

# СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ОГРАНИЧЕННЫХ ЦЕПОЧЕЧНЫХ СТРУКТУРАХ

*О. С. Ваулина\**, *Э. А. Саметов*, *Е. А. Лисин\*\**

*Объединенный институт высоких температур Российской академии наук  
125412, Москва, Россия*

*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)  
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 27 января 2020 г.,  
после переработки 12 февраля 2020 г.  
Принята к публикации 12 февраля 2020 г.

Представлены результаты исследования спектральных характеристик стохастического движения заряженных частиц для цепочечных структур в электрическом поле ловушки. Рассмотрены характерные частоты частиц и способ их аналитического вычисления. Предложены аналитические соотношения для спектральной плотности смещений частиц, взаимодействующих с попарным потенциалом, в малоразмерных цепочечных структурах. Полученные соотношения проверены путем численного моделирования задачи.

DOI: 10.31857/S0044451020080179

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Стохастическое (тепловое) движение заряженных частиц широко распространено в природе, а его изучение представляет интерес в различных областях науки и техники [1–6].

Комплексная (пылевая) плазма является ионизованным газом, содержащим заряженные частицы вещества микронных размеров (пыль) [1–3]. Экспериментальные и численные исследования стохастического движения пылевых частиц в газоразрядной плазме представлены в работах [7–13]. Обычно в центре газоразрядных камер наблюдается некоторое превышение концентрации ионов плазмы над концентрацией ее электронной компоненты [14], что приводит к формированию эффективных ловушек для отрицательно заряженных частиц пыли [1, 2]. Лабораторные эксперименты с небольшим количеством пылевых частиц позволяют проводить исследования спектров их собственных и вынужденных колебаний, изучать влияние различных внешних воздействий, а также разрабатывать новые методы диагностики и т. д. [15–22].

Подробную информацию об особенностях теплового движения взаимодействующих частиц можно получить путем анализа спектральной плотности их смещений. Спектральная плотность для случайных (тепловых) смещений частиц является косинус-преобразованием Фурье для корреляционной функции, описывающей зависимость среднего квадрата этих смещений от времени [23–25]. В отличие от других характеристик системы (параметра неидеальности, коэффициентов массопереноса и т. д.) информация о спектральной плотности тепловых смещений частиц позволяет анализировать спектр частот их собственных колебаний. Это позволяет оценить реакцию исследуемой системы на различные внешние воздействия, а также дает возможность получить информацию о потенциале межчастичного взаимодействия [7–9, 26, 27].

В настоящее время задача о спектральной плотности смещений детально рассмотрена только для случая двух взаимодействующих частиц [28, 29]. В данной работе приводятся результаты исследования спектральных характеристик для частиц, взаимодействующих с произвольным попарным потенциалом, в малоразмерных цепочечных структурах. Представленные результаты могут быть полезны для экспериментального анализа характера и типа потенциала взаимодействия между пылевыми частицами в плазме.

\* E-mail: olga.vaulina@bk.ru

\*\* E-mail: ealisin@yandex.ru

Исследование взаимодействий между частицами в комплексной плазме представляет несомненный интерес [1–3]. За последние годы появилось немало работ, посвященных этому вопросу. Часть из них касается разработки экспериментальных методов определения потенциалов взаимодействия между пылