

# ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ИЗЛУЧАТЕЛЬ НА ГРАНИЦЕ ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ

А. Б. Петрин\*

Объединенный институт высоких температур Российской академии наук  
125412, Москва, Россия

Поступила в редакцию 13 июля 2020 г.,  
после переработки 30 июля 2020 г.  
Принята к публикации 2 августа 2020 г.

Рассмотрена строгая теория излучения элементарного диполя, расположенного на границе или внутри плоскостойкой структуры. Для частного случая излучения диполя, расположенного на свободной границе одной пленки, продемонстрирован метод аналитического упрощения решения. Предложенный метод позволил привести выражения для излучаемых полей к одномерным интегралам, что существенно упростило анализ задачи и ускорило численные расчеты. В качестве конкретного технического приложения теории были получены диаграммы направленности точечных излучателей (молекул, наноструктур), расположенных на свободной поверхности металлической пленки в схеме Кречмана и имеющих индуцированный дипольный момент, направленный перпендикулярно поверхности пленки. Обсуждается влияние поверхностной волны на направленные свойства поверхностных излучателей.

DOI: 10.31857/S004445102101003X

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время сохраняется значительный интерес к физическим явлениям, которые сопровождают возбуждение поверхностной плазмонной волны на поверхности металлической пленки по схеме Кречмана [1] (см. рис. 1). Поверхностная плазмонная волна распространяется вдоль поверхности металла и локализуется вблизи его поверхности [2,3], поэтому даже ничтожные изменения показателя преломления в приповерхностной области сильно влияют на характер ее распространения. На этом основывается широкое использование схемы Кречмана для создания различного рода высокочувствительных датчиков, реагирующих на изменение показателя преломления тонкого (олиго- или мономолекулярного) поверхностного слоя [4].

Исследования показали [5], что амплитуда поверхностной волны на свободной границе пленки в схеме Кречмана более чем на порядок выше амплитуды падающей волны. Поскольку в свободном пространстве над пленкой не возбуждаются распространяющиеся волны, это дает возможность, поме-

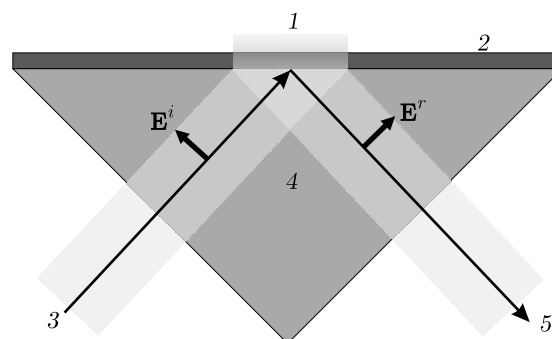


Рис. 1. Возбуждение поверхностной плазмонной волны 1 на поверхности металлической пленки 2 по схеме Кречмана. Падающая поляризованная волна 3 со стороны призмы 4 порождает на свободной границе поверхностную плазмонную 1 и отраженную 5 волны

щая на свободную поверхность наночастицы или отдельные молекулы, наблюдать именно их излучение, направленное в сторону свободного полупространства. Это излучение порождается наведенными электрическими дипольными моментами наночастиц, которые индуцируются поверхностной волной. Важно, что только точечные объекты будут излучать распространяющиеся волны в свободное пространство и исключительно это излучение можно будет наблюдать с помощью микроскопа, при этом

\* E-mail: a\_petrin@mail.ru

можно полностью быть уверенным, что наблюдаемый в микроскоп свет исходит именно из точечных источников на поверхности. В связи с этим возникает фундаментальный вопрос о том, как влияет металлическая пленка (или в общем случае многопленочная структура) в схеме Кречмана на пространственное излучение в свободное пространство над пленкой от точечного излучателя, расположенного на поверхности.

Теоретические методы нахождения излучения от элементарного точечного электрического диполя, расположенного на плоской границе двух сред, были развиты на заре эры использования электромагнитных волн для передачи сигналов вдоль земной поверхности [6]. В дальнейшем эти методы получили развитие в связи с возникающими новыми задачами радиосвязи [7, 8]. Развитие антенной техники привело к развитию теории излучения элементарного диполя, расположенного на границе плоскостойкой среды, и теории излучения микрополосковых антенн [9–11], которые являются наилучшими конструкциями с точки зрения их совместимости с микрополосковыми интегральными схемами. Такие антенны играют особую роль в современной технике, так как они могут быть изготовлены из фольгированных материалов высокопроизводительными методами печати и травления.

Существующие теоретические методы расчета излучения антенн, расположенных на границе слоистых структур, сложны и описываются, например, в терминах диадных функций Грина [12]. Кроме того, сама теория распространения волн в слоистых структурах содержит много тонких моментов, таких как необходимость правильного выбора ветвей аналитических функций при записи волн в слоях, которые могут приводить к чудесам вроде суперразрешения [13]. Поэтому в данной работе предложен вариант строгой электромагнитной теории излучения элементарного диполя, расположенного на границе или внутри плоскостойкой структуры. Для случая излучения диполя, расположенного на свободной границе одной пленки, ниже продемонстрирован метод аналитического упрощения решения, имеющий, как кажется, потенциально общетеоретическое значение. Этот метод позволил привести формулы для излучаемых полей к одномерным интегралам, что существенно упростило анализ задачи и ускорило численные расчеты.

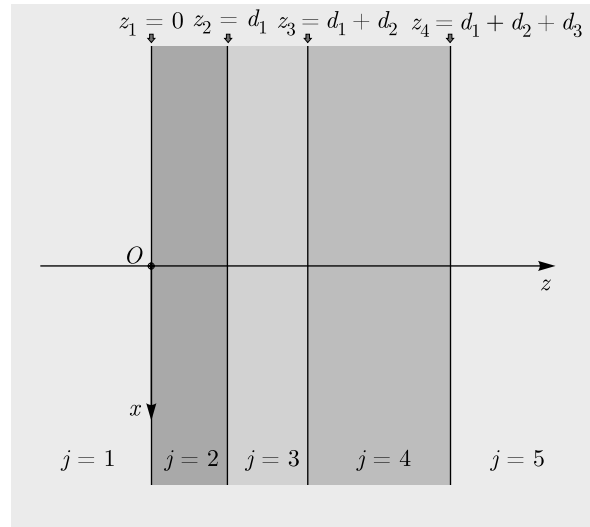


Рис. 2. Геометрия плоскостойкой структуры, состоящей из трех пленок

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО ВНУТРИ ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ

Рассмотрим задачу излучения электромагнитной волны точечным источником тока единичной амплитуды, изменяющимся во времени гармонически с циклической частотой  $\omega$ . Пусть этот источник расположен в плоской слоистой структуре, состоящей из нескольких пленок и из окружающих слоистую структуру двух полупространств. Для определенности сначала будем считать, что источник расположен в одной из пленок, а затем обобщим эту задачу на случай, когда источник расположен на их границе.

Пусть общее число пленок равно  $N_f$ , толщина  $m$ -й пленки равна  $d_m$  и полная толщина слоистой структуры  $d_{tot} = \sum_{m=1}^{N_f} d_m$ . Общее число границ между пленками обозначим как  $N = N_f + 1$ . Пронумеруем области пространства  $j = 1, \dots, N + 1$  (на рис. 2 показана для примера задача с  $N = 4$  и  $N_f = 3$ ). Предположим, что пленки имеют абсолютные комплексные диэлектрические и магнитные проницаемости равные  $\epsilon_j$  и  $\mu_j$  на рассматриваемой частоте  $\omega$ , а перед и за слоистой структурой находятся однородные полупространства с проницаемостями  $\epsilon_1, \mu_1$  и  $\epsilon_{N+1}, \mu_{N+1}$  (свободное пространство). Обозначим также через  $z_j$  координаты  $N$  границ пленок по оси  $z$  следующим образом:  $z_1 = 0, z_j = \sum_{m=1}^{j-1} d_m$  при

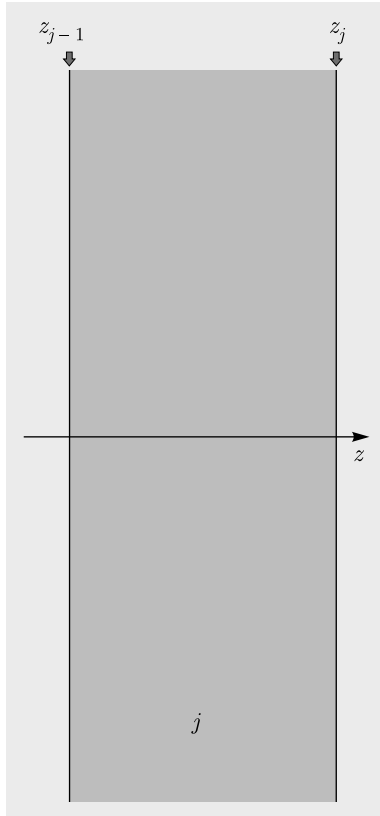


Рис. 3. Пленка с номером  $j$ , расположенная между границами  $z_{j-1}$  и  $z_j$

$j = 2, \dots, N$ . Уравнения Максвелла для области с номером  $j$  можно записать в виде

$$\text{rot } \mathbf{E}_j = i\omega \mathbf{B}_j, \tag{1}$$

$$\text{rot } \mathbf{B}_j = \mu_j (-i\omega \varepsilon_j \mathbf{E}_j + \mathbf{J}_j), \tag{2}$$

где  $\mathbf{E}_j$ ,  $\mathbf{B}_j$  и  $\mathbf{J}_j$  — векторы напряженности электрического поля, индукция магнитного поля и плотность стороннего (известного) тока в области с номером  $j$  (если источник тока отсутствует в области  $j$ , то  $\mathbf{J}_j = 0$ ). Предполагается комплексное временное представление в виде  $e^{-i\omega t}$ .

Решая уравнения Максвелла в каждой области с учетом граничных условий, найдем электромагнитное поле во всех областях. Рассмотрим сначала следующую вспомогательную задачу.

### 3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В СЛОЕ, СВОБОДНОЙ ОТ СТОРОННИХ ТОКОВ

Пусть в области с номером  $j$  нет сторонних токов между границами  $z_{j-1}$  и  $z_j$  (см. рис. 3). Диэлектрическая и магнитная проницаемости среды в этой

пленке равны соответственно  $\varepsilon_j$  и  $\mu_j$ . Тогда, учитывая, что в этой области справедливо уравнение  $\text{div } \mathbf{D}_j = 0$ , из уравнений (1) и (2) получаем уравнения для электромагнитных полей в виде

$$\text{rot rot } \mathbf{E}_j - \omega^2 \varepsilon_j \mu_j \mathbf{E}_j = 0, \tag{3}$$

$$\text{rot rot } \mathbf{B}_j - \omega^2 \varepsilon_j \mu_j \mathbf{B}_j = 0. \tag{4}$$

В рассматриваемой области  $\text{div } \mathbf{E}_j = 0$  и  $\text{div } \mathbf{B}_j = 0$ . Учитывая векторное тождество  $\text{rot rot } \mathbf{F} = \text{grad div } \mathbf{F} - \Delta \mathbf{F}$ , где  $\Delta = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \partial_{zz}^2$  — оператор Лапласа, из (3) и (4) получим

$$\Delta \mathbf{E}_j + \omega^2 \varepsilon_j \mu_j \mathbf{E}_j = 0, \tag{5}$$

$$\Delta \mathbf{B}_j + \omega^2 \varepsilon_j \mu_j \mathbf{B}_j = 0. \tag{6}$$

Подставим в полученные выше уравнения компоненты полей в виде фурье-разложений. Например, представление для  $x$ -компоненты электрического поля примет вид

$$E_{j,x}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_{j,x}(\xi, \eta, z) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta,$$

где фурье-образы определяются выражением

$$\tilde{E}_{j,x}(\xi, \eta, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{j,x}(x, y, z) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy.$$

Для остальных компонент полей будем использовать аналогичные представления и соответствующие символы.

В компонентах полей уравнения (5) и (6) имеют вид

$$\partial_{xx}^2 E_{j,x} + \partial_{yy}^2 E_{j,x} + \partial_{zz}^2 E_{j,x} + \omega^2 \mu_j \varepsilon_j E_{j,x} = 0,$$

и аналогичные уравнения для  $E_{j,y}$ ,  $E_{j,z}$  и составляющих магнитного поля, которые выписывать не будем. Переходя к фурье-образам, получаем из (5) уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{E}_{j,x}}{dz^2} + \gamma_j^2 \tilde{E}_{j,x} &= 0, \\ \frac{d^2 \tilde{E}_{j,y}}{dz^2} + \gamma_j^2 \tilde{E}_{j,y} &= 0, \\ \frac{d^2 \tilde{E}_{j,z}}{dz^2} + \gamma_j^2 \tilde{E}_{j,z} &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где  $\gamma_j = \sqrt{k_j^2 - \xi^2 - \eta^2}$ ,  $k_j = \omega \sqrt{\mu_j \varepsilon_j}$ .

