Поскольку переменные  $u$  и  $\alpha$  однозначно связаны друг с другом найденным соотношением, будем задавать начальное состояние волны распределением  $\alpha = \alpha_0(x)$ , имеющим две ветви обратной функции  $\bar{x}_{1,2}(\alpha)$ . Переписанное через переменную  $\alpha$  уравнение (30)

$$\alpha_t + \frac{4}{\alpha(\alpha + 1)}\alpha_x = 0 \quad (34)$$

имеет для каждой ветви решение

$$x - \frac{4}{\alpha(\alpha + 1)}t = \bar{x}(\alpha). \quad (35)$$

Малоамплитудный край движется по гладкому фону, описываемому этими решениями, с групповой скоростью

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = 8 - \frac{12}{\alpha + 1} \quad (36)$$

и условие согласования уравнения движения этого края

$$\frac{dx}{d\alpha} - v_g \frac{dt}{d\alpha} = 0 \quad (37)$$

с эволюцией примыкающего фона согласно формуле (35) приводит к уравнению

$$\frac{4(\alpha - 1)(2\alpha + 1)}{\alpha(\alpha + 1)} \frac{dt}{d\alpha} + \frac{4(2\alpha + 1)}{\alpha^2(\alpha + 1)^2} t = \bar{x}'(\alpha). \quad (38)$$

Из выражений (33) ясно, что переменная  $\alpha$  находится в интервале  $0 < \alpha < 1$  и в момент опрокидывания импульса  $t = 0$  равна единице, так что на начальном этапе эволюции ДУВ решение уравнения (38) имеет вид

$$t_1(\alpha) = \frac{\alpha}{4\sqrt{1 - \alpha^2}} \int_{\alpha}^1 \frac{(1 + \alpha)^{3/2} \bar{x}'_1(\alpha)}{(1 + \alpha)^{1/2} (1 + 2\alpha)} d\alpha. \quad (39)$$

Оно справедливо до момента  $t_m = t_1(\alpha_m)$ , где минимальное значение  $\alpha_m$  отвечает максимуму в начальном распределении  $u$ . После этого момента уравнение (38) решается с начальным условием  $t(\alpha_m) = t_m$ , что дает

$$t_2(\alpha) = \frac{\alpha}{4\sqrt{1-\alpha^2}} \left\{ \int_{\alpha_m}^1 \frac{(1+\alpha)^{3/2} \bar{x}'_1(\alpha)}{(1+\alpha)^{1/2}(1+2\alpha)} d\alpha + \int_{\alpha}^{\alpha_m} \frac{(1+\alpha)^{3/2} \bar{x}'_2(\alpha)}{(1+\alpha)^{1/2}(1+2\alpha)} d\alpha \right\}. \quad (40)$$

Для вычисления количества солитонов, порождаемых импульсом, мы подставляем закон дисперсии (29) и выражение (33) для волнового числа в формулу (14) и с помощью (38) получаем

$$N = \frac{1}{2\pi} \int \frac{4\sqrt{2}(1-\alpha^2)^{3/2}}{(1+\alpha)^2} \frac{dt}{d\alpha} d\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{2\pi} \int_{\alpha_m}^1 \frac{(1-\alpha^2)^{3/2}}{(1+\alpha)^2} \left[ \frac{1}{\alpha(1-\alpha^2)} (t_2 - t_1) - \frac{\alpha(1+\alpha)}{4(1-\alpha)(1+2\alpha)} (\bar{x}'_2 - \bar{x}'_1) \right] d\alpha. \quad (41)$$

При подстановке сюда формул (39) и (40) возникает двойной интеграл, который снова преобразуется к однократному с помощью интегрирования по частям, так что после простых преобразований найдем

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_m}^1 \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{2}} (\bar{x}'_2(\alpha) - \bar{x}'_1(\alpha)) d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \sqrt{\frac{1-\alpha_0(x)^2}{2}} dx. \quad (42)$$

С учетом (33) это выражение также совпадает с (27).

