

ХАОТИЧЕСКОЕ БЛУЖДЕНИЕ ХОЛОДНЫХ АТОМОВ В ДВУМЕРНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ

*С. В. Пранц**

*Тихоокеанский океанологический институт
Дальневосточного отделения Российской академии наук
690041, Владивосток, Россия*

Поступила в редакцию 5 марта 2020 г.,
после переработки 24 марта 2020 г.
Принята к публикации 26 марта 2020 г.

Исследуется когерентная динамика холодных атомов в двумерной оптической решетке с интерферирующими лазерными пучками с учетом связи внутренних и внешних степеней свободы атома. В полуклассическом приближении получена система дифференциальных уравнений для связанных степеней свободы, которая в зависимости от величины атомно-полевой расстройки резонанса имеет регулярные и хаотические решения. Гамильтонов хаос проявляется в виде хаотических осцилляций Раби и хаотического блуждания холодных атомов в решетке при сравнительно малых значениях расстройки резонанса. Показано, что детерминированный хаос возникает в результате скачков величины электрического дипольного момента атома при приближении к узлам двумерной стоячей волны. Это, в свою очередь, вызывает псевдослучайное поведение импульса атомов и, как следствие, их хаотическое блуждание в абсолютно жесткой двумерной оптической решетке без какой-либо внешней модуляции ее параметров. В численных экспериментах для миллиона атомов показано, что их распределение по решетке существенно различается для разных значений расстройки резонанса. Этот факт можно использовать для обнаружения эффекта хаотического блуждания холодных атомов в реальном эксперименте абсорбционным методом изображения.

DOI: 10.31857/S0044451020090047

1. ВВЕДЕНИЕ

Оптические решетки (ОР) создаются с помощью когерентных лазерных пучков, распространяющихся навстречу друг другу. Их интерференция создает оптический потенциал, который можно использовать для манипуляции холодными атомами, загружаемыми в решетку из магнитооптической ловушки. Атомы в стоячей световой волне испытывают действие светоиндуцированной силы и концентрируются вблизи узлов или пучностей световой волны в зависимости от знака разности частоты оптического перехода ω_a и лазерной частоты ω_f [1–3]. При «голубой» расстройке резонанса ($\omega_f - \omega_a > 0$) атомы стремятся к узлам, а при «красной» ($\omega_f - \omega_a < 0$) — к пучностям [4]. Достаточно хорошо охлажденные атомы можно аккумулировать в ямах ОР субмикрометрового размера [5]. Экспериментально реализо-

ваны ОР различной размерности и геометрии [6–9] путем настройки таких параметров, как число лазерных пучков, их относительные углы распространения и фазы, частоты и интенсивности. Плененные в ОР атомы являются хорошо изолированными и контролируемыми квантовыми объектами, удобными для изучения, среди прочего, квантового хаоса и квантово-классического соответствия (см., например, эксперименты [10–12] и теоретические работы [13, 14]).

Большинство экспериментальных и теоретических работ в этой области выполнено для ОР, далеко отстроенных от резонанса, что подавляет спонтанное излучение и упрощает расчеты и их интерпретацию. В то же время это исключает возможность ряда интересных динамических эффектов, возникающих в результате взаимодействия внутренних и внешних степеней свободы атома. В одномерных ОР такая связь приводит к возникновению хаотических осцилляций Раби [15, 16], хаотического рассеяния атомов, динамических фракталов, полетов Леви

* E-mail: prants@poi.dvo.ru

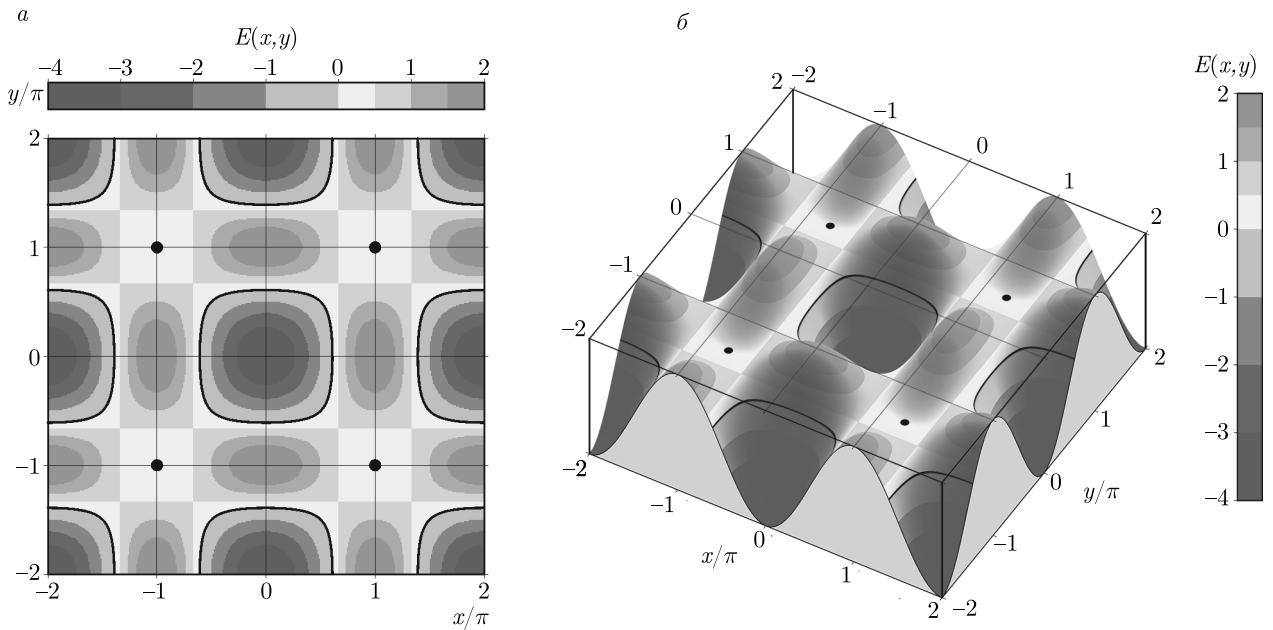


Рис. 1. (В цвете онлайн) *а*) Контуры напряженности электрического поля $E(x, y)$ в двумерной ОР с интерферирующими лазерными пучками; $E(x, y) = 0$ в узловых точках и на черных замкнутых узловых кривых. *б*) Трехмерный вид $E(x, y)$. Все величины приведены в безразмерных единицах

и аномальной диффузии [17, 18]. Детальные теории гамильтонова и диссипативного хаотического транспорта холодных атомов в одномерных ОР изложены в работах [19, 20]. В работе [21] предложено использовать эти эффекты для создания пространственных структур высокого разрешения в оптической нанолитографии, а в работе [22] — для создания светоиндуцированного атомного лифта.