Решения уравнений (7) для направлений распространения волн вдоль (+) и против (−) оси  $z$ , можно записать в виде

$$\mathbf{E}_j^\pm(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \hat{E}_{j,x}^\pm \\ \hat{E}_{j,y}^\pm \\ \hat{E}_{j,z}^\pm \end{pmatrix} e^{\pm i\gamma_j z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (8)$$

В рассматриваемом случае  $\text{div } \mathbf{E}_j = 0$  и, следовательно,  $\xi \hat{E}_{j,x}^\pm + \eta \hat{E}_{j,y}^\pm \pm \gamma_j \hat{E}_{j,z}^\pm = 0$ . Тогда (8) можно переписать как

$$\mathbf{E}_j^\pm(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \mp \xi/\gamma_j & \mp \eta/\gamma_j \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{E}_{j,x}^\pm \\ \hat{E}_{j,y}^\pm \end{pmatrix} e^{\pm i\gamma_j z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (9)$$

Поэтому общее решение уравнений (7) в области  $[z_{j-1}, z_j]$  можно записать в виде

$$\mathbf{E}_j(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\xi/\gamma_j & -\eta/\gamma_j \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{E}_{j,x}^+ \\ \hat{E}_{j,y}^+ \end{pmatrix} e^{i\gamma_j(z-z_{j-1})} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \xi/\gamma_j & \eta/\gamma_j \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{E}_{j,x}^- \\ \hat{E}_{j,y}^- \end{pmatrix} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (10)$$

Обратим внимание на отличие в форме записи (9) и (10). Формально эти уравнения переходят одно в другое, они описывают волны, распространяющиеся в противоположных направлениях по оси  $z$ . Однако формулы содержат функции  $\gamma_j = \sqrt{k_j^2 - \xi^2 - \eta^2}$ . Для однозначного определения вида записи решений необходимо выбрать аналитическую ветвь функции комплексного переменного  $\gamma_j(\lambda)$ , где  $\lambda^2 = \xi^2 + \eta^2$ .

Обычно для сред без поглощения используют ветвь [8]

$$\gamma_j(\lambda) = \begin{cases} \sqrt{k_j^2 - \lambda^2}, & \lambda^2 \leq k_j^2, \\ i\sqrt{\lambda^2 - k_j^2}, & \lambda^2 \geq k_j^2. \end{cases} \quad (11)$$

Если взять вместо (11) другую аналитическую ветвь, с отрицательной мнимой зависимостью, то волны с большими  $\lambda$  будут экспоненциально возрастать с увеличением  $z$  при удалении от источников полей, что противоречит принципу причинности.

Более строго, в случае поглощающей среды существует две точки ветвления функции  $\gamma_j(\lambda)$ : точка  $k_{j,1} = \omega \sqrt{|\varepsilon_j| |\mu_j|} \exp(i(\arg(\varepsilon_j) + \arg(\mu_j))/2)$  и точка  $k_{j,2} = e^{i\pi} k_{j,1}$ . Аналитическую ветвь функции  $\gamma_j(\lambda)$ , пригодную в том числе для описания материалов с отрицательным преломлением [14] и переходящую в (11) при бесконечно малом поглощении среды, можно определить как

$$\gamma_j(\lambda) = \sqrt{|k_{j,1} - \lambda|} \exp\left(\frac{i \arg(k_{j,1} - \lambda)}{2}\right) \times \sqrt{|k_{j,2} - \lambda|} \exp\left(\frac{i \arg(\lambda - k_{j,2})}{2}\right), \quad (12)$$

где функции  $|\xi|$  и  $\arg(\xi)$  — модуль и аргумент комплексной переменной  $\xi$ .

Кроме того, в представлении полей (10) при любых  $z$  и правильном выборе аналитической ветви (12) будет обеспечена сходимость интегралов. При этом не будут возникать экспоненциально усиливающиеся гармоники при больших значениях  $\xi$  и  $\eta$ .

Из уравнения  $\text{rot } \mathbf{E}_j = i\omega \mathbf{B}_j$  найдем  $x$ - и  $y$ -компоненты магнитного поля. Для соответствующих фурье-компонент имеем

$$\hat{\mathbf{B}}_j^+ = \mathbf{e}_x \left( \frac{\eta}{\omega} \hat{E}_{j,z}^+ - \frac{\gamma_j}{\omega} \hat{E}_{j,y}^+ \right) - \mathbf{e}_y \left( \frac{\xi}{\omega} \hat{E}_{j,z}^+ - \frac{\gamma_j}{\omega} \hat{E}_{j,x}^+ \right) + \mathbf{e}_z \left( \frac{\xi}{\omega} \hat{E}_{j,y}^+ - \frac{\eta}{\omega} \hat{E}_{j,x}^+ \right),$$

где  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  и  $\mathbf{e}_z$  — единичные орты координатных осей. Из выражения  $\text{div } \mathbf{E}_j = 0$  следует  $\hat{E}_{j,z}^+ = -\xi \hat{E}_{j,x}^+ / \gamma_j - \eta \hat{E}_{j,y}^+ / \gamma_j$ , тогда

$$\hat{\mathbf{B}}_j^+ = \mathbf{e}_x \left( -\frac{\xi \eta}{\omega \gamma_j} \hat{E}_{j,x}^+ - \frac{\gamma_j^2 + \eta^2}{\omega \gamma_j} \hat{E}_{j,y}^+ \right) + \mathbf{e}_y \left( \frac{\gamma_j^2 + \xi^2}{\omega \gamma_j} \hat{E}_{j,x}^+ + \frac{\xi \eta}{\omega \gamma_j} \hat{E}_{j,y}^+ \right) + \mathbf{e}_z \left( \frac{\xi}{\omega} \hat{E}_{j,y}^+ - \frac{\eta}{\omega} \hat{E}_{j,x}^+ \right),$$

или в матричном виде —

$$\begin{pmatrix} \hat{B}_{j,x}^+ \\ \hat{B}_{j,y}^+ \\ \hat{B}_{j,z}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi\eta/\omega\gamma_j & -(\gamma_j^2 + \eta^2)/\omega\gamma_j \\ (\gamma_j^2 + \xi^2)/\omega\gamma_j & \xi\eta/\omega\gamma_j \\ -\eta/\omega & \xi/\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{E}_{j,x}^+ \\ \hat{E}_{j,y}^+ \end{pmatrix}.$$

Аналогично, для  $\hat{\mathbf{B}}_j^-$  найдем

$$\begin{pmatrix} \hat{B}_{j,x}^- \\ \hat{B}_{j,y}^- \\ \hat{B}_{j,z}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi\eta/\omega\gamma_j & (\gamma_j^2 + \eta^2)/\omega\gamma_j \\ -(\gamma_j^2 + \xi^2)/\omega\gamma_j & -\xi\eta/\omega\gamma_j \\ -\eta/\omega & \xi/\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{E}_{j,x}^- \\ \hat{E}_{j,y}^- \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение для магнитного поля в рассматриваемой области с номером  $j$  (пленке с номером  $j - 1$ ) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_j(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} -\xi\eta/\omega\gamma_j & -(\gamma_j^2 + \eta^2)/\omega\gamma_j \\ (\gamma_j^2 + \xi^2)/\omega\gamma_j & \xi\eta/\omega\gamma_j \\ -\eta/\omega & \xi/\omega \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \hat{E}_{j,x}^+ \\ \hat{E}_{j,y}^+ \end{pmatrix} e^{i\gamma_j(z-z_{j-1})} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \xi\eta/\omega\gamma_j & (\gamma_j^2 + \eta^2)/\omega\gamma_j \\ -(\gamma_j^2 + \xi^2)/\omega\gamma_j & -\xi\eta/\omega\gamma_j \\ -\eta/\omega & \xi/\omega \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \hat{E}_{j,x}^- \\ \hat{E}_{j,y}^- \end{pmatrix} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (13) \end{aligned}$$

Из (10) и (13) найдем тангенциальные составляющие фурье-образов полей на границах области  $j$  в виде

$$\begin{aligned} \left. \begin{pmatrix} \tilde{E}_{j,x} \\ \tilde{E}_{j,y} \\ \tilde{B}_{j,x}/\mu_j \\ \tilde{B}_{j,y}/\mu_j \end{pmatrix} \right|_{z=z_{j-1}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{i\gamma_j d_{j-1}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e^{i\gamma_j d_{j-1}} \\ -\frac{\xi\eta}{\omega\mu_j\gamma_j} & -\frac{\gamma_j^2 + \eta^2}{\omega\mu_j\gamma_j} & \frac{\xi\eta}{\omega\mu_j\gamma_j} e^{i\gamma_j d_{j-1}} & \frac{\gamma_j^2 + \eta^2}{\omega\mu_j\gamma_j} e^{i\gamma_j d_{j-1}} \\ \frac{\gamma_j^2 + \xi^2}{\omega\mu_j\gamma_j} & \frac{\xi\eta}{\omega\mu_j\gamma_j} & -\frac{\gamma_j^2 + \xi^2}{\omega\mu_j\gamma_j} e^{i\gamma_j d_{j-1}} & -\frac{\xi\eta}{\omega\mu_j\gamma_j} e^{i\gamma_j d_{j-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{E}_{j,x}^+ \\ \hat{E}_{j,y}^+ \\ \hat{E}_{j,x}^- \\ \hat{E}_{j,y}^- \end{pmatrix}, \\ \left. \begin{pmatrix} \tilde{E}_{j,x} \\ \tilde{E}_{j,y} \\ \tilde{B}_{j,x}/\mu_j \\ \tilde{B}_{j,y}/\mu_j \end{pmatrix} \right|_{z=z_j} &= \begin{pmatrix} e^{i\gamma_j d_{j-1}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & e^{i\gamma_j d_{j-1}} & 0 & 1 \\ -\frac{\xi\eta}{\omega\mu_j\gamma_j} e^{i\gamma_j d_{j-1}} & -\frac{\gamma_j^2 + \eta^2}{\omega\mu_j\gamma_j} e^{i\gamma_j d_{j-1}} & \frac{\xi\eta}{\omega\mu_j\gamma_j} & \frac{\gamma_j^2 + \eta^2}{\omega\mu_j\gamma_j} \\ \frac{\gamma_j^2 + \xi^2}{\omega\mu_j\gamma_j} e^{i\gamma_j d_{j-1}} & \frac{\xi\eta}{\omega\mu_j\gamma_j} e^{i\gamma_j d_{j-1}} & -\frac{\gamma_j^2 + \xi^2}{\omega\mu_j\gamma_j} & -\frac{\xi\eta}{\omega\mu_j\gamma_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{E}_{j,x}^+ \\ \hat{E}_{j,y}^+ \\ \hat{E}_{j,x}^- \\ \hat{E}_{j,y}^- \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где  $d_{j-1} = z_j - z_{j-1}$ .

Вводя вектор-столбец  $\hat{\phi}_j = (\hat{E}_{j,x}^+; \hat{E}_{j,y}^+; \hat{E}_{j,x}^-; \hat{E}_{j,y}^-)^T$ , запишем полученные выражения в матричном виде:

$$\left. \begin{pmatrix} \tilde{E}_{j,x} \\ \tilde{E}_{j,y} \\ \tilde{B}_{j,x}/\mu_j \\ \tilde{B}_{j,y}/\mu_j \end{pmatrix} \right|_{z=z_{j-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_j d_{j-1}} \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_j & -e^{i\gamma_j d_{j-1}} \mathbf{G}_j \end{pmatrix} \hat{\phi}_j, \quad (14)$$

$$\left( \begin{array}{c} \tilde{E}_{j,x} \\ \tilde{E}_{j,y} \\ \tilde{B}_{j,x}/\mu_j \\ \tilde{B}_{j,y}/\mu_j \end{array} \right) \Big|_{z=z_j} = \begin{pmatrix} e^{i\gamma_j d_{j-1}} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_j d_{j-1}} \mathbf{G}_j & -\mathbf{G}_j \end{pmatrix} \hat{\phi}_j, \quad (15)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная  $2 \times 2$ -матрица, а матрица  $\mathbf{G}_j$  представляется как

$$\mathbf{G}_j = \begin{pmatrix} -\frac{\xi\eta}{\omega\mu_j\gamma_j} & -\frac{\gamma_j^2 + \eta^2}{\omega\mu_j\gamma_j} \\ \frac{\gamma_j^2 + \xi^2}{\omega\mu_j\gamma_j} & \frac{\xi\eta}{\omega\mu_j\gamma_j} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

#### 4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЕ, СВОБОДНОЙ ОТ СТОРОННИХ ТОКОВ

Рассмотрим теперь многослойную структуру, внутри которой нет сторонних токов. Рассмотрим границу  $z = z_j$  между областями с номерами  $j$  и  $j+1$ . Непрерывность тангенциальных компонент напряженностей электрического и магнитного полей на этой границе можно записать в виде

$$E_{j,x}(x, y, z_j) - E_{j+1,x}(x, y, z_j) = 0,$$

$$E_{j,y}(x, y, z_j) - E_{j+1,y}(x, y, z_j) = 0,$$

$$\frac{B_{j,x}(x, y, z_j)}{\mu_j} - \frac{B_{j+1,x}(x, y, z_j)}{\mu_{j+1}} = 0,$$

$$\frac{B_{j,y}(x, y, z_j)}{\mu_j} - \frac{B_{j+1,y}(x, y, z_j)}{\mu_{j+1}} = 0,$$

где электрические и магнитные поля в области  $j+1$  выражаются формулами (10) и (13), в которых проведена замена индексов  $j \rightarrow j+1$ . Так как уравнения Максвелла являются линейными, то граничные условия должны выполняться для каждого члена фурье-разложения, т. е. граничные условия выполняются для фурье-образов полей:

$$\tilde{E}_{j,x}(\xi, \eta, z_j) - \tilde{E}_{j+1,x}(\xi, \eta, z_j) = 0, \quad (17)$$

$$\tilde{E}_{j,y}(\xi, \eta, z_j) - \tilde{E}_{j+1,y}(\xi, \eta, z_j) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\tilde{B}_{j,x}(\xi, \eta, z_j)}{\mu_j} - \frac{\tilde{B}_{j+1,x}(\xi, \eta, z_j)}{\mu_{j+1}} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\tilde{B}_{j,y}(\xi, \eta, z_j)}{\mu_j} - \frac{\tilde{B}_{j+1,y}(\xi, \eta, z_j)}{\mu_{j+1}} = 0. \quad (20)$$

Записывая граничные условия (17)–(20) с помощью выражений (14) и (15), получим матричное уравнение на границе  $z = z_j$ :

$$\begin{pmatrix} e^{i\gamma_j d_{j-1}} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_j d_{j-1}} \mathbf{G}_j & -\mathbf{G}_j \end{pmatrix} \hat{\phi}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_{j+1} d_j} \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_{j+1} & -e^{i\gamma_{j+1} d_j} \mathbf{G}_{j+1} \end{pmatrix} \hat{\phi}_{j+1}, \quad (21)$$

где  $d_{j-1} = z_j - z_{j-1}$ ,  $d_j = z_{j+1} - z_j$ .

