ЖЭТФ, 2020, том 158, вып. 4 (10), стр. 738–758 © 2020

МЕХАНИЗМЫ РЕЗОНАНСНОГО ВЛОЖЕНИЯ МОЩНОСТИ В МАГНИТОАКТИВНУЮ ПЛАЗМУ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО РАЗРЯДА

И. Н. Карташов [*], ***М. В. Кузелев*** [**]

Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 марта 2020 г.,
после переработки 6 мая 2020 г.
Принята к публикации 6 мая 2020 г.

Рассмотрено возбуждение и поглощение волн в магнитоактивной плазме высокочастотного разряда в условиях, когда частота генератора меньше электронной циклотронной частоты. Обсуждаются случаи безграничной плазмы и ограниченной плазмы в цилиндрической геометрии. Рассмотрены различные режимы возбуждения плазменных волн, различающихся законом дисперсии и поляризацией поля. Мощность, вкладываемая в плазму, зависит от распределения возбуждающих разряд токов внешнего источника и от параметра плотности, характеризующего плотность плазмы и поперечные размеры системы. В наиболее интересном с практической точки зрения случае плазменного цилиндра со свободной поверхностью или плазменного цилиндра, находящегося в достаточно большом проводящем кожухе, в плазме имеются только потенциальные и непотенциальные косые ленгмюровские волны E-типа, а также сильно непотенциальная поверхностная волна. Последняя практически не возбуждается внешними токами, текущими по поверхности цилиндра при реально используемых параметрах системы. При больших значениях параметра плотности эффективное сопротивление плазмы при индуктивном способе возбуждения разряда оказывается доминирующим. При умеренных и малых значениях наиболее эффективным является емкостной способ возбуждения волны токами на поверхности плазменного цилиндра.

DOI: 10.31857/S0044451020100168

1. ВВЕДЕНИЕ

На протяжении нескольких последних десятилетий в научной литературе широко обсуждаются геликонные разряды и геликонные источники плазмы, основанные на этом разряде (см. обзоры [1–4]). Под геликонным разрядом подразумевается высокочастотный разряд, основанный на возбуждении в плазме проникающих волн геликонного спектра частот, т. е. частот, превосходящих ионную циклотронную частоту, но существенно меньших электронной циклотронной частоты. Наличие внешнего магнитного поля играет здесь ключевую роль, создавая возможность для возбуждения проникающих в плотную плазму электромагнитных волн с частотой, значительно меньшей плазменной. Это обстоятельство существенно отличает геликонный разряд от традиционных емкостного и индуктивного высокочастотных разрядов в плазме в отсутствие внешнего магнитного поля, в которых не происходит возбуждение проникающих электромагнитных волн в плазму с частотой меньше плазменной.

Источники плазмы, основанные на геликонном разряде, имеют существенно меньшие ограничения по плотности плазмы, связанные с достижением ею критического значения для данной частоты генератора. Поэтому геликонные источники плазмы являются источниками плотной плазмы. Реальные концентрации электронов геликонной плазмы имеют значения вплоть до 10^{13} см$^{-3}$ [1].

Уникальные характеристики предопределяют и широкие практические применения геликонных источников плазмы. Среди возможных приложений следует выделить, прежде всего, использование геликонных источников плазмы в качестве ионных двигателей космических аппаратов, а также в микроэлектронике для плазменного нанесения покры-

[*] E-mail: igorkartashov@mail.ru
[**] E-mail: kuzelev@mail.ru

тий и травления материалов [5]. В качестве ионных двигателей исследуются геликонные источники плазмы различных размеров (диаметры 0.5–74 см) [6]. При этом особое внимание уделяется созданию источников плазмы малых (диаметр вакуумной камеры порядка нескольких сантиметров) [7,8] и сверхмалых (диаметры 0.2–2 см) [9] размеров. Геликонные источники плазмы конструктивно содержат в себе систему создания магнитного поля. В работах [7, 8] для упрощения и миниатюризации конструкции магнитное поле создается не при помощи традиционного соленоида, а постоянным кольцевым магнитом. Размещая разрядную камеру на оси симметрии кольцевого магнита на некотором удалении от кольца, можно создать достаточно однородное магнитное поле в области, занятой разрядом. И хотя удельный импульс, создаваемый двигателем на геликонном разряде, меньше удельного импульса холловского двигателя, тем не менее он имеет тенденцию к улучшению своих характеристик за счет изменения параметров разряда. В частности, в работах [7, 8] указывается, что, прикладывая постоянное напряжение 50–200 В к торцевой металлической пластине разрядной камеры, можно повысить удельный импульс до значений, характерных для холловского двигателя. Следует также отметить, что плазменные двигатели на основе геликонного разряда не требуют отдельного электронного источника для своей нейтрализации.

Помимо создания источников плотной холодной плазмы за счет развития геликонного разряда, поглощение электромагнитных волн геликонного спектра имеет существенное значение как один из методов нагрева плазмы в установках управляемого термоядерного синтеза, в частности, в проектах ITER и DEMO [10, 11]. Поглощение волн в горячей термоядерной плазме осуществляется в основном за счет бесстолкновительного затухания Ландау. Существенным образом от геликонного высокочастотного разряда отличаются и параметры плазмы и внешнего удерживающего магнитного поля. При концентрации электронов до 10^{14} см$^{-3}$ и индукции магнитного поля 5 Тл в токамаке электронные ленгмюровская и циклотронные частоты имеют один порядок и составляют $(5\ldots10)\cdot10^{11}$ рад/с, что обеспечивает геликонный диапазон частот, лежащий в СВЧ-области (сотни мегагерц).

История исследований геликонных разрядов и создания на их основе геликонных источников плазмы восходит к работе Босвелла [12], которая затем получила свое развитие [13]. В первой из этих работ в трубке, помещенной во внешнее магнитное поле величиной до 1.5 кГс, зажигался разряд на частоте 8 МГц и источником вложения мощности в плазму была возбуждаемая стоячая геликонная волна. В последующих теоретических работах [14–17] было указано на возможность существования двух радиальных распространяющихся мод, одна из которых связывается с геликоном, а другая в настоящее время обычно называется модой Трайвелписа – Гоулда или косой ленгмюровской волной. Исторически теоретические исследования волновой структуры ограниченной магнитоактивной плазмы исходили из предположений пренебрежения током смещения в уравнениях Максвелла и инерцией электронов в уравнениях движения (частота поля мала по сравнению с электронной циклотронной частотой). Отказ от второго условия и приводил к появлению моды Трайвелписа – Гоулда. На наш взгляд, такой подход с выделением отдельных решений с различной поперечной структурой [14–19] не оправдан, поскольку системой возбуждающих токов формируется единая поперечная структура поля, включающая в себя и фундаментальное решение дифференциального уравнения, соответствующее геликонной волне, и фундаментальное решение, соответствующее моде Трайвелписа – Гоулда. Более правильным было бы выделять предельные случаи единой возбуждаемой волны с законом дисперсии $\omega(k_z)$ в зависимости от параметров разряда, сопоставляя их с геликонной волной и косой ленгмюровской волной (модой Трайвелписа – Гоулда). Именно такой подход и развивается в настоящей работе. Кроме того, мы откажемся от условия пренебрежения токами смещения, что расширит область применимости полученных результатов с ВЧ-диапазона частот на системы с использованием СВЧ-полей [20–24].

В настоящее время геликонные источники плазмы представляют собой вакуумную камеру с давлением газа единицы и десятки миллиторр, имеющую диаметр от нескольких миллиметров до десятков сантиметров и протяженность до значений более метра. Разряд поддерживается системой ВЧ-токов, текущих по антенне, которая может иметь различные конфигурации. В настоящей работе мы будем ориентироваться на параметры разряда, рассмотренные в работах [19,25,26]. Принципиальные схемы экспериментальных установок [19, 25, 26] приведены на рис. 1 в [19, 25] и на рис. 2 в [26]. Общей чертой этих схем является то, что газоразрядная камера представляет собой стеклянный или кварцевый цилиндр. Его размеры варьировались как по длине $10\ldots30$ см, так и по диаметру $7\ldots45$ см. Система из двух катушек создавала внешнее магнитное по-

ле с индукцией до 400 Гс. Использовались генераторы ВЧ-сигнала на частотах 2, 4 и 13.56 МГц с мощностью до 1000 Вт, подключаемые через согласующее устройство. Мощность подводилась с помощью спиральных антенн различной конфигурации, реализующих как азимутальную, так и продольную составляющие тока [19, 26], и дополнительно через емкостной канал с помощью обкладок конденсатора в торцах газоразрядной камеры [25].

2. МОДЕЛЬ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Тензор диэлектрической проницаемости холодной столкновительной электронной плазмы во внешнем магнитном поле, направленном вдоль оси z, имеет вид (см. § 3 в [27])

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{pmatrix},$$
$$\varepsilon_\perp = 1 - \frac{\omega_{Le}^2 (\omega + i\nu)}{\omega \left[(\omega + i\nu)^2 - \Omega_e^2 \right]}, \tag{1}$$
$$\varepsilon_\parallel = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega (\omega + i\nu)},$$
$$g = -\frac{\omega_{Le}^2 \Omega_e}{\omega \left[(\omega + i\nu)^2 - \Omega_e^2 \right]},$$

где ω — частота, ω_{Le} — ленгмюровская частота электронов плазмы, ν — эффективная частота столкновений электронов плазмы, Ω_e — электронная циклотронная частота, $i, j = x, y, z$ в плоской геометрии и $i, j = r, \varphi, z$ в цилиндрической системе координат. Уравнения электромагнитного поля с тензором (1) записываются следующим образом:

$$k_z E_y = -\frac{\omega}{c} B_x, \quad k_z E_x - \hat{k}_\perp E_z = \frac{\omega}{c} B_y,$$
$$\hat{k}'_\perp E_y = \frac{\omega}{c} B_z,$$
$$k_z B_y = \frac{\omega}{c} \varepsilon_\perp E_x + i \frac{\omega}{c} g E_y + i \frac{4\pi}{c} j_{0x}, \tag{2}$$
$$k_z B_x - \hat{k}_\perp B_z = i \frac{\omega}{c} g E_x - \frac{\omega}{c} \varepsilon_\perp E_y - i \frac{4\pi}{c} j_{0y},$$
$$\hat{k}'_\perp B_y = -\frac{\omega}{c} \varepsilon_\parallel E_z - i \frac{4\pi}{c} j_{0z}.$$

Здесь k_z — продольное волновое число (в направлении вдоль внешнего магнитного поля), $\hat{k}_\perp$ и $\hat{k}'_\perp$ — операторы поперечного волнового числа, $j_0 = \{j_{0x}, j_{0y}, j_{0z}\}$ — вектор плотности тока внешнего источника. В плоском случае $\hat{k}_\perp = \hat{k}'_\perp = -id/dx$, а в цилиндрической геометрии $\hat{k}_\perp = -id/dr$ и $\hat{k}'_\perp = -i\,(d/dr + 1/r)$ с заменой индексов x, y, z в уравнениях (2) на r, φ, z соответственно. При написании системы (2) поля и токи представлялись в виде $\psi \exp(-i\omega t + ik_z z)$, где ψ — функции декартовой координаты x или цилиндрической координаты r (зависимость от координаты y или от азимутального угла φ отсутствует).

В случае безграничной плазмы, полагая $\psi(x) = \mathrm{const} \cdot \exp(ik_\perp x)$ ($k_\perp$ — поперечное к внешнему магнитному полю волновое число, которое пока считаем заданным), из системы (2) получаем следующие выражения для компонент электромагнитного поля:

$$E_z = -\frac{4\pi i}{\omega D_0} \left\{ \left(\chi^2 (k_\perp^2 + \chi^2) - g^2 \frac{\omega^4}{c^4} \right) j_{0z} + \right.$$
$$\left. + k_\perp k_z \left(k_\perp^2 + \chi^2 \right) j_{0x} + i k_\perp k_z g \frac{\omega^2}{c^2} j_{0y} \right\},$$
$$E_x = -\frac{4\pi i}{\omega D_0} \left\{ k_\perp k_z \left(k_\perp^2 + \chi^2 \right) j_{0z} + \right.$$
$$\left. + \tilde{\chi}^2 \left(k_\perp^2 + \chi^2 \right) j_{0x} + i \tilde{\chi}^2 g \frac{\omega^2}{c^2} j_{0y} \right\}, \tag{3}$$
$$B_y = -\frac{4\pi i}{c D_0} \left\{ k_\perp \left(\varepsilon_\perp \left(k_\perp^2 + \chi^2 \right) + g^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right) j_{0z} - \right.$$
$$\left. - k_z \varepsilon_\parallel \left(k_\perp^2 + \chi^2 \right) j_{0x} - i k_z \varepsilon_\parallel g \frac{\omega^2}{c^2} j_{0y} \right\},$$

$$B_z = \frac{4\pi i}{c D_0} \left\{ k_\perp \left(\varepsilon_\perp k_\perp^2 + \varepsilon_\parallel \chi^2 \right) j_{0y} + \right.$$
$$\left. + i k_z k_\perp^2 g j_{0z} + i k_\perp \tilde{\chi}^2 g j_{0x} \right\},$$
$$B_x = -\frac{4\pi i}{c D_0} \left\{ k_z \left(\varepsilon_\perp k_\perp^2 + \varepsilon_\parallel \chi^2 \right) j_{0y} + \right.$$
$$\left. + i k_\perp k_z^2 g j_{0z} + i k_z \tilde{\chi}^2 g j_{0x} \right\}, \tag{4}$$
$$E_y = \frac{4\pi i}{\omega D_0} \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ \left(\varepsilon_\perp k_\perp^2 + \varepsilon_\parallel \chi^2 \right) j_{0y} + \right.$$
$$\left. + i k_\perp k_z g j_{0z} + i \tilde{\chi}^2 g j_{0x} \right\},$$

где $\chi^2 = k_z^2 - \varepsilon_\perp \omega^2/c^2$, $\tilde{\chi}^2 = k_\perp^2 - \varepsilon_\parallel \omega^2/c^2$, а

$$D_0(\omega, k_z) \equiv \left(\chi^2 + k_\perp^2 \right) \left(\chi^2 \varepsilon_\parallel + k_\perp^2 \varepsilon_\perp \right) + g^2 \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\chi}^2. \tag{5}$$

Из выражений (3) и (4) следует, что в отсутствие токов внешнего источника ($\mathbf{j}_0 = 0$) электромагнитное поле в плазме может быть отличным от нуля, только если ω и k_z удовлетворяют уравнению

$$D_0(\omega, k_z) = 0, \tag{6}$$

являющемуся дисперсионным уравнением для спектров собственных волн магнитоактивной плазмы (см. § 24 в [28]).

