

ВОЗМОЖНЫ ЛИ ГИПЕРЗВУКОВЫЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ? ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ МАХА ИОННО-ЗВУКОВЫХ СОЛИТОНОВ В ТЕПЛОЙ ПЛАЗМЕ

А. Е. Дубинов^{a,b}, О. В. Сулова^b*

^a *Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики
607188, Саров, Нижегородская обл., Россия*

^b *Саровский физико-технический институт –
филиал Национального исследовательского ядерного университета «Московский инженерно-физический институт»
607186, Саров, Нижегородская обл., Россия*

Поступила в редакцию 26 марта 2020 г.,
после переработки 19 мая 2020 г.
Принята к публикации 19 мая 2020 г.

Развита нелинейная теория ионно-звуковых волн в бесстолкновительной теплой электрон-ионной плазме. Теория основана на анализе псевдопотенциала Сагдеева. Рассмотрены две модели ионно-звуковых волн — изотермическая и адиабатическая. Вычислены зависимости максимального значения числа Маха для солитонов от приведенной температуры (параметра неравновесности) плазмы для обеих моделей. Показано, что максимальное значение числа Маха не может превышать фундаментального предела 2.54. Решен вопрос о существовании гиперзвуковых ионно-звуковых солитонов: гиперзвуковые солитоны невозможны.

DOI: 10.31857/S0044451020110188

1. ВВЕДЕНИЕ

Ионно-звуковые волны (ИЗВ) в плазме уже много десятилетий привлекают исследователей, специализирующихся в физике плазмы. Общее число опубликованных работ, так или иначе связанных с ИЗВ, доходит до 10000. В недавней обзоре [1] показано, что интерес к ИЗВ не иссякает до сих пор и что не все проблемы, связанные с физикой ИЗВ, решены. Кратко напомним главные особенности ИЗВ в бесстолкновительной изотропной электрон-ионной плазме. Из линейной теории можно получить закон дисперсии для гармонических ИЗВ, который, например, для электрон-ионной плазмы с холодными ионами имеет вид [2]

$$\omega^2 = \frac{\omega_{pi}^2 \lambda_{De}^2 k^2}{1 + \lambda_{De}^2 k^2}, \quad (1)$$

где ω — частота волн, k — волновое число, $\omega_{pi} = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m_i}$ — ионная плазменная частота, $\lambda_{De} =$

$= \sqrt{k_B T_e / 4\pi e^2 n_0}$ — электронная длина Дебая, T_e — электронная температура, m_i — масса иона, k_B — постоянная Больцмана. n_0 — невозмущенная концентрация плазмы. Закон дисперсии (1) определяет линейную скорость ИЗВ:

$$v_{s0} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{d\omega}{dk} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\omega}{k} = \omega_{pi} \lambda_{De} = \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_i}}. \quad (2)$$

Нелинейная теория показала [3], что ИЗВ могут существовать не только в форме периодических волн, но и в форме солитонов. Было установлено, что периодические ИЗВ всегда дозвуковые, а солитоны могут двигаться только со сверхзвуковыми скоростями, причем числа Маха для солитонов в плазме с холодными ионами лежат в диапазоне $1 < M < M_{0max} \approx 1.58$. В работе [4] получено точное значение для предельного числа Маха M_{0max} :

$$M_{0max} = \sqrt{-1 - 2W_{-1}\left(-\frac{1}{2}e^{-1/2}\right)} \approx 1.5852010065, \quad (3)$$

где $W_{-1}(x)$ — действительная отрицательная ветвь W-функции Ламберта [5].

* E-mail: dubinov-ae@yandex.ru

Существование предельного числа Маха означает физически, что при его превышении возникает отражение ионов потенциальным барьером в самом солитоне, которое приводит к «опрокидыванию» ионной составляющей.

Несмотря на огромное количество исследований по ионно-звуковым солитонам, работ, посвященных оценке предельных чисел Маха M_{max} для других моделей плазмы, немного. Можно назвать только статью [6], а также обзор [1], дублирующий результаты работы [6], где рассмотрены величины предельного числа Маха для плазмы с холодными ионами и с электронной составляющей, подчиняющейся адиабатическому уравнению состояния. В них сообщается, что M_{max} может достигать значения $M_{max} = 2.54$ ($M_{max}^2 = 6.46$) [6]. Это же значение было получено и в [7].

Однако в недавней работе [8] рассматривались солитоны со значениями чисел Маха $M_{max} \approx 3.5$ для ИЗВ в четырехкомпонентной плазме, но там была допущена весьма распространенная неточность, отмеченная в работе [9]: скорость солитона в теплой плазме нормировалась на линейную скорость ИЗВ для плазмы с холодными ионами, т.е. на скорость звука другой плазмы. Поэтому на вопрос, вынесенный в заголовок данной статьи, о возможности гиперзвуковых (по авиационной терминологии) ионно-звуковых солитонов, у которых $M_{max} \gg 1$, до сих пор не существует окончательного ответа.

Цель данной работы — установление зависимости предельного числа Маха от температуры ионов, $M_{max}(T_i)$, для теплой плазмы с изотермическим и адиабатическим уравнениями состояния ее ионной и электронной составляющих. Как и в работе [10], предположено, что в бесстолкновительной плазме отсутствуют «лобовые» столкновения частиц, а термодинамическое равновесие устанавливается за счет некоррелированных кулоновских взаимодействий посредством согласованного электрического поля.

Рассмотрение проводилось в рамках двухжидкостной газодинамики [6] методом псевдопотенциала Сагдеева [3]. При этом скорости сначала нормировались на удобную для выкладок величину скорости звука в плазме с холодными ионами, v_{s0} (2), а затем, на заключительной стадии анализа, все скорости перенормировались на линейную скорость ИЗВ, полученную из дисперсионного уравнения для ИЗВ для рассматриваемой модели плазмы (в соответствии с рекомендациями работы [9]). Такой путь позволил избежать громоздких математических выкладок, которые неизбежно возникают, если скоро-

сти с самого начала нормировать на линейную скорость ИЗВ v_{sT} .

2. ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ ИОННО-ЗВУКОВЫЕ СОЛИТОНЫ

2.1. Закон дисперсии и линейная скорость изотермических ИЗВ

Для вывода закона дисперсии будем исходить из следующей системы газодинамических уравнений ионной динамики, считая электроны безынерционными, а ионы — заряженными однократно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(n_i u_i) &= 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial z} &= \frac{e}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{m_i n_i} \frac{\partial P_i}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= -4\pi e(n_e - n_i), \end{aligned} \quad (4)$$

где φ — электростатический потенциал в ИЗВ, e — элементарный заряд, m_i , n_i , u_i — масса, концентрация, скорость ионов, P_i — их газодинамическое давление, которое удовлетворяет уравнению состояния идеального газа

$$P_i = n_i k_B T_i \quad (5)$$

с ионной температурой T_i . Будем считать также, что электроны подчиняются распределению Больцмана

$$n_e = n_0 \exp\left(-\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right). \quad (6)$$

Придадим переменным системы (4) малое волновое гармоническое возмущение с малыми амплитудами, отмеченными значком «тильда»:

$$\begin{aligned} u_i &= \tilde{u}_i \exp[i(\omega t - kz)], \\ n_i &= n_0 + \tilde{n}_i \exp[i(\omega t - kz)], \\ \varphi &= \tilde{\varphi}_i \exp[i(\omega t - kz)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставим уравнения (7) в систему (4) и после стандартной процедуры линеаризации получим закон дисперсии изотермических ИЗВ:

$$\omega^2 = \frac{\omega_{pi}^2 \lambda_{De}^2 k^2}{1 + \lambda_{De}^2 k^2} + \omega_{pi}^2 \lambda_{Di}^2 k^2. \quad (8)$$

Из уравнения (8) следует выражение для линейной скорости изотермической ИЗВ:

$$v_{sT} = \omega_{pi} \sqrt{\lambda_{De}^2 + \lambda_{Di}^2} = \sqrt{\frac{k_B (T_e + T_i)}{m_i}}. \quad (9)$$

2.2. Псевдопотенциал Сагдеева для изотермических ИЗВ

Будем использовать следующие обозначения и нормировки для переменных задачи:

$$z = \lambda_{De}^2 \hat{z}, \quad t = \omega_{pi}^{-1} \hat{t}, \quad u_i = v_{s0} \hat{u}_i, \quad n_{e,i} = n_0 \hat{n}_{e,i},$$

$$\varphi = -\frac{k_B T_e}{e} \hat{\varphi}, \quad \hat{\tau} = \frac{T_i}{T_e},$$

при этом в дальнейшем значки «шляпки» над безразмерными величинами будем опускать. Попутно отметим, что полезно использовать нормировку электростатического потенциала со знаком минус: тогда знаки φ и $\hat{\varphi}$ совпадают. Нормированная система уравнений (4) примет вид

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(n_i u_i) = 0,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\tau}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial z}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = n_e - n_i.$$

Рассмотрим стационарную волну, движущуюся вдоль оси z со скоростью V . Введем волновую переменную $\xi = z - Vt$ и перейдем в систему отсчета, связанную с волной ($v_i = u_i - V$). Тогда с учетом Больцмановского распределения электронов (6) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$v_i \frac{\partial n_i}{\partial \xi} + n_i \frac{\partial v_i}{\partial \xi} = 0,$$

$$v_i \frac{\partial v_i}{\partial \xi} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\tau}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial \xi}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = e^\varphi - n_i.$$

Уравнение непрерывности с учетом условия для невозмущенной плазмы, $\lim_{v_i \rightarrow -V} n_i = 1$, имеет решение

$$v_i = -\frac{V}{n_i}. \quad (12)$$

Интегрируя уравнение движения с условиями $\lim_{v_i \rightarrow -V} n_i = 1$ и $\lim_{v_i \rightarrow -V} \varphi = 0$, получим

$$\frac{v_i^2}{2} - \frac{V^2}{2} = -\varphi - \tau \ln n_i. \quad (13)$$

Подставим выражение (12) в (13) и получим следующее трансцендентное уравнение для n_i :

$$\frac{V^2}{2} \left(\frac{1}{n_i} - 1 \right) + \tau \ln n_i = -\varphi. \quad (14)$$

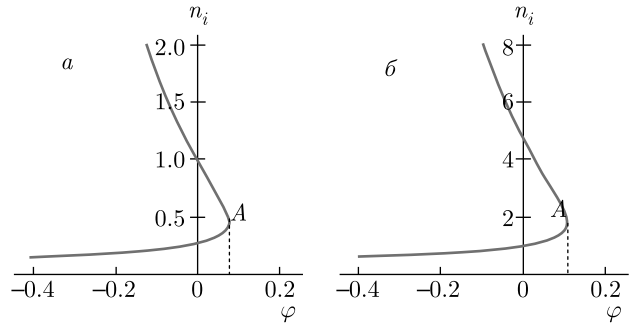


Рис. 1. Зависимости $n_i(\varphi)$, определяемые выражением (15), для изотермических ИЗВ при $\tau = 0.2$: а — случай периодических ИЗВ при $V = 0.2$; б — солитонный случай при $V = 0.8$

Его необходимо решить относительно n_i для подстановки в уравнение Пуассона. Это удастся сделать, используя W -функцию Ламберта [4, 5]:

$$n_i = \frac{V}{\sqrt{-\tau W_{0,-1} \left[-\frac{V^2}{\tau} \exp \left(\frac{-V^2 + 2\varphi}{\tau} \right) \right]}}. \quad (15)$$

Функция $n_i(\varphi)$, задаваемая выражением (15), является двузначной, а ее график имеет две ветви, сопрягающиеся в точке ветвления A (рис. 1). Одна из ветвей нефизична, и ее надо отбросить. Как это делается, детально изложено в работе [11]: остающаяся ветвь должна удовлетворять условию квазинейтральности невозмущенной плазмы, т. е. должна проходить через точку $n_i(\varphi = 0) = 1$. Анализ выражения (15) показал, что при разных значениях V остающаяся ветвь может быть нижней или верхней. Так, при $V < \sqrt{\tau}$ остающаяся ветвь — верхняя, и она описывается основной ветвью W -функции Ламберта $W_0(\dots)$ (случай периодической ИЗВ; рис. 1а, а при $V > \sqrt{\tau}$ остающаяся ветвь — нижняя, она описывается отрицательной ветвью W -функции Ламберта $W_{-1}(\dots)$ (солитонный случай, рис. 1б).