### 3.3. Уравнение Серра

Когда мы имеем дело с уравнениями, описывающими распространение волн в обоих направлениях, мы должны ограничиться начальными условиями в виде простой волны, опрокидывание которой приводит к образованию квазипростой ДУВ. Мы проиллюстрируем этот подход на примере уравнений Серра [37], описывающих динамику мелкой воды без предположения о малости нелинейных эффектов. Эти уравнения позднее выводились заново в работах [38, 39] и поэтому в литературе часто называются также уравнениями Су–Гарднера или Грина–Нахди. Мы запишем эти уравнения в стандартной форме с безразмерными переменными:

$$h_t + (hu)_x = 0, \quad (43)$$

$$u_t + uu_x + h_x = \frac{1}{3h} [h^3(u_{xt} + uu_{xx} - (u_x)^2)]_x,$$

где  $h$  — полная локальная глубина жидкости,  $u$  — горизонтальная скорость течения, усредненная по глубине жидкости.

Если пренебречь дисперсионными эффектами, т. е. опустить в (43) все члены с высшими производными, то мы возвращаемся к известным уравнениям мелкой воды (см., например, [8]):

$$h_t + (hu)_x = 0, \quad u_t + uu_x + h_x = 0, \quad (44)$$

совпадающими по форме с уравнениями газовой динамики с  $h$  и  $u$ , играющими роль плотности газа и скорости его течения, соответственно, и с уравнением состояния  $p = h^2/2$ , где  $p$  — аналог «давления». «Скорость звука» в таком газе равна  $c = (dp/dh)^{1/2} = \sqrt{h}$ . Эти уравнения удобно преобразовать к новым переменным — упомянутым во Введении бездисперсионным римановым инвариантам

$$r_+ = u/2 + \sqrt{h}, \quad r_- = u/2 - \sqrt{h}, \quad (45)$$

так что уравнения (44) принимают вид

$$\frac{\partial r_+}{\partial t} + v_+ \frac{\partial r_+}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r_-}{\partial t} + v_- \frac{\partial r_-}{\partial x} = 0, \quad (46)$$

где характеристические скорости также очень просто выражаются через  $r_{\pm}$ :

$$v_+ = \frac{1}{2}(3r_+ + r_-), \quad v_- = \frac{1}{2}(r_+ + 3r_-). \quad (47)$$

В простой волне один из римановых инвариантов имеет постоянное значение. Мы для определенности будем рассматривать распространяющийся в положительном направлении оси  $x$  импульс возвышения жидкости, вдоль которого постоянен инвариант  $r_- = u/2 - \sqrt{h} = -\sqrt{h_0} = \text{const}$ . В качестве динамической переменной удобно взять локальную скорость звука  $c = \sqrt{h}$ . В покоящейся среде, в которой распространяется импульс, скорость звука имеет постоянное значение  $\sqrt{h_0} = c_0$ . Другие переменные выражаются через скорость звука формулами

$$u = 2(c - c_0), \quad r_+ = 2c - c_0, \quad v_+ = 3c - 2c_0. \quad (48)$$

Второе уравнение (46) удовлетворяется автоматически в силу постоянства  $r_-$ , а первое уравнение принимает форму, аналогичную (30),

$$c_t + (3c - 2c_0)c_x = 0 \quad (49)$$

и имеет решение

$$x - (3c - 2c_0)t = \bar{x}(c), \quad (50)$$



где  $\bar{x}(c)$  — состоящая из двух ветвей функция, обратная к начальному распределению локальной скорости звука  $c(x, 0)$  в виде локализованного импульса, обращаемого в  $c_0$  при  $x > 0$  и  $x \rightarrow -\infty$ .