Что касается двумерных ОР, то когерентная атомная динамика исследовалась теоретически и численно в работах [23–26], однако только в режиме больших расстройек резонанса, когда можно адиабатически исключить возбужденный атомный уровень и, стало быть, исключить из рассмотрения внутреннюю динамику атомов. В настоящей работе мы теоретически и численно исследуем когерентную динамику холодных атомов в почти резонансной двумерной ОР с интерферирующими лазерными пучками, находим различные режимы трансляционного движения атомов и их зависимость от внутренних степеней свободы и предсказываем эффект хаотического блуждания холодных атомов по решетке при полностью детерминированных условиях.

2. МОДЕЛЬ

Рассмотрим двумерную ОР, созданную двумя ортогональными плоскими волнами с одинаковы-

ми волновыми векторами и поляризациями, распространяющимися вдоль осей x и y . Запишем напряженность электрического поля в общем виде:

$$\mathcal{E}(x, y) = \mathcal{E}_0[\cos(k_f x) + \cos(k_f y) + 2\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \cos \phi \cos(k_f x) \cos(k_f y)], \quad (1)$$

где $\mathbf{e}_{1,2}$ — векторы поляризации. Расположение узлов и пучностей двумерной стоячей волны зависит от фазы пучков. Если $\phi = \pi/2$, то интерференция отсутствует. Эксперименты с атомами рубидия [9] показали, что фаза является важным условием для наблюдения каналирования и отклонения атомов в двумерной ОР.

В этой работе мы рассмотрим модель с интерферирующими лазерными пучками с фазой $\phi = 0$. На рис. 1 показаны контуры напряженности электрического поля $E(x, y) \equiv -(\cos x + \cos y + 2 \cos x \cos y)$ и ее трехмерное представление. В каждой единичной ячейке находятся 4 узловые точки и замкнутая узловая линия, где $E(x, y) = 0$. Минимальное значение $E(x, y) = -4$ имеем в точке $x = y = 0$, а максимальные значения $E(x, y) = 2$ — в точках $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 0)$.

В полуклассическом приближении внутренняя динамика атома трактуется квантовомеханически, а трансляционное движение рассматривается в рамках классической механики. Полуклассический гамильтониан двухуровневого атома в двумерной ОР

запишем в системе координат, вращающейся с лазерной частотой ω_f :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_a}(P_x^2 + P_y^2) + \frac{1}{2}\hbar(\omega_a - \omega_f)\hat{\sigma}_z - \hbar\Omega(\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+) \times [\cos(k_f X) + \cos(k_f Y) + 2\cos(k_f X)\cos(k_f Y)], \quad (2)$$

где $\hat{\sigma}_{\pm, z}$ — операторы Паули для внутренних степеней свободы, X, Y и P_x, P_y — классические координаты и импульсы атома, $\Omega = d\mathcal{E}_0/\hbar$ — максимальная частота Раби, d — индуцированный электрический дипольный момент атома.

Вся интересующая нас физика содержится в динамике одиночного атома. Большое число невзаимодействующих атомов просто увеличивает сигнал. Пренебрегая релаксацией и рассматривая только когерентную эволюцию, опишем атомную динамику с квантованными внутренними степенями свободы и с классической трансляционной степенью свободы системой уравнений Гамильтона – Блоха:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega_r p_x, & \dot{y} &= \omega_r p_y, \\ \dot{p}_x &= -u(\sin x + 2\cos x \cos y), \\ \dot{p}_y &= -u(\sin y + 2\cos x \sin y), & \dot{u} &= \Delta v, \\ \dot{v} &= -\Delta u + 2z(\cos x + \cos y + 2\cos x \cos y), \\ \dot{z} &= -2v(\cos x + \cos y + 2\cos x \cos y), \end{aligned} \quad (3)$$

где $x \equiv k_f X, y \equiv k_f Y, p_x \equiv P_x/\hbar k_f, p_y \equiv P_y/\hbar k_f$, u и v — синхронизированная и квадратурная компоненты электрического дипольного момента, z — инверсия населенности. Точка означает дифференцирование по безразмерному времени $\tau \equiv \Omega t$. Система уравнений (3) имеет два управляющих параметра,

$$\omega_r \equiv \hbar k_f^2/m_a \Omega, \quad \Delta \equiv (\omega_f - \omega_a)/\Omega, \quad (4)$$

нормированную частоту отдачи ω_r , характеризующую энергию отдачи атома при стимулированном излучении или поглощении фотонов, и нормированную расстройку резонанса Δ . У этой системы уравнений имеются два интеграла движения: длина вектора Блоха

$$u^2 + v^2 + z^2 = 1 \quad (5)$$

и полная энергия

$$\begin{aligned} H \equiv \frac{\omega_r}{2}(p_x^2 + p_y^2) - u(\cos x + \cos y + 2\cos x \cos y) - \\ - \frac{\Delta}{2}z = K + (I + W), \end{aligned} \quad (6)$$

которая является суммой атомной кинетической энергии K , оптического потенциала $I \equiv u(\tau)E(x, y)$ и внутренней энергии $W \equiv (\Delta/2)z(\tau)$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Регулярный режим движения атома

Тип движения атома в решетке зависит от начальных условий и от значений управляющих параметров. Качественно его можно описать, анализируя полную энергию атома (6). Интерферирующие лазерные пучки создают двумерный оптический потенциал $I(x, y, \tau)$, в котором находится атом. Очевидно, что атом пленен в потенциальной яме, если максимальное значение его кинетической энергии K не достаточно для преодоления потенциального барьера. Атом движется баллистически, если его кинетическая энергия всегда больше величины $I + W$. При других соотношениях слагаемых интеграла движения (6) атом движется сложным образом, перемежая осцилляции в ямах оптического потенциала с баллистическими полетами.