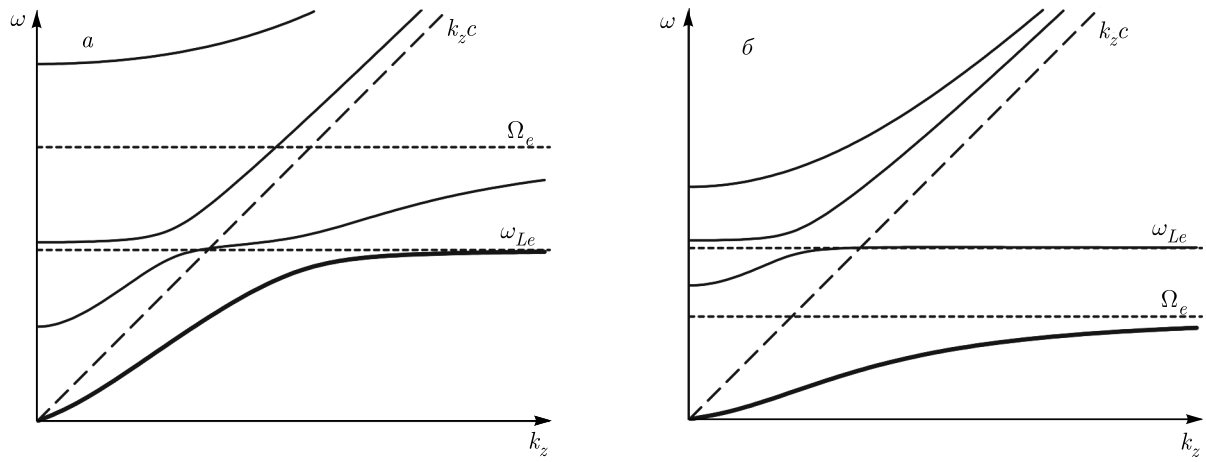

Рис. 1. Частоты электромагнитных волн в магнитоактивной плазме: $\Omega_e > \omega_{Le}$ (*а*), $\Omega_e < \omega_{Le}$ (*б*)

Из соотношений (3), (4) видно, что при $g = 0$ электромагнитное поле в плазме распадается на независимые поля E-типа и B-типа. У полей E-типа отличны от нуля компоненты E_z, E_x, B_y, а возбуждаться такие поля могут внешним током с плотностью $\mathbf{j}_0 = \{j_{0x}, 0, j_{0z}\}$. Такой способ возбуждения будем называть емкостным. У полей B-типа отличны от нуля компоненты B_z, B_x, E_y, а возбуждаться такие поля могут внешним током с плотностью $\mathbf{j}_0 = \{0, j_{0y}, 0\}$. Такой способ возбуждения полей в плазме будем называть индуктивным. Названия связаны с тем, что в рассматриваемой геометрии компоненты электрического поля E_x, E_z замыкаются на возмущения плотности заряда, а компонента E_y замкнута на себя (через бесконечность). Целесообразность таких названий в полной мере проявляется при рассмотрении ограниченной плазмы, особенно в цилиндрической геометрии. В отсутствие внешнего магнитного поля или в бесконечно сильном внешнем магнитном поле, когда $g = 0$, емкостной и индуктивный способы возбуждения полей в плазме независимы. В магнитоактивной плазме это не так. Емкостным путем можно возбудить в плазме поля B-типа, а индуктивным — поля E-типа, кроме того, в магнитоактивной плазме существуют поля смешанного типа, которые не относятся ни к E-типу, ни к B-типу. Таким образом, в магнитоактивной плазме не может быть чисто емкостного или чисто индуктивного ВЧ-разряда. Любой разряд является комбинированным независимо от способа его создания.

3. ДИСПЕРСИОННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

Дисперсионное уравнение (6) определяет четыре ветви электронных колебаний $\omega(k_z)$ (см. § 24 в [28]), изображенных на рис. 1. Нас здесь интересует только самая нижняя ветвь, точнее, ее начальный участок, расположенный в низкочастотной длинноволновой области. При достаточно больших значениях $k_\perp$ (см. ниже) эта ветвь переходит в упоминавшуюся выше «косую» ленгмюровскую волну или волну Трайвелписа – Гоулда. Из рис. 1 видно, что название «косая» ленгмюровская волна оправдано только при $\Omega_e > \omega_{Le}$, а при выполнении противоположного неравенства правильнее было бы говорить о «косой» циклотронной волне. Действительно, в коротковолновом пределе при $\Omega_e > \omega_{Le}$ ветвь выходит на ω_{Le}, а при $\Omega_e < \omega_{Le}$ — на Ω_e. При малых значениях $k_\perp$ эта же волна переходит в волну геликонного типа.

Решая уравнение (6) относительно k_z^2, находим квадрат волнового числа интересующей нас низкочастотной волны магнитоактивной плазмы

$$k_z^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp - \frac{1}{2}k_\perp^2\left(1 + \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\right) - \\ - \frac{1}{2\varepsilon_\parallel}\sqrt{k_\perp^4(\varepsilon_\perp - \varepsilon_\parallel)^2 - 4\frac{\omega^2}{c^2}g^2\varepsilon_\parallel\left(k_\perp^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\parallel\right)}. \quad (7)$$

В настоящей работе будет рассмотрен только случай $\Omega_e^2 < \omega_{Le}^2$. В этом случае при $\nu = 0$ функция (7) положительна в области частот $\omega^2 < \Omega_e^2$, являющейся областью распространения (существования) интересующей нас низкочастотной плазменной волны.

4. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ВИД НИЗКОЧАСТОТНЫХ ДИСПЕРСИОННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ДЛЯ ПЛОТНОЙ И РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ

Рассмотрим дисперсионное уравнение (6) в низкочастотном пределе $\omega^2 \ll \Omega_e^2$, когда формулы (1)

записываются в виде (для простоты полагаем $\nu = 0$)

$$\varepsilon_\perp = 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2}, \quad \varepsilon_\parallel = -\frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}, \quad g = \frac{\omega_{Le}^2}{\omega\Omega_e}. \tag{8}$$

Если предположить, что выполнено неравенство

$$\omega^2/k_z^2 \ll c^2/\varepsilon_\perp, \tag{9}$$

то из уравнения (6) получается формула

$$\omega^2 = \frac{k_z^2}{k_\perp^2}\frac{\omega_{Le}^2\Omega_e^2}{\omega_{Le}^2+\Omega_e^2} \times \\ \times \left(1 + \lambda_e \frac{\varepsilon_\perp - 1}{\varepsilon_\perp}\frac{k_\perp^2}{k_\perp^2+k_z^2}(1+\lambda_e)\right)^{-1}, \tag{10}$$

где введен важный для дальнейшего параметр плотности плазмы $\lambda_e = \omega_{Le}^2/k_\perp^2 c^2$ (см. § 3.2, 3.3 в [29]). Подставляя (10) в неравенство (9), получаем следующее условие применимости решения (10):

$$\frac{\lambda_e}{1 + \lambda_e \dfrac{\varepsilon_\perp - 1}{\varepsilon_\perp}\dfrac{k_\perp^2}{k_\perp^2+k_z^2}(1+\lambda_e)} \ll 1. \tag{11}$$

Неравенство (11) может быть выполнено в двух случаях. В первом случае при малой плотности плазмы (или большом значении $k_\perp$), когда

$$\lambda_e = \frac{\omega_{Le}^2}{k_\perp^2 c^2} \ll 1, \tag{12}$$

из решения (10) получается следующий частотный спектр:

$$\omega^2 = \frac{k_z^2}{k_\perp^2}\frac{\omega_{Le}^2\Omega_e^2}{\omega_{Le}^2+\Omega_e^2}. \tag{13}$$

Волну с частотой (13) и называют «косой» ленгмюровской волной, что вполне оправдано с тем только уточнением, что при $\Omega_e < \omega_{Le}$ (т. е. в нашем случае) логичнее было бы говорить о «косой» циклотронной волне. Волна со спектром (13) является потенциальной волной, поскольку этот спектр может быть получен из дисперсионного уравнения (6), если в нем перейти к пределу $c \to \infty$.

Во втором случае неравенство (11) выполняется и при большой плотности плазмы (или малом значении $k_\perp$), когда

$$\lambda_e = \frac{\omega_{Le}^2}{k_\perp^2 c^2} \gg 1, \tag{14}$$

и формула (10) преобразуется к виду

$$\omega^2 = k_z^2(k_z^2 + k_\perp^2)c^4\Omega_e^2/\omega_{Le}^4. \tag{15}$$

Волну (15) принято называть геликоном. При $k_\perp = 0$ формула (15) дает «классический» геликонный спектр $\omega = k_z^2 c^2 \Omega_e/\omega_{Le}^2$ (см. § 24 в [28]). Волна со спектром (15) является существенно непотенциальной волной, несмотря на выполнение неравенства (9).

Таким образом, при увеличении параметра плотности плазмы интересующая нас низкочастотная волна трансформируется из косой ленгмюровской волны ($\lambda_e \ll 1$) в волну типа геликона ($\lambda_e \gg 1$). При λ_e порядка единицы тип волны не определен, причем ее фазовая скорость оказывается близкой к скорости света, а формула (10) несправедлива.

5. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВОЛН В СЛУЧАЯХ ПЛОТНОЙ И РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ

Вычислим поляризацию волн (13) и (15), которую определим формулой E_x/E_y. При индуктивном возбуждении плазмы отлична от нуля только компонента тока источника j_{0y}. Тогда из формул (3) и (4) имеем

$$\frac{E_x}{E_y} = -ig\frac{k_\perp^2 - \varepsilon_\parallel\omega^2/c^2}{\varepsilon_\perp k_\perp^2 + \varepsilon_\parallel\chi^2}. \tag{16}$$

Аналогично, при емкостном возбуждении плазмы, когда компонента тока $j_{0y} = 0$, из формул (3) и (4) имеем

$$\frac{E_x}{E_y} = i\frac{(k_\perp^2+\chi^2)c^2}{\omega^2 g}. \tag{16a}$$

Если в плазме возбуждаются собственные волны, а именно этот случай нас сейчас интересует, то ω, k_z и $k_\perp$ удовлетворяют дисперсионному уравнению (6). При этом формулы (16) и (16a) совпадают. При выполнении неравенства $\omega^2 \ll \Omega_e^2$ формулы (16) с учетом (8) принимают вид

$$\frac{E_x}{E_y} = -i\frac{\omega_{Le}^2(1+\lambda_e)}{\omega\Omega_e}\left(\varepsilon_\perp - \lambda_e\frac{k_z^2c^2}{\omega^2} + \lambda_e\varepsilon_\perp\right)^{-1}. \tag{17}$$

Полагая выполненным неравенство (12), подставляем в (17) частоту «косой» ленгмюровской волны (13), что приводит к следующему выражению:

$$\frac{E_x}{E_y} = -i\frac{\omega_{Le}^2}{\omega\Omega_e}\frac{\Omega_e^2}{\omega_{Le}^2+\Omega_e^2}\frac{1}{\lambda_e}. \tag{18}$$

Последняя величина при выполнении неравенства (12) велика, что свидетельствует о почти линейной поляризации волны, а это свойственно именно «косой» ленгмюровской волне. Поскольку $|E_y| \ll |E_x|$, волна со спектром (13) преимущественно является

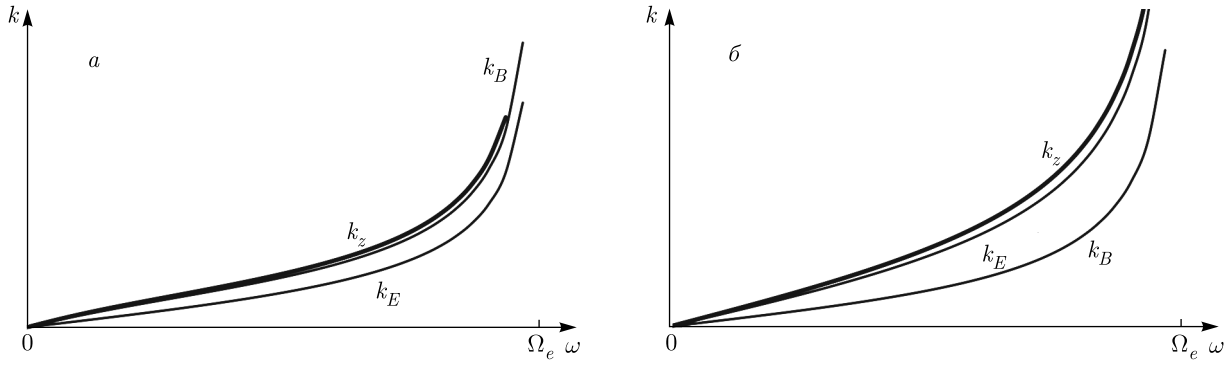

Рис. 2. Волновые числа низкочастотных волн в магнитоактивной плазме: $k_B(\omega)$, $k_E(\omega)$, точное решение (22) $k_z(\omega)$ (жирные линии) при $k_\perp c < \omega_{Le}$ (*а*) и $k_\perp c > \omega_{Le}$ (*б*)

волной E-типа. Чисто волной E-типа «косая» ленгмюровская волна является только при $\lambda_e \to 0$, или при $\omega \to 0$.

Если выполнено неравенство (14), то учитывая (9) и подставляя в (17) частоту (15), имеем

$$\frac{E_x}{E_y} = i\sqrt{1 + \frac{k_\perp^2}{k_z^2}}. \tag{19}$$

При $k_z^2 \ll k_\perp^2$ величина (19) велика по модулю, что свидетельствует о линейной поляризации волны. Поэтому при $k_z^2 \ll k_\perp^2$ волна со спектром (15) преимущественно является волной E-типа. Но при $k_\perp^2 \ll k_z^2$ величина (19) близка к i, т. е. поляризация волны близка к круговой, что свойственно именно геликону. Последнее согласуется с тем, что при $k_\perp^2 \ll k_z^2$ спектр (15) близок к классическому геликонному спектру $\omega = k_z^2 c^2 \Omega_e / \omega_{Le}^2$. Волну со спектром (15) при $k_\perp^2 \ll k_z^2$, поскольку $|E_x| \approx |E_y|$, ни к E-типу, ни к B-типу отнести нельзя.

6. О СВЯЗИ ГЕЛИКОНА И КОСОЙ ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ВОЛНЫ

Из уравнений (2) при $\mathbf{j}_0 = 0$ несложно получить следующую систему:

$$\begin{aligned} D_B E_y &= -i\frac{\omega^2}{c^2} g k_z k_\perp E_z, \\ D_E E_z &= -i k_z k_\perp g E_y, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$D_E = \chi^2 \varepsilon_\parallel + k_\perp^2 \varepsilon_\perp, \quad D_B = \chi^4 + k_\perp^2 \chi^2 - \frac{\omega^4}{c^4} g^2 \tag{21}$$

— некоторые дисперсионные функции. В низкочастотном пределе с учетом (9) из уравнения $D_E = 0$ следует спектр (13), а из уравнения $D_B = 0$ следует спектр (15). Поэтому D_E можно считать дисперсионной функцией «косых» ленгмюровских волн, а D_B — дисперсионной функцией волн геликонного типа. Можно предположить, что система (20) описывает взаимодействие этих волн (см. гл. 3 в [30]).

Из системы (20) следует точное дисперсионное уравнение

$$D_E D_B + \frac{\omega^2}{c^2} g^2 k_\perp^2 k_z^2 = \chi^2 D_0(\omega, k_z) = 0. \tag{22}$$

Поскольку функции χ^2 и D_0 одновременно в нуль обращаться не могут, а собственные волны в плазме определяются только дисперсионным уравнением (6) (это, как было показано выше, следует из соотношений (3), (4)), собственных частот, удовлетворяющих уравнению $\chi^2 = 0$, не существует. Поэтому уравнения (6) и (22) определяют один и тот же набор собственных частот. Однако выделение в дисперсионном уравнении множителей (21) позволяет поставить вопрос о взаимодействии «косых» ленгмюровских волн и волн геликонного типа.

Оказывается, в низкочастотной области резонансное взаимодействие этих волн невозможно, поскольку функции (21) ни в одной точке плоскости ω, k_z одновременно в нуль не обращаются. Более того, порядок по k_z^2 уравнения (22) (без множителя χ^2) и максимальный порядок уравнений $D_E = 0$ и $D_B = 0$ совпадают. Каждое из этих уравнений имеет только один положительный корень $k_z^2(\omega) > 0$, соответствующий распространяющейся волне. Таким образом, взаимодействие «косых» ленгмюровских волн и волн геликонного типа приводит к их слиянию в некую комбинированную волну с волновым числом (7). Сказанное проиллюстрировано на рис. 2, на котором представлены нули первого соотношения

(21) $k_E(\omega)$, второго соотношения (21) $k_B(\omega)$ и решение точного уравнения (22) $k_z(\omega)$. Видно, что при уменьшении параметра плотности плазмы волновое число низкочастотной волны ближе к волновому числу $k_E(\omega)$, а при увеличении параметра плотности волновое число приближается к волновому числу $k_B(\omega)$. В общем случае, т. е. при промежуточных значениях параметра плотности плазмы λ_e, тип интересующей нас волны не определен: это сложная продольно-поперечная электромагнитная волна смешанного типа.

7. ИНДУКТИВНЫЙ И ЕМКОСТНЫЕ СПОСОБЫ ВЛОЖЕНИЯ МОЩНОСТИ В ПЛАЗМУ

Для вычисления плотности мощности W, передаваемой плазме внешним источником, следует использовать формулы (3) и (4) и учесть столкновения в плазме. Исходим из формулы $W = \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle$, где $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля, компоненты которого определены в (3), (4), $\mathbf{j}$ — вектор плотности тока, наведенного в плазме, а угловые скобки означают усреднение по времени. Выражая плотность тока через напряженность поля и диэлектрическую проницаемость, имеем

$$W = \frac{\omega}{8\pi}\left[\varepsilon_\perp''\left(|E_x|^2 + |E_y|^2\right) + \right. \\ \left. + \varepsilon_\parallel''|E_z|^2 - 2g''\operatorname{Im}\left(E_x^* E_y\right)\right], \quad (23)$$

где индекс два штриха означает мнимую часть. При получении (23) используется материальное уравнение

$$j_i = \sigma_{ij}E_j = \frac{\omega}{4\pi i}\left(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\right)E_j,$$

где σ_{ij} — тензор проводимости плазмы, δ_{ij} — символ Кронекера. В случае индуктивного способа возбуждения волн в плазме при вычислении полей следует положить $j_{0x} = j_{0z} = 0$. При этом из формул (3) и (4) находим

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{4\pi}{\omega D_0}k_\perp k_z g\frac{\omega^2}{c^2}j_{0y}, \\ E_x &= \frac{4\pi}{\omega D_0}\tilde{\chi}^2 g\frac{\omega^2}{c^2}j_{0y}, \\ E_y &= i\frac{4\pi}{\omega D_0}\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_\perp k_\perp^2 + \varepsilon_\parallel\chi^2)j_{0y}. \end{aligned} \quad (24)$$

Емкостных способов возбуждения волн в плазме может быть два. При продольном емкостном способе $j_{0x} = j_{0y} = 0$ и из формул (3) и (4) имеем

$$\begin{aligned} E_z &= -i\frac{4\pi}{\omega D_0}\left(\chi^2\left(k_\perp^2 + \chi^2\right) - g^2\frac{\omega^4}{c^4}\right)j_{0z}, \\ E_x &= -i\frac{4\pi}{\omega D_0}k_\perp k_z\left(k_\perp^2 + \chi^2\right)j_{0z}, \\ E_y &= -\frac{4\pi}{\omega D_0}\frac{\omega^2}{c^2}k_\perp k_z g j_{0z}. \end{aligned} \quad (25)$$

И наконец, при поперечном емкостном способе $j_{0z} = j_{0y} = 0$, и из формул (3) и (4) следует

$$\begin{aligned} E_z &= -i\frac{4\pi}{\omega D_0}k_\perp k_z(k_\perp^2 + \chi^2)j_{0x}, \\ E_x &= -i\frac{4\pi}{\omega D_0}\tilde{\chi}^2\left(k_\perp^2 + \chi^2\right)j_{0x}, \\ E_y &= -\frac{4\pi}{\omega D_0}\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\chi}^2 g j_{0x}. \end{aligned} \quad (26)$$

Поскольку формулы (23)–(26) достаточно сложны, рассмотрим предельные случаи.

8. ВЛОЖЕНИЕ МОЩНОСТИ В ПЛАЗМУ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ КОСОЙ ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ВОЛНЫ

При выполнении неравенства (12) в плазме возбуждается «косая» ленгмюровская волна E-типа со спектром (13). Дисперсионная функция (5) в этом случае может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} D_0(\omega, k_z) &= \left(k_z^2 + k_\perp^2\right)\tilde{D}(\omega, k_z), \\ \tilde{D}(\omega, k_z) &= \left(k_z^2\varepsilon_\parallel + k_\perp^2\varepsilon_\perp\right). \end{aligned} \quad (27)$$

В низкочастотном пределе выражение (13) является решением уравнения $\tilde{D} = 0$. Случаю очень малого параметра плотности плазмы соответствует формальный предельный переход $c \to \infty$, осуществляя который в формулах (25) и (26) легко получаем искомый результат. В случае продольного емкостного способа из формул (25) имеем

$$\begin{aligned} E_z &= -i\frac{4\pi}{\omega\tilde{D}}k_z^2 j_{0z}, \\ E_x &= -i\frac{4\pi}{\omega\tilde{D}}k_\perp k_z j_{0z}, \quad E_y = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя выражения (28) в формулу (23), находим следующее выражение для мощности, выделяемой в плазме при продольном емкостном способе возбуждения «косой» ленгмюровской волны:

$$W_{C\parallel} = \frac{2\pi}{\omega}k_z^2\frac{\operatorname{Im}\tilde{D}}{\left(\operatorname{Re}\tilde{D}\right)^2 + \left(\operatorname{Im}\tilde{D}\right)^2}\left|j_{0z}\right|^2. \quad (29)$$

Используя известное выражение для мощности, выделяемой в электрической цепи на сопротивлении R переменным током, $Q = I^2R/2$, введем эффективное удельное сопротивление плазмы $\rho_{C\parallel} = 2W_{C\parallel}/\left|j_{0z}\right|^2$ при продольном емкостном способе подключения[1]. Тогда из выражения (29) имеем

$$\rho_{C\parallel} = \frac{4\pi}{\omega}k_z^2\frac{\operatorname{Im}\tilde{D}}{\left(\operatorname{Re}\tilde{D}\right)^2+\left(\operatorname{Im}\tilde{D}\right)^2}. \tag{30}$$

Аналогично для поперечного емкостного способа из формул (26) находим

$$E_z = -i\frac{4\pi}{\omega\tilde{D}}k_\perp k_z j_{0x},$$
$$E_x = -i\frac{4\pi}{\omega\tilde{D}}k_\perp^2 j_{0x}, \quad E_y = 0, \tag{31}$$

$$\rho_{C\perp} = \frac{4\pi}{\omega}k_\perp^2\frac{\operatorname{Im}\tilde{D}}{\left(\operatorname{Re}\tilde{D}\right)^2+\left(\operatorname{Im}\tilde{D}\right)^2}. \tag{32}$$

Выражения (30) и (32) содержат одинаковый множитель, зависящий от частоты и определяющий резонансные свойства. Приведем его явное выражение для случая $\nu \ll \omega \ll \Omega_e$:

$$\frac{\operatorname{Im}\tilde{D}}{\left(\operatorname{Re}\tilde{D}\right)^2+\left(\operatorname{Im}\tilde{D}\right)^2} = \omega^3\frac{\left(k_z^2+k_\perp^2\omega^2/\Omega_e^2\right)\omega_{Le}^2\nu}{\omega^2\left[k_\perp^2\left(1+\omega_{Le}^2/\Omega_e^2\right)\omega^2-k_z^2\omega_{Le}^2\right]^2+\left(k_z^2+k_\perp^2\omega^2/\Omega_e^2\right)^2\omega_{Le}^4\nu^2}. \tag{33}$$

В случае индуктивного способа возбуждения формальный предельный переход $c \to \infty$ недостаточен, поскольку дает нулевой результат, что видно из выражений (24), в которых члены, пропорциональные ω^2/c^2, следует оставить (других просто нет). Величины D_0 и $\tilde{\chi}^2$ преобразуются так же, как в случае емкостных методов. В результате получаем

$$E_z = \frac{4\pi}{\omega\tilde{D}}\,\frac{k_\perp k_z}{k_\perp^2+k_z^2}g\frac{\omega^2}{c^2}j_{0y},$$
$$E_x = \frac{4\pi}{\omega\tilde{D}}\,\frac{k_\perp^2}{k_\perp^2+k_z^2}g\frac{\omega^2}{c^2}j_{0y}, \tag{34}$$
$$E_y = i\frac{4\pi}{\omega\left(k_\perp^2+k_z^2\right)}\,\frac{\omega^2}{c^2}j_{0y}.$$

При подстановке выражений (34) в формулу (23) пренебрежем величиной g'' по сравнению с $\varepsilon_\perp''$ и $\varepsilon_\parallel''$ (что допустимо при $|\omega+i\nu| \ll \Omega_e$). В результате, для эффективного удельного сопротивления при индуктивном способе возбуждения «косой» ленгмюровской волны имеем

$$\rho_L = \frac{4\pi}{\omega}\,\frac{\omega^4}{\left(k_\perp^2c^2+k_z^2c^2\right)^2}\times$$
$$\times\left(|g|^2k_\perp^2\frac{\operatorname{Im}\tilde{D}}{\left(\operatorname{Re}\tilde{D}\right)^2+\left(\operatorname{Im}\tilde{D}\right)^2}+\varepsilon_\perp''\right). \tag{35}$$

Выражение (35) состоит из двух частей. Первая часть резонансная. Именно она отвечает за возбуждение «косой» ленгмюровской волны. Вторая часть (пропорциональная $\varepsilon_\perp''$) к возбуждению волн отношения не имеет. Тем не менее, она также содержит резонанс $\omega \approx \Omega_e$, обусловленный резонансной раскачкой полем внешнего источника циклотронных колебаний электронов плазмы. Циклотронный резонанс нас здесь не интересует, поскольку лежит в области слишком высоких частот.