Мы предполагаем, что решение (50) опрокидывается в момент времени  $t = 0$  с образованием ДУВ, малоамплитудный край которой распространяется сначала по ветви  $\bar{x}_1(c)$ , а затем, после прохождения точки максимума распределения, по ветви  $\bar{x}_2(c)$ . Пусть жидкость имеет в некоторой точке локальные значения скорости течения  $u$  и глубины  $h$ . Тогда для закона дисперсии линейных волн, распространяющихся по жидкости в окрестности этой точки, находим выражение

$$\omega(k) = uk + kc(1 + c^4k^2/3)^{-1/2} = k[u + c\alpha(c, k)], \quad (51)$$

где мы, следуя работе [13], ввели функцию

$$\alpha(c, k) = (1 + c^4k^2/3)^{-1/2}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (52)$$

которая характеризует отклонение закона дисперсии от бездисперсионной формулы  $\omega = (u + c)k$ . Зависимость волнового числа от локального значения скорости звука  $c$  на малоамплитудном крае была найдена в [13] методом работы [12], и мы воспроизведем здесь необходимые результаты с небольшими изменениями. На малоамплитудном крае, граничащем с простой волной, волновое число становится функцией  $c$ ,  $k = k(c)$ , так что определяем  $\bar{\alpha}(c) = \alpha(c, k(c))$ , вводим обратную функцию  $c = c(\bar{\alpha})$ , и тогда волновое число можно выразить через переменную  $\bar{\alpha}$ :

$$k(\bar{\alpha}) = \frac{\sqrt{3}}{c^2(\bar{\alpha})} \sqrt{\frac{1}{\bar{\alpha}^2} - 1}. \quad (53)$$

Уравнение (8) превращается в уравнение для  $\bar{\alpha}(c)$ :

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dc} = -\frac{\bar{\alpha}(4 - \bar{\alpha})(1 + \bar{\alpha})}{c(1 + \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2)}, \quad (54)$$

решение которого с начальным условием  $\bar{\alpha}(c_0) = 1$  находится в неявном виде [13, 40]:

$$c(\bar{\alpha}) = \frac{c_0}{\bar{\alpha}^{1/4}} \left(\frac{1 + \bar{\alpha}}{2}\right)^{1/5} \left(\frac{4 - \bar{\alpha}}{3}\right)^{21/20}. \quad (55)$$

В результате уравнения (53) и (55) дают зависимость  $k(c)$  в параметрической форме.

Малоамплитудный край движется с групповой скоростью, которую мы также выразим через  $\bar{\alpha}$ :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = 2[c(\bar{\alpha}) - c_0] + \bar{\alpha}^3 c(\bar{\alpha}). \quad (56)$$

Закон движения этого края, записанный в форме

$$\frac{\partial x}{\partial c} - [2(c - c_0) + c\bar{\alpha}^3] \frac{\partial t}{\partial c} = 0, \quad (57)$$

должен быть согласован с примыкающим к этому краю бездисперсионным решением (50), что приводит [40] к уравнению для  $t(\bar{\alpha})$

$$\bar{\alpha}(1 - \bar{\alpha}^2)(4 - \bar{\alpha}) \frac{dt}{d\bar{\alpha}} - 3t = \Phi(\bar{\alpha}), \quad (58)$$

где мы ввели обозначение

$$\Phi(\bar{\alpha}) = \left. \frac{d\bar{x}}{dc} \right|_{c=c(\bar{\alpha})} \quad (59)$$

для производной обратной функции начального распределения после подстановки в нее  $c = c(\bar{\alpha})$ . Решение этого уравнения с начальным условием  $t(1) = 0$  (считаем  $c_0 = 1$ ) имеет вид [40]

$$t_1(\bar{\alpha}) = \frac{\bar{\alpha}^{3/4}(4 - \bar{\alpha})^{1/20}}{(1 - \bar{\alpha})^{1/2}(1 + \bar{\alpha})^{3/10}} \times \int_1^{\bar{\alpha}} \frac{\Phi_1(z) dz}{z^{7/4}(1 - z)^{1/2}(4 - z)^{21/20}(1 + z)^{7/10}}. \quad (60)$$