Итак, атомы захватываются в ямы оптического потенциала при выполнении условия

$$K(x, y, \tau) < |I(x, y, \tau) + W(x, y, \tau)|.$$

Иначе говоря, атомы осциллируют в потенциальных ямах, если $H < 0$. При выполнении условия

$$K(x, y, \tau) > |I(x, y, \tau) + W(x, y, \tau)|$$

атомы совершают баллистический полет. Максимальное значение потенциала $I(x, y, \tau)$ равно 4, поскольку $|u(x, y, \tau)| \leq 1$ и $E(x, y) \leq 4$. Когда величина u приближается к своему максимальному значению, равному по модулю единице, инверсия населенности z стремится к нулю, что следует из закона сохранения длины вектора Блоха (5). Отсюда получаем условие для баллистического движения атомов: $H > 4$. Таким образом, движение атомов в решетке нетривиально при условии $0 < H < 4$.

Тип движения атома существенно зависит от значения расстройки резонанса. Из пятого уравнения системы (3) следует, что $u = u_0 = \text{const}$ при точном резонансе ($\Delta = 0$), и, таким образом, движение атома не зависит от эволюции внутренних степеней свободы. При начальном условии $u_0 = 0$, принятом в этой работе, и при точном резонансе оптический потенциал $I(x, y, \tau)$ и внутренняя энергия $W(x, y, \tau)$ равны нулю. Так что у атома имеется только постоянная кинетическая энергия, и он летит сквозь ОР с постоянной скоростью. Поведение других компонент вектора Блоха, v и z , зависит от положения атома в потенциале. Несмотря на нулевой оптический потенциал при $\Delta = 0$, пространственное изменение светового поля модулирует осцилляции Раби.

3.2. Хаотическое блуждание атома

Принимая во внимание два интеграла движения, мы можем свести систему уравнений (3) к эффективной гамильтоновой автономной динамической системе с тремя степенями свободы в шести-мерном фазовом пространстве. Движение в многомерном фазовом пространстве характеризуется набором показателей Ляпунова. Положительное значение максимального показателя Ляпунова λ (при заданных значениях управляющих параметров и начальных условий) означает хаотическое движение. В теории максимальный показатель Ляпунова рассчитывается как предел в бесконечном времени. На практике его вычисление выполняется до момента времени, когда λ достигает некоторого почти постоянного значения, которое называется показателем Ляпунова для конечного времени.

Максимальный показатель Ляпунова характеризует среднюю скорость расхождения изначально близких траекторий в фазовом пространстве:

$$\lambda = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lambda(\tau), \quad \lambda(\tau) = \lim_{\delta(0) \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \ln \frac{\delta(\tau)}{\delta(0)}, \quad (7)$$

где $\delta(0)$ и $\delta(\tau)$ — расстояния между двумя траекториями в моменты времени $\tau = 0$ и τ . Показатель Ляпунова для конечного времени рассчитывается согласно работе [27] в зависимости от значений расстройки Δ при фиксированном значении частоты отдачи $\omega_r = 10^{-3}$. Результат приведен на рис. 2. Положительные значения λ находятся в сравнительно узком диапазоне значений расстройки по обе стороны от нуля. Следовательно, можно ожидать хаотическое движение как при голубой расстройке $\Delta > 0$, так и при красной $\Delta < 0$, но при их сравнительно малых значениях по абсолютной величине.

Из анализа полной энергии атома в предыдущем разделе следует, что сложное движение атомов возможно при условии $0 < H < 4$. Хаотическое движение возникает при таких значениях расстройки, при которых $\lambda > 0$ (см. рис. 2). Для численного моделирования примем $\Delta = 0.191$, для которого $\lambda = 0.0382$, и зафиксируем следующие начальные условия: $x(0) = y(0) = 0$, $p_x(0) = 8$, $p_y(0) = 10$, $u_0 = v_0 = 0$, $z_0 = -1$, означающие, что атом помещен в начало координат в основном состоянии с определенным импульсом и $H \approx 0.18$. Его траектория показана на рис. 3а. Такое движение можно назвать хаотическим блужданием, потому что при $\lambda > 0$ и направление, и скорость движения атома меняются псевдослучайным образом в смысле экспоненци-

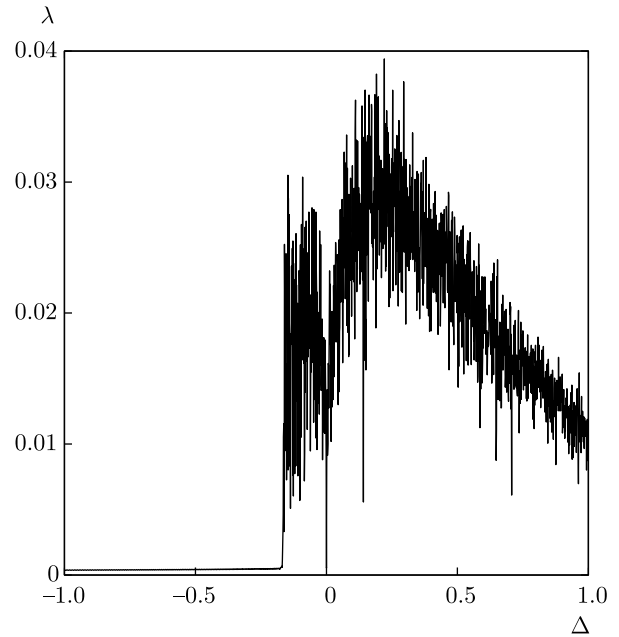


Рис. 2. Зависимость максимального показателя Ляпунова от нормированной частоты расстройки Δ при фиксированном значении нормированной частоты отдачи $\omega_r = 10^{-3}$

альной чувствительности к малым вариациям начальных условий и (или) управляющих параметров. Осцилляции атома в ямах оптического потенциала чередуются с баллистическими полетами. Для сравнения на рис. 3б показаны регулярные осцилляции атома в первой яме оптического потенциала при тех же условиях, что и на рис. 3а, но при $\Delta = -0.5$, для которого $\lambda = 0$ (см. рис. 2).