Уравнение (21) можно записать для  $j = 2, \dots, N-1$ , где  $N+1$  — общее число областей,  $N$  — число границ, т. е. для всех границ, исключая первую ( $j = 1$ ) и последнюю ( $j = N$ ) границы. То есть исключаются границы

$$z_1 = 0, \quad z_N = d_{tot} = \sum_{m=1}^{N-1} d_m,$$

где  $d_{tot}$  — общая толщина слоистой структуры (сумма толщин пленок, составляющих рассматриваемую структуру).

Общее решение для электрического и магнитного полей в области  $j = 1$ , т. е. в интервале  $(-\infty, z_1]$ , где  $z_1 = 0$ , запишем в виде

$$\mathbf{E}_1(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\xi/\gamma_1 & -\eta/\gamma_1 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \hat{E}_{1,x}^+ \\ \hat{E}_{1,y}^+ \end{pmatrix} e^{i\gamma_1 z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \xi/\gamma_1 & \eta/\gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{E}_{1,x}^- \\ \hat{E}_{1,y}^- \end{pmatrix} \times \\ \times e^{-i\gamma_1 z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \quad (22)$$

$$\mathbf{B}_1(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} -\xi\eta/\omega\gamma_1 & -(\gamma_1^2 + \eta^2)/\omega\gamma_1 \\ (\gamma_1^2 + \xi^2)/\omega\gamma_1 & \xi\eta/\omega\gamma_1 \\ -\eta/\omega & \xi/\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{E}_{1,x}^+ \\ \hat{E}_{1,y}^+ \end{pmatrix} e^{i\gamma_1 z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \frac{1}{(2\pi)^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \xi\eta/\omega\gamma_1 & (\gamma_1^2 + \eta^2)/\omega\gamma_1 \\ -(\gamma_1^2 + \xi^2)/\omega\gamma_1 & -\xi\eta/\omega\gamma_1 \\ -\eta/\omega & \xi/\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{E}_{1,x}^- \\ \hat{E}_{1,y}^- \end{pmatrix} e^{-i\gamma_1 z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (23)$$

Тогда, записывая условия на границе  $z_1 = 0$ , получим

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_1 & -\mathbf{G}_1 \end{pmatrix} \hat{\phi}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_2 d_1} \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_2 & -e^{i\gamma_2 d_1} \mathbf{G}_2 \end{pmatrix} \hat{\phi}_2. \quad (24)$$

Аналогично, общее решение для электрического и магнитного полей в области  $j = N + 1$ , т.е. в интервале  $[z_N, +\infty)$ , запишем в виде

$$\mathbf{E}_{N+1}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\xi/\gamma_{N+1} & -\eta/\gamma_{N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{E}_{N+1,x}^+ \\ \hat{E}_{N+1,y}^+ \end{pmatrix} e^{i\gamma_{N+1}(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \xi/\gamma_{N+1} & \eta/\gamma_{N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{E}_{N+1,x}^- \\ \hat{E}_{N+1,y}^- \end{pmatrix} e^{-i\gamma_{N+1}(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \quad (25)$$

$$\mathbf{B}_{N+1}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} -\xi\eta/\omega\gamma_{N+1} & -(\gamma_{N+1}^2 + \eta^2)/\omega\gamma_{N+1} \\ (\gamma_{N+1}^2 + \xi^2)/\omega\gamma_{N+1} & \xi\eta/\omega\gamma_{N+1} \\ -\eta/\omega & \xi/\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{E}_{N+1,x}^+ \\ \hat{E}_{N+1,y}^+ \end{pmatrix} e^{i\gamma_{N+1}(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \xi\eta/\omega\gamma_{N+1} & (\gamma_{N+1}^2 + \eta^2)/\omega\gamma_{N+1} \\ -(\gamma_{N+1}^2 + \xi^2)/\omega\gamma_{N+1} & -\xi\eta/\omega\gamma_{N+1} \\ -\eta/\omega & \xi/\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{E}_{N+1,x}^- \\ \hat{E}_{N+1,y}^- \end{pmatrix} \times e^{-i\gamma_{N+1}(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (26)$$

Тогда получим граничные условия на границе  $z_N$  в виде

$$\begin{pmatrix} e^{i\gamma_N d_{N-1}} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_N d_{N-1}} \mathbf{G}_N & -\mathbf{G}_N \end{pmatrix} \hat{\phi}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_{N+1} & -\mathbf{G}_{N+1} \end{pmatrix} \hat{\phi}_{N+1}. \quad (27)$$

Граничные условия (21), (24) и (27) позволяют связать вектор-столбцы электрического поля в первой и последней областях задачи (т.е. в полупространствах, вне плоскостной структуры):

$$\hat{\phi}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_1 & -\mathbf{G}_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_2 d_1} \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_2 & -e^{i\gamma_2 d_1} \mathbf{G}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{i\gamma_2 d_1} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_2 d_1} \mathbf{G}_2 & -\mathbf{G}_2 \end{pmatrix}^{-1} \times \dots \times \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_N d_{N-1}} \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_N & -e^{i\gamma_N d_{N-1}} \mathbf{G}_N \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{i\gamma_N d_{N-1}} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_N d_{N-1}} \mathbf{G}_N & -\mathbf{G}_N \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_{N+1} & -\mathbf{G}_{N+1} \end{pmatrix} \hat{\phi}_{N+1},$$

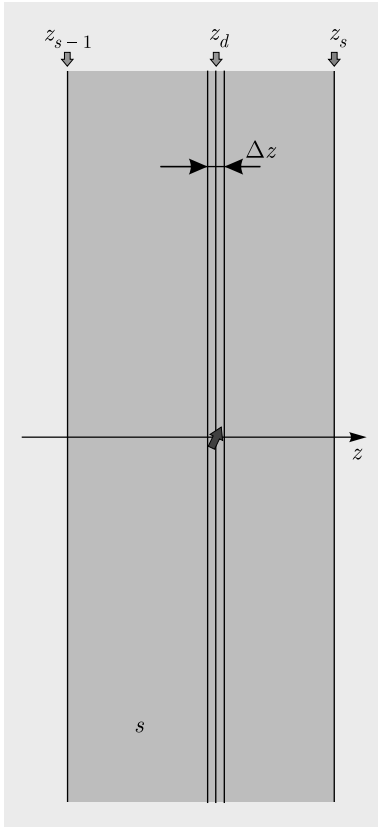


Рис. 4. Точечный излучатель, расположенный в точке  $(0, 0, z_d)$  в области с номером  $s$

или

$$\hat{\varphi}_1 = \mathbf{M} \times \hat{\varphi}_{N+1}. \quad (28)$$

Матрица  $\mathbf{M}$  имеет вид  $\mathbf{M} = \mathbf{T}_1 \times \left( \prod_{m=2}^N \mathbf{T}_m \right) \times \mathbf{T}_{N+1}$ , где

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_1 & -\mathbf{G}_1 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{T}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_m d_{m-1}} \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_m & -e^{i\gamma_m d_{m-1}} \mathbf{G}_m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{i\gamma_m d_{m-1}} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_m d_{m-1}} \mathbf{G}_m & -\mathbf{G}_m \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{T}_{N+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_{N+1} & -\mathbf{G}_{N+1} \end{pmatrix}.$$

Если нам известна, например, падающая на плоскостойкую структуру волна, а значит, компоненты  $\hat{E}_{1,x}^+$  и  $\hat{E}_{1,y}^+$  вектор-столбца  $\hat{\varphi}_1$ , то из уравнения (28) можно найти компоненты  $\hat{E}_{1,x}^-$  и  $\hat{E}_{1,y}^-$  и саму отраженную волну по формулам (22), (23), а также

компоненты  $\hat{E}_{N+1,x}^+$  и  $\hat{E}_{N+1,y}^+$  вектор-столбца  $\hat{\varphi}_{N+1}$  и прошедшую волну по формулам (25), (26). Подробности решения таких задач для пространственно-ограниченных падающих пучков можно найти, например, в работах [15–17].

### 5. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЕ, ОТ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ИСТОЧНИКА СТОРОННЕГО ТОКА

Пусть имеется точечный излучатель, расположенный в точке  $(0, 0, z_d)$  в области с номером  $s$  (см. рис. 4). Пусть этот излучатель определяется плотностью стороннего тока (в комплексном представлении  $e^{-i\omega t}$ ):

$$\mathbf{J}(x, y, z) = (n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z) \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_d),$$

где  $n_x, n_y, n_z$  — направляющие косинусы вектора тока вдоль осей координат, причем  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ ,  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака. Тогда фурье-образы составляющих этого тока определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{s,x}(\xi, \eta, z) &= \\ &= n_x \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_d) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy = \\ &= n_x \delta(z - z_d), \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{s,y}(\xi, \eta, z) &= n_y \delta(z - z_d), \\ \tilde{J}_{s,z}(\xi, \eta, z) &= n_z \delta(z - z_d). \end{aligned}$$

Пусть этот элементарный источник тока находится в бесконечно тонком слое  $(z_d - \Delta z/2, z_d + \Delta z/2)$ . Тогда уравнения Максвелла (1) и (2) для фурье-образов полей можно записать (при  $\Delta z \rightarrow 0$ ) в виде

$$\begin{cases} i\eta \tilde{E}_{s,z} - \frac{\Delta \tilde{E}_{s,y}}{\Delta z} = i\omega \tilde{B}_{s,x}, \\ \frac{\Delta \tilde{E}_{s,x}}{\Delta z} - i\xi \tilde{E}_{s,z} = i\omega \tilde{B}_{s,y}, \\ i\xi \tilde{E}_{s,y} - i\eta \tilde{E}_{s,x} = i\omega \tilde{B}_{s,z}, \end{cases} \quad (29)$$



$$\begin{cases} i\eta\tilde{B}_{s,z} - \frac{\Delta\tilde{B}_{j,y}}{\Delta z} = \mu_s \left( -i\omega\varepsilon_s\tilde{E}_{s,x} + n_x\delta(z-z_d) \right), \\ \frac{\Delta\tilde{B}_{s,x}}{\Delta z} - i\xi\tilde{B}_{s,z} = \mu_s \left( -i\omega\varepsilon_s\tilde{E}_{s,y} + n_y\delta(z-z_d) \right), \\ i\xi\tilde{B}_{s,y} - i\eta\tilde{B}_{s,x} = \mu_s \left( -i\omega\varepsilon_s\tilde{E}_{s,z} + n_z\delta(z-z_d) \right). \end{cases} \quad (30)$$

Поскольку  $z$ -компоненты полей из уравнений (29) и (30) можно выразить через  $x$ - и  $y$ -компоненты по формулам

$$\tilde{B}_{s,z} = \frac{\xi}{\omega}\tilde{E}_{s,y} - \frac{\eta}{\omega}\tilde{E}_{s,x},$$

$$\tilde{E}_{s,z} = -\frac{\xi}{\omega\varepsilon_s\mu_s}\tilde{B}_{s,y} + \frac{\eta}{\omega\varepsilon_s\mu_s}\tilde{B}_{s,x} + \frac{1}{i\omega\varepsilon_s}\tilde{J}_{s,z},$$

для  $x$ - и  $y$ -компонент напряженностей электрического и магнитного полей получим

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{E}_{s,x} &= \left( \frac{i\xi\eta}{\omega\varepsilon_s\mu_s}\tilde{B}_{s,x} + i \left( \omega - \frac{\xi^2}{\omega\varepsilon_s\mu_s} \right) \tilde{B}_{s,y} + \frac{\xi}{\omega\varepsilon_s}n_z\delta(z-z_d) \right) \Delta z, \\ \Delta\tilde{E}_{s,y} &= \left( i \left( \frac{\eta^2}{\omega\varepsilon_s\mu_s} - \omega \right) \tilde{B}_{s,x} - \frac{i\xi\eta}{\omega\varepsilon_s\mu_s}\tilde{B}_{s,y} + \frac{\eta}{\omega\varepsilon_s}n_z\delta(z-z_d) \right) \Delta z, \\ \frac{\Delta\tilde{B}_{s,x}}{\mu_s} &= \left( -\frac{i\xi\eta}{\omega\mu_s}\tilde{E}_{s,x} + i \left( \frac{\xi^2}{\omega\mu_s} - \omega\varepsilon_s \right) \tilde{E}_{s,y} + n_y\delta(z-z_d) \right) \Delta z, \\ \frac{\Delta\tilde{B}_{s,y}}{\mu_s} &= \left( i \left( \omega\varepsilon_s - \frac{\eta^2}{\omega\mu_s} \right) \tilde{E}_{s,x} + \frac{i\xi\eta}{\omega\mu_s}\tilde{E}_{s,y} - n_x\delta(z-z_d) \right) \Delta z. \end{aligned}$$

Тогда в пределе  $\Delta z \rightarrow 0$  скачок тангенциальных компонент напряженностей электрического и магнитного полей при переходе через бесконечно тонкий слой с током имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{E}_{s,x} &\rightarrow n_z\xi/\omega\varepsilon_s, \\ \Delta\tilde{E}_{s,y} &\rightarrow n_z\eta/\omega\varepsilon_s, \\ \Delta\tilde{B}_{s,x}/\mu_s &\rightarrow n_y, \\ \Delta\tilde{B}_{s,y}/\mu_s &\rightarrow -n_x. \end{aligned}$$

В матричном виде уравнения, связывающие тангенциальные компоненты полей с двух сторон бесконечно тонкого слоя с током, можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_{s,x} \\ \tilde{E}_{s,y} \\ \tilde{B}_{s,x}/\mu_s \\ \tilde{B}_{s,y}/\mu_s \end{pmatrix} \Big|_{z=z_d+0} - \begin{pmatrix} \tilde{E}_{s,x} \\ \tilde{E}_{s,y} \\ \tilde{B}_{s,x}/\mu_s \\ \tilde{B}_{s,y}/\mu_s \end{pmatrix} \Big|_{z=z_d-0} = \begin{pmatrix} n_z\xi/\omega\varepsilon_s \\ n_z\eta/\omega\varepsilon_s \\ n_y \\ -n_x \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Особо отметим, что скачок электрических полей при переходе через рассматриваемый бесконечно тонкий слой (при  $\Delta z \rightarrow 0$ ), вообще говоря, зависит от диэлектрической проницаемости среды  $\varepsilon_s$ , в которой расположен рассматриваемый источник тока. Но излучение источников, у которых есть только составляющие тока вдоль границы, не зависит в явном виде от диэлектрических свойств среды, в которой они расположены.

Выразим теперь левую часть граничного условия (31) через вектор-столбцы  $\hat{\phi}_1$  и  $\hat{\phi}_{N+1}$  полупространств снаружи плоскостной структуры. Для этого разобьем область с номером  $s$  на две области и обозначим их индексами  $l$  и  $r$  (левая и правая, если смотреть на рис. 4). Введем вектор-столбцы  $\hat{\phi}_l$  и  $\hat{\phi}_r$  в этих областях. Тогда тангенциальные компоненты напряженностей полей в (31) можно выразить как

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_{s,x} \\ \tilde{E}_{s,y} \\ \tilde{B}_{s,x}/\mu_s \\ \tilde{B}_{s,y}/\mu_s \end{pmatrix} \Big|_{z=z_d-0} = \begin{pmatrix} e^{i\gamma_s(z_d-z_{s-1})}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_s(z_d-z_{s-1})}\mathbf{G}_s & -\mathbf{G}_s \end{pmatrix} \hat{\phi}_l, \quad (32)$$

$$\left( \begin{array}{c} \tilde{E}_{s,x} \\ \tilde{E}_{s,y} \\ \tilde{B}_{s,x}/\mu_s \\ \tilde{B}_{s,y}/\mu_s \end{array} \right) \Big|_{z=z_d+0} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_s(z_s-z_d)}\mathbf{I} \\ \mathbf{G}_s & -e^{i\gamma_s(z_s-z_d)}\mathbf{G}_s \end{pmatrix} \hat{\phi}_r. \quad (33)$$

Кроме того, из (28) следует, что

$$\hat{\phi}_1 = \mathbf{Q}_L \hat{\phi}_l, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_L &= \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_1 & -\mathbf{G}_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_2 d_1} \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_2 & -e^{i\gamma_2 d_1} \mathbf{G}_2 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} e^{i\gamma_2 d_1} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_2 d_1} \mathbf{G}_2 & -\mathbf{G}_2 \end{pmatrix}^{-1} \times \dots \\ &\times \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_{s-1} d_{s-2}} \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_{s-1} & -e^{i\gamma_{s-1} d_{s-2}} \mathbf{G}_{s-1} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} e^{i\gamma_{s-1} d_{s-2}} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_{s-1} d_{s-2}} \mathbf{G}_{s-1} & -\mathbf{G}_{s-1} \end{pmatrix}^{-1} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_s(z_d-z_{s-1})} \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_s & -e^{i\gamma_s(z_d-z_{s-1})} \mathbf{G}_s \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а также

$$\hat{\phi}_r = \mathbf{Q}_R \hat{\phi}_{N+1}, \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_R &= \begin{pmatrix} e^{i\gamma_s(z_s-z_d)}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_s(z_s-z_d)}\mathbf{G}_s & -\mathbf{G}_s \end{pmatrix}^{-1} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_{s+1} d_s} \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_{s+1} & -e^{i\gamma_{s+1} d_s} \mathbf{G}_{s+1} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} e^{i\gamma_{s+1} d_s} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_{s+1} d_s} \mathbf{G}_{s+1} & -\mathbf{G}_{s+1} \end{pmatrix}^{-1} \times \dots \\ &\times \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_N d_{N-1}} \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_N & -e^{i\gamma_N d_{N-1}} \mathbf{G}_N \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} e^{i\gamma_N d_{N-1}} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_N d_{N-1}} \mathbf{G}_N & -\mathbf{G}_N \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_{N+1} & -\mathbf{G}_{N+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Подставляя (34), (35) в (32), (33) и затем полученные выражения в (31), получаем

$$\mathbf{H}_R \times \hat{\phi}_{N+1} = \mathbf{H}_L \times \hat{\phi}_1 + \mathbf{V}, \quad (36)$$

где  $\mathbf{V} = \left( n_z \xi / \omega \varepsilon_s; n_z \eta / \omega \varepsilon_s; n_y; -n_x \right)^T$  – вектор-столбец, характеризующий возбуждающее воздействие на систему стороннего элементарного тока, а матрицы  $\mathbf{H}_R$  и  $\mathbf{H}_L$  характеризуют отклик на внешнее возбуждение слоистой структуры справа и слева излучателя и выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_R &= \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_s(z_s-z_d)}\mathbf{I} \\ \mathbf{G}_s & -e^{i\gamma_s(z_s-z_d)}\mathbf{G}_s \end{pmatrix} \mathbf{Q}_R = \\ &= \mathbf{T}_R \times \left( \prod_{m=s+1}^N \mathbf{T}_m \right) \times \mathbf{T}_{N+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_L &= \begin{pmatrix} e^{i\gamma_s(z_d-z_{s-1})}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_s(z_d-z_{s-1})}\mathbf{G}_s & -\mathbf{G}_s \end{pmatrix} (\mathbf{Q}_L)^{-1} = \\ &= \left( \mathbf{T}_1 \times \left( \prod_{m=2}^{s-1} \mathbf{T}_m \right) \times \mathbf{T}_L \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь матрицы  $\mathbf{T}_m$  при  $m \neq s$  имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_m &= \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_m d_{m-1}} \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_m & -e^{i\gamma_m d_{m-1}} \mathbf{G}_m \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} e^{i\gamma_m d_{m-1}} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_m d_{m-1}} \mathbf{G}_m & -\mathbf{G}_m \end{pmatrix}^{-1}, \end{aligned}$$

а матрицы  $\mathbf{T}_L$  и  $\mathbf{T}_R$  –

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_L &= \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_s(z_d-z_{s-1})}\mathbf{I} \\ \mathbf{G}_s & -e^{i\gamma_s(z_d-z_{s-1})}\mathbf{G}_s \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} e^{i\gamma_s(z_d-z_{s-1})}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_s(z_d-z_{s-1})}\mathbf{G}_s & -\mathbf{G}_s \end{pmatrix}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_R &= \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_s(z_s-z_d)}\mathbf{I} \\ \mathbf{G}_s & -e^{i\gamma_s(z_s-z_d)}\mathbf{G}_s \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} e^{i\gamma_s(z_s-z_d)}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_s(z_s-z_d)}\mathbf{G}_s & -\mathbf{G}_s \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

В приведенных выше формулах матрицы  $\mathbf{G}_s$  выражаются по формуле (16).

Далее, в рассматриваемой задаче источники полей находятся исключительно внутри плоскострой структуры. Поэтому в столбцах  $\hat{\phi}_1$  и  $\hat{\phi}_{N+1}$  есть только компоненты волн, идущие от плоскострой структуры. Эти столбцы имеют вид

$$\hat{\phi}_1 = \left( 0; 0; \hat{E}_{1,x}^-; \hat{E}_{1,y}^- \right)^T,$$

$$\hat{\phi}_{N+1} = \left( \hat{E}_{N+1,x}^+; \hat{E}_{N+1,y}^+; 0; 0 \right)^T.$$

Чтобы получить оставшиеся, отличные от нуля, компоненты  $\hat{\phi}_1$  и  $\hat{\phi}_{N+1}$ , разобьем каждую из матриц

$\mathbf{H}_R$  и  $\mathbf{H}_L$  на четыре  $2 \times 2$ -подматрицы  $\mathbf{H}_{RA}$ ,  $\mathbf{H}_{RB}$ ,  $\mathbf{H}_{RC}$ ,  $\mathbf{H}_{RD}$  и  $\mathbf{H}_{LA}$ ,  $\mathbf{H}_{LB}$ ,  $\mathbf{H}_{LC}$ ,  $\mathbf{H}_{LD}$  следующим образом:

$$\mathbf{H}_R = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{RA} & \mathbf{H}_{RB} \\ \mathbf{H}_{RC} & \mathbf{H}_{RD} \end{pmatrix},$$

и

$$\mathbf{H}_L = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{LA} & \mathbf{H}_{LB} \\ \mathbf{H}_{LC} & \mathbf{H}_{LD} \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (36) примет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_{RA} & \mathbf{H}_{RB} \\ \mathbf{H}_{RC} & \mathbf{H}_{RD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{E}_{N+1,x}^+ \\ \hat{E}_{N+1,y}^+ \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{LA} & \mathbf{H}_{LB} \\ \mathbf{H}_{LC} & \mathbf{H}_{LD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{E}_{1,x}^- \\ \hat{E}_{1,y}^- \end{pmatrix} + \mathbf{V}. \quad (37)$$

Если еще разбить вектор

$$\mathbf{V} = (V_1; V_2; V_3; V_4)^T$$

на  $\mathbf{V}_A = (V_1, V_2)^T$  и  $\mathbf{V}_B = (V_3, V_4)^T$ , то уравнение (37) можно представить следующей системой из двух матричных уравнений:

$$\mathbf{H}_{RA} \begin{pmatrix} \hat{E}_{N+1,x}^+ \\ \hat{E}_{N+1,y}^+ \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{LB} \begin{pmatrix} \hat{E}_{1,x}^- \\ \hat{E}_{1,y}^- \end{pmatrix} + \mathbf{V}_A,$$

$$\mathbf{H}_{RC} \begin{pmatrix} \hat{E}_{N+1,x}^+ \\ \hat{E}_{N+1,y}^+ \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{LD} \begin{pmatrix} \hat{E}_{1,x}^- \\ \hat{E}_{1,y}^- \end{pmatrix} + \mathbf{V}_B.$$

Полученные уравнения можно снова объединить в одно матричное  $4 \times 4$ -уравнение:

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{H}_{LB} & \mathbf{H}_{RA} \\ -\mathbf{H}_{LD} & \mathbf{H}_{RC} \end{pmatrix} \hat{\phi}_{out} = \mathbf{V}, \quad (38)$$

где введен вектор-столбец

$$\hat{\phi}_{out} = (\hat{E}_{1,x}^-; \hat{E}_{1,y}^-; \hat{E}_{N+1,x}^+; \hat{E}_{N+1,y}^+)^T.$$