Сравнивая эффективные удельные сопротивления при различных способах возбуждения «косой» ленгмюровской волны, имеем

$$\rho_L = \frac{\omega^4}{\left(k_\perp^2c^2+k_z^2c^2\right)^2}\,|g|^2\,\rho_{C\perp}, \quad \rho_{C\parallel} = \frac{k_z^2}{k_\perp^2}\rho_{C\perp}. \tag{36}$$

Таким образом, эффективные удельные сопротивления при емкостных способах возбуждения примерно одинаковы и существенно больше, чем эффективное удельное сопротивление при индуктивном способе возбуждения.

9. ВЛОЖЕНИЕ МОЩНОСТИ В ПЛАЗМУ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ГЕЛИКОНА

Рассмотрим теперь случай, когда выполнено неравенство (14) и в плазме возбуждается электромагнитная волна геликонного типа. Случаю очень большого параметра плотности плазмы соответствует формальный предельный переход $k_\perp \to 0$. При этом

[1] Определенное таким образом эффективное удельное сопротивление плазмы совпадает с вещественной частью удельного комплексного импеданса плазменного разряда, рассчитанного в работе [31].

$$D_0(\omega, k_z) = \varepsilon_{\parallel}(\omega) D^{(+)}(\omega, k_z) D^{(-)}(\omega, k_z),$$
$$D^{(\pm)}(\omega, k_z) = \chi^2 \pm g\frac{\omega^2}{c^2}, \tag{37}$$

а формулы (24) принимают вид

$$E_z = 0, \quad E_x = -\frac{4\pi}{\omega D^{(+)} D^{(-)}} g \frac{\omega^4}{c^4} j_{0y},$$
$$E_y = i\frac{4\pi}{\omega D^{(+)} D^{(-)}} \frac{\omega^2}{c^2} \chi^2 j_{0y}. \tag{38}$$

Заметим, что дисперсионное уравнение $D^{(-)} = 0$ как раз и определяет классический геликонный спектр $\omega = k_z^2 c^2 \Omega_e / \omega_{Le}^2$, а решения уравнения $D^{(+)} = 0$ лежат вне интересующей нас низкочастотной области. Подставляя выражения (38) в формулу (23), вычисляя эффективное удельное сопротивление и пренебрегая, как и прежде, величиной g'', имеем

$$\rho_L = \frac{4\pi}{\omega} \frac{\varepsilon_{\perp}''}{\left|D^{(+)}\right|^2 \left|D^{(-)}\right|^2} \frac{\omega^4}{c^4} \times$$
$$\times \left(|g|^2 \frac{\omega^4}{c^4} + \left| k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} \right|^2 \right). \tag{39}$$

Считая, что выполнены неравенства $\nu, \omega \ll \Omega_e$ и условие (9), преобразуем выражение (39) к следующему виду:

$$\rho_L = 4\pi\omega \frac{k_z^4 c^4 \Omega_e^2 + \omega_{Le}^4 \omega^2}{\left(k_z^2 c^2 \Omega_e + \omega_{Le}^2 \omega\right)^2} \times$$
$$\times \frac{\nu \omega \omega_{Le}^2}{\left(k_z^2 c^2 \Omega_e - \omega_{Le}^2 \omega\right)^2 + \nu^2 \omega^2 \omega_{Le}^4 / \Omega_e^2}. \tag{40}$$

Общая формула (39) и ее упрощенный вариант определяют эффективное удельное сопротивление при индуктивном способе возбуждения в плазме волны геликонного типа.

Перейдем теперь к емкостным способам возбуждения. В случае продольного емкостного способа, полагая в формулах (25) $k_{\perp} = 0$, имеем

$$E_z = -i\frac{4\pi}{\omega \varepsilon_{\parallel}} j_{0z}, \quad E_x = 0, \quad E_y = 0. \tag{41}$$

Подстановка выражений (41) в формулу (23) и выражение для эффективного удельного сопротивления дает

$$\rho_{C\parallel} = \frac{4\pi}{\omega} \frac{\varepsilon_{\parallel}''}{\left|\varepsilon_{\parallel}\right|^2} \left|j_{0z}\right|^2 =$$
$$= 2\pi \frac{\nu \omega_{Le}^2}{\left(\omega^2 - \omega_{Le}^2\right)^2 + \nu^2 \omega_{Le}^4 / \omega^2}. \tag{42}$$

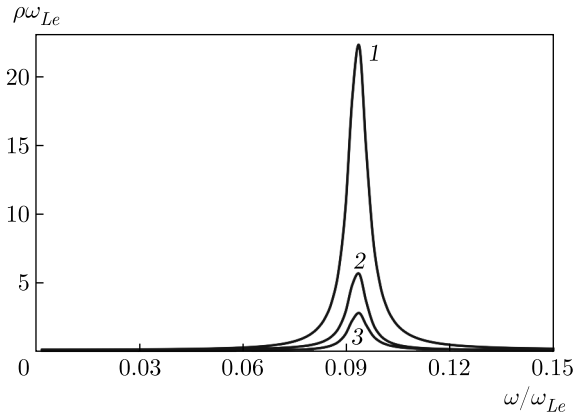

Рис. 3. Эффективные удельные сопротивления плазмы при различных способах возбуждения: поперечный емкостной (*1*), продольный емкостной (*2*) и индуктивный (*3*)

Выражение (42) вообще не содержит резонанса на геликонной частоте. Зато имеется резонанс на ленгмюровской частоте, описывающий резонансное емкостное возбуждение ленгмюровской волны $\omega = \omega_{Le}$, являющейся согласно (37) собственной волной. Этот резонанс нас здесь не интересует, поскольку лежит в области слишком высоких частот.

В случае поперечного емкостного способа из формул (26) имеем

$$E_z = 0, \quad E_x = i\frac{4\pi}{\omega D^{(+)} D^{(-)}} \frac{\omega^2}{c^2} \chi^2 j_{0x},$$
$$E_y = \frac{4\pi}{\omega D^{(+)} D^{(-)}} \frac{\omega^4}{c^4} g j_{0x}. \tag{43}$$

Формулы (43) отличаются от формул (38) с точностью до знака только заменой $E_x \leftrightarrow E_y$ и $j_{0y} \leftrightarrow j_{0x}$. Поскольку согласно (23) мощность определяется суммой квадратов модулей этих компонент, эффективные удельные сопротивления при индуктивном и поперечном емкостном способах возбуждения плазмы совпадают, т. е.

$$\rho_{C\perp} = \rho_L. \tag{44}$$

Что касается продольного емкостного способа, то эффективное удельное сопротивление при возбуждении геликона, согласно (42), невелико, поскольку резонанс на геликонной частоте отсутствует.

Результаты расчета эффективных удельных сопротивлений с использованием общих формул (24)–(26) представлены на рис. 3. Расчеты были проведены при следующих параметрах: $\Omega_e/\omega_{Le} = 0.2$, $\nu/\omega_{Le} = 0.005$, $k_z = k_{\perp}$ и $\lambda_e = 1$. Выбор параметров обусловлен тем, что, с одной стороны, рассчитывался промежуточный случай, когда простые формулы (30), (32), (35) и (39), (40), (42) не

применимы, а тип волны не определен. С другой стороны, данные параметры характерны для реальных экспериментов, с тем лишь ограничением, что в экспериментах используются цилиндрические газоразрядные камеры. Максимум эффективного удельного сопротивления приходится на частоту, близкую к частоте волны в плазме при выбранном значении k_z. Эта частота совпадает с минимальным корнем дисперсионного уравнения (6). Видно, что при $\lambda_e = 1$ самое низкое эффективное удельное сопротивление имеет место при индуктивном методе возбуждения волн в плазме. Однако при больших параметрах плотности плазмы, что соответствует условиям многих экспериментов [19, 25, 26], самые высокие эффективные удельные сопротивления плазмы реализуются при индуктивных и поперечных емкостных способах возбуждения волн (формулы (39), (40) и (42)).

10. ОСОБЕННОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Случай пространственно-ограниченной плазмы, особенно в цилиндрической геометрии, имеет важные особенности, поэтому заслуживает отдельного рассмотрения, тем более что многочисленные экспериментальные исследования проводятся с осесимметричными цилиндрическими плазменными структурами. Учитывая специфику цилиндрической геометрии, положим радиальную плотность тока внешнего источника j_{0r} равной нулю. Тогда из уравнений (2) получаются следующие уравнения:

$$\begin{gathered}\left(\hat{k}_\perp \hat{k}'_\perp + \chi^2 - \frac{\omega^4}{c^4} g^2 \frac{1}{\chi^2}\right) E_\varphi = \\ = -i\frac{\omega^2}{c^2} g \frac{k_z}{\chi^2} \hat{k}_\perp E_z + i\frac{4\pi}{c}\,\frac{\omega}{c} j_{0\varphi}, \\ \hat{k}'_\perp \frac{\varepsilon_\perp}{\chi^2} \hat{k}_\perp E_z + \varepsilon_\parallel E_z = \\ = -ik_z \hat{k}'_\perp \frac{g}{\chi^2} E_\varphi - i\frac{4\pi}{\omega} j_{0z},\end{gathered} \tag{45}$$

и соотношение для радиальной составляющей напряженности электрического поля:

$$E_r = \frac{k_z}{\chi^2} \hat{k}_\perp E_z + i\frac{\omega^2}{c^2\chi^2} g E_\varphi. \tag{46}$$

Азимутальный ток $j_{0\varphi}$ имеет индуктивную природу, а природа продольного тока j_{0z} емкостная — он обязательно связан с продольной модуляцией плотности заряда внешнего источника. Исходя из условий эксперимента, предполагаем, что плазма представляет собой однородный цилиндр радиуса R, а токи источника текут по поверхности плазменного цилиндра, т. е.

$$j_{0\varphi}(r) = j^0_\varphi \delta(r-R), \quad j_{0z}(r) = j^0_z \delta(r-R), \tag{47}$$

где $j^0_{z,\varphi}$ — поверхностные плотности токов, которые считаются заданными. Обычно в экспериментах продольный ток j^0_z равен нулю или мал по сравнению с азимутальным током. Мы здесь, для общности изложения, учитываем обе составляющие тока источника. Из формул (47) следует, что в плазме ($0 \le r < R$) и вне плазмы ($r > R$) уравнения (45) являются однородными, а наличие токов источника следует учитывать с помощью условий на границе $r = R$. Уравнения (45) записаны для общего случая произвольной зависимости диэлектрических проницаемостей и токов источника от r, поэтому граничные условия получаются с учетом формул (47) прямо из уравнений (45) и имеют вид

$$\begin{gathered}\{E_\varphi\}_R = 0, \quad \left\{\frac{dE_\varphi}{dr}\right\}_R = -i\frac{\omega}{c}\,\frac{4\pi}{c} j^0_\varphi, \\ \{E_z\}_R = 0, \\ \left\{\frac{\varepsilon_\perp}{\chi^2}\,\frac{dE_z}{dr} - k_z \frac{g}{\chi^2} E_\varphi\right\}_R = i\frac{4\pi}{\omega} j^0_z,\end{gathered} \tag{48}$$

где фигурные скобки означают разность значений при $R+0$ и $R-0$. В области $r < R$, где плазма однородна, уравнения (45) можно записать в виде

$$\begin{gathered}\left(\hat{k}_\perp \hat{k}'_\perp + \chi^2 - \frac{\omega^4}{c^4} g^2 \frac{1}{\chi^2}\right) E_\varphi = -i\frac{\omega^2}{c^2} g \frac{k_z}{\chi^2} \hat{k}_\perp E_z, \\ \left(\frac{\varepsilon_\perp}{\chi^2} \hat{k}'_\perp \hat{k}_\perp + \varepsilon_\parallel\right) E_z = -ik_z \frac{g}{\chi^2} \hat{k}'_\perp E_\varphi.\end{gathered} \tag{49}$$

При $r > R$ полагаем $\varepsilon_\perp = \varepsilon_\parallel = 1$, $g = 0$, $\chi^2 = k_z^2 - \omega^2/c^2 \equiv \chi_0^2$ и уравнения (45) записываем следующим образом:

$$\left(\hat{k}_\perp \hat{k}'_\perp + \chi_0^2\right) E_\varphi = 0, \quad \left(\hat{k}'_\perp \hat{k}_\perp + \chi_0^2\right) E_z = 0. \tag{50}$$

Решения уравнений (49) должны быть ограничены в нуле, а решения уравнений (50) должны обращаться в нуль на бесконечности. Возможен вариант, когда плазменный цилиндр заключен в цилиндрический проводящий кожух с радиусом $R_0 > R$. В этом случае вместо ограниченности на бесконечности граничные условия для уравнений (50) берутся в виде

$$E_z(R_0) = E_\varphi(R_0) = 0. \tag{51}$$

Ограниченное в нуле решение уравнений (49) имеет вид (см. § 3.1 в [29])

$$\begin{gathered}E_\varphi = A_1 J_1(\kappa_1 r) + A_2 J_1(\kappa_2 r), \\ E_z = \beta(\kappa_1) A_1 J_0(\kappa_1 r) + \beta(\kappa_2) A_2 J_0(\kappa_2 r),\end{gathered} \tag{52}$$

где

$$\kappa_{1,2}^2 = \frac{1}{2\varepsilon_\perp}\left\{-\left(\varepsilon_\perp+\varepsilon_\parallel\right)\chi^2 - g^2\frac{\omega^2}{c^2}\pm\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{\left[\left(\varepsilon_\perp-\varepsilon_\parallel\right)\chi^2+g^2\frac{\omega^2}{c^2}\right]^2+4\varepsilon_\parallel g^2k_z^2\frac{\omega^2}{c^2}}\right\}, \quad (53)$$

$$\beta(\kappa) = -\frac{k_z g\kappa}{\kappa^2\varepsilon_\perp+\chi^2\varepsilon_\parallel}. \quad (54)$$

Вне плазмы удобно взять следующие ограниченные на бесконечности решения уравнений (50):

$$\begin{aligned} E_\varphi &= BK_1\left(\chi_0 r\right) \equiv BZ_1\left(\chi_0 r\right), \\ E_z &= CK_0\left(\chi_0 r\right) \equiv CZ_0\left(\chi_0 r\right), \end{aligned} \quad (55)$$

а смысл обозначений $Z_{0,1}\left(\chi_0 r\right)$ будет понятен из дальнейшего. Если имеется проводящий кожух и используются граничные условия (51), то решения уравнений (50) записываются в виде

$$\begin{aligned} E_\varphi &= B\left(K_1\left(\chi_0 r\right) - I_1\left(\chi_0 r\right)\frac{K_1\left(\chi_0 R_0\right)}{I_1\left(\chi_0 R_0\right)}\right) \equiv \\ &\equiv BZ_1\left(\chi_0 r\right), \\ E_z &= C\left(K_0\left(\chi_0 r\right) - I_0\left(\chi_0 r\right)\frac{K_0\left(\chi_0 R_0\right)}{I_0\left(\chi_0 R_0\right)}\right) \equiv \\ &\equiv CZ_0\left(\chi_0 r\right). \end{aligned} \quad (55a)$$

Использование обозначений $Z_{0,1}$ позволяет случаи отсутствия и наличия внешнего кожуха рассматривать единообразно. При $R_0 \to \infty$ решения (55a) переходят в (55).