Светоиндуцированная сила (третье и четвертое уравнения системы (3)) меняет свое значение по мере движения атома в ОР. Хаотические осцилляции импульса атома $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ для $\Delta = 0.191$ на рис. 4а свидетельствуют о блуждании атома по решетке. Наиболее значительные изменения импульса происходят при приближении атома к узловым линиям или узловым точкам стоячей волны (см. рис. 1), где величина напряженности электрического поля E равна нулю. Поведение атомного импульса в регулярной моде движения при $\Delta = -0.5$ ($\lambda = 0$) кардинально отличается (рис. 4б).

Нерегулярные осцилляции атомного импульса в хаотической моде движения вызваны скачкообразным поведением компоненты вектора Блоха u , а следовательно, и светоиндуцированной силы при приближении атома к узлам стоячей волны. На рис. 5 крестиками показаны моменты времени, когда атом попадает в малую окрестность узла. Как правило, в эти моменты времени происходят скачкообразные

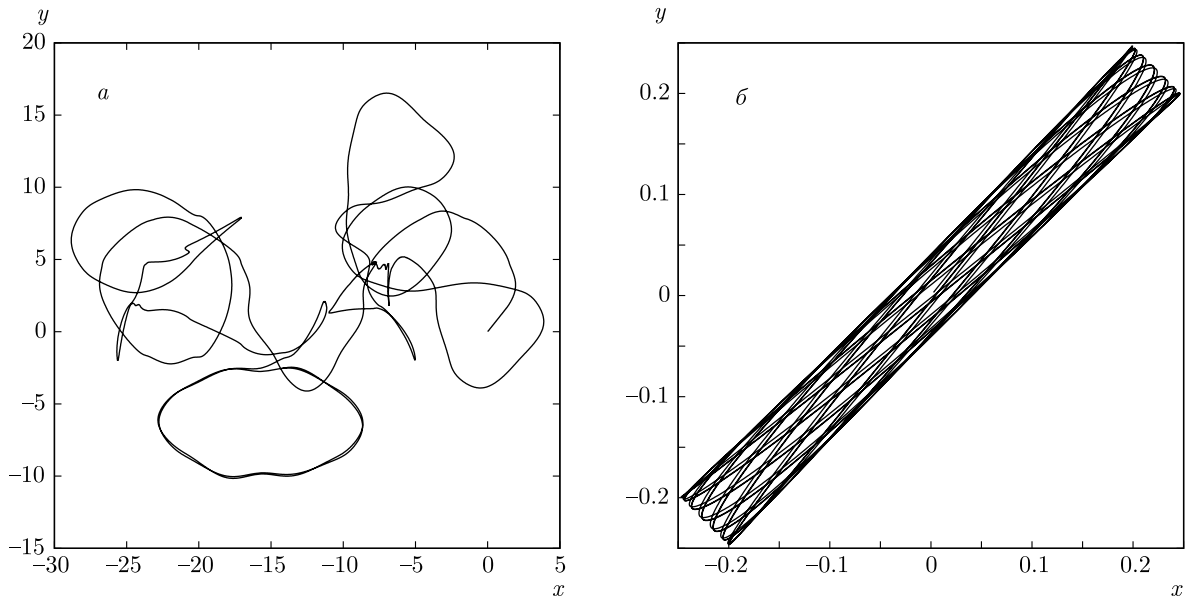


Рис. 3. *a)* Хаотическое блуждание холодного атома в двумерной ОР при фиксированных значениях $\Delta = 0.191$ и $\omega_r = 10^{-3}$. *б)* Регулярные колебания атома в первой яме оптического потенциала при тех же условиях, что и для случая *a*, но для расстройки $\Delta = -0.5$, при которой максимальный показатель Ляпунова равен нулю. Начало обеих траекторий находится в точке $x(0) = y(0) = 0$