Решая это уравнение, найдем  $\hat{E}_{1,x}^-$ ,  $\hat{E}_{1,y}^-$  и  $\hat{E}_{N+1,x}^+$ ,  $\hat{E}_{N+1,y}^+$ , а значит, уходящую из плоскостной структуры влево волну (в направлении  $z \rightarrow -\infty$ ) по формулам

$$\mathbf{E}_1(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{E}_{1,x}^- \\ \hat{E}_{1,y}^- \end{pmatrix} e^{-i\gamma_1 z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \quad (39)$$

$$\mathbf{B}_1(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \xi\eta/\omega\gamma_1 & (\gamma_1^2 + \eta^2)/\omega\gamma_1 \\ -(\gamma_1^2 + \xi^2)/\omega\gamma_1 & -\xi\eta/\omega\gamma_1 \\ -\eta/\omega & \xi/\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{E}_{1,x}^- \\ \hat{E}_{1,y}^- \end{pmatrix} e^{-i\gamma_1 z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \quad (40)$$

и волну, уходящую вправо от плоскостной структуры (в направлении  $z \rightarrow +\infty$ ):

$$\mathbf{E}_{N+1}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\xi/\gamma_{N+1} & -\eta/\gamma_{N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{E}_{N+1,x}^+ \\ \hat{E}_{N+1,y}^+ \end{pmatrix} \times e^{i\gamma_{N+1}(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \quad (41)$$

$$\mathbf{B}_{N+1}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} -\xi\eta/\omega\gamma_{N+1} & -(\gamma_{N+1}^2 + \eta^2)/\omega\gamma_{N+1} \\ (\gamma_{N+1}^2 + \xi^2)/\omega\gamma_{N+1} & \xi\eta/\omega\gamma_{N+1} \\ -\eta/\omega & \xi/\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{E}_{N+1,x}^+ \\ \hat{E}_{N+1,y}^+ \end{pmatrix} e^{i\gamma_{N+1}(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (42)$$

Наконец, при необходимости, зная  $\hat{\phi}_1$  и  $\hat{\phi}_{N+1}$ , можно найти вектор-столбцы поля в любой внутренней области  $\hat{\phi}_j$ , так как они однозначно определяются граничными условиями. После этого электромагнитные поля в любой из этих областей могут быть найдены по формулам (10), (13). Таким образом, электромагнитные поля будут определены во всем пространстве.

**6. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ДИПОЛЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО НА ГРАНИЦЕ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛЕНКИ, НАНЕСЕННОЙ НА ПОВЕРХНОСТЬ ПРИЗМЫ**

Рассмотрим теперь задачу излучения элементарного горизонтального источника, расположенного на свободной границе пленки (см. рис. 5а) в схеме Кречмана. Поляризация источника — вдоль оси  $x$  ( $n_x = 1, n_y = 0, n_z = 0$ ). Толщина пленки равна  $d$ . Индекс 1 соответствует полупространству материала призмы, 2 — пленке, 3 — свободному полупространству над пленкой. Тогда  $N = 2, z_d = z_2 = d, \mathbf{H}_R = \mathbf{T}_3, \mathbf{H}_L = (\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2)^{-1}$  и уравнение (36) примет вид

$$\mathbf{T}_3 \times \hat{\phi}_3 = (\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2)^{-1} \times \hat{\phi}_1 + \mathbf{V}, \quad (43)$$

где матрицы выражаются следующими формулами:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_1 & -\mathbf{G}_1 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_2 d} \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_2 & -e^{i\gamma_2 d} \mathbf{G}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\gamma_2 d} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_2 d} \mathbf{G}_2 & -\mathbf{G}_2 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_3 & -\mathbf{G}_3 \end{pmatrix},$$

а вектор-столбец стороннего тока равен  $\mathbf{V} = (0; 0; 0; -1)^T$ .

Учитывая, что  $(\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2)^{-1} = \mathbf{T}_2^{-1} \times \mathbf{T}_1^{-1}$ , получим

$$\mathbf{H}_L = (\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2)^{-1} = \mathbf{T}_2^{-1} \times \mathbf{T}_1^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\gamma_2 d} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_2 d} \mathbf{G}_2 & -\mathbf{G}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_2 d} \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_2 & -e^{i\gamma_2 d} \mathbf{G}_2 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_1 & -\mathbf{G}_1 \end{pmatrix}.$$

Вводя вектор-столбец  $\hat{\phi}_{out} = (\hat{E}_{1,x}^-; \hat{E}_{1,y}^-; \hat{E}_{3,x}^+; \hat{E}_{3,y}^+)^T$ , уравнение (38) для данной задачи можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{H}_{LB} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{H}_{LD} & \mathbf{G}_3 \end{pmatrix} \times \hat{\phi}_{out} = \mathbf{V}. \quad (44)$$

Решая линейное уравнение (44), найдем  $\hat{E}_{1,x}^-$ ,  $\hat{E}_{1,y}^-$  и  $\hat{E}_{3,x}^+$ ,  $\hat{E}_{3,y}^+$ , и затем по формулам (39)–(42) при  $N = 2$  получим уходящую волну из плоскостной структуры в призму (в область 1) и свободное пространство (область 3) над пленкой (в направлениях  $z \rightarrow \pm\infty$  от границ пленки).

Снова будем считать, что среды немагнитные и  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$ . Тогда, учитывая  $k_j^2 = \varepsilon_j \mu_0 \omega^2$ , выражения для подматриц  $\mathbf{H}_{LB}$  и  $\mathbf{H}_{LD}$  можно получить в явном виде:

$$\mathbf{H}_{LB} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma_2 d) + i \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \frac{\xi^2}{\gamma_1} - \gamma_1 \right) \frac{\sin(\gamma_2 d)}{\gamma_2} & i \xi \eta \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \frac{\sin(\gamma_2 d)}{\gamma_1 \gamma_2} \\ i \xi \eta \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \frac{\sin(\gamma_2 d)}{\gamma_1 \gamma_2} & \cos(\gamma_2 d) + i \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \frac{\eta^2}{\gamma_1} - \gamma_1 \right) \frac{\sin(\gamma_2 d)}{\gamma_2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{LD} = \begin{pmatrix} \frac{\xi \eta}{\mu_0 \omega} \left( \frac{\cos(\gamma_2 d)}{\gamma_1} - i \frac{\sin(\gamma_2 d)}{\gamma_2} \right) & \frac{\gamma_1^2 + \eta^2}{\gamma_1 \mu_0 \omega} \cos(\gamma_2 d) - i \frac{\gamma_2^2 + \eta^2}{\gamma_2 \mu_0 \omega} \sin(\gamma_2 d) \\ -\frac{\gamma_1^2 + \xi^2}{\gamma_1 \mu_0 \omega} \cos(\gamma_2 d) + i \frac{\gamma_2^2 + \xi^2}{\gamma_2 \mu_0 \omega} \sin(\gamma_2 d) & -\frac{\xi \eta}{\mu_0 \omega} \left( \frac{\cos(\gamma_2 d)}{\gamma_1} - i \frac{\sin(\gamma_2 d)}{\gamma_2} \right) \end{pmatrix}.$$

Решив уравнение (44), найдем следующие аналитические выражения для  $\hat{E}_{1,x}^-$ ,  $\hat{E}_{1,y}^-$ ,  $\hat{E}_{1,z}^-$ :

$$\hat{E}_{1,x}^- = \frac{a_{1x} + d_{1x} \eta^2}{\omega \mu_0 D} \cos(\gamma_2 d) + i \frac{b_{1x} + e_{1x} \eta^2}{\omega \mu_0 D} \sin(\gamma_2 d), \quad (45)$$

$$\hat{E}_{1,y}^- = \frac{\xi \eta}{\omega \mu_0 D} (a_{1y} \cos(\gamma_2 d) + i b_{1y} \sin(\gamma_2 d)), \quad (46)$$

$$\hat{E}_{1,z}^- = \xi \hat{E}_{1,x}^- / \gamma_1 + \eta \hat{E}_{1,y}^- / \gamma_1, \quad (47)$$

и выражения для  $\hat{E}_{3,x}^+$ ,  $\hat{E}_{3,y}^+$ ,  $\hat{E}_{3,z}^+$ :

$$\hat{E}_{3,x}^+ = \frac{a_{3x} + d_{3x}\eta^2}{\omega\mu_0 D} \cos^2(\gamma_2 d) + \frac{b_{3x} + e_{3x}\eta^2}{\omega\mu_0 D} \sin^2(\gamma_2 d) + i \frac{c_{3x} + f_{3x}\eta^2}{\omega\mu_0 D} \times \cos(\gamma_2 d) \sin(\gamma_2 d), \quad (48)$$

$$\hat{E}_{3,y}^+ = \frac{\xi\eta}{\omega\mu_0 D} (a_{3y} \cos^2(\gamma_2 d) + b_{3y} \sin^2(\gamma_2 d) + ic_{3y} \cos(\gamma_2 d) \sin(\gamma_2 d)), \quad (49)$$

$$\hat{E}_{3,z}^+ = -\xi \hat{E}_{3,x}^+ / \gamma_3 - \eta \hat{E}_{3,y}^+ / \gamma_3. \quad (50)$$

В формулах (45)–(50) коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$  являются функциями  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$ . Выражения для этих коэффициентов представлены в Приложении А. Кроме того, функция  $D(\xi, \eta)$  есть детерминант матрицы уравнения (44). Оказалось, что  $D(\xi, \eta) = D(\lambda)$  есть функция  $\lambda = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  и записывается в виде аналитического выражения:

$$D(\lambda) = \Delta_1 \cos^2(\gamma_2 d) + \Delta_2 \sin^2(\gamma_2 d) + \Delta_3 \cos(\gamma_2 d) \sin(\gamma_2 d),$$

где

$$\Delta_1 = \frac{1}{\omega^2 \mu_0^2} \frac{(\gamma_1 + \gamma_3)^2 (\gamma_1 \gamma_3 + \lambda^2)}{\gamma_1 \gamma_3},$$

$$\Delta_2 = -\frac{1}{\omega^2 \mu_0^2} \frac{(\gamma_1 \gamma_3 + \gamma_2^2)^2}{\gamma_1 \gamma_3 \gamma_2^2 k_2^2} \times \left( \lambda^4 + \frac{\gamma_2^2 (\gamma_1 + \gamma_3)^2}{\gamma_1 \gamma_3 + \gamma_2^2} \lambda^2 + \gamma_1 \gamma_2^2 \gamma_3 \right),$$

$$\Delta_3 = -\frac{i(\gamma_1 + \gamma_3)}{\omega^2 \mu_0^2 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 k_2^2} \left\{ 2(\gamma_1 \gamma_3 + \gamma_2^2) (\gamma_1 \gamma_3 \gamma_2^2 + \lambda^4) + (\gamma_1^2 \gamma_3^2 + \gamma_1^2 \gamma_2^2 + 4\gamma_1 \gamma_3 \gamma_2^2 + \gamma_3^2 \gamma_2^2 + \gamma_2^4) \lambda^2 \right\}.$$

Естественно, что полученные выражения (45)–(50) переходят в соответствующие выражения для диполя на границе двух полупространств, когда толщина пленки  $d$  стремится к нулю, при этом полученные выражения можно точно свести к известным формулам [8].

Аналитические выражения (45)–(50) имеют первостепенное значение, так как позволяют получить выражения для электрических полей в полупространствах через одномерные интегралы, что значительно ускоряет счет и повышает точность вычислений. Действительно, если перейти к полярным координатам в плоскостях  $(x, y)$  и  $(\xi, \eta)$  по формулам

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, & y &= \rho \sin \varphi, \\ \xi &= \lambda \cos \vartheta, & \eta &= \lambda \sin \vartheta \end{aligned} \quad (51)$$

получим, что величины  $\gamma_1 = \sqrt{k_1^2 - \lambda^2}$ ,  $\gamma_2 = \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}$ ,  $\gamma_3 = \sqrt{k_3^2 - \lambda^2}$ , зависящие от них множители и детерминант  $D(\lambda) = D(\lambda \cos \vartheta, \lambda \sin \vartheta)$  являются функциями только  $\lambda$  и не зависят от  $\vartheta$ . Поэтому выражения для соответствующих полей, как будет показано ниже, можно привести к одномерным интегралам.