Ограниченное решение (52) уравнений (49) представлено в виде суперпозиции двух фундаментальных решений. Однако не следует эти фундаментальные решения отождествлять с геликоном и косой ленгмюровской волной. Коэффициенты в (52) и (55) или (55a) определяются из граничных условий (48) и, таким образом, в системе возбуждается смесь геликона и косой ленгмюровской волны. Лишь в отдельных случаях, при специально подобранных параметрах системы, возможно обращение в нуль одного из коэффициентов $A_{1,2}$ (по терминологии [32] — антирезонансные условия).

Дальнейшие действия сводятся к следующему. Решения (52) и (55) подставляются в граничные условия (48) и определяются постоянные $A_{1,2}, B$ и C. Потом из выражений (52) и (46) определяются компоненты напряженности электрического поля в плазме. И, наконец, компоненты поля E_z, E_r и E_φ подставляются в цилиндрический аналог формулы (23)

$$W = \frac{\omega}{8\pi}\int\limits_0^R\left[\varepsilon_\perp''\left(\left|E_r(r)\right|^2+\left|E_\varphi(r)\right|^2\right)+\right.$$
$$\left.+\varepsilon_\parallel''\left|E_z(r)\right|^2 - 2g''\,\mathrm{Im}\left(E_r^*(r)E_\varphi(r)\right)\right]2\pi r\,dr, \quad (56)$$

и получается выражение для мощности внешнего источника, выделяемой на единицу длины плазменного цилиндра. В общем случае выражение для мощности оказывается чрезвычайно громоздким и неинформативным, поэтому приводить его здесь не имеет смысла. Целесообразнее привести результаты конкретных расчетов, что и будет сделано в дальнейшем, а также рассмотреть предельные случаи.

11. СПЕКТРЫ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ВОЛН ПЛАЗМЕННОГО ЦИЛИНДРА

Предварительно выясним отличия спектров низкочастотных волн плазменного цилиндра от спектров низкочастотных волн безграничной плазмы. Из формулы (13) видно, что при увеличении поперечного волнового числа $k_\perp$ частота ω уменьшается ($\omega \propto k_\perp^{-1}$), а из формулы (15) следует прямо противоположное — частота ω с ростом $k_\perp$ возрастает ($\omega \propto \sqrt{k_\perp^2+k_z^2}$). В случае пространственно-безграничной плазмы $k_\perp$ может быть любым, но в плазменном цилиндре $k_\perp$ принимает дискретный набор значений $k_{\perp n}$, соответствующих различным поперечным модам цилиндра. Известно, что с ростом номера моды n числа $k_{\perp n}$ возрастают. Поэтому частоты косых ленгмюровских волн плазменного цилиндра с ростом номера моды уменьшаются, а частоты геликоноподобных волн с ростом номера моды увеличиваются, что приводит к «перемешиванию» частот волн разного типа. Кроме того, в цилиндрической геометрии имеется двойной набор собственных значений $k_{\perp n}$ и соответствующих им собственных функций, что связано с несовпадением цилиндрических операторов поперечного волнового числа $\hat{k}_\perp$ и $\hat{k}'_\perp$. Частоты косых ленгмюровских волн формируются в основном одним набором собственных значений $k_{\perp n}$, а частоты геликоноподобных волн — другим набором. В волноводе с анизотропной плазмой разные наборы собственных значений $k_{\perp n}$ оказываются связанными между собой (через граничные условия для электромагнитного поля), чем и обусловлена сложная структура частотных спектров плазменного цилиндра.

Подход, основанный на неравенстве (9), в цилиндрическом случае оказывается не очень удобным. Поэтому выберем метод исследования, отличный от

использованного в случае безграничной плазмы. Поскольку нас интересуют низкочастотные длинноволновые возмущения плазмы, проведем в формулах (52)–(54) предельный переход $\omega \to 0$, $k_z \to 0$, предполагая при этом, что предел отношения ω/k_z при $k_z \to 0$ существует и является конечным. Заметим, что такой предел, как видно из решения (10), существует и в случае безграничной плазмы. Более того, случай безграничной плазмы вполне может быть рассмотрен предельным переходом $\omega \to 0$, $k_z \to 0$. Однако при этом члены более высокого, чем k_z^2, порядка в правой части формул (10) и (15) получить нельзя. Нельзя с помощью предельного перехода получить и классический геликонный спектр $\omega = k_z^2 c^2 \Omega_e/\omega_{Le}^2$. Поэтому при рассмотрении плазменного цилиндра в пределе $\omega \to 0$, $k_z \to 0$ нельзя одновременно переходить к случаю безграничной плазмы $R \to \infty$, или $k_\perp \to 0$.

В результате предельного перехода $\omega \to 0$, $k_z \to 0$ соотношения (53) преобразуются к виду

$$\kappa_{1,2}^2 R^2 = \frac{\lambda_e}{2(1+b)} \left\{ (Z-2b) \pm \pm \sqrt{Z^2 - 4(Z+1)b} \right\} \equiv q_{1,2}^2, \quad (57)$$

где

$$Z = \frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} - 1 \in (0, \infty), \qquad \lambda_e = \frac{\omega_{Le}^2}{c^2} R^2, \quad b = \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2}. \quad (58)$$

Параметр λ_e в цилиндрическом случае играет роль параметра плотности плазмы, введенного ранее в (10). В том же пределе из соотношений (52) имеем

$$E_\varphi = A_1 J_1(q_1\xi) + A_2 J_1(q_2\xi), \qquad E_z = -\sqrt{\lambda_e b(Z+1)} \times \times \left(A_1 J_0(q_1\xi) \frac{q_1}{P(q_1)} + A_2 J_0(q_2\xi) \frac{q_2}{P(q_2)} \right), \quad (59)$$

где $\xi = r/R$, а $P(q) = q^2(1+b) - \lambda_e(Z-b)$. Используя формулу (46), также находим

$$E_r = i\frac{\omega_{Le}}{\omega} \frac{\sqrt{b}}{Z-b} \left[A_1 J_1(q_1\xi) \left(1 - \frac{q_1^2(Z+1)}{P(q_1)} \right) + + A_2 J_1(q_2\xi) \left(1 - \frac{q_2^2(Z+1)}{P(q_2)} \right) \right]. \quad (60)$$

Из формул (57) следует, что при

$$Z < Z_0 = 2b\left(1 + \sqrt{1 + 1/b}\right), \quad (61)$$

величины (57) оказываются комплексными (из-за отрицательности подкоренного выражения). Поэтому компоненты поля, определяемые формулами (59) и (60), при $Z < Z_0$ не совсем обычные — они выражаются через функции Бесселя комплексного аргумента. Обычно поля выражаются через функции Бесселя или чисто вещественного, или чисто мнимого аргументов (как и в нашем случае при $Z > Z_0$). Можно сказать, что величина Z_0 является «критической» для структуры поля плазменного цилиндра.

Величина Z по формулам (см. (58))

$$\omega^2 = \frac{k_z^2 c^2}{1+Z}, \quad \beta = \frac{\omega}{k_z c} = \frac{1}{\sqrt{1+Z}} \quad (62)$$

определяет частоты и фазовые скорости низкочастотных волн плазменного цилиндра. Очевидно, что формулы (62) применимы не только в пределе $\omega \to 0$, но и для конечных частот, лишь бы было выполнено неравенство $\omega \ll \Omega_e$ и были применимы приближенные формулы (8), использованные при получении (57)–(60). Нас в дальнейшем будут интересовать величины β — безразмерные фазовые скорости, равные отношению фазовых скоростей низкочастотных волн к скорости света.

12. СЛУЧАЙ ПРОВОДЯЩЕГО ЦИЛИНДРА СО СПЛОШНЫМ ПЛАЗМЕННЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

Начнем с не самого интересного для приложений в физике газового разряда случая $R = R_0$ — проводящий цилиндр со сплошным плазменным заполнением. Подставляя выражения (59) в граничные условия (51), получим следующее дисперсионное уравнение:

$$q_1 P(q_2) J_1(q_2) J_0(q_1) - - q_2 P(q_1) J_1(q_1) J_0(q_2) = 0. \quad (63)$$

На рис. 4 представлены безразмерные фазовые скорости плазменных волн $\beta(\lambda_e)$, полученные численным решением уравнения (63) при $b = \omega_{Le}^2/\Omega_e^2 = 25$. Диапазон изменения параметра плотности λ_e (58) взят достаточно широким, охватывающим все возможные случаи плотности плазмы и поперечных размеров системы на экспериментальных установках [19,25,26]. Штриховыми линиями отмечены критическая фазовая скорость $\beta_0 = 1/\sqrt{1+Z_0}$ и максимальная фазовая скорость $\beta_{max} = 1/\sqrt{1+2b}$ (см. ниже). Область малых β на рисунке не изображена. Можно показать, что все кривые $\beta(\lambda_e)$ начинаются

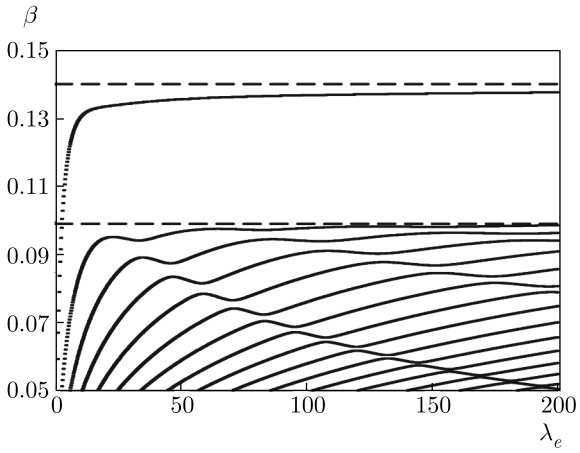

Рис. 4. Фазовые скорости волн проводящего цилиндра со сплошным плазменным заполнением в низкочастотном пределе

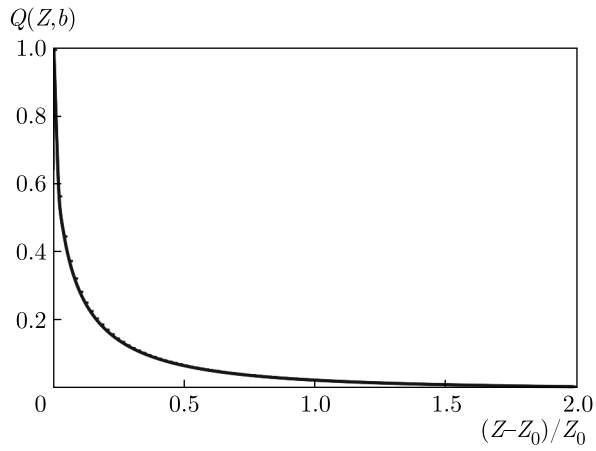

Рис. 5. Параметр связи волн сплошного плазменного цилиндра

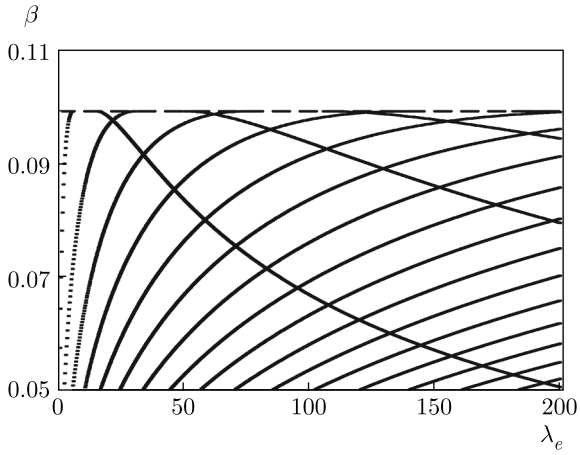

Рис. 6. Фазовые скорости невзаимодействующих волн проводящего цилиндра со сплошным плазменным заполнением

в точке $\lambda_e = 0$, $\beta = 0$. Для каждого λ_e имеется счетное множество фазовых скоростей, а каждый элемент этого множества соответствует некоторой поперечной моде плазменного цилиндра. Представленные на рис. 4 кривые $\beta(\lambda_e)$ являются немонотонными (за исключением самой верхней кривой), что отражает сложную природу различных поперечных мод. Будем нумеровать эти моды сверху вниз $\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_n > \ldots$

Чтобы разобраться в структуре представленных на рис. 4 кривых $\beta_n(\lambda_e)$, запишем дисперсионное уравнение (63) в виде

$$J_1(q_2)\,J_0(q_1) = Q(Z,b)J_1(q_1)\,J_0(q_2)\,,\qquad Q(Z,b) = \frac{q_2 P(q_1)}{q_1 P(q_2)}, \tag{63a}$$

и рассмотрим его в области $0 < \beta < \beta_0$ (или $Z > Z_0$). В этой области для приближенного решения уравнения (63a) можно применить методы теории слабо связанных волн (см. гл. 3 в [30]). Действительно, величина $Q(Z,b)$ при $Z > Z_0$ (безразмерная фазовая скорость $\beta < \beta_0$, β_0 изображена штриховой линией на рис. 4) является малым параметром, что видно из рис. 5, на котором величина $Q(Z,b)$ изображена как функция $(Z - Z_0)/Z_0$. Представленная на рис. 5 кривая практически не зависит от параметра $b = \omega_{Le}^2/\Omega_e^2$.