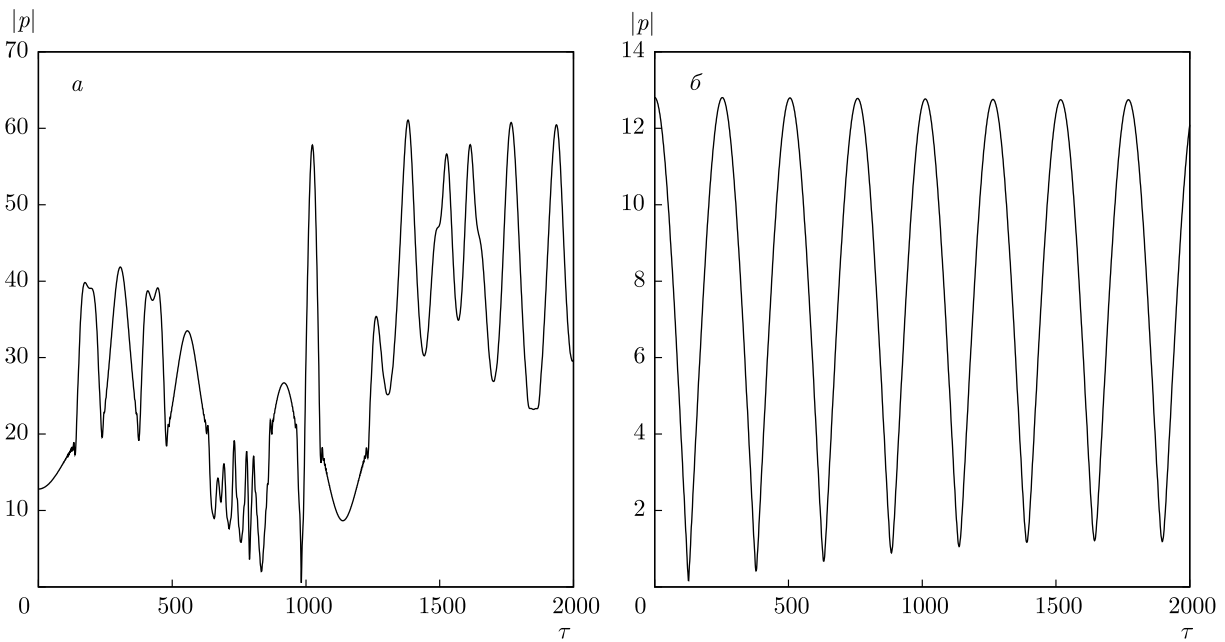


Рис. 4. *a)* Временная эволюция абсолютной величины импульса хаотически движущегося атома с траекторией на рис. 3*a* при $\Delta = 0.191$. *б)* То же в регулярной моде движения атома с траекторией на рис. 3*б* при $\Delta = -0.5$. В обоих случаях $\omega_r = 10^{-3}$

Таблица. Моменты времени τ_j , когда атом находится вблизи узлов двумерной стоячей световой волны (см. рис. 1а), и разности значений компоненты вектора Блоха Δu_j , вычисленные в моменты времени $\tau_j - 5$ и $\tau_j + 5$

τ_j	142.8	232.0	379.4	473.1	638.5	671.1	689.0	730.4	780.1	798.7	865.6	970.2	994.6	1052.4	1237.1	1842.1
$ \delta u_j $	0.54	0.41	0.95	0.69	0.1	1.1	1.76	1.42	1.47	0.37	0.67	0.04	0.44	1.07	0.37	0.1

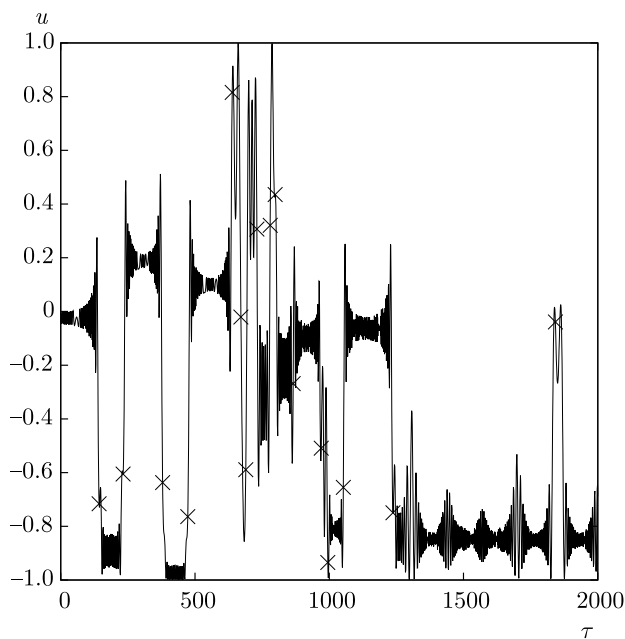


Рис. 5. Временная эволюция компоненты электрического дипольного момента атома u с траекторией на рис. 3а при $\Delta = 0.191$ и $\omega_r = 10^{-3}$. Крестики показывают моменты времени, когда атом находится вблизи узлов двумерной стоячей световой волны

изменения u на достаточно большие величины, допускаемые законом сохранения длины вектора Блоха. Из закона сохранения энергии (6) следует, что быстрые изменения величины u приводят к соответствующим изменениям величины оптического потенциала $I \equiv u(\tau)E(x, y)$, что, в свою очередь, приводит к изменениям кинетической энергии атома K . Отметим, что последний член в интеграле движения (6) — внутренняя энергия $W \equiv (\Delta/2)z(\tau)$ — сравнительно мал при малых значениях расстройки.

Детальный расчет показывает, что большинство скачков u происходит, когда атом приближается к узлам стоячей волны. В таблице указаны моменты времени τ_j , когда атом попадает в малую окрестность (радиусом $\epsilon = 0.01$ в безразмерных единицах) узловой линии или узловой точки, показанных на рис. 1а. В таблице также приведены абсолютные значения $|\delta u_j|$ этих скачков, вычисленные как разности значений u в моменты безразмерного времени

$\tau_j - 5$ и $\tau_j + 5$. Этот временной интервал достаточно мал и содержит только два цикла Раби. Максимальный размах осцилляций u в течение цикла Раби от -1 до 1 возможен только при точном резонансе. В регулярной моде движения при значениях расстройки около $\Delta = 0.2$ величина u изменяется в диапазоне $|\delta u| < 0.2$. Следовательно, скачки величиной $|\delta u_j| > 0.2$ происходят вблизи узловых линий и точек. Отметим, что амплитуда скачка является псевдослучайной величиной и может быть малой (см. таблицу).

Такое псевдослучайное поведение u в хаотической моде движения можно объяснить следующим образом. Так как u является синхронизированной (с электрическим полем E) компонентой индуцированного электрического дипольного момента, ее величина стремится к нулю, когда атом приближается к узлу, где $E = 0$. На рис. 5 видно, что амплитуда скачков u варьируется от почти максимальных значений до сравнительно малых. Большинство скачков случается при пересечении узловых линий. В этом случае график проходит через нули функции u . Иногда атом пролетает вблизи узла с $E = 0$, но не пересекает его. В этом случае u не обязательно достигает нуля (см. скачки вблизи $\tau = 700$ на рис. 5). В любом случае фундаментальной причиной хаотического блуждания атома в абсолютно детерминированной двумерной ОР является скачкообразное поведение компоненты вектора Блоха u вблизи узлов стоячей световой волны. Таким образом, взаимодействие внутренних и внешних степеней свободы атома при определенных условиях порождает хаос как в трансляционном движении атомов, так и в осцилляциях Раби.

4. ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ НАБЛЮДЕНИИ ЭФФЕКТА ХАОТИЧЕСКОГО БЛУЖДЕНИЯ АТОМОВ

Во всех численных экспериментах в настоящей работе использовалось безразмерное значение частоты отдачи атома $\omega_r = 10^{-3}$. Частота отдачи варьируется для разных атомов в широком диапазоне частот $\nu_r = 1\text{--}300$ кГц [28]. Принимая типичные

экспериментальные значения частоты Раби в диапазоне $\Omega/2\pi \approx 10^6-10^8$ Гц, получим диапазон возможных безразмерных значений частоты отдачи $\omega_r = 10^{-5}-10^{-1}$.

Мы пренебрегли спонтанным излучением во всех расчетах. Хаотическое поведение атомов начинает проявляться на временах $\tau \sim 10^2$, что соответствует $t \sim 10^{-6}-10^{-4}$ с при $\Omega \sim 10^6-10^8$ рад·с⁻¹. Атомы с долгоживущими оптическими переходами [29], например, атом Са с $T_{sp} = 4.6 \cdot 10^{-3}$ с (интеркомбинационный переход $4^1S_0-4^3P_1$, $\nu_r = 11.5$ кГц, $\omega_r = 10^{-3}$ при $\Omega/2\pi = 10^8$ Гц), атом Mg со временем спонтанного излучения $T_{sp} = 0.4 \cdot 10^{-3}$ с (переход $2^1S_0-2^3P_1$), метастабильные атомы He и Ne [28, 29], представляются подходящими кандидатами для наблюдения эффекта хаотического блуждания в оптических решетках, не замаскированного случайными флуктуациями из-за спонтанного излучения.

Что касается атомов с обычными значениями времени спонтанного излучения $T_{sp} \sim 10^{-8}-10^{-7}$ с, то в режиме хаотического блуждания скачкообразное поведение компоненты вектора Блоха u на узлах стоячей волны дополняется скачками этой величины до нулевого значения в случайные моменты времени из-за актов спонтанного излучения, т. е. акты спонтанного излучения прерывают когерентную эволюцию атома в случайные моменты времени. После излучения спонтанного фотона атом переходит в основное состояние с компонентами вектора Блоха $u_0 = v_0 = 0$, $z_0 = -1$, а его импульс скачкообразно меняется на величину в диапазоне $-1 \leq \delta p \leq 1$. Такое стохастическое поведение атома накладывается на его хаотическое блуждание, рассмотренное в данной работе. Проблема заключается в том, как обнаружить этот эффект на фоне неизбежных квантовых флуктуаций.

Для обнаружения проявлений детерминированного хаоса в реальном эксперименте предлагается провести две серии экспериментов с достаточно большим числом атомов порядка $N = 10^6$ для двух значений расстройки резонанса — для такого значения Δ , при котором максимальный показатель Ляпунова λ (см. рис. 2) равен нулю и теория предсказывает отсутствие хаотического блуждания атомов, и для немного отличающегося значения Δ , при котором $\lambda > 0$ и, следовательно, этот эффект должен быть. Фиксируя распределение атомов по решетке, можно ожидать, что во втором случае атомы распределяются по значительно большей площади, чем в первом, так как к стохастической дисперсии атомов, обусловленной случайными квантовыми флук-

туациями, добавится хаотическая дисперсия, обусловленная скачкообразным поведением u на узлах стоячей волны.

Загрузим в двумерную ОР облако из $N = 10^6$ невзаимодействующих атомов с гауссовым распределением по координатам и импульсам:

$$\begin{aligned} \rho(x, p_x) &= \frac{1}{2\pi\sigma(x)\sigma(p_x)} \exp\left[-\frac{|x|^2}{2\sigma_x^2} - \frac{|p_x|^2}{2\sigma(p_x)^2}\right], \\ \rho(y, p_y) &= \frac{1}{2\pi\sigma(y)\sigma(p_y)} \exp\left[-\frac{|y|^2}{2\sigma_y^2} - \frac{|p_y|^2}{2\sigma(p_y)^2}\right], \end{aligned} \quad (8)$$

где $\sigma(x, y) = \sigma(p_x, p_y) = 2$, $u_0 = v_0 = 0$, $z_0 = -1$, $\omega_r = 10^{-3}$.

На рис. 6а показано распределение атомов по решетке в регулярном режиме движения в момент времени $\tau = 10^3$ для значения расстройки резонанса $\Delta = -0.5$, для которой максимальный показатель Ляпунова λ равен нулю (см. рис. 2). В этом случае к указанному моменту времени атомы заселяют в основном ближайшие к центру ячейки ОР. К тому же моменту времени в хаотическом режиме движения для $\Delta = 0.191$ ($\lambda = 0.0382$) атомы заселяют значительно большее число удаленных ячеек ОР (рис. 6б). На рис. 7 для тех же условий показаны распределения атомов в случае точного оптического резонанса ($\Delta = 0$) и для слабого хаоса ($\Delta = 1$, $\lambda = 0.09$). Как следует из системы уравнений (3), в случае точного резонанса при $u_0 = 0$ оптический потенциал исчезает и каждый атом сохраняет свой начальный импульс. Из этих численных экспериментов следует, что распределение атомов по решетке существенно зависит от величины расстройки резонанса. И этот факт можно использовать при проведении реальных экспериментов.