Рассмотрим электрические поля в полупространствах (в областях с номерами  $j = 1$  и  $j = 3$ ). Сначала рассмотрим (см. представление (39)) в полупространстве с  $j = 1$ :

$$E_{1,x}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}_{1,x}^- e^{-i\gamma_1 z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Подставим выражение (45) для  $\hat{E}_{1,x}^-$ , перейдем к полярным координатам (51) и получим

$$\begin{aligned} E_{1,x}(\rho, \varphi, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{2\pi} (Q_{1x}(\gamma) + R_{1x}(\gamma) \lambda^2 \sin^2 \vartheta) e^{-i\gamma_1 z} e^{i\rho\lambda \cos(\varphi - \vartheta)} d\vartheta \right) \lambda d\lambda = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} (Q_{1x}(\gamma) + R_{1x}(\gamma) \lambda^2) \lambda e^{-i\gamma_1 z} \left( \int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\varphi - \vartheta)} d\vartheta \right) d\lambda - \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} R_{1x}(\gamma) \lambda^3 e^{-i\gamma_1 z} \left( \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta e^{i\rho\lambda \cos(\varphi - \vartheta)} d\vartheta \right) d\lambda, \quad (52) \end{aligned}$$

где введены следующие (зависящие только от  $\lambda$ ) функции:

$$Q_{1x}(\gamma) = \frac{1}{\omega\mu_0 D(\lambda)} (a_{1x} \cos(\gamma_2 d) + ib_{1x} \sin(\gamma_2 d)),$$

$$R_{1x}(\gamma) = \frac{1}{\omega\mu_0 D(\lambda)} (d_{1x} \cos(\gamma_2 d) + ie_{1x} \sin(\gamma_2 d)).$$

Интегралы в скобках в (52) могут быть выражены через функции Бесселя, если использовать их интегральное представление,

$$J_n(\rho\lambda) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos\theta} e^{in\theta} d\theta. \quad (53)$$

В частности, нетрудно показать, что из (53) следует следующий ряд тождеств:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\varphi-\vartheta)} d\vartheta &= 2\pi J_0(\rho\lambda), \\ \int_0^{2\pi} \cos\vartheta e^{i\rho\lambda \cos(\varphi-\vartheta)} d\vartheta &= 2\pi i \cos\varphi J_1(\rho\lambda), \\ \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta e^{i\rho\lambda \cos(\varphi-\vartheta)} d\vartheta &= \pi (J_0(\rho\lambda) - \\ &- J_2(\rho\lambda) \cos 2\varphi), \\ \int_0^{2\pi} \sin\vartheta \cos\vartheta e^{i\rho\lambda \cos(\varphi-\vartheta)} d\vartheta &= \\ &= \pi \sin 2\varphi \left( J_0(\rho\lambda) - \frac{2}{\rho\lambda} J_1(\rho\lambda) \right), \\ \int_0^{2\pi} \cos\vartheta \sin^2\vartheta e^{i\rho\lambda \cos(\varphi-\vartheta)} d\vartheta &= i2\pi \times \\ &\times \cos\varphi \left( \sin^2\varphi J_1(\rho\lambda) + (1-4\sin^2\varphi) \frac{J_2(\rho\lambda)}{\rho\lambda} \right). \end{aligned} \quad (54)$$

Подставляя соответствующие выражения (54) интегралов по  $\vartheta$  в (52), получим

$$\begin{aligned} E_{1,x}(\rho, \varphi, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} (2Q_{1x}(\gamma) + R_{1x}(\gamma) \lambda^2) \times \\ &\times \lambda e^{-i\gamma_1 z} J_0(\rho\lambda) d\lambda + \\ &+ \frac{\cos 2\varphi}{4\pi} \int_0^{+\infty} R_{1x}(\gamma) \lambda^3 J_2(\rho\lambda) e^{-i\gamma_1 z} d\lambda. \end{aligned} \quad (55)$$

Аналогичное рассмотрение проведем для  $y$ -компоненты. Из (39) и (46) получим

$$E_{1,y}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}_{1,y}^- e^{-i\gamma_1 z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Подставляя выражение (46) для  $\hat{E}_{1,y}^-$ , после перехода к полярным координатам (51), получим

$$\begin{aligned} E_{1,y}(\rho, \varphi, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{2\pi} Q_{1y}(\gamma) \lambda^2 \cos\vartheta \sin\vartheta \times \right. \\ &\times \left. e^{-i\gamma_1 z} e^{i\rho\lambda \cos(\varphi-\vartheta)} d\vartheta \right) \lambda d\lambda = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \lambda^3 Q_{1y}(\gamma) e^{-i\gamma_1 z} \times \\ &\times \left( \int_0^{2\pi} \cos\vartheta \sin\vartheta e^{i\rho\lambda \cos(\varphi-\vartheta)} d\vartheta \right) d\lambda, \end{aligned}$$

где введена функция от  $\lambda$ :

$$Q_{1y}(\gamma) = \frac{1}{\omega\mu_0 D(\lambda)} (a_{1y} \cos(\gamma_2 d) + ib_{1y} \sin(\gamma_2 d)).$$

Учитывая соответствующее интегральное представление (54) интеграла по  $\vartheta$ , получим для  $E_{1,y}$  выражение

$$\begin{aligned} E_{1,y}(\rho, \varphi, z) &= \frac{\sin 2\varphi}{4\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^3 Q_{1y}(\gamma) \times \\ &\times \left( J_0(\rho\lambda) - \frac{2}{\rho\lambda} J_1(\rho\lambda) \right) e^{-i\gamma_1 z} d\lambda. \end{aligned} \quad (56)$$

Оставшуюся компоненту  $E_{1,z}$  в первом полупространстве из (39) запишем в виде

$$\begin{aligned} E_{1,z}(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\xi \hat{E}_{1,x}^-}{\gamma_1} + \frac{\eta \hat{E}_{1,y}^-}{\gamma_1} \right) e^{-i\gamma_1 z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \end{aligned}$$

и, подставляя выражения для  $\hat{E}_{1,x}^-$  и  $\hat{E}_{1,y}^-$  по формулам (45) и (46), после перехода к полярным координатам получим

$$\begin{aligned}
 E_{1,z}(\rho, \varphi, z) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{Q_{1x}(\gamma) \lambda^2 e^{i\gamma_1 z}}{\gamma_1} \times \\
 & \times \left( \int_0^{2\pi} \cos \vartheta e^{i\rho\lambda \cos(\varphi-\vartheta)} d\vartheta \right) d\lambda + \\
 & + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{(R_{1x}(\gamma) + Q_{1y}(\gamma)) \lambda^4}{\gamma_1} e^{i\gamma_1 z} \times \\
 & \times \left( \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta e^{i\rho\lambda \cos(\varphi-\vartheta)} d\vartheta \right) d\lambda.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int_0^{+\infty} \frac{(R_{1x}(\gamma) + Q_{1y}(\gamma)) \lambda^4 J_1(\rho\lambda)}{\gamma_1} e^{-i\gamma_1 z} d\lambda + \\
 & + \frac{i \cos \varphi (1 - 4 \sin^2 \varphi)}{2\pi} \times \\
 & \times \int_0^{+\infty} \frac{(R_{1x}(\gamma) + Q_{1y}(\gamma)) \lambda^3 J_2(\rho\lambda)}{\rho\gamma_1} e^{-i\gamma_1 z} d\lambda. \quad (57)
 \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим электрическое поле в полупространстве (с номером  $j = 3$ ). Составляющую по оси  $x$  получим из (41) в виде

Используя соответствующие интегральные представления (54) для интегралов по  $\vartheta$ , получим

$$\begin{aligned}
 E_{1,z}(\rho, \varphi, z) = & \frac{i \cos \varphi}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{Q_{1x}(\gamma) \lambda^2 e^{-i\gamma_1 z}}{\gamma_1} J_1(\rho\lambda) d\lambda + \\
 & + \frac{i \cos \varphi \sin^2 \varphi}{2\pi} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{3,x}(x, y, z) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\
 & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}_{3,x}^+ e^{i\gamma_3(z-d)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.
 \end{aligned}$$

Преобразуя выражение (48) и переходя к полярным координатам (51),  $E_{3,x}$  можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 E_{3,x}(\rho, \varphi, z) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{2\pi} (Q_{3x}(\gamma) + R_{3x}(\gamma) \lambda^2 \sin^2 \vartheta) e^{i\gamma_3(z-d)} e^{i\rho\lambda \cos(\varphi-\vartheta)} d\vartheta \right) \lambda d\lambda = \\
 = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} (Q_{3x}(\gamma) + \lambda^2 R_{3x}(\gamma)) e^{i\gamma_3(z-d)} \left( \int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\varphi-\vartheta)} d\vartheta \right) \lambda d\lambda - \\
 & - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \lambda^2 R_{3x}(\gamma) e^{i\gamma_3(z-d)} \left( \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta e^{i\rho\lambda \cos(\varphi-\vartheta)} d\vartheta \right) \lambda d\lambda,
 \end{aligned}$$

где введены следующие зависящие только от  $\lambda$  функции:

$$\begin{aligned}
 Q_{3x}(\gamma) = & \frac{1}{\omega\mu_0 D(\lambda)} (a_{3x} \cos^2(\gamma_2 d) + b_{3x} \sin^2(\gamma_2 d) + \\
 & + ic_{3x} \cos(\gamma_2 d) \sin(\gamma_2 d)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{3x}(\gamma) = & \frac{1}{\omega\mu_0 D(\lambda)} (d_{3x} \cos^2(\gamma_2 d) + \\
 & + e_{3x} \sin^2(\gamma_2 d) + if_{3x} \cos(\gamma_2 d) \sin(\gamma_2 d)).
 \end{aligned}$$

Используя соответствующие интегральные представления (54) для интегралов по  $\vartheta$ , получим

$$\begin{aligned}
 E_{3,x}(\rho, \varphi, z) = & \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} (2Q_{3x}(\gamma) + \lambda^2 R_{3x}(\gamma)) \times \\
 & \times J_0(\rho\lambda) e^{i\gamma_3(z-d)} \lambda d\lambda + \frac{\cos 2\varphi}{4\pi} \times \\
 & \times \int_0^{+\infty} \lambda^3 R_{3x}(\gamma) J_2(\rho\lambda) e^{i\gamma_3(z-d)} d\lambda. \quad (58)
 \end{aligned}$$

Аналогично, в представлении

$$\begin{aligned}
 E_{3,y}(x, y, z) = & \\
 = & (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}_{3,y}^+ e^{i\gamma_3(z-d)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta
 \end{aligned}$$

запишем  $\hat{E}_{3,y}^+$  в виде (49) и перейдем к полярным координатам:

$$\begin{aligned}
 E_{3,y}(\rho, \varphi, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\
 &\times \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{2\pi} Q_{3y}(\gamma) \lambda^2 \cos \vartheta \sin \vartheta e^{i\gamma_3(z-d)} \times \right. \\
 &\quad \left. \times e^{i\rho\lambda \cos(\varphi-\vartheta)} d\vartheta \right) \lambda d\lambda = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \lambda^3 Q_{3y}(\gamma) e^{i\gamma_3(z-d)} \times \\
 &\quad \times \left( \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta e^{i\rho\lambda \cos(\varphi-\vartheta)} d\vartheta \right) d\lambda,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 Q_{3y}(\gamma) &= \frac{1}{\omega\mu_0 D(\lambda)} (a_{3y} \cos^2(\gamma_2 d) + \\
 &\quad + b_{3y} \sin^2(\gamma_2 d) + ic_{3y} \cos(\gamma_2 d) \sin(\gamma_2 d)).
 \end{aligned}$$

Учитывая соответствующее интегральное представление (54), получим

$$\begin{aligned}
 E_{3,y}(\rho, \varphi, z) &= \frac{\sin 2\varphi}{4\pi} \int_0^{+\infty} \lambda^3 Q_{3y}(\gamma) \times \\
 &\quad \times \left( J_0(\rho\lambda) - \frac{2}{\rho\lambda} J_1(\rho\lambda) \right) e^{i\gamma_3(z-d)} d\lambda. \quad (59)
 \end{aligned}$$

Наконец, для составляющей  $E_{3,z}$ , учитывая (50), получим аналогично

$$\begin{aligned}
 E_{3,z}(x, y, z) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\xi \hat{E}_{3,x}^+}{\gamma_3} + \frac{\eta \hat{E}_{3,y}^+}{\gamma_3} \right) \times \\
 &\quad \times e^{i\gamma_3(z-d)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.
 \end{aligned}$$

Переходя к полярным координатам, запишем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 E_{3,z}(\rho, \varphi, z) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{Q_{3x}(\gamma) \lambda^2 e^{i\gamma_3(z-d)}}{\gamma_3} \times \\
 &\quad \times \left( \int_0^{2\pi} \cos \vartheta e^{i\rho\lambda \cos(\varphi-\vartheta)} d\vartheta \right) d\lambda - \\
 &\quad - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{(R_{3x}(\gamma) + Q_{3y}(\gamma)) \lambda^4}{\gamma_3} e^{i\gamma_3(z-d)} \times \\
 &\quad \times \left( \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta e^{i\rho\lambda \cos(\varphi-\vartheta)} d\vartheta \right) d\lambda.
 \end{aligned}$$

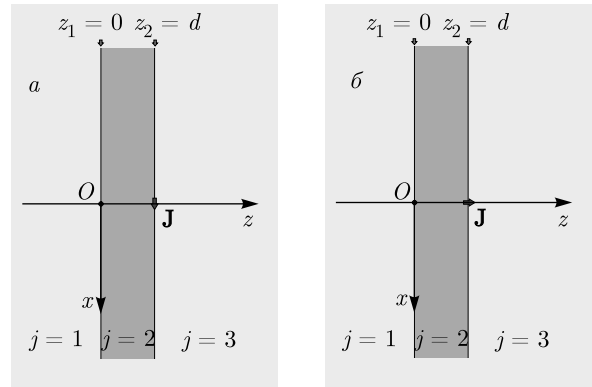


Рис. 5. Геометрия задачи излучения элементарного источника тока, расположенного на свободной границе пленки в схеме Кречмана при ориентации дипольного момента параллельно (а) и перпендикулярно (б) границе

Учитывая (54), получим

$$\begin{aligned}
 E_{3,z}(\rho, \varphi, z) &= -\frac{i \cos \varphi}{2\pi} \times \\
 &\quad \times \int_0^{+\infty} \frac{Q_{3x}(\gamma) \lambda^2 J_1(\rho\lambda)}{\gamma_3} e^{i\gamma_3(z-d)} d\lambda - \\
 &\quad - \frac{i \cos \varphi \sin^2 \varphi}{2\pi} \times \\
 &\quad \times \int_0^{+\infty} \frac{(R_{3x}(\gamma) + Q_{3y}(\gamma)) \lambda^4 J_1(\rho\lambda)}{\gamma_3} e^{i\gamma_3(z-d)} d\lambda - \\
 &\quad - \frac{i \cos \varphi (1 - 4 \sin^2 \varphi)}{2\pi} \times \\
 &\quad \times \int_0^{+\infty} \frac{(R_{3x}(\gamma) + Q_{3y}(\gamma)) \lambda^3 J_2(\rho\lambda)}{\rho\gamma_3} e^{i\gamma_3(z-d)} d\lambda. \quad (60)
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили точные аналитические выражения для электрических полей в полупространствах, окружающих пленку.