В нулевом приближении по параметру связи $Q(Z,b)$ дисперсионное уравнение (63a) распадается на два уравнения:

$$J_0(q_1) = 0 \to q_1^2 = \mu_{0m}^2,\qquad J_1(q_2) = 0 \to q_2^2 = \mu_{1m}^2, \tag{64}$$

где μ_{0m} — нули функции Бесселя нулевого порядка, μ_{1m} — нули функции Бесселя первого порядка. Фазовые скорости $\beta(\lambda_e)$, найденные из уравнений (64), представлены на рис. 6, на котором очевидно просматривается та же структура, что и на рис. 4. Фазовые скорости $\beta(\lambda_e)$, полученные из первого уравнения (64), возрастают при увеличении λ_e, а фазовые скорости, найденные из второго уравнения (64), при увеличении λ_e убывают. Имеющаяся на рис. 4 «раздвижка» кривых в точках их пересечения, обусловлена взаимодействием волн. Напомним, что в случае рис. 6 взаимодействием волн пренебрегалось (полагалось $Q(Z,b) = 0$).

Ранее мы отмечали, что в цилиндрической геометрии имеется двойной набор поперечных собственных значений, определяемых нулями функций

Бесселя μ_{0m} и μ_{1m}. В нулевом приближении по параметру связи $Q(Z,b)$ эти наборы независимы. Однако в рамках точного дисперсионного уравнения (63) они связаны, а поэтому различные поперечные моды переходят друг в друга, что несложно увидеть, сравнивая рис. 4 и 6. Удобно ввести некоторое эффективное собственное значение, включающее оба набора собственных значений нулевого по связи волн приближения. Учитывая неравенства $\mu_{01} < \mu_{11} < \mu_{02} < \mu_{12} < \ldots$, определим эффективное собственное значение формулой

$$\mu_n(\lambda_e) = \begin{cases} \mu_{0n}, & \lambda_e < \mu_{1(n-1)}^2\sqrt{1+1/b}, \\ \mu_{1(n-1)}, & \lambda_e > \mu_{0n}^2\sqrt{1+1/b}, \end{cases} \quad n = 2,3,\ldots \tag{65}$$

Используя величины (65), решения обоих уравнений (64) можно записать в виде

$$\beta_n^2(\lambda_e) = \frac{\lambda_e\mu_n^2}{(\lambda_e+\mu_n^2)\left[\mu_n^2 + b(\lambda_e+\mu_n^2)\right]}, \quad n = 2,3,\ldots \tag{66}$$

Решения первого уравнения (64) (возрастающие кривые на рис. 6) формулы (66) определяют при выполнении неравенств

$$\lambda_e < \mu_n^2\sqrt{1+1/b}, \tag{67}$$

а решения второго уравнения (64) (убывающие кривые на рис. 6) формулы (66) определяют при выполнении противоположного неравенства. Формально, при $\lambda_e = \mu_n^2\sqrt{1+1/b}$ функции (66) достигают максимального значения $\beta_n^2 = \beta_0^2$. На самом деле, этот вывод нуждается в уточнении, поскольку при приближении β к β_0 величина Z стремится к Z_0, параметр связи волн $Q(Z,b) \to 1$ (см. рис. 5) и уравнения (64) становятся неприменимыми. По этой причине неравенства в определении (65) должны быть достаточно сильными.

При выполнении сильного неравенства (67) и с учетом определения (65) из (66) находим

$$\beta_n^2 = \frac{\lambda_e}{\mu_{0n}^2(1+b)} \to \omega_n^2 = \\ = \frac{k_z^2}{k_{\perp n}^2}\frac{\omega_{Le}^2\Omega_e^2}{\omega_{Le}^2+\Omega_e^2}, \quad n = 2,3,\ldots, \tag{68}$$

где $k_{\perp n} = \mu_n/R$. Сравнивая выражения (68) и (13), приходим к выводу, что волна со спектром (68) является косой ленгмюровской волной. Аналогично при выполнении сильного обратного неравенства (67) из формулы (66) имеем

$$\beta_n^2 = \frac{\mu_n^2}{b\lambda_e} \to \omega_n^2 = k_z^2 k_{\perp n}^2 c^4 \frac{\Omega_e^2}{\omega_{Le}^4}. \tag{69}$$

Сравнивая (69) и (15), заключаем, что волны со спектром (69) являются геликоноподобными волнами.

Таким образом, высокие ($n \geq 2$) поперечные моды проводящего цилиндра со сплошным плазменным заполнением при малом значении параметра плотности плазмы λ_e являются косыми ленгмюровскими волнами, а при больших λ_e они становятся волнами геликонного типа. Трансформация типа волны происходит при $\lambda_e \approx \mu_n^2\sqrt{1+1/b}$. Все происходит примерно так же, как и в пространственно-безграничной плазме, где трансформация типа волны имеет место при $\lambda_e \sim 1$. Заметим, что формула (66) является цилиндрическим аналогом формулы (10).

Важная особенность волн проводящего цилиндра со сплошным плазменным заполнением связана с основной поперечной модой $n = 1$. При малом значении параметра плотности плазмы эта мода определяется формулами (68), в которых $k_{\perp 1} = \mu_{01}/R$, т. е. является обычной косой ленгмюровской волной. Однако при увеличении параметра плотности плазмы трансформации этой моды в волну геликонного типа не происходит. Анализ формул (57) и уравнения (63), а также результаты численных расчетов свидетельствуют о наличии следующего предельного соотношения:

$$\lambda_e \gg \mu_{0n}^2: \quad \beta_1^2 = \beta_{max}^2 = \frac{1}{1+2b} \to \\ \to \omega_1^2 = k_z^2 c^2 \frac{\Omega_e^2}{\Omega_e^2 + 2\omega_{Le}^2}. \tag{70}$$

Предельная волна (70) является существенно непотенциальной, хотя при $\Omega_e^2 \ll \omega_{Le}^2$ ее фазовая скорость мала по сравнению со скоростью света. В этом смысле она ближе к волнам геликонного типа, чем к косым ленгмюровским волнам.

Отдельного внимания заслуживает структура напряженности электрического поля этой волны. Поскольку $\beta_1 > \beta_0$, то величины (57) оказываются комплексными. Поэтому компоненты поля (59) и (60) не только осциллируют, но и возрастают к границе плазменного цилиндра, причем тем сильнее, чем больше параметр плотности плазмы. Таким образом поле волны при больших λ_e прижато к границе $r = R$, как у поверхностной волны (рис. 7, компонента E_r построена без множителя ω_{Le}/ω в формуле (60)), поэтому такую волну естественно назвать квазиповерхностной плазменной волной. Расчеты также показывают, что компоненты напряженности электрического поля E_z и E_φ в этой волне примерно равны (на рис. 7 они с графической точно-

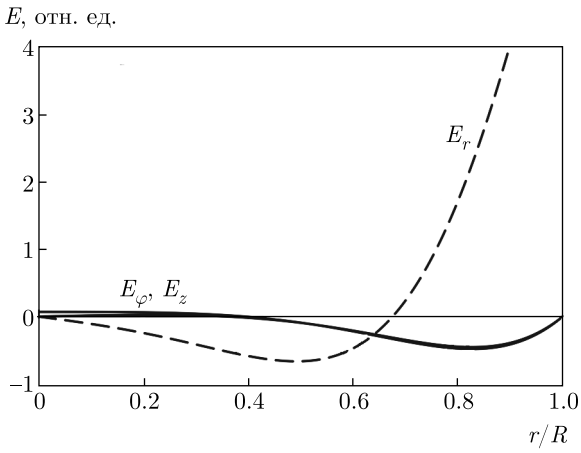

Рис. 7. Компоненты поля квазиповерхностной плазменной волны: E_φ, E_z (сплошные линии, совпадают с графической точностью), E_r (штриховая линия) при $b = 25$, $\lambda_e = 50$, $R_0 = R$

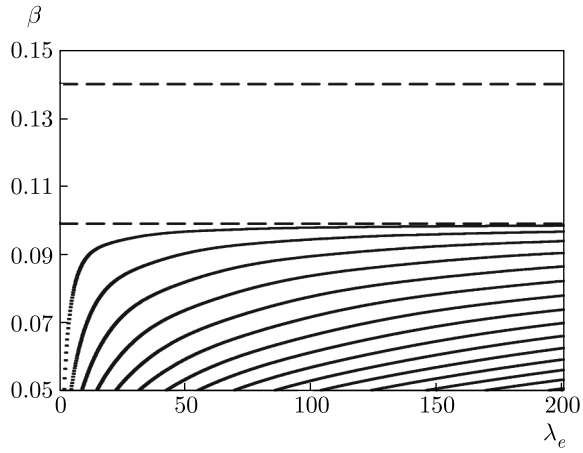

Рис. 8. Фазовые скорости волн плазменного цилиндра радиуса R в проводящем кожухе радиуса $R_0 = 3R$. Моды с номерами $n \geq 2$, $b = 25$, низкочастотный предел

стью совпадают). Значение параметра $b = \omega_{Le}^2/\Omega_e^2$, для которого выполнено построение рисунка, совпадает со значением, использованным для рис. 4. В качестве значения параметра плотности ($\lambda_e = 50$) использовано одно из характерных промежуточных значений по оси абсцисс на рис. 4.

Из формул (59) и (60) в нулевом приближении по параметру связи волн $Q(Z, b)$ несложно получить выражения для компонент напряженности электрического поля косых ленгмюровских волн (спектр (68))

$$\begin{gathered} E_{zn} = AJ_0\left(\mu_{0n} r/R\right), \\ E_{rn} = i\frac{\omega_{Le}\Omega_e}{\omega\sqrt{\Omega_e^2+\omega_{Le}^2}} AJ_1\left(\mu_{0n} r/R\right), \\ E_{\varphi n} \approx 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{71}$$

и волн геликонного типа (спектр (69))

$$\begin{gathered} E_{\varphi n} = AJ_1\left(\mu_{1n} r/R\right), \\ E_{rn} = i\frac{\Omega_e}{\omega\omega_{Le}^2}\frac{\mu_{1n}^2}{R^2} c^2 AJ_1\left(\mu_{1n} r/R\right), \\ E_{zn} \approx 0, \quad n = 2, 3, \ldots \end{gathered} \tag{72}$$

Здесь A — постоянная величина.

13. СЛУЧАЙ ПЛАЗМЕННОГО ЦИЛИНДРА СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Перейдем теперь к рассмотрению более важного случая $R < R_0$. Этот случай, как сейчас будет показано, нетривиально отличается от случая $R = R_0$. В пределе $\omega \to 0$, $k_z \to 0$ (точнее $\omega R/c \ll 1$ и $k_z R \ll 1$) формулы (55а) можно записать в виде

$$E_\varphi = B\left(R_0/r - r/R_0\right), \quad E_z = C\ln\left(R_0/r\right). \tag{73}$$

Подставляя выражения (59) и (73) в граничные условия (48) (при $j_\varphi^0 = j_z^0 = 0$) и исключая постоянные $A_{1,2}$, B и C, получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$U\left(q_1\right)V\left(q_2\right) - U\left(q_2\right)V\left(q_1\right) = 0, \tag{74}$$

где

$$\begin{gathered} U(q) = J_1(q) + qJ_1'(q)\frac{R_0/R - R/R_0}{R_0/R + R/R_0}, \\ V(q) = J_1(q)\left(1 - (1+b)\frac{q^2}{P(q)}\right) \times \\ \times \frac{Z}{Z-b}\ln\left(R_0/R\right) + J_0(q)\frac{q}{P(q)}. \end{gathered} \tag{75}$$

Связь между константами в решении (59) определяется формулой

$$A_2 = -A_1 U\left(q_1\right)/U\left(q_2\right). \tag{76}$$

Безразмерные фазовые скорости $\beta_n\left(\lambda_e\right)$ волн с номерами $n \geq 2$, полученные при численном решении уравнения (74) при $R_0 = 3R$ и $b = 25$, представлены на рис. 8. Параметры для построения выбраны такими же, как и в случае полного заполнения плазмой проводящего цилиндра. Радиус металлического кожуха $R_0 = 3R$ значительно превосходит радиус плазмы R, что близко к случаю плазменного столба со свободной поверхностью. Из рис. 8 видно,

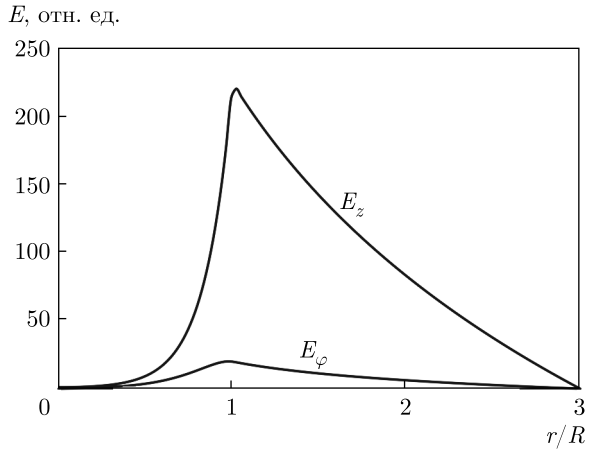

Рис. 9. Компоненты поля поверхностной волны E_φ и E_z при $b = 25$, $\lambda_e = 50$, $R_0 = 3R$

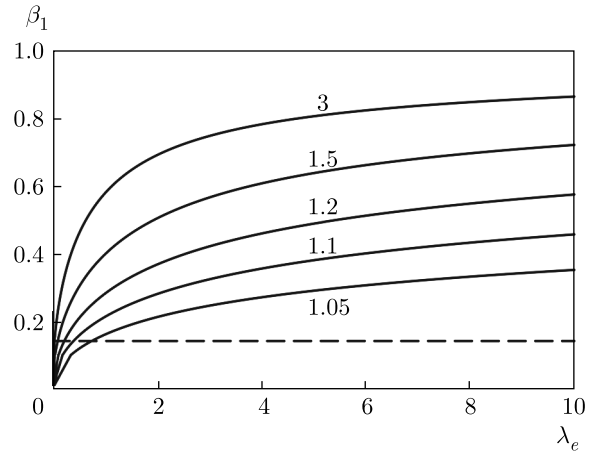

Рис. 10. Фазовые скорости поверхностной моды пламенного цилиндра в проводящем кожухе при $b = 25$, отношения R_0/R указаны рядом с кривыми

во-первых, полное отсутствие сложной структуры, представленной на рис. 4. Связано это с отсутствием геликоноподобных волн. Во-вторых, в диапазоне фазовых скоростей от β_0 до β_{max} вообще нет какой-либо волны. На самом деле такая волна есть, но ее фазовая скорость существенно выше — она принадлежит диапазону от β_{max} до единицы. Речь об этой волне пойдет ниже.