В реальном эксперименте расплывание атомного облака с когерентной эволюцией сопровождается расплыванием, обусловленным квантовыми флуктуациями. Однако вклад квантовых флуктуаций примерно одинаков в экспериментах для незначительно различающихся значений расстройки резонанса. Следовательно, обнаруженные различия в распределениях атомов по решетке в режимах регулярного и хаотического движений можно считать проявлением детерминированного хаоса в реальном эксперименте.

Для регистрации распределения атомов по решетке можно использовать различные методы, в частности абсорбционный метод изображения атомов (absorption imaging [30, 31]), дающий информацию о числе и пространственных параметрах атомного облака. В этом методе после выключения ОР

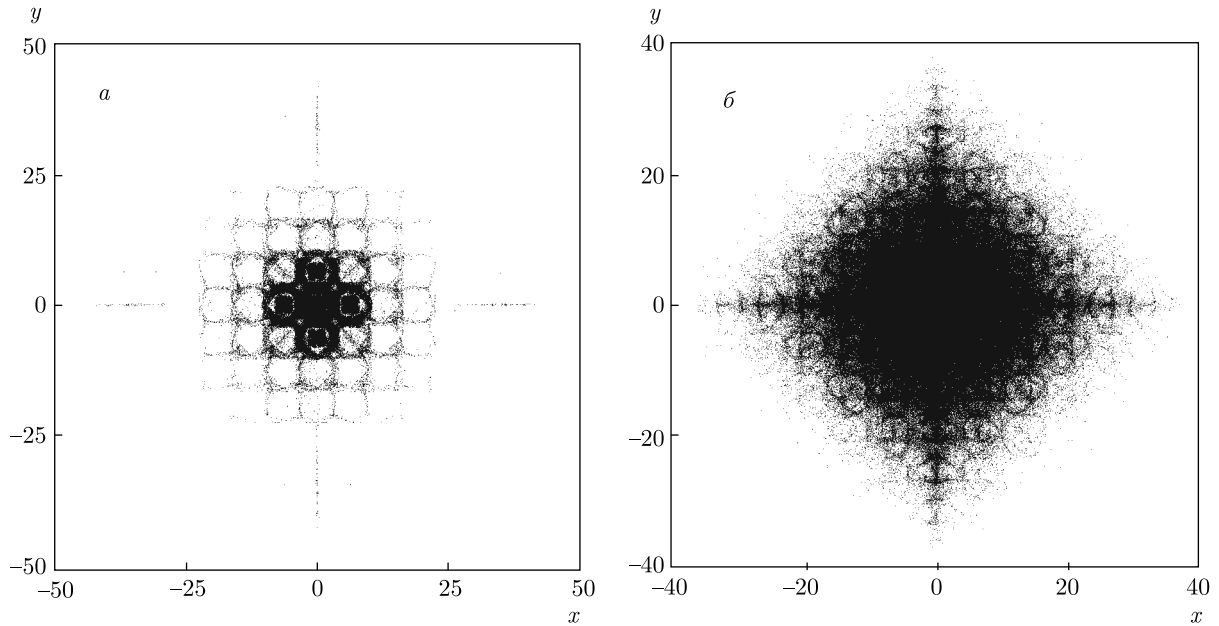


Рис. 6. Распределения $N = 10^6$ атомов на плоскости xy в момент времени $\tau = 10^3$: a — в режиме регулярного движения ($\Delta = -0.5$) и b — в режиме хаотического блуждания ($\Delta = 0.191$). В обоих случаях $\omega_r = 10^{-3}$. Координаты и импульсы атомов в начальный момент времени распределены по Гауссу

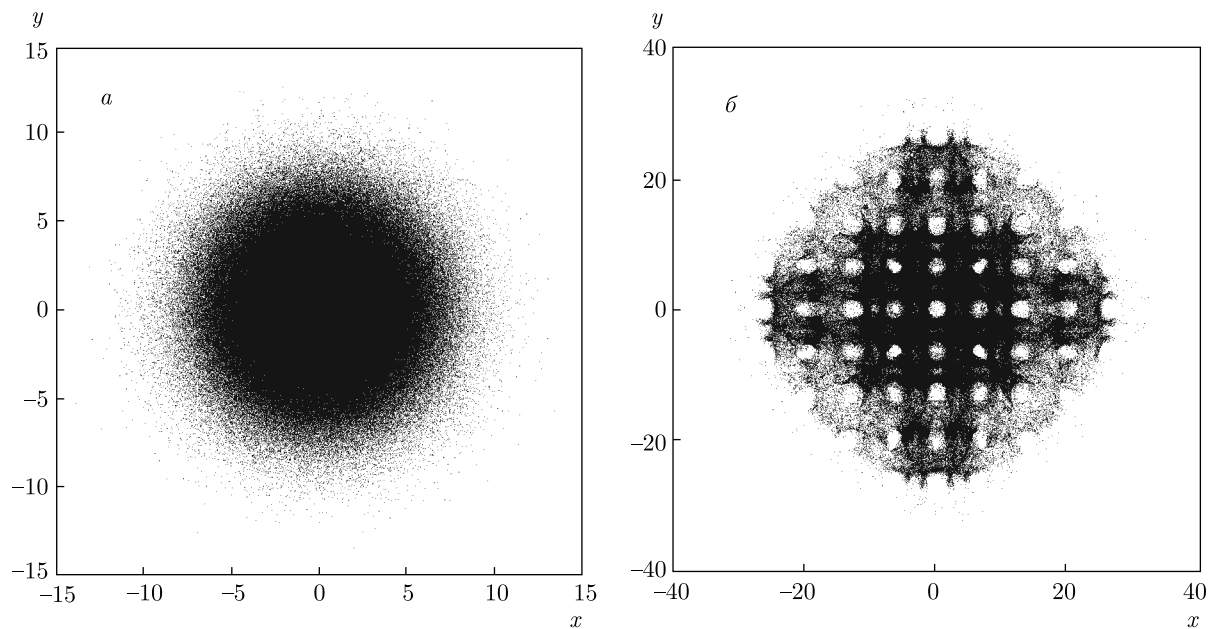


Рис. 7. То же, что на рис. 6: a — в режиме регулярного баллистического движения ($\Delta = 0, \lambda = 0$) и b — в режиме слабого хаоса ($\Delta = 1, \lambda = 0.09$). В обоих случаях $\omega_r = 10^{-3}$. Координаты и импульсы атомов в начальный момент времени распределены по Гауссу