### 7. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ВЕРТИКАЛЬНОГО ДИПОЛЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО НА ГРАНИЦЕ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛЕНКИ, НАНЕСЕННОЙ НА ПОВЕРХНОСТЬ ПРИЗМЫ

Рассмотрим задачу излучения элементарного вертикального излучателя, расположенного на свободной границе пленки (см. рис. 5б) в схеме Кречмана. Будем считать, что излучатель находится в свободном полупространстве, в области 3,



бесконечно близко к границе. Поляризация источника — вдоль оси  $z$  ( $n_x = 0, n_y = 0, n_z = 1$ ). Применяя те же рассуждения, что и для горизонтального диполя, получим для фурье-образов полей  $\hat{E}_{1,x}^-, \hat{E}_{1,y}^-$  и  $\hat{E}_{3,x}^+, \hat{E}_{3,y}^+$  уравнение (44), в котором вектор-столбец правой части равен

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \xi/\omega\varepsilon_3; & \eta/\omega\varepsilon_3; & 0; & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Решая уравнение (44), найдем  $\hat{E}_{1,x}^-, \hat{E}_{1,y}^-$  и  $\hat{E}_{3,x}^+, \hat{E}_{3,y}^+$  и далее по формулам (39)–(42) при  $N = 2, z_d = z_2 = d$  получим уходящую волну из плоскостойкой структуры в призму (в область 1) и свободное пространство (область 3) над пленкой (в направлениях  $z \rightarrow \pm\infty$  от границ пленки).

Снова будем считать, что среды немагнитные и  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$ . Выражения для подматриц  $\mathbf{H}_{LB}$  и  $\mathbf{H}_{LD}$  те же, что и приведенные выше выражения для горизонтального диполя.

Решив уравнение (44) для вертикального диполя и учитывая, что  $k_3^2 = \varepsilon_3\mu_0\omega^2$ , найдем следующие аналитические выражения для  $\hat{E}_{1,x}^-, \hat{E}_{1,y}^-, \hat{E}_{1,z}^-$ :

$$\hat{E}_{1,x}^- = \frac{\xi}{\omega\mu_0 D} (u_{1x} \cos(\gamma_2 d) + iv_{1x} \sin(\gamma_2 d)), \quad (61)$$

$$\hat{E}_{1,y}^- = \frac{\eta}{\omega\mu_0 D} (u_{1y} \cos(\gamma_2 d) + iv_{1y} \sin(\gamma_2 d)), \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_{1,z}^- &= \frac{\xi \hat{E}_{1,x}^-}{\gamma_1} + \frac{\eta \hat{E}_{1,y}^-}{\gamma_1} = \\ &= \frac{\xi^2 + \eta^2}{\omega\mu_0 D} (u_{1z} \cos(\gamma_2 d) + iv_{1z} \sin(\gamma_2 d)). \end{aligned} \quad (63)$$

Аналогично найдем  $\hat{E}_{3,x}^+, \hat{E}_{3,y}^+$  и  $\hat{E}_{3,z}^+$ :

$$\begin{aligned} \hat{E}_{3,x}^+ &= \frac{\xi}{\omega\mu_0 D} (u_{3x} \cos^2(\gamma_2 d) + v_{3x} \sin^2(\gamma_2 d) + \\ &+ iw_{3x} \sin(\gamma_2 d) \cos(\gamma_2 d)), \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_{3,y}^+ &= \frac{\eta}{\omega\mu_0 D} (u_{3y} \cos^2(\gamma_2 d) + v_{3y} \sin^2(\gamma_2 d) + \\ &+ iw_{3y} \sin(\gamma_2 d) \cos(\gamma_2 d)), \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_{3,z}^+ &= -\frac{\xi \hat{E}_{3,x}^+}{\gamma_3} - \frac{\eta \hat{E}_{3,y}^+}{\gamma_3} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{\omega\mu_0 D} \times \\ &\times (u_{3z} \cos^2(\gamma_2 d) + v_{3z} \sin^2(\gamma_2 d) + \\ &+ iw_{3z} \sin(\gamma_2 d) \cos(\gamma_2 d)). \end{aligned} \quad (66)$$

В формулах (61)–(66) коэффициенты  $u, v, w$  являются функциями  $\gamma_1, \gamma_2$  и  $\gamma_3$ . Выражения для этих коэффициентов представлены в Приложении В.

Найдем теперь поля в полупространствах.

Полупространство  $j = 1$ . Составляющая  $E_{1,x}$  определяется формулой

$$E_{1,x}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}_{1,x}^- e^{-i\gamma_1 z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Подставим выражение (61) для  $\hat{E}_{1,x}^-$  и перейдем к полярным координатам. Учитывая тождества (54), получим

$$\begin{aligned} E_{1,x}(\rho, \varphi, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \lambda S_{1,x}(\lambda) e^{-i\gamma_1 z} \times \\ &\times \left( \int_0^{2\pi} \cos \vartheta e^{i\rho\lambda \cos(\varphi - \vartheta)} d\vartheta \right) \lambda d\lambda = \\ &= \frac{i \cos \varphi}{2\pi} \int_0^{+\infty} S_{1,x}(\lambda) J_1(\rho\lambda) e^{-i\gamma_1 z} \lambda^2 d\lambda, \end{aligned} \quad (67)$$

где

$$S_{1,x}(\lambda) = \frac{1}{\omega\mu_0 D(\lambda)} (u_{1x} \cos(\gamma_2 d) + iv_{1x} \sin(\gamma_2 d))$$

— функция только от  $\lambda$ .

Аналогично для составляющей  $E_{1,y}$ , учитывая тождества (54), получим

$$\begin{aligned} E_{1,y}(\rho, \varphi, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \lambda S_{1,y}(\lambda) e^{-i\gamma_1 z} \times \\ &\times \left( \int_0^{2\pi} \sin \vartheta e^{i\rho\lambda \cos(\varphi - \vartheta)} d\vartheta \right) \lambda d\lambda = \\ &= \frac{i \sin \varphi}{2\pi} \int_0^{+\infty} S_{1,y}(\lambda) J_1(\rho\lambda) e^{-i\gamma_1 z} \lambda^2 d\lambda, \end{aligned} \quad (68)$$

где

$$S_{1,y}(\lambda) = \frac{1}{\omega\mu_0 D(\lambda)} (u_{1y} \cos(\gamma_2 d) + iv_{1y} \sin(\gamma_2 d))$$

— также функция только от  $\lambda$ .

Отметим, что из (67) и (68) следует, что в цилиндрических координатах  $E_{1,\rho}(\rho, z) = E_{1,x} \cos \varphi + E_{1,y} \sin \varphi$  не зависит от  $\varphi$ , что соответствует симметрии задачи. Из симметрии также следует, что

$E_{1,z}$  не зависит от  $\varphi$ . Действительно, учитывая (54), получим

$$E_{1,z}(\rho, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \lambda^2 S_{1,z}(\lambda) e^{-i\gamma_1 z} \times \\ \times \left( \int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\varphi-\vartheta)} d\vartheta \right) \lambda d\lambda = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} S_{1,z}(\lambda) J_0(\rho\lambda) e^{-i\gamma_1 z} \lambda^3 d\lambda, \quad (69)$$

где

$$S_{1,z}(\lambda) = \frac{1}{\omega\mu_0 D(\lambda)} (u_{1z} \cos(\gamma_2 d) + i v_{1z} \sin(\gamma_2 d)).$$

Полупространство  $j = 3$ . Приведем аналогичные выражения для составляющих полей. Составляющая по оси  $x$  представляется в виде

$$E_{3,x}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}_{3,x}^+ e^{i\gamma_3(z-d)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Переходя к полярным координатам и учитывая (54), получим

$$E_{3,x}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \lambda S_{3,x}(\lambda) e^{i\gamma_3(z-d)} \times \\ \times \left( \int_0^{2\pi} \cos\vartheta e^{i\rho\lambda \cos(\varphi-\vartheta)} d\vartheta \right) \lambda d\lambda = \\ = \frac{i \cos\varphi}{2\pi} \int_0^{+\infty} S_{3,x}(\lambda) J_1(\rho\lambda) e^{i\gamma_3(z-d)} \lambda^2 d\lambda, \quad (70)$$

где

$$S_{3,x}(\lambda) = \frac{1}{\omega\mu_0 D(\lambda)} (u_{3x} \cos^2(\gamma_2 d) + \\ + v_{3x} \sin^2(\gamma_2 d) + i w_{3x} \sin(\gamma_2 d) \cos(\gamma_2 d))$$

— функция только от  $\lambda$ .

Аналогично,

$$E_{3,y}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \lambda S_{3,y}(\lambda) e^{i\gamma_3(z-d)} \times \\ \times \left( \int_0^{2\pi} \sin\vartheta e^{i\rho\lambda \cos(\varphi-\vartheta)} d\vartheta \right) \lambda d\lambda = \\ = \frac{i \sin\varphi}{2\pi} \int_0^{+\infty} S_{3,y}(\lambda) J_1(\rho\lambda) e^{i\gamma_3(z-d)} \lambda^2 d\lambda, \quad (71)$$

где

$$S_{3,y}(\lambda) = \frac{1}{\omega\mu_0 D(\lambda)} (u_{3y} \cos^2(\gamma_2 d) + \\ + v_{3y} \sin^2(\gamma_2 d) + i w_{3y} \sin(\gamma_2 d) \cos(\gamma_2 d)).$$

Наконец,

$$E_{3,z}(\rho, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \lambda^2 S_{3,z}(\lambda) e^{i\gamma_3(z-d)} \times \\ \times \left( \int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\varphi-\vartheta)} d\vartheta \right) \lambda d\lambda = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} S_{3,z}(\lambda) J_0(\rho\lambda) e^{i\gamma_3(z-d)} \lambda^3 d\lambda, \quad (72)$$

где

$$S_{3,z}(\lambda) = \frac{1}{\omega\mu_0 D(\lambda)} (u_{3z} \cos^2(\gamma_2 d) + \\ + v_{3z} \sin^2(\gamma_2 d) + i w_{3z} \sin(\gamma_2 d) \cos(\gamma_2 d)).$$

Итак, мы получили выражения для электрического поля вертикального диполя, расположенного на границе пленки в окружающих пленку полупространствах.

### 8. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ВЕРТИКАЛЬНЫЙ ИЗЛУЧАТЕЛЬ НА СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕ ПЛЕНКИ ЗОЛОТА В СХЕМЕ КРЕЧМАНА

Данная статья задумывалась как продолжение работы по изучению явлений, связанных с поверхностной плазмонной волной, которая возбуждается по схеме Кречмана и распространяется вдоль свободной поверхности пленки металла (например, золота) определенной толщины, нанесенной на призму [18]. На свободной поверхности пленки возбуждается волна, которая имеет высокую интенсивность на границе раздела и убывает экспоненциально в направлении, нормальном к границе. Если поместить на свободной поверхности молекулу или наноструктуру, в которой будет индуцироваться поверхностной волной дипольный момент, то можно найти излучение индуцированного диполя, разложив диполь на параллельную и перпендикулярную границе составляющие.

Излучение диполя, ориентированного параллельно границе, было исследовано в работе [19].

В данной работе мы рассмотрим элементарный излучатель, с вертикальным дипольным моментом, направленным перпендикулярно пленке. Интерес представляет пространственная направленность излучения этого диполя в двух случаях: при излучении диполя на границе двух полупространств без пленки ( $d \rightarrow 0$ ) и с металлической пленкой, по свободной границе которой может распространяться поверхностная плазмонная волна. Это сравнение поможет понять влияние поверхностной волны на направленные свойства элементарного излучателя.