Оно справедливо до момента времени  $t_m = t_1(\bar{\alpha}_m)$ , где  $\bar{\alpha}_m$  отвечает максимальному значению  $c_m$  в начальном распределении локальной скорости звука, т. е. находится решением уравнения  $c_m = c(\bar{\alpha}_m)$ , где в правой части стоит функция (55). При  $t > t_m$  аналогичным образом получаем для движения по второй ветви

$$t_2(\bar{\alpha}) = \frac{\bar{\alpha}^{3/4}(4 - \bar{\alpha})^{1/20}}{(1 - \bar{\alpha})^{1/2}(1 + \bar{\alpha})^{3/10}} \times \left\{ \int_1^{\bar{\alpha}_m} \frac{\Phi_1(z) dz}{z^{7/4}(1 - z)^{1/2}(4 - z)^{21/20}(1 + z)^{7/10}} + \int_{\bar{\alpha}_m}^{\bar{\alpha}} \frac{\Phi_2(z) dz}{z^{7/4}(1 - z)^{1/2}(4 - z)^{21/20}(1 + z)^{7/10}} \right\}. \quad (61)$$

Имея выражение (51) для закона дисперсии и зависимость (53) волнового числа от  $\bar{\alpha}$ , легко вычислить поток числа волн в область ДУВ и получить формулу для числа солитонов при  $t \rightarrow \infty$ :

$$N = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\bar{\alpha}}{d\bar{\alpha}} k(\bar{\alpha})c(\bar{\alpha})(1 - \bar{\alpha}^2) \frac{dt}{d\bar{\alpha}} d\bar{\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\alpha}_m}^1 \frac{c(\bar{\alpha})k(\bar{\alpha})}{4 - \bar{\alpha}} [3(t_2 - t_1) + \Phi_2 - \Phi_1] d\bar{\alpha}. \quad (62)$$

Двойной интеграл после подстановки сюда формул (53), (55), (60), (61) сводим к однократному интегрированию по частям, так что после простых преобразований находим окончательный результат:

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\alpha}_m}^1 \frac{c(\bar{\alpha})k(\bar{\alpha})}{4 - \bar{\alpha}} \frac{1 + \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}(1 + \bar{\alpha})} [\Phi_2 - \Phi_1] d\bar{\alpha} = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{c_0}^{c_m} k(c)[\bar{x}'_2(c) - \bar{x}'_1(c)] dc = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 k[c(x, 0)] dx. \quad (63)
 \end{aligned}$$

Мы снова получили формулу (27), и приведенные примеры указывают, что она имеет общий характер. В следующем разделе, следуя методу работ [14, 41], мы дадим более общий ее вывод для рассматриваемого в настоящей работе класса начальных импульсов.

#### 4. ФОРМУЛА ДЛЯ ЧИСЛА СОЛИТОНОВ

На границе с ДУВ риманов инвариант  $q$  (см. уравнения (10), (11)), продолжающий риманов инвариант модуляционной системы Уизема, равен нулю, так что, следуя Гуревичу и Мещеркину [10], мы считаем, что это его значение распространяется на всю область бездисперсионного решения. Тогда на эту область распространяется и функция для волнового числа  $k = k_1(x, t) = k[u(x, t)]$ . Решения уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_1(x,t)} \quad (64)$$

с начальными условиями  $x(0) = x_0, x_0 \leq 0$ , дают нам семейство траекторий пакетов, испущенных из точек  $x = x_0$  с волновыми числами  $k[u_0(x_0)]$  несущей волны. Эти решения можно рассматривать как результат распространения модуляционной теории Уизема на область вне дисперсионной ударной волны. Таким образом, мы получаем единое описание для модуляционной теории вдоль всего импульса, включая его гладкую область, описываемую бездисперсионным решением.