атомное облако в ловушке облучается колимированным лазерным пучком с частотой, близкой к частоте рабочего атомного перехода. «Тень», отбрасываемая облаком в результате поглощения лазерного света

атомами, фиксируется CCD-камерой. Сканируя облако через оптический резонанс, из серии изображений можно рассчитать оптическую плотность для каждого пикселя и число атомов [30, 31].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теоретически и численно изучалась простая модель с двухуровневыми холодными атомами в двумерной оптической решетке, созданной интерферирующими лазерными пучками. Существенным моментом является учет взаимодействия электронных и трансляционных степеней свободы атома. В полуклассическом приближении получена система уравнений движения для компонент вектора Блоха, координат и импульса одиночного атома, имеющая три степени свободы, два интеграла движения и два управляющих параметра — расстройку резонанса Δ и частоту отдачи ω_r . С помощью максимального показателя Ляпунова был найден диапазон значений Δ , для которого поведение атома является хаотическим. Детерминированный гамильтонов хаос возникает при сравнительно малых значениях расстройки Δ и проявляется как во внутренних, так и во внешних степенях свободы атома в виде хаотических осцилляций Раби и хаотического блуждания атома по решетке.

Первопричиной возникновения хаоса является скачкообразное поведение синхронизированной компоненты электрического дипольного момента атома при приближении его к узлам стоячей световой волны. Такое поведение приводит к псевдослучайным изменениям атомного импульса и, в конечном счете, к хаотическому блужданию атомов в абсолютно жесткой ОР. Регулируя расстройку резонанса, можно изменять режим движения атома от регулярного к хаотическому и наоборот, обеспечивая таким образом возможность наблюдать некоторые проявления хаоса с холодными атомами в реальном эксперименте.

Благодарности. Автор благодарен Л. Е. Конькову и А. А. Дидову за помощь в подготовке некоторых рисунков.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Тихоокеанского океанологического института Дальневосточного отделения Российской академии наук (проект № 0271-2019-0001).

ЛИТЕРАТУРА

1. V. G. Minogin and V. S. Letokhov, *Laser Light Pressure on Atoms*, Gordon and Breach Sci. Publ., New York (1987).
2. V. Letokhov, *Laser Control of Atoms and Molecules*, Oxford Univ. Press, New York (2007).
3. A. P. Kazantsev, G. I. Surdutovich, and V. P. Yakovlev, *Mechanical Action of Light on Atoms*, World Sci., Singapore (1990).
4. Г. А. Аскарян, ЖЭТФ **42**, 1567 (1962).
5. В. С. Летохов, Письма в ЖЭТФ **7**, 348 (1968).
6. G. Grynberg and C. Robilliard, Phys. Rep. **355**, 335 (2001).
7. G. Raithel and N. Morrow, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **53**, 187 (2006).
8. M. Greiner and S. Fölling, Nature **435**, 736 (2008).
9. A. Hemmerich, D. Schropp, Jr., and T. W. Hansch, Phys. Rev. A **44**, 1910 (1991).
10. M.G. Raizen, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **41**, 43 (1999).
11. W. K. Hensinger, N. R. Heckenberg, G. J. Milburn, and H. Rubinsztein-Dunlop, J. Opt. B **5**, 83 (2003).
12. M. Sadgrove, S. Wimberger, S. Parkins, and R. Leonhardt, Phys. Rev. Lett. **94**, 174103 (2005).
13. R. Graham, M. Schlautmann, and P. Zoller, Phys. Rev. A **45**, R19 (1992).
14. S. V. Prants, Phys. Scr. **92**, 044002 (2017).
15. Л. Е. Коньков, С. В. Пранц, Письма в ЖЭТФ **65**, 801 (1997).
16. С. В. Пранц, Л. Е. Коньков, Письма в ЖЭТФ **73**, 200 (2001).
17. В. Ю. Аргонов, Л. Е. Коньков, ЖЭТФ **123**, 946 (2003).
18. S. V. Prants, M. Yu. Uleysky, and V. Yu. Argonov, Phys. Rev. A **73**, 023807 (2006).
19. V. Yu. Argonov and S. V. Prants, Phys. Rev. A **75**, 063428 (2007).
20. V. Yu. Argonov and S. V. Prants, Phys. Rev. A **78**, 043413 (2008).
21. В. О. Витковский, С. В. Пранц, Опт. и спектр. **114**(1), 57 (2013).
22. С. В. Пранц, Письма в ЖЭТФ **104**, 769 (2016).
23. D. Hennequin and D. Verkerk, Eur. Phys. J. D **57**, 95 (2010).
24. E. Horsley, S. Koppell, and L. Reichl, Phys. Rev. E **89**, 012917 (2014).

25. Y. Boretz and L. E. Reichl, *Phys. Rev. E* **91**, 042901 (2015).
26. Max D. Porter and L. E. Reichl, *Phys. Rev. E* **93**, 012204 (2016).
27. L. E. Kon'kov and S. V. Prants, *J. Math. Phys.* **37**, 1204 (1996).
28. C. S. Adams, M. Siegel, and J. Mlynek, *Phys. Rep.* **240**, 143 (1994).
29. K. Baldwin, *Contemp. Phys.* **46**, 105 (2005).
30. C. J. Foot, *Atomic Physics*, Oxford Univ. Press, New York (2005).
31. G. Reinaudi, T. Lahaye, Z. Wang, and D. Guery-Odelin, *Opt. Lett.* **32**, 3143 (2007).