Для нахождения максимально возможной скорости солитона, как мы увидим ниже, важны координаты точки ветвления A , в которой сопрягаются действительные ветви W -функции Ламберта. Известно, что аргумент W -функции в точке ветвления равен $-1/\exp(1)$, а ее значение там -1 [5]. Кроме того, положение точки A определяет и максимально возможную амплитуду электростатического потенциала в солитоне:

$$\varphi_{max} = -\tau \ln \left(\frac{V}{\sqrt{\tau}} \right) + \frac{V^2}{2} - \frac{\tau}{2}. \quad (16)$$

При превышении этого значения ионы должны отражаться потенциальным барьером солитона, и,

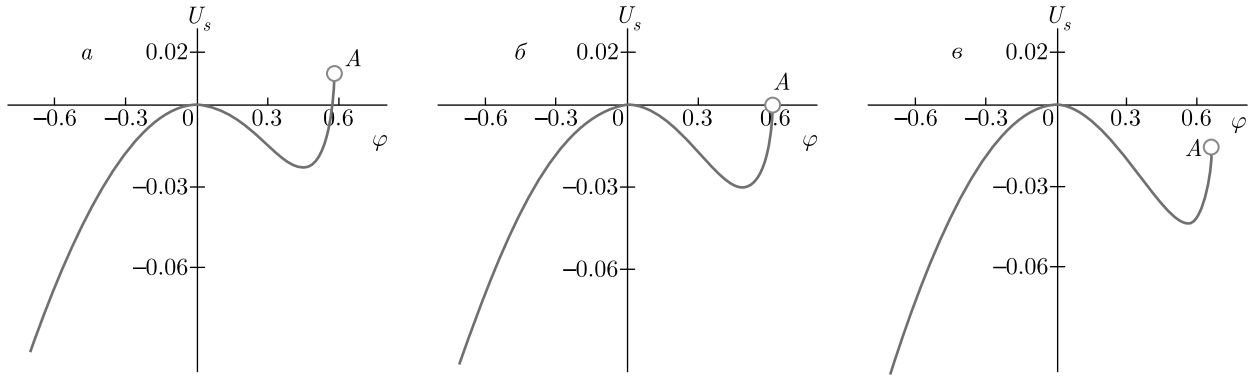


Рис. 2. Профили псевдопотенциала Сагдеева $U_s(\varphi, V, \tau)$, определяемого выражением (19), для изотермических солитонов при $\tau = 0.2$ и $V = 1.35$ (а), 1.38 (б), 1.41 (в)

следовательно, солитон с потенциалом, большим, чем (16), стационарно существовать не может.

Далее, подставим в уравнение Пуассона выражение (15) с отрицательной ветвью W-функции Ламберта. Тогда оно примет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = e^\varphi - \frac{V}{\sqrt{-\tau W_{-1} \left[-\frac{V^2}{\tau} \exp \left(\frac{-V^2 + 2\varphi}{\tau} \right) \right]}}, \quad (17)$$

где в правой части электронное слагаемое записано в форме бoльцмановской экспоненты согласно формуле (6). Умножая правую и левую части уравнения (17) на $d\varphi/d\xi$ и затем интегрируя, получим выражение в форме закона сохранения псевдоэнергии некой фиктивной частицы,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 + U_s(\varphi, V, \tau) = C_1, \quad (18)$$

с псевдопотенциалом Сагдеева в форме

$$U_s(\varphi, V, \tau) = 1 - e^\varphi + \tau \left\{ \sqrt{-\frac{V^2}{\tau} W_{-1} \left[-\frac{V^2}{\tau} \exp \left(\frac{-V^2 + 2\varphi}{\tau} \right) \right]} - \sqrt{-\frac{V^2}{\tau} W_{-1} \left[-\frac{V^2}{\tau} \exp \left(-\frac{V^2}{\tau} \right) \right]} - \sqrt{-\frac{V^2}{\tau W_{-1} \left[-\frac{V^2}{\tau} \exp \left(\frac{-V^2 + 2\varphi}{\tau} \right) \right]}} + \sqrt{-\frac{V^2}{\tau W_{-1} \left[-\frac{V^2}{\tau} \exp \left(-\frac{V^2}{\tau} \right) \right]}} \right\}. \quad (19)$$

При этом константу интегрирования C_1 следует выбрать для удобства так, чтобы $U_s(0, V, \tau) = 0$.

2.3. Анализ псевдопотенциала и оценка максимального числа Маха для изотермических солитонов

Перейдем к анализу псевдопотенциала Сагдеева (19). Уравнение (18) математически эквивалентно закону сохранения энергии при движении без трения некой фиктивной частицы в потенциальном профиле, задаваемой функцией $U_s(\varphi, V, \tau)$; при этом потенциал φ играет роль псевдокоординаты фиктивной частицы, а переменная ξ — ее псевдовремени.

На рис. 2 представлены три примера формы псевдопотенциала при разных значениях скорости $V > \sqrt{\tau}$. Все они имеют максимум в начале координат, монотонно уходят до $-\infty$ в отрицательной области и ограничены в положительной области крайней точкой, которая соответствует точке ветвления A на рис. 1б (поэтому крайняя точка на рис. 2 также помечена A). При сравнительно небольшом значении скорости V конечная точка A лежит выше оси абсцисс (рис. 2а), что соответствует возможности существования солитона. Ей соответствует замкнутая фазовая траектория фиктивной частицы на ее фазовом портрете, начинающаяся в начале координат. Форма такого солитона с гладкой вершиной представлена на рис. 3 (кривая 1). При увеличении скорости V точка A приближается к оси абсцисс. На рис. 2б показана ситуация, когда крайняя точка лежит на оси абсцисс. Она соответствует максимально возможной амплитуде потенциала в солитоне и его максимальной скорости для данных параметров плазмы. Форма такого предельно быстрого солитона с острой вершиной представлена на рис. 3 (кривая 2).