Как мы уже знаем из (12), к моменту времени  $t$  в область ДУВ вошло число волн  $N$ , равное

$$N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \left( \omega - k \frac{d\omega}{dk} \right) dt, \quad (65)$$

где для определенности мы предположили  $V_0(u) > 0, \partial^2 \omega / \partial k^2 < 0$ , и малоамплитудным является левый край  $x_L(t)$  ударной волны, что отвечает выбору знака в подинтегральном выражении (65). Скорость изменения  $dN/dt$  этого числа равна, очевидно,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{2\pi} \left( \omega - k \frac{d\omega}{dk} \right). \quad (66)$$

Теперь мы определяем число волн  $N_1(t)$  в области гладкого решения, соответствующее распределению волнового числа  $k_1(x, t)$  в момент времени  $t$ :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{x_L(t)} k_1(x_1, t) dx_1 = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{x_L(t)} k[u(x_1, t)] dx_1. \quad (67)
 \end{aligned}$$

Вычислим скорость изменения этого числа со временем:

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_1}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \times \\
 &\times \left\{ \frac{dx_L}{dt} k_1(x_L(t), t) + \int_{-l}^{x_L(t)} \frac{\partial k_1(x_1, t)}{\partial t} dx_1 \right\}. \quad (68)
 \end{aligned}$$

Для производной  $dx_L/dt$  мы подставляем  $\partial \omega / \partial k_1$  согласно первому уравнению (5). Далее, волновое число  $k_1(x, t)$  удовлетворяет закону сохранения числа волн (4), так что в подинтегральном выражении второго члена заменяем  $\partial k_1(x_1, t) / \partial t$  на  $-\partial \omega(x_1, t) / \partial x_1$  и после интегрирования получаем

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{1}{2\pi} \left( k \frac{\partial \omega}{\partial k} - \omega \right)_{x=x_L(t)}. \quad (69)$$

Это выражение равно выражению (66), взятому с противоположным знаком, т. е.  $N_1(t) + N(t) = \text{const}$ . Наконец, в пределе  $t \rightarrow \infty$  мы имеем  $N(t) \rightarrow N$  ( $N$  — число солитонов, образовавшихся из импульса) и  $N_1 \rightarrow 0$ , а при  $t \rightarrow 0$  ДУВ отсутствует и  $N(0) = 0, N_1(0) = (1/(2\pi)) \int_{-\infty}^{\infty} k[u(x, 0)] dx$ . С учетом  $u(x, 0) = u_0(x)$  мы приходим к окончательной формуле для числа солитонов

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k[u_0(x)] dx, \quad (70)$$

где функция  $k(u)$  является решением уравнения (8) с граничным условием (7). Это подтверждает справедливость формулы (27) для числа солитонов, порождаемых импульсом простой волны, распространяющейся в неподвижную среду.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы показали, что общее выражение (14) для числа солитонов является эффективным средством вычисления этой важной для эксперимента характеристики нелинейных импульсов при их достаточно долгой эволюции, если ограничиться типичным случаем опрокидывания простой волны, распространяющейся в «неподвижную» среду, и использовать для расчета траектории малоамплитудного края ДУВ метод, предложенный в работах [29, 30]. На этом пути воспроизводится известная формула Карпмана для уравнения КдФ и получены ее обобщения для других физически важных уравнений, не являющихся полностью интегрируемыми, к которым неприменим метод обратной задачи рассеяния. Замечательно, что окончательный результат во всех рассмотренных случаях можно представить в форме (27), полученной на основе некоторых предположений в работах [14, 41], что можно рассматривать как дополнительное обоснование этой формулы, уточняющее метод указанных работ. Кроме того, использованное в этих работах предположение, что функцию зависимости волнового числа  $k(u)$  от фоновой амплитуды волны на малоамплитудном крае ДУВ можно распространить с этого края на область гладкого бездисперсионного решения, где осцилляции отсутствуют, представляется важным для общей теории дисперсионных ударных волн утверждением. Наконец, сочетание гамильтоновой механики волновых пакетов с бездисперсионной динамикой фона дает общий подход к решению задач о взаимодействии линейных волн с течением среды, что позволяет, например, обобщить результаты недавней работы [21] на произвольный профиль фоновой простой волны.