Кривые, представленные на рис. 8, при умеренных значениях параметра λ_e соответствуют обычным косым ленгмюровским волнам E-типа. В частности, сохраняется формула (68), в которую вместо μ_{0n} входят другие собственные числа, зависящие от R/R_0. Поле косых ленгмюровских волн экспоненциально затухает в вакуумную область $r > R$, поэтому изменение собственных чисел незначительно, и условием применимости формулы (68) при $R < R_0$ по-прежнему можно считать неравенство (67). При выполнении противоположного неравенства, как видно из рис. 8, фазовые скорости стремятся к β_0, что позволяет предположить существование следующего спектра (вместо геликона (69)):

$$\beta_n^2 \approx \beta_0^2 \to \omega_{n>1}^2 \approx \approx k_z^2 c^2 \frac{\Omega_e^2}{\Omega_e^2 + 2\omega_{Le}^2 \left(1 + \sqrt{1 + \Omega_e^2/\omega_{Le}^2}\right)}. \quad (77)$$

Существенно непотенциальные волны со спектрами (77) будем называть непотенциальными косыми ленгмюровскими волнами.

Рассмотрим теперь первую (основную) радиальную моду в системе с $R \neq R_0$, фазовая скорость которой $\beta_1(\lambda_e)$ на рис. 8 не показана. Эта мода является настоящей поверхностной волной, что видно из рис. 9, на котором представлены компоненты ее поля E_φ и E_z в области $[0, R_0]$, затухающие в обе стороны от границы плазменного цилиндра. Параметры для построения выбраны соответствующими рис. 7 и 8.

Поверхностная волна оказывается существенно непотенциальной, причем ее фазовая скорость значительно превосходит фазовые скорости всех волн, которые рассматривались нами ранее. Для системы с $R_0 = 3R$ фазовая скорость $\beta_1(\lambda_e)$ представлена на рис. 10 (верхняя кривая); максимальная фазовая скорость $\beta = \beta_{max}$ в системе с $R_0 = R$ обозначена на рис. 10 штриховой прямой. Диапазон изменения параметра плотности λ_e сужен по сравнению с рис. 6 и 8, поскольку поведение при больших значениях λ_e из графика угадывается.

Рисунки 8, 9 построены для конкретного случая $R_0 = 3R$. Естественно, что при уменьшении R_0 должен когда-то получиться результат, близкий (совпадающий при $R_0 = R$) к представленному на рис. 4. Оказывается, что в диапазоне λ_e от нуля до двухсот вплоть до $R_0 = 1.5R$ никакие структуры, присутствующие на рис. 4, не проявляются. Только при меньших R_0 начинает наблюдаться некоторое сходство между рис. 8 и рис. 4. Заметим, что случаи очень больших параметров плотности λ_e мы не рассматривали, поскольку руководствовались в первую очередь потребностями реальных экспериментов [19, 25, 26].

Наиболее сильно радиус кожуха R_0 влияет на фазовую скорость основной поверхностной волны $\beta_1(\lambda_e)$. На рис. 10 представлены скорости $\beta_1(\lambda_e)$ при различных отношениях радиусов кожуха и

плазменного цилиндра R_0/R. Видно, что при уменьшении отношения R_0/R фазовые скорости значительно уменьшаются (линия $\beta_1(\lambda_e)$ в случае $R_0/R = 1$ расположена ниже штриховой прямой). При $R_0/R \to \infty$ во всем диапазоне параметров плотности плазмы λ_e имеем $\beta_1(\lambda_e) \to 1$, т. е. в низкочастотной области у поверхностной волны плазменного цилиндра в безграничном пространстве $\omega = k_z c$ (см. § 3.2, 3.4 в [29]).

Подводя итоги, заключаем, что в плазменном цилиндре во внешнем магнитном поле, находящемся в достаточно большом ($R_0 > 1.5R$) проводящем кожухе, геликоноподобные волны при экспериментально реализуемых плотностях плазмы отсутствуют. Имеются только потенциальные и непотенциальные «косые» ленгмюровские волны E-типа, а также сильно непотенциальная поверхностная волна. Резонансное возбуждение столь непотенциальной волны в ВЧ-разряде вряд ли возможно. Действительно, частоте $\omega = 10^8$ рад/с соответствует длина световой волны порядка 20 м, что больше размера любой экспериментальной установки.

14. ВЛОЖЕНИЕ МОЩНОСТИ В ОГРАНИЧЕННУЮ ПЛАЗМУ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Рассмотрим теперь возбуждение волн плазменного цилиндра внешними источниками. Ограничимся случаями достаточно больших отношений R_0/R. Из проведенного в предыдущем разделе анализа следует, что при этом резонансное возбуждение поверхностной моды плазменного цилиндра невозможно. Возбуждаться могут только высшие радиальные моды $n \geq 2$. При умеренной плотности плазмы (неравенство (67)) фазовые скорости этих мод малы и определяются формулами (68). Следовательно, в ВЧ-разряде при умеренной плотности плазмы могут возбуждаться только потенциальные «косые» ленгмюровские волны E-типа, что мы и рассмотрим.

В силу потенциальности волн проведем в уравнениях (49) формальный предельный переход $c \to \infty$. В результате получим следующую систему:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE_\varphi) - k_z^2 E_\varphi = 0,\\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dE_z}{dr} - k_z^2\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}E_z = k_z\frac{g}{\varepsilon_\perp}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE_\varphi).\end{gathered} \tag{78}$$

При емкостном способе возбуждения плазмы, с которого начнем, $j_\varphi^0 = 0$. Поэтому, как видно из первого уравнения (78) и первых двух граничных условий (48), $E_\varphi = 0$. Тогда ограниченное в нуле решение второго уравнения (78) запишем в виде

$$E_z(r < R) = AJ_0(k_p r), \quad k_p^2 = -k_z^2\varepsilon_\parallel/\varepsilon_\perp, \tag{79}$$

а вне плазменного цилиндра справедливы решения (55), в которых $\chi_0 = k_z$, т. е.

$$E_z(r > R) = CZ_0(k_z r). \tag{80}$$

Подставляя решения (80) и (79) в третье и четвертое граничные условия (48), находим постоянные A, C и далее вычисляем компоненты напряженности электрического поля в плазменном цилиндре:

$$\begin{aligned}E_z(r) &= i\frac{4\pi}{\omega}k_z\frac{Z_0(k_zR)}{D_p(\omega,k_z;\Omega_e)}j_z^0 J_0(k_p r),\\ E_r(r) &= -\frac{4\pi}{\omega}k_p\frac{Z_0(k_zR)}{D_p(\omega,k_z;\Omega_e)}j_z^0 J_1(k_p r),\end{aligned} \tag{81}$$

где

$$\begin{aligned}D_p(\omega,k_z;\Omega_e) = J_0(k_pR)Z_0'(k_zR) +\\ + \varepsilon_\perp\sqrt{-\varepsilon_\parallel/\varepsilon_\perp}\,J_1(k_pR)Z_0(k_zR)\end{aligned} \tag{82}$$

— дисперсионная функция потенциальных волн плазменного цилиндра во внешнем магнитном поле (штрихом обозначено дифференцирование по всему аргументу). Подставляя выражения (81) в формулу (56), можем найти выражение для мощности внешнего источника, выделяемой на единицу длины плазменного цилиндра при емкостном способе возбуждения. Поскольку ток в обмотке в условиях реальных экспериментов не задан, а определяется из закона Ома для полной цепи с согласованным по нагрузке генератором, приведем результаты для эффективного сопротивления плазмы, которое можно ввести по аналогии с плоским случаем (см. выше). Далее, будем рассматривать плазменный цилиндр длиной π/k_z. Тогда полное эффективное сопротивление плазмы при емкостном способе возбуждения есть

$$\begin{aligned}R_C = \frac{2\pi k_z}{\omega}\frac{Z_0^2(k_zR)}{|\varepsilon_\perp|\,|D_p(\omega,k_z;\Omega_e)|^2}\times\\ \times\frac{\varepsilon_\parallel''|\varepsilon_\perp|S_0 + \varepsilon_\perp''|\varepsilon_\parallel|S_1}{R^2},\\ S_{0,1} = \int\limits_0^R |J_{0,1}(k_pr)|^2\,r\,dr.\end{aligned} \tag{83}$$

Резонансные свойства величины (83) определяются, как и положено, нулями дисперсионной функции (82). В отличие от случая безграничной плазмы, случай плазменного цилиндра характеризуется большим числом резонансов. Уравнение

$D_p(\omega, k_z; \Omega_e) = 0$ имеет бесконечное множество корней $\omega_n(k_z)$. Как было показано выше, корни с $n \geq 2$ определяют частоты объемных «косых» ленгмюровских волн, а волна с частотой $\omega_1(k_z)$ является поверхностной волной. Выше было показано, что для описания поверхностной волны потенциальное приближение может быть непригодно. Однако, если эта волна непотенциальная, то в ВЧ-разряде она не возбуждается и может быть исключена из рассмотрения. Если же поверхностная волна возбуждается, то является потенциальной. В этом случае она автоматически учитывается в формуле (83).

Рассмотрим теперь при выполнении неравенства (67) индуктивный способ возбуждения волн в плазменном цилиндре, для чего положим $j_z^0 = 0$, а азимутальный ток j_φ^0 будем считать отличным от нуля. Поскольку для E_φ справедливо первое уравнение (78), в плазменном цилиндре $E_\varphi(r) = AI_1(k_z r)$, а вне плазменного цилиндра справедливо первое решение (55) (при $\chi_0 = k_z$). Тогда, используя первые два граничные условия (48), вычисляем постоянные A и B и для азимутальной составляющей напряженности электрического поля внутри плазменного цилиндра имеем

$$E_\varphi(r) = i\frac{4\pi}{c}\frac{\omega}{c}Rj_\varphi^0 Z_1(k_z R)\, I_1(k_z r), \quad r < R. \tag{84}$$

Подставляя (84) в правую часть второго уравнения системы (78), записываем его следующее общее решение (ограниченное в нуле):

$$E_z(r) = i\frac{4\pi}{c}\frac{\omega}{c}Rj_\varphi^0 Z_1(k_z R)\frac{g}{\varepsilon_\perp - \varepsilon_\parallel} I_0(k_z r) + \\ + AJ_0(k_p r), \quad r < R. \tag{85}$$

Вне плазменного цилиндра $E_z(r)$ определяется второй формулой (55).