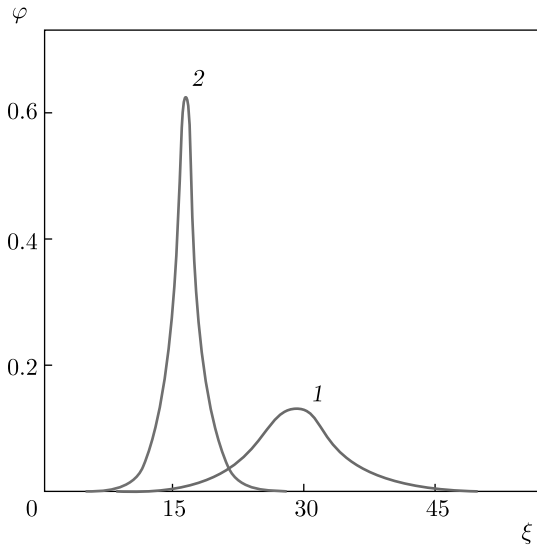


Рис. 3. Профили электростатического потенциала в изотермических солитонах при $\tau = 0.2$: 1 — $M = 1.04$; 2 — $M = 1.26$

При еще большем значении V крайняя точка лежит ниже оси абсцисс (рис. 2б), и никакие солитоны здесь невозможны, так как замкнутую фазовую траекторию, начинающуюся в начале координат, построить нельзя.

Таким образом, для нахождения максимальной скорости солитона при различных значениях приведенной ионной температуры τ необходимо найти те значения V_{max} , при которых крайняя точка лежит на оси абсцисс, как это показано на рис. 2б. Тогда потенциал φ в крайней точке A удовлетворяет уравнению (16), а значение псевдопотенциала $U_s(\varphi, V, \tau)$ в этой точке равно нулю. Записывая это условие, получим зависимость $V_{max}(\tau)$ в неявной форме:

$$V_{max}\tau \frac{1 - W_{-1} \left[-\frac{V_{max}^2}{\tau} \exp \left(-\frac{V_{max}^2}{\tau} \right) \right]}{\sqrt{-\tau W_{-1} \left[-\frac{V_{max}^2}{\tau} \exp \left(-\frac{V_{max}^2}{\tau} \right) \right]}} - \left(\frac{\tau}{V_{max}^2} \right)^{\tau/2} \exp \left(-\frac{V_{max}^2}{\tau} - \frac{\tau}{2} \right) - 2V_{max}^2 \sqrt{\tau} + 1 = 0. \quad (20)$$

На рис. 4 показан график этой зависимости, который по форме совпадает с аналогичным графиком из работы [7]. Видно, что он имеет минимум и тенденцию к возрастанию с ростом τ . Для определения максимального числа Маха необходима перенормировка скорости V_{max} . Сравнивая скорости ИЗВ для холодной, v_{s0} (2), и для теплой, v_{sT} (9), плазмы, получим, что для перенормировки достаточно поде-

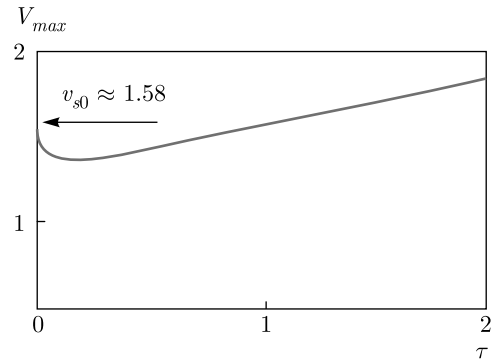


Рис. 4. Зависимость безразмерной максимальной скорости изотермического солитона от безразмерной температуры (по формуле (20))

лить безразмерную скорость V_{max} из (20) на $\sqrt{1 + \tau}$, т. е. максимальное число Маха выразится как

$$M_{max} = \frac{V_{max}}{\sqrt{1 + \tau}}. \quad (21)$$

Тогда уравнение, определяющее неявную зависимость $M_{max}(\tau)$, запишется в виде

$$\tilde{M}_{max}\tau^{\frac{3}{2}} \frac{1 - W_{-1} \left[-\tilde{M}_{max}^2 \exp \left(-\tilde{M}_{max}^2 \right) \right]}{\sqrt{-\tau W_{-1} \left[-\tilde{M}_{max}^2 \exp \left(-\tilde{M}_{max}^2 \right) \right]}} - \left(\frac{1}{\tilde{M}_{max}^2} \right)^{\tau/2} \exp \left(\tilde{M}_{max}^2 - \frac{\tau}{2} \right) - 2\tilde{M}_{max}\tau + 1 = 0, \quad (22)$$

где

$$\tilde{M}_{max}^2 = \frac{M_{max}^2(1 + \tau)}{\tau}. \quad (23)$$

График этой зависимости представлен на рис. 5. Кривая, описывающая зависимость $M_{max}(\tau)$, как видно, выходит из точки со значением 1.58 (3) и монотонно убывает, устремляясь к единице. Таким образом, изотермические солитоны не могут иметь большое число Маха.

3. АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИОННО-ЗВУКОВЫЕ СОЛИТОНЫ

3.1. Закон дисперсии и линейная скорость адиабатических ИЗВ

Перейдем к рассмотрению ионно-звуковых солитонов в случае, когда фазы сжатия и разрежения в волне являются адиабатическими процессами как для ионов, так и для электронов. Тогда уравне-

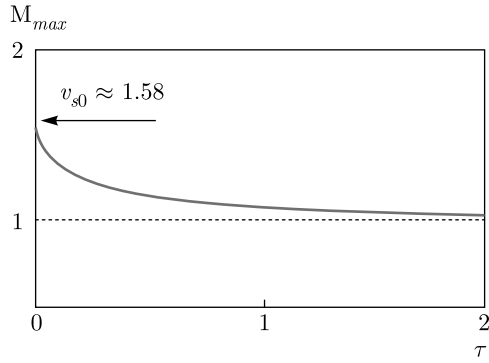


Рис. 5. Зависимость максимального числа Маха изотермического солитона от безразмерной температуры (по формуле (22))

ния (29) следует дополнить уравнением состояния ионной фракции в виде

$$P_i = n_0 k_B T_i \left(\frac{n_i}{n_0} \right)^{\gamma_i} \quad (24)$$

и распределением электронов

$$n_e = n_0 \left(1 - \frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e} \frac{e\varphi}{k_B T_e} \right)^{1/(\gamma_e - 1)}, \quad (25)$$

где введены γ_e и γ_i — показатели адиабаты соответственно для электронов и ионов, остальные обозначения прежние.

Подставляя выражение (6) в (29) с учетом (24) и (25), после несложных выкладок получим закон дисперсии адиабатических ИЗВ, который формально записывается так же, как и (8), но с электронной и ионной длинами Дебая в виде

$$\lambda_{De} = \sqrt{\frac{\gamma_e k_B T_e}{4\pi e^2 n_0}}, \quad \lambda_{Di} = \sqrt{\frac{\gamma_i k_B T_i}{4\pi e^2 n_0}}. \quad (26)$$

Из него следует выражение для линейной скорости адиабатической ИЗВ:

$$v_{sT} = \omega_{pi} \sqrt{\lambda_{De}^2 + \lambda_{Di}^2} = \sqrt{\frac{\gamma_i k_B T_i}{4\pi e^2 n_0}}. \quad (27)$$

3.2. Псевдопотенциал Сагдеева для адиабатических ИЗВ

Будем исходить, как и прежде, из уравнений (29), но будем использовать соотношения (24) и (25) вместо (5) и (6). Будем использовать следующие обозначения и нормировки для переменных:

$$z = \lambda_{De}^2 \hat{z}, \quad t = \omega_{pi}^{-1} \hat{t}, \quad n_{e,i} = n_0 \hat{n}_{e,i},$$

$$u_i = \sqrt{\gamma_e} v_{s0} \hat{u}_i, \quad \varphi = -\frac{\gamma_e k_B T_e}{e} \hat{\varphi}, \quad \hat{\theta} = \frac{\gamma_i T_i}{\gamma_e T_e},$$

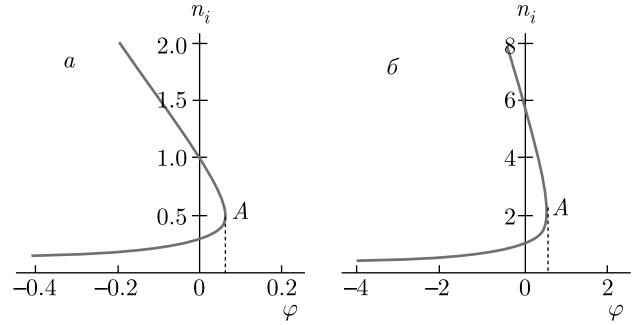


Рис. 6. Зависимости $n_i(\varphi)$ (29) для адиабатических ИЗВ при $\theta = 0.2$, $\gamma_e = \gamma_i = 2$: а — случай периодических ИЗВ при $V = 0.16$; б — солитонный случай при $V = 1.42$

где $\hat{\theta}$ — параметр неравновесности плазмы (как и выше, «шляпки» над буквами будем опускать). Тогда нормированная система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(n_i u_i) = 0,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \theta n_i^{\gamma_i - 2} \frac{\partial n_i}{\partial z}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = [1 + (\gamma_e - 1) \varphi]^{1/(\gamma_e - 1)} - n_i.$$

Снова рассмотрим стационарную волну, движущуюся вдоль оси z со скоростью V . Введем волновую переменную $\xi = z - Vt$ и перейдем в систему отсчета, связанную с волной ($v_i = u_i - V$). Тогда с учетом распределения электронов (25) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$v_i \frac{\partial n_i}{\partial \xi} + n_i \frac{\partial v_i}{\partial \xi} = 0,$$

$$v_i \frac{\partial v_i}{\partial \xi} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \theta n_i^{\gamma_i - 2} \frac{\partial n_i}{\partial \xi}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = [1 + (\gamma_e - 1) \varphi]^{1/(\gamma_e - 1)} - n_i.$$

Решение уравнения непрерывности из (29) с учетом условия для невозмущенной плазмы $\lim_{v_i \rightarrow -V} n_i = 1$ имеет вид (12). Решение уравнения движения ионов из (29) примет вид

$$\varphi = \frac{V^2}{2} \frac{1}{n_i^2} + \frac{\theta}{\gamma_i - 1} \left(1 - n_i^{\gamma_i - 1} \right). \quad (30)$$

Неявная функция $n_i(\varphi)$, задаваемая выражением (30), как и (15), является двузначной, а ее график имеет две ветви, сопрягающиеся в точке ветвления A (рис. 6). Одна из ветвей также нефизична, и ее надо отбрасывать, при этом оставляемая ветвь должна

удовлетворять условию квазинейтральности невозмущенной плазмы, т. е. должна проходить через точку $n_i(\varphi = 0) = 1$.

Анализ показал, что при разных значениях V оставляемая ветвь может быть нижней или верхней. Так, при $V < \sqrt{\theta}$ оставляемая ветвь — верхняя (случай периодической ИЗВ, рис. 6а), а при $V > \sqrt{\theta}$ — нижняя (солитонный случай, рис. 6б).

Для нахождения максимально возможной скорости солитона необходимо найти максимум функции (30):

$$\varphi_{max} = \frac{V^2}{2} \left[\frac{\gamma_i + 1}{\gamma_i - 1} \left(\frac{V^2}{\theta} \right)^{-2/(\gamma_i + 1)} \right] - \frac{\theta}{\gamma_i - 1}. \quad (31)$$

При превышении этого значения ионы должны отражаться потенциальным барьером солитона, и, следовательно, солитон с потенциалом, большим, чем (31), стационарно существовать не может.

Теперь следовало бы решить уравнение (30) относительно n_i с последующей подстановкой $n_i(\varphi)$ в уравнение Пуассона из системы (29), как это было сделано в изотермическом случае с помощью W -функции Ламберта. Однако для произвольного значения показателя адиабаты этого сделать нельзя. Специально для таких сложных случаев были разработаны два метода, когда аналитическая запись $n_i(\varphi)$ в явном виде невозможна. Первый из них основан на сведении уравнения Пуассона к дифференциальному уравнению Бернулли и использовании так называемого псевдопотенциала Бернулли с аргументом n_i в качестве псевдокоординаты [9, 12–14]. Другой метод основан на использовании интегрирования обратной функции [15]. В настоящей работе был выбран именно он как наиболее эффективный для данного класса задач.

Согласно работам [5, 15, 16], если имеется $\varphi(n_i)$, а нужно проинтегрировать $n_i(\varphi)$, то справедливо правило интегрирования обратной функции:

$$\int n_i(\varphi) d\varphi = \int_{n_i(\varphi)} \varphi n_i(\varphi) - \varphi(n_i) dn_i. \quad (32)$$

Итак, уравнение Пуассона в (29) после умножения его правой и левой частей на $d\varphi/d\xi$ и интегрирования дает закон сохранения псевдоэнергии:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 = \int (n_e - n_i) d\varphi + C_2. \quad (33)$$

Воспользовавшись правилом (32) и удобным выбором константы интегрирования C_2 , так чтобы график псевдопотенциала проходил через начало координат, получим

$$U_s(n_i, V, \theta) = \frac{1}{\gamma_e \gamma_i n_i} \left[\gamma_e \gamma_i V^2 (1 - n_i) + \theta \gamma_e n_i^{\gamma_i + 1} - \theta \gamma_e n_i - \gamma_i n_i + \gamma_i n_i G_0(n_i, V, \theta) \right], \quad (34)$$

где

$$G_0(n_i, V, \theta) = \left[-\frac{R_0(n_i, V, \theta)}{2n_i^2 (\gamma_i - 1)} \right]^{\gamma_e / (\gamma_e - 1)}, \quad (35)$$

$$R_0(n_i, V, \theta) = (\gamma_e + \gamma_i - \gamma_e \gamma_i - 1) V^2 (n_i^2 - 1) + 2\varphi (\gamma_e - 1) n_i^{\gamma_i + 1} + 2(\varphi - \gamma_i - \varphi \gamma_e) n_i^2. \quad (36)$$

Формулы (34)–(36) совместно с (30) дают выражение для функциональной зависимости $U(\varphi)$ в параметрическом виде, где ионная концентрация n_i является параметром этой функции.

3.3. Анализ псевдопотенциала и оценка максимального числа Маха для адиабатических солитонов

На рис. 7 представлены три примера формы псевдопотенциала при разных значениях скорости $V > \sqrt{\theta}$. Все они имеют максимум в начале координат, монотонно уходят до $-\infty$ в отрицательной области и ограничены в положительной области крайней точкой, которая соответствует точке ветвления A на рис. 6б. При сравнительно небольшом значении скорости V конечная точка A лежит выше оси абсцисс (рис. 7а), что соответствует возможности существования солитона. Ей соответствует замкнутая фазовая траектория фиктивной частицы на ее фазовом портрете, начинающаяся в начале координат.

При увеличении скорости V точка A приближается к оси абсцисс. На рис. 7б показана ситуация, когда крайняя точка лежит на оси абсцисс. Она соответствует максимально возможной амплитуде потенциала в солитоне и его максимальной скорости для данных параметров плазмы.

При еще большем значении крайняя точка лежит ниже оси абсцисс (рис. 6в), и никакие солитоны здесь невозможны, так как замкнутую фазовую траекторию, начинающуюся в начале координат, построить нельзя.

Для нахождения максимальной скорости солитона при различных значениях параметра неравновесности плазмы θ необходимо найти те значения V_{max} , при которых крайняя точка лежит на оси абсцисс, как это показано на рис. 7б. Тогда потенциал φ в крайней точке A удовлетворяет соотношению (16), а значение псевдопотенциала $U_s(\varphi, V, \theta)$ в этой точке

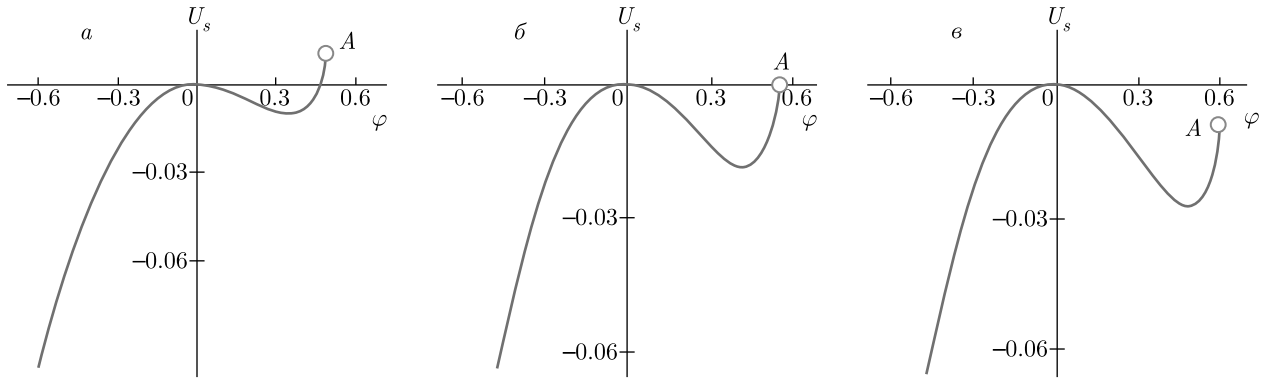


Рис. 7. Профили псевдопотенциала Сагдеева $U_s(\varphi, V, \tau)$, определяемого выражениями (30), (34)–(36), для адиабатических солитонов при $\theta = 0.2$, $\gamma_e = \gamma_i = 2$ и $V = 1.36$ (а), 1.42 (б), 1.46 (в)

равно нулю. Записывая это условие, получим зависимость $V_{max}(\theta)$ в неявной форме:

$$\left\{ \gamma_e \gamma_i V_{max}^2 \left[1 - \sqrt{N_1(V_{max}, \theta)} \right] + N_1(V_{max}, \theta) \times \right. \\ \left. \times [\gamma_i G_1(n_i, V_{max}, \theta) - \theta \gamma_e - \gamma_i] + \gamma_e V_{max}^2 \right\} \times \\ \times \frac{1}{\gamma_e \gamma_i \sqrt{N_1(V_{max}, \theta)}} = 0, \quad (37)$$

где

$$N_1(V_{max}, \theta) = \left(\frac{V_{max}^2}{\theta} \right)^{2/(\gamma_i+1)}, \quad (38)$$

$$G_1(n_i, V_{max}, \theta) = \left[-\frac{R_1(n_i, V_{max}, \theta)}{2N_1(V_{max}, \theta)(\gamma_i - 1)} \right]^{\gamma_e/(\gamma_e - 1)}, \quad (39)$$

$$R_1(n_i, V_{max}, \theta) = (\gamma_e + \gamma_i - \gamma_e \gamma_i - 1) V_{max}^2 \times \\ \times [N_1(V_{max}, \theta) - 1] + 2(\gamma_e - 1) V_{max}^2 + \\ + 2(\theta - \gamma_i - \theta \gamma_e) N_1(V_{max}, \theta). \quad (40)$$

На рис. 8 показаны зависимости (37) при трех значениях показателей адиабаты, $\gamma_e = \gamma_i = 5/3, 2, 3$, которые, так же как и для изотермического случая, по форме совпадают с аналогичными из работы [8].