Итак, выберем частоту излучения диполя  $\omega$ , соответствующую длине волны в вакууме, равной  $\lambda_0 = 633$  нм, показатель преломления полупространства призмы на этой частоте выберем равным  $n_p = 1.6$  ( $\varepsilon_1 = 2.56\varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума), показатель преломления свободного полупространства над пленкой —  $n_1 = 1$  ( $\varepsilon_3 = \varepsilon_0$ ). Диэлектрическую проницаемость золотой пленки на заданной частоте примем равной  $\varepsilon_2 = (-11.6 + i1.2)\varepsilon_0$  [12], а ее толщину —  $d = 48.6$  нм. Как было показано [18], при таких параметрах в пленке наилучшим образом возбуждается поверхностная плазмонная волна при падении плоской волны  $p$ -поляризации со стороны призмы под углом  $\alpha_{opt} = 40.98^\circ$  к нормали. Для того чтобы оценить влияние такой пленки на излучение диполя в полупространство призмы и свободное полупространство, были вычислены диаграммы направленности вертикального диполя, т. е. в плоскостях, нормальных границе, проходящих через центр диполя. Диаграммы вычислялись по амплитуде поля и нормировались на максимум излучения.

На рис. 6а показаны диаграммы направленности элементарного вертикального диполя в полупространство призмы для двух случаев. Первый случай — пленка отсутствует (кривая 1), при этом диполь расположен на границе двух полупространств с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_3$  со стороны полупространства с  $\varepsilon_3$ . Второй случай — с пленкой (кривая 2), когда диполь расположен на свободной границе золотой пленки (см. рис. 5б) (на границе областей с проницаемостями  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  со стороны полупространства с  $\varepsilon_3$ ). Диаграммы направленности представляют собой графики амплитуды вектора электрического поля  $E_a$  в точках на линии пересечения плоскости, проходящей через диполь, и сферы большого радиуса  $R_s$  в зависимости от полярного угла  $\theta$ . Центр сферы находился в начале координат. Угол  $\theta$  отсчитывался от оси  $z$ . В численных расчетах радиус сферы принимался равным

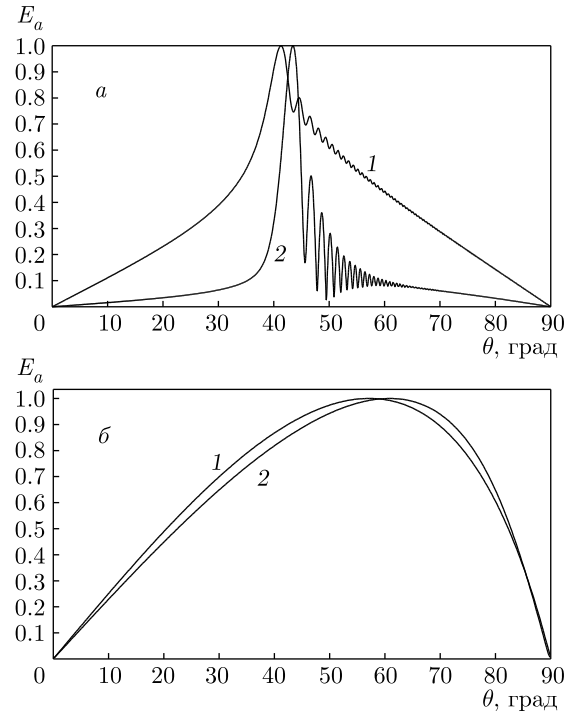


Рис. 6. Нормированные диаграммы направленности по амплитуде поля, вычисленные для элементарного вертикального диполя, расположенного на границе двух полупространств (кривые 1) и на границе золотой пленки оптимальной толщины, нанесенной на призму (кривые 2), в сторону призмы (а) и в сторону свободного пространства (б)

$R_s = 158\lambda_0$ , т. е. поля вычислялись в дальней зоне излучения диполя.

Из рис. 6а видно, что в отсутствие металлической пленки максимум излучения в призму примерно соответствует углу полного внутреннего отражения призмы (кривая 1), который равен  $38.7^\circ$ . Когда появляется металлическая пленка, возникает резкий пик излучения (кривая 2) при угле примерно  $41^\circ$ , однако однозначно связать этот пик на диаграмме с возбуждением поверхностной волны, как кажется, нельзя. Интерференционные биения на кривых, как показали расчеты, определяются конечностью радиуса  $R_s$  и в пределе бесконечного радиуса исчезают. На рис. 6б представлены такие же, как на рис. 6а, диаграммы направленности, но в сторону свободного полупространства (в область с проницаемостью  $\varepsilon_3$ ). Из рисунка видно, что наличие металлической пленки качественно не меняет направленных свойств излучения диполя в сторону свободного полупространства.

**9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Итак, предложено теоретическое рассмотрение электромагнитного излучения элементарного дипольного источника, расположенного в плоскослоистой среде. Предложен аналитический метод сведения электромагнитных полей к одномерным интегралам для задачи излучения точечного диполя, расположенного на границе одной пленки. Показана общность метода. Рассмотрена прикладная задача – нахождение направленных характеристик излучения нанобъектов, находящихся на свободной поверхности пленки золота оптимальной толщины в схеме Кречмана. Показано, что, при ориентации излучающего диполя перпендикулярно границе, наличие металлической пленки, в которой может возбуждаться поверхностная волна, существенно влияет на диаграмму направленности излучателя в полупространство призмы, а в свободное полупространство практически не влияет.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**

Приведем выражения для коэффициентов  $a, b, c, d, e, f$ .

Коэффициенты в формуле (45):

$$a_{1x} = -(\gamma_1 + \gamma_3), \quad d_{1x} = -\frac{\gamma_1 + \gamma_3}{\gamma_1 \gamma_3},$$

$$b_{1x} = \frac{\gamma_1 \gamma_3 + \gamma_2^2}{\gamma_2},$$

$$e_{1x} = \frac{\gamma_3 + \gamma_1}{\gamma_2 \gamma_3} + \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) k_3^2}{\varepsilon_2 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}.$$

Коэффициенты в формуле (46):

$$a_{1y} = \frac{\gamma_1 + \gamma_3}{\gamma_1 \gamma_3},$$

$$b_{1y} = \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} \left( \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) k_3^2}{\varepsilon_2} - \gamma_1 (\gamma_1 + \gamma_3) \right).$$

Коэффициенты в формуле (48):

$$a_{3x} = -(\gamma_1 + \gamma_3), \quad d_{3x} = -\frac{\gamma_1 + \gamma_3}{\gamma_1 \gamma_3},$$

$$b_{3x} = \frac{1}{\gamma_1 k_2^2} [\gamma_1 \gamma_3 (k_3^2 - \gamma_3^2) + \gamma_3 \gamma_1^3 + \gamma_2^2 k_1^2],$$

$$e_{3x} = \frac{1}{k_2^2 \gamma_1 \gamma_2^2 \gamma_3} [\gamma_3 \gamma_1^2 (k_2^2 + \gamma_2^2) - \gamma_3 \gamma_2^4 + k_1^2 \gamma_1 \gamma_2^2],$$

$$c_{3x} = \frac{\gamma_3}{\gamma_1 \gamma_2 k_2^2} ((\gamma_2^2 + \gamma_1^2) (k_3^2 - \gamma_3^2) + 2\gamma_1^2 \gamma_2^2) + \frac{1}{\gamma_2 k_2^2} (\gamma_2^4 + \gamma_1^2 \gamma_2^2 + 2\gamma_2^2 (k_2^2 - \gamma_2^2)),$$

$$f_{3x} = \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 k_2^2} (k_3^2 (\gamma_2^2 + \gamma_1^2) + 2\gamma_1^2 \gamma_2^2 - \gamma_3^2 (\gamma_2^2 + \gamma_1^2)) + \frac{1}{\gamma_2 k_2^2} (2k_2^2 + \gamma_1^2 - \gamma_2^2).$$

Коэффициенты в формуле (49):

$$a_{3y} = \frac{\gamma_1 + \gamma_3}{\gamma_1 \gamma_3},$$

$$b_{3y} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \frac{\gamma_1 (k_3^2 - \gamma_3^2) - \gamma_2^2 \gamma_3}{\gamma_1 \gamma_2^2 \gamma_3} - \frac{\gamma_1 (\gamma_1 + \gamma_3)}{\gamma_2^2 \gamma_3},$$

$$c_{3y} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \frac{k_3^2 - \gamma_3 (\gamma_1 + \gamma_3)}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} - \frac{2(\gamma_1 + \gamma_3)}{\gamma_2 \gamma_3}.$$

**ПРИЛОЖЕНИЕ В**

Приведем выражения для коэффициентов  $u, v, w$ .

Коэффициенты в формуле (61):

$$u_{1x} = -\frac{\gamma_3 + \gamma_1}{\gamma_3}, \quad v_{1x} = \frac{\gamma_1 \gamma_3 + \gamma_2^2}{\gamma_2 \gamma_3}.$$

Коэффициенты в формуле (62):

$$u_{1y} = -\frac{\gamma_3 + \gamma_1}{\gamma_3}, \quad v_{1y} = \frac{\gamma_1 \gamma_3 + \gamma_2^2}{\gamma_2 \gamma_3}.$$

Коэффициенты в формуле (63):

$$u_{1z} = -\frac{\gamma_3 + \gamma_1}{\gamma_1 \gamma_3}, \quad v_{1z} = \frac{\gamma_1 \gamma_3 + \gamma_2^2}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}.$$

Коэффициенты в формуле (64):

$$u_{3x} = \frac{(\gamma_1 + \gamma_3) k_1^2}{\gamma_1 k_3^2}, \quad v_{3x} = -\frac{(\gamma_2^2 + \gamma_1 \gamma_3) k_2^2}{\gamma_2^2 k_3^2},$$

$$w_{3x} = -\frac{(k_3^2 - \gamma_3^2) (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2\gamma_1 \gamma_3) + \gamma_1 (\gamma_1^2 \gamma_3 + \gamma_2^2 \gamma_3 + 2\gamma_1 \gamma_2^2)}{k_3^2 \gamma_1 \gamma_2}.$$

Коэффициенты в формуле (65):

$$u_{3y} = \frac{(\gamma_1 + \gamma_3) k_1^2}{\gamma_1 k_3^2}, \quad v_{3y} = -\frac{(\gamma_2^2 + \gamma_1 \gamma_3) k_2^2}{\gamma_2^2 k_3^2},$$

$$w_{3y} = -\frac{(k_3^2 - \gamma_3^2)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_3) + \gamma_1(\gamma_1^2\gamma_3 + \gamma_2^2\gamma_3 + 2\gamma_1\gamma_2^2)}{\gamma_1\gamma_2k_3^2}.$$

Коэффициенты в формуле (66):

$$u_{3z} = -\frac{(\gamma_1 + \gamma_3)k_1^2}{\gamma_1\gamma_3k_3^2}, \quad v_{3z} = \frac{(\gamma_2^2 + \gamma_1\gamma_3)k_2^2}{\gamma_2^2\gamma_3k_3^2},$$

$$w_{3z} = \frac{(k_3^2 - \gamma_3^2)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_3) + \gamma_1(\gamma_1^2\gamma_3 + \gamma_2^2\gamma_3 + 2\gamma_1\gamma_2^2)}{\gamma_1\gamma_2\gamma_3k_3^2}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. E. Kretschmann and H. Z. Raether, *Naturforsch. A* **23**, 2135 (1968).
2. H. Raether, *Surface Plasmons*, Springer-Verlag, Berlin (1988).
3. W. L. Barnes, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **8**, S87 (2006).
4. R. Garabedian, C. Gonzalez, J. Richards et al., *Sensors and Actuators A* **43**, 202 (1994).
5. А. Б. Петрин, *Опт. и спектр.* **125**, 830 (2018).
6. A. Sommerfeld, *Ann. Physik. (Leipzig)* **81**, 1135 (1926).
7. J. R. Wait, *IEEE Anten. Propag. Magazine* **40**(5), 7 (1998).
8. R. W. P. King and G. S. Smith, *Antennas in Matters*, MA: M.I.T. Press, Cambridge (1981).
9. T. T. Wu, *J. Appl. Phys.* **28**(3), 299 (1957).
10. R. H. Jansen, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **33**, 1043 (1985).
11. R. W. P. King, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **36**, 1080 (1988).
12. Л. Новотный, Б. Хехт, *Основы нанооптики*, под ред. В. В. Самарцева, Физматлит, Москва (2009).
13. J. B. Pendry, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3966 (2000).
14. А. Б. Петрин, *ЖЭТФ* **134**, 436 (2008).
15. А. Б. Петрин, *Опт. и спектр.* **125**, 375 (2018).
16. А. Б. Петрин, *Опт. и спектр.* **126**, 350 (2019).
17. А. Б. Петрин, *Опт. и спектр.* **127**, 654 (2019).
18. А. Б. Петрин, *Опт. и спектр.* **127**, 1051 (2019).
19. А. Б. Петрин, *Опт. и спектр.* **128**, 1676 (2020).