Граничные условия для функций $E_z(r)$ следуют из (48) и при выполнении неравенства $\omega^2 \ll k_z^2 c^2$ записываются в виде

$$\{E_z\}_R = 0, \quad \left\{\varepsilon_\perp \frac{dE_z}{dr}\right\}_R = k_z\{g\}_R E_\varphi(R), \tag{86}$$

где учтена непрерывность $E_\varphi(r)$. Подставляя второе выражение (55), выражения (84) и (85) в граничные условия (86) и исключая постоянные A и C, получаем следующее выражение для продольной составляющей напряженности электрического поля в плазменном цилиндре:

$$E_z(r) = i\frac{4\pi}{c}\frac{\omega}{c}Rj_\varphi^0 Z_1(k_z R)\frac{g}{\varepsilon_\perp - \varepsilon_\parallel} \times \\ \times \left(I_0(k_z r) - \frac{D_p(\omega, k_z; 0)}{D_p(\omega, k_z; \Omega_e)} J_0(k_p r)\right), \tag{87}$$

где

$$D_p(\omega, k_z; 0) = I_0(k_z R)\, Z_0'(k_z R) - \\ - \varepsilon_\parallel I_1(k_z R)\, Z_0(k_z R) \tag{88}$$

— дисперсионное уравнение, определяющее частоты рассматриваемого плазменного цилиндра в отсутствие внешнего магнитного поля (см. (82)). Компонента поля $E_r(r)$ вычисляется из (84) и (87) по формуле (46) и при $\omega^2 \ll k_z^2 c^2$ определяется выражением

$$E_r(r) = \frac{4\pi}{c}\frac{\omega}{c}Rj_\varphi^0 Z_1(k_z R)\frac{g}{\varepsilon_\perp - \varepsilon_\parallel} \times \\ \times \left(I_1(k_z r) + \sqrt{-\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}}\frac{D_p(\omega, k_z; 0)}{D_p(\omega, k_z; \Omega_e)} J_1(k_p r)\right). \tag{89}$$

При выводе формулы (89) не делалось никаких ограничений на величину циклотронной частоты Ω_e. Поэтому в (87) и (89) можно осуществить предельный переход $\Omega_e \to 0$. Используя формулы (1), имеем $g/\left(\varepsilon_\perp - \varepsilon_\parallel\right) = (\omega + i\nu)/\Omega_e$. При $\Omega_e \to 0$ функция $J_0(k_p r)$ стремится к $I_0(k_z r)$, а функция $J_1(k_p r)$ переходит в $iI_1(k_z r)$, поэтому выражения (85) и (87) при $\Omega_e \to 0$ содержат неопределенности 0/0. Раскрывая данные неопределенности, можно показать, что $E_{z,r} \propto \Omega_e/\omega \to 0$, а это означает невозможность индуктивного возбуждения в плазме волны E-типа в отсутствие внешнего магнитного поля. Такой же результат получается и в пределе $\Omega_e \to \infty$.

Подставляя (87) и (89) в формулу (56), получаем следующее выражение для эффективного сопротивления плазменного цилиндра при индуктивном способе возбуждения:

$$R_L = \frac{8\pi k_z}{\omega}\left(\frac{\omega}{c}R\right)^2\frac{\omega^2}{c^2} \times \\ \times \frac{\left(\omega^2 + \nu^2\right) Z_1^2(k_z R)}{\Omega_e^2 \left|D_p(\omega, k_z; \Omega_e)\right|^2}\left(\varepsilon_\perp'' G_1 + \varepsilon_\parallel'' G_0\right), \tag{90}$$

где

$$G_0 = \int_0^R \left|D_p(\omega, k_z; \Omega_e)\, I_0(k_z r) - \right. \\ \left. - D_p(\omega, k_z; 0)\, J_0(k_p r)\right|^2 r\, dr, \\ G_1 = \int_0^R \left|D_p(\omega, k_z; \Omega_e)\, I_1(k_z r) + \right. \\ \left. + \sqrt{-\varepsilon_\parallel/\varepsilon_\perp} D_p(\omega, k_z; 0)\, J_1(k_p r)\right|^2 r\, dr. \tag{91}$$

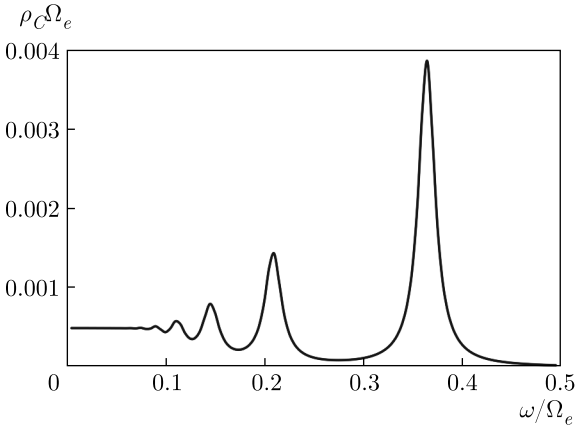

Рис. 11. Эффективное сопротивление плазменного цилиндра при емкостном способе возбуждения

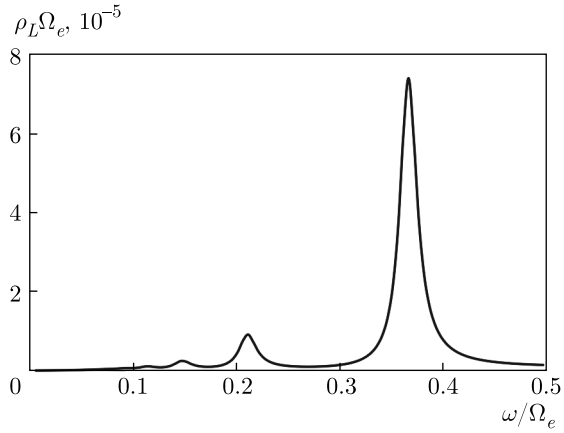

Рис. 12. Эффективное сопротивление плазменного цилиндра при индуктивном способе возбуждения

Формула (90) получена в предположении, что $|\omega + i\nu| \ll \Omega_e$, что позволило в выражении (56) пренебречь под интегралом слагаемыми, пропорциональными $|E_\varphi|^2$ и g''.

Рассмотрим некоторые результаты расчетов по полученным выше формулам. Зададим следующие параметры плазменного цилиндра, характерные для экспериментальных установок [19, 25, 26]: $\omega_{Le} = 5{\cdot}10^9$ рад/с, $\Omega_e = 10^8$ рад/с, $R = 5$ см, $\nu = 10^6$ с$^{-1}$, $k_z = 0.3$ см$^{-1}$ ($L \approx 10$ см), при этом параметр плотности $\lambda_e \approx 0.7$. На рис. 11 представлен результат расчета по формуле (83) зависимости от частоты ω эффективного сопротивления плазмы при емкостном способе возбуждения. Наблюдаются достаточно интенсивные резонансы на объемных волнах (68) с номерами $n = 2, 3, 4$, заметен также резонанс на пятой поперечной моде. Резонансы на более высоких поперечных модах при взятом значении ν не разрешаются. Не наблюдается также резонанс на поверхностной волне. Этот резонанс есть, но он расположен в существенно более высокочастотной области.

На рис. 12 представлены результаты расчета эффективного сопротивления плазмы при индуктивном способе возбуждения разряда. Величина эффективного сопротивления оказывается примерно на два порядка ниже, чем при емкостном способе возбуждения. Эта ситуация соответствует случаю безграничной плазмы на рис. 3, когда индуктивный способ возбуждения при $\lambda_e \approx 1$ оказывался самым неэффективным. При более высокой плотности плазмы, когда $\lambda_e \gg 1$, эффективное сопротивление плазмы при индуктивном способе возбуждения будет доминирующим.

15. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено возбуждение волн в магнитоактивной плазме высокочастотного разряда в условиях $\omega \ll \Omega_e < \omega_{Le}$. В безграничной плазме в зависимости от плотности плазмы (или поперечного волнового числа распространяющейся волны) дисперсионная зависимость и поляризация волны имеют существенно различные характеры. При $\lambda_e \ll 1$ возбуждается потенциальная косая ленгмюровская волна (мода Трайвелписа–Гоулда). В обратном предельном случае возбуждается существенно непотенциальная волна геликонного типа. Мощность, вкладываемая в плазму, как функция параметра плотности λ_e зависит от распределения возбуждающих токов. В случае, когда в плазме возбуждается косая ленгмюровская волна, эффективное удельное сопротивление плазмы (и вкладываемая в плазму мощность) максимальны при емкостных способах возбуждения волны. В обратном предельном случае, когда в плазме возбуждается волна геликонного типа, эффективные удельные сопротивления плазмы при индуктивном и поперечном емкостном (токами, поперек оси системы) способах возбуждения совпадают и превышают эффективное удельное сопротивление при продольном емкостном способе возбуждения. При этом поперечный емкостной способ возбуждения оказывается наиболее эффективным и в области промежуточных значений параметра плотности λ_e. Случай ограниченной плазмы в цилиндрической геометрии имеет ряд особенностей. Так, проводящий цилиндр со сплошным плазменным заполнением помимо набора косых ленгмюровских волн при $\lambda_e \ll 1$ и набора волн геликонного типа

в обратном предельном случае имеет непотенциальную волну, прижатую к границе плазмы (квазиповерхностная плазменная волна). В случае плазменного цилиндра со свободной поверхностью или плазменного цилиндра, находящегося в достаточно большом ($R_0 > 1.5R$) проводящем кожухе, геликоноподобные волны при экспериментально реализуемых плотностях плазмы отсутствуют. Имеются только потенциальные и непотенциальные косые ленгмюровские волны E-типа, а также сильно непотенциальная поверхностная волна. Последняя практически не возбуждается внешними токами, текущими по поверхности цилиндра при реально используемых параметрах системы. При высокой плотности плазмы, когда $\lambda_e \gg 1$, эффективное сопротивление плазмы при индуктивном способе возбуждения оказывается доминирующим. При умеренных и малых значениях λ_e наиболее эффективным является емкостной способ возбуждения волны токами на поверхности плазменного цилиндра.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 19-08-00625.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Shinohara, Adv. Phys. X **3**, 1420424 (2018), DOI: 10.1080/23746149.2017.1420424.
2. S. Isayama, S. Shinohara, and T. Hada, Plasma Fusion Res. **13**, 1101014 (2018), DOI: 10.1585/pfr.13.1101014.
3. F. F. Chen, Plasma Sources Sci. Technol. **24**, 014001 (2015), DOI: 10.1088/0963-0252/24/1/014001.
4. Е. А. Кралькина, УФН **178**, 519 (2008) [E. A. Kral'kina, Phys. Usp. **51**, 493 (2008), DOI: 10.1070/PU2008v051n05ABEH006422].
5. S. Samukawa et al., J. Phys. D: Appl. Phys. **45**, 253001 (2012), DOI: 10.1088/0022-3727/45/25/253001.
6. S. Shinohara et al., IEEE Trans. Plasma Sci. **42**, 1245 (2014).
7. F. F. Chen, Phys. Plasmas **21**, 093511 (2014), DOI: 10.1063/1.4896238.
8. F. F. Chen, IEEE Trans. Plasma Sci. **43**, 195 (2015).
9. S. Shinohara et al., IEEE Trans. Plasma Sci. **46**, 252 (2018).
10. В. Л. Вдовин, Физика плазмы **39**(2), 115 (2013) [V. L. Vdovin, Plasma Phys. Rep. **39**(2), 95 (2013), DOI: 10.1134/S1063780X13020037].
11. C. Lau et al., Nucl. Fusion **58**, 066004 (2018), DOI: 10.1088/1741-4326/aab96d.
12. R. W. Boswell, Phys. Lett. A **33**, 457 (1970), DOI: 10.1016/0375-9601(70)90606-7.
13. R. W. Boswell, Plasma Phys. Control. Fusion **26**, 1147 (1984).
14. R. W. Boswell, Australian J. Phys. **25**, 403 (1972), DOI: 10.1071/PH720403.
15. R. W. Boswell, J. Plasma Phys. **31**, 197 (1984), DOI: 10.1017/S0022377800001550.
16. F. F. Chen, Plasma Phys. Control. Fusion **33**, 339 (1991), DOI: 10.1088/0741-3335/33/4/006.
17. K. P. Shamrai and V. B. Taranov, Plasma Phys. Control. Fusion **36**, 1719 (1994).
18. D. Arnush, Phys. Plasmas **7**, 3042 (2000), DOI: 10.1063/1.874157.
19. E. A. Kralkina et al., AIP Advances **8**, 035217 (2018), DOI: 10.1063/1.5023631.
20. H. Tamura et al., IEEE Trans. Plasma Sci. **46**, 3662 (2018).
21. Д. С. Степанов, А. В. Чеботарев, Э. Я. Школьников, ТВТ **57**, 347 (2019) [D. S. Stepanov, A. V. Chebotarev, and E. Y. Shkol'nikov, High Temp. **57**, 316 (2019), DOI: 10.1134/S0018151X19030155].
22. И. Н. Карташов, М. В. Кузелев, ТВТ **56**, 346 (2018) [I. N. Kartashov and M. V. Kuzelev, High Temp. **56**, 334 (2018), DOI: 10.1134/S0018151X18030100].
23. И. Н. Карташов, М. В. Кузелев, ЖЭТФ **156**, 355 (2019) [I. N. Kartashov and M. V. Kuzelev, JETP **129**, 298 (2019), DOI: 10.1134/S106377611907015X].
24. И. С. Абрамов, Е. Д. Господчиков, А. Г. Шалашов, ЖЭТФ **156**, 528 (2019) [I. S. Abramov, E. D. Gospodchikov, and A. G. Shalashov, JETP **129**, 444 (2019), DOI: 10.1134/S106377611907001X].
25. E. A. Kralkina et al., Plasma Sources Sci. Technol. **26**, 055006 (2017), DOI: 10.1088/1361-6595/aa61e6.
26. E. A. Kralkina et al., Plasma Sources Sci. Technol. **25**, 015016 (2016), DOI: 10.1088/0963-0252/25/1/015016.

27. В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, *Волны в магнитоактивной плазме*, URSS, Москва (2013).

28. А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы*, Высшая школа, Москва (1988) [A. F. Alexandrov, L. S. Bogdankevich, and A. A. Rukhadze, *Principles of Plasma Electrodynamics*, Springer Verlag, Heidelberg (1984)].

29. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, П. С. Стрелков, *Плазменная релятивистская СВЧ-электроника*, Ленанд, Москва (2018).

30. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, *Методы теории волн в средах с дисперсией*, Физматлит, Москва (2007) [M. V. Kuzelev and A. A. Rukhadze, *Methods of Wave Theory in Dispersive Media*, World Sci. (2010)].

31. А. Ф. Александров, М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, Радиотехн. и электрон. **55**, 826 (2010) [A. F. Aleksandrov, M. V. Kuzelev, A. A. Rukhadze, Comm. Tech. Electronics **55**, 773 (2010)].

32. K. P. Shamrai and V. B. Taranov, Plasma Sources Sci. Technol. **5**, 474 (1996).