Видно, что они имеют минимум и тенденцию возрастания с ростом параметра неравновесности плазмы θ . Тем не менее для определения максимального числа Маха опять необходима перенормировка этой скорости. Сравнивая скорости ИЗВ для холодной, v_{s0} (2), и для теплой, v_{sT} (27), плазмы, получим, что для перенормировки достаточно поделить безразмерную скорость V_{max} из (20) на $\sqrt{1 + \theta}$, т. е. мак-

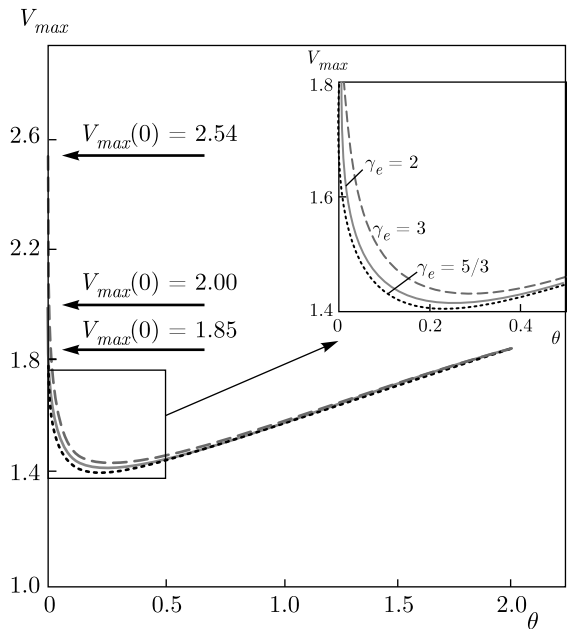


Рис. 8. (В цвете онлайн) Зависимости безразмерной максимальной скорости адиабатических солитонов от параметра неравновесности плазмы (по формуле (37)) для трех значений $\gamma_e = \gamma_i$

симальное число Маха выразится в неявном виде как

$$\left\{ M_{max}^2 (1 + \theta) \left[\gamma_e \gamma_i - \gamma_e \gamma_i \sqrt{N_2(M_{max}, \theta)} + \gamma_e \right] + \right. \\ \left. + N_2(M_{max}, \theta) [\gamma_i G_2(n_i, M_{max}, \theta) - \theta \gamma_e - \gamma_i] \right\} \times \\ \times \frac{1}{\gamma_e \gamma_i \sqrt{N_2(M_{max}, \theta)}} = 0, \quad (41)$$

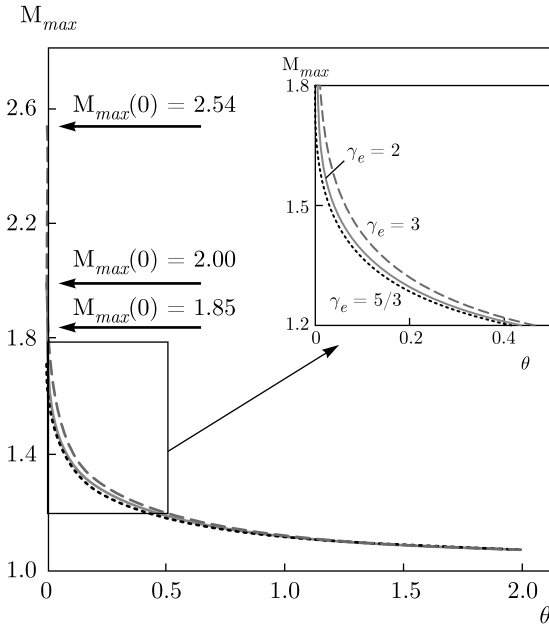


Рис. 9. (В цвете онлайн) Зависимости максимального числа Маха адиабатических солитонов от параметра неравновесности плазмы (по формуле (41)) для трех значений $\gamma_e = \gamma_i$

где

$$N_2(M_{max}, \theta) = \left[\frac{M_{max}^2(1 + \theta)}{\theta} \right]^{2/(\gamma_i + 1)}, \quad (42)$$

$$G_2(n_i, M_{max}, \theta) = \left[-\frac{R_2(n_i, M_{max}, \theta)}{2N_2(M_{max}, \theta)(\gamma_i - 1)} \right]^{\gamma_e/(\gamma_e - 1)}, \quad (43)$$

$$R_2(n_i, M_{max}, \theta) = M_{max}^2(1 + \theta)(\gamma_e + \gamma_i - \gamma_e\gamma_i - 1) \times [N_2(M_{max}, \theta) - 1] + 2(\gamma_e - 1)(1 + \theta)M_{max}^2 + 2(\theta - \gamma_i - \theta\gamma_e)N_2(M_{max}, \theta). \quad (44)$$

Графики зависимости (41) представлены на рис. 9. Кривые, описывающие зависимость $M_{max}(\theta)$, выйдут из разных начальных (нулевых) точек, координаты которых зависят от γ_e , а затем монотонно убывают, устремляясь к единице. Таким образом, адиабатические солитоны также не могут иметь большое число Маха, т. е. гиперзвуковые ионно-звуковые солитоны и здесь невозможны. При этом максимально возможное число Маха соответствует холодным ионам и электронам с показателем адиабаты $\gamma_e = 3$.

Следовательно, значения $M_{max}(0)$ в нулевых точках проще определить из анализа более просто, чем (34)–(36), псевдопотенциала Сагдеева для ИЗВ в плазме с адиабатическими электронами и холодными ионами (в безразмерном виде):

$$U(\varphi, M_{max}(0)) = [1 + (\gamma_e - 1)\varphi]^{1/(\gamma_e - 1)} - \frac{M_{max}(0)}{\sqrt{M_{max}^2(0) - 2\varphi}}. \quad (45)$$

Приравнивая значения этого псевдопотенциала в точке φ_{max} нулю, получим алгебраические уравнения для нахождения числа Маха в нулевых точках:

$$\frac{1}{\gamma_e} \left[\frac{1}{2}M_{max}^2(0) + 1 \right]^{\gamma_e/(\gamma_e - 1)} = M_{max}^2(0) + \frac{1}{\gamma_e}. \quad (46)$$

Уравнение (46) имеет порядок и число корней, зависящие от γ_e . Поэтому найдем значения $M_{max}(0)$ отдельно для каждого из трех значений показателей адиабаты электронов.