**Благодарности.** Выражаем благодарность Л. П. Питаевскому и Г. А. Элю за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).
2. S. C. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1095 (1967).
3. V. I. Karpman, *Phys. Lett. A* **25**, 708 (1967).
4. В. И. Карпман, *Нелинейные волны в диспергирующих средах*, Наука, Москва (1973).
5. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **65**, 590 (1973).
6. G. B. Whitham, *Proc. Roy. Soc. London* **283**, 238 (1965).
7. А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, Н. Г. Мазур, Г. А. Эль, *Доклады РАН* **323**, 876 (1992).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Физматлит, Москва (2001).
9. А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, Н. Г. Мазур, *ЖЭТФ* **95**, 1674 (1989).
10. А. В. Гуревич, А. Р. Мещеркин, *ЖЭТФ* **87**, 1277 (1984).
11. К. Ланцош, *Вариационные принципы механики*, Мир, Москва (1965).
12. G. A. El, *Chaos* **15**, 037103 (2005).
13. G. A. El, R. H. J. Grimshaw, and N. F. Smyth, *Phys. Fluids* **18**, 027104 (2006).
14. G. A. El, A. Gammal, E. G. Khamis, R. A. Kraenkel, and A. M. Kamchatnov, *Phys. Rev. A* **76**, 053813 (2007).
15. J. G. Esler and J. D. Pearce, *J. Fluid Mech.* **667**, 555 (2011).
16. N. K. Lowman and M. A. Hoefer, *J. Fluid Mech.* **718**, 524 (2013).
17. M. A. Hoefer, *J. Nonlinear Sci.* **24**, 525 (2014).
18. T. Congy, A. M. Kamchatnov, and N. Pavloff, *SciPost Phys.* **1**, 006 (2016).
19. M. A. Hoefer, G. A. El, and A. M. Kamchatnov, *SIAM J. Appl. Math.* **77**, 1352 (2017).
20. X. An, T. R. Marchant, and N. F. Smyth, *Proc. Roy. Soc. London A* **474**, 0278 (2018).
21. T. Congy, G. A. El, and M. A. Hoefer, *J. Fluid Mech.* **875**, 1145 (2019).
22. M. D. Maiden, D. V. Anderson, N. A. Franco, G. A. El, and M. A. Hoefer, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 144101 (2018).
23. A. M. Kamchatnov, arXiv:2008.09786.
24. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **93**, 871 (1987).
25. А. М. Камчатнов, УФН, DOI:10.3367/UFN.2020.08.038815.
26. P. D. Lax and C. D. Livermore, *Commun. Pure Appl. Math.* **36**, 253 (1984); **36**, 571 (1983); **36**, 809 (1983).

- 27.** Н. Г. Мазур, ТМФ **106**, 44 (1996).
- 28.** E. A. Kuznetsov, A. M. Rubenchik, and V. E. Zakharov, Phys. Rep. **142**, 103 (1986).
- 29.** A. M. Kamchatnov, Phys. Rev. E **99**, 012203 (2019).
- 30.** A. M. Камчатнов, ТМФ **202**, 415 (2020).
- 31.** E. A. Kuznetsov, Phys. Lett. A **101**, 314 (1984).
- 32.** D. McKenzie, J. Petrol. **25**, 713 (1984).
- 33.** A. C. Fowler, Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics **33**, 63 (1985).
- 34.** D. R. Scott and D. J. Stevenson, Geophys. Res. Lett. **11**, 1161 (1984).
- 35.** D. R. Scott and D. J. Stevenson, Nature **319**, 759 (1986).
- 36.** P. Olson and U. Christensen, J. Geophys. Res. **91**, B6, 6367 (1986).
- 37.** F. Serre, La Houille Blanche **8**, 374 (1953).
- 38.** C. H. Su and C. S. Gardner, J. Math. Phys. **10**, 536 (1969).
- 39.** A. E. Green and P. M. Naghdi, J. Fluid Mech. **78**, 237 (1976).
- 40.** S. K. Ivanov and A. M. Kamchatnov, Phys. Fluids **31**, 057102 (2019).
- 41.** G. A. El, R. H. J. Grimshaw, and N. F. Smyth, Physica D **237**, 2423 (2008).