При $\gamma_e = 5/3$ уравнение (46) имеет вид

$$\frac{3}{5} \left[\frac{M_{max}^2(0)}{3} + 1 \right]^{5/2} = M_{max}^2(0) + \frac{3}{5} \quad (47)$$

и сводится к уравнению пятой степени относительно $M_{max}^2(0)$. Из всех его корней физический смысл имеет корень, который может быть найден лишь численно: $M_{max}(0) \approx 1.85 \dots$

При $\gamma_e = 2$ уравнение (46) принимает вид

$$\left[\frac{M_{max}^2(0)}{2} - 1 \right]^2 = 1 + 2M_{max}^2(0) \quad (48)$$

и сводится к квадратному уравнению относительно $M_{max}^2(0)$. Оно имеет точное положительное решение $M_{max}(0) = 2$.

При $\gamma_e = 3$ уравнение (46) имеет вид

$$\frac{1}{3} [M_{max}^2(0) + 1]^{3/2} = \frac{1}{3} + M_{max}^2(0) \quad (49)$$

и сводится к кубическому уравнению относительно $M_{max}^2(0)$. Действительный корень этого уравнения есть

$$M_{max}(0) = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} \approx 2.542459757 \dots \quad (50)$$

Выражение (50) представляет собой фундаментальную величину, которая дает самое максимальное из возможных в плазме значение числа Маха для ионно-звуковых солитонов. И амплитуда такого экстремального солитона — максимально возможная.

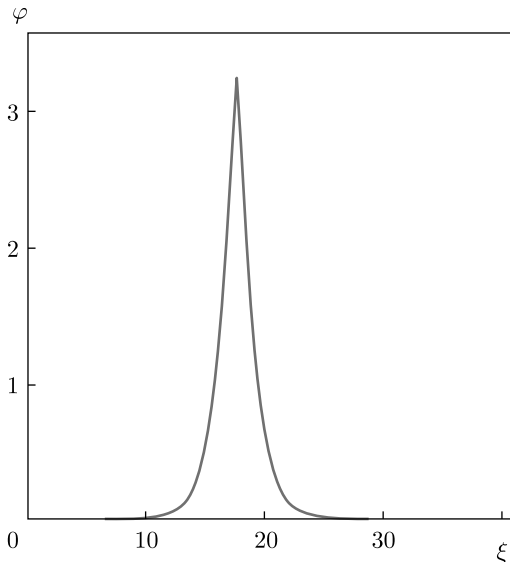


Рис. 10. Профиль электростатического потенциала в экстремальном солитоне при $\gamma_e = 3$, $\theta = 0$, $M = 2.5424$

Его профиль показан рис. 10. Экстремальный солитон может быть сформирован, например, в сильнозамагниченной плазме с адиабатическими электронами и холодными ионами для солитонов, распространяющихся вдоль сильного магнитного поля. В этом случае поперечное движение электронов заморожено и они имеют только одну степень свободы $i = 1$, что дает $\gamma_e = (i + 2)/i = 3$. Так как γ_e не может быть больше 3, в итоге более быстрые, чем предсказывает формула (50), ионно-звуковые солитоны невозможны, и, следовательно, гиперзвуковые электростатические солитоны не существуют.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развита нелинейная теория ИЗВ в бесстолкновительной теплой электрон-ионной плазме. Теория основана на анализе псевдопотенциала Сагдеева. Были рассмотрены две модели ИЗВ — изотермическая и адиабатическая. Вычислялись зависимости максимального значения числа Маха для солитонов от приведенной температуры (параметра неравновесности) плазмы для обеих моделей ИЗВ. Показано, что максимальное значение числа Маха не может превышать фундаментального предела $\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$ (50). Экстремальный солитон с таким

числом Маха может реализовываться в сильнозамагниченной плазме с холодными ионами и с показателем адиабаты электронов, равным 3. Вычислен профиль экстремального солитона. В итоге, вопрос о существовании гиперзвуковых ионно-звуковых солитонов решен: гиперзвуковые солитоны невозможны.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. M. Webb, R. H. Burrows, X. Ao, and G. P. Zank, *J. Plasma Phys.* **80**, 147 (2014).
2. A. E. Dubinov and I. N. Kitayev, *Phys. Wave Phenom.* **23**, 122 (2015).
3. A. A. Vedenov, E. P. Velikhov, and R. Z. Sagdeev, *Nuclear Fusion* **1**, 82 (1961).
4. A. E. Dubinov and I. D. Dubinova, *J. Plasma Phys.* **71**, 715 (2005).
5. А. Е. Дубинов, И. Д. Дубинова, и С. К. Сайков, *W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики*, РФЯЦ-ВНИИЭФ, Саров (2006).
6. J. F. McKenzie, *Phys. Plasmas* **9**, 800 (2002).
7. А. Е. Дубинов, *Прикл. мех. и техн. физ.* **48**, 3 (2007).
8. S. K. Maharaj and R. Bharuthram, *Phys. Plasmas* **27**, 032306 (2020).
9. А. Е. Дубинов, *Физика плазмы* **35**, 1070 (2009).
10. А. Е. Дубинов, А. А. Дубинова, *Физика плазмы* **33**, 935 (2007).
11. В. А. Гордиенко, И. Д. Дубинова, А. Е. Дубинов, *Физика плазмы* **32**, 987 (2006).
12. А. Е. Дубинов, А. А. Дубинова, М. А. Сазонкин, *Радиотехн. и электрон.* **55**, 968 (2010).
13. А. Е. Дубинов, *Физика плазмы* **33**, 239 (2007).
14. А. Е. Дубинов, М. А. Сазонкин, *ЖЭТФ* **138**, 979 (2010).
15. В. А. Гордиенко, А. Е. Дубинов, *ТВТ* **45**, 814 (2007).
16. F. D. Parker, *Amer. Math. Month.* **62**, 439 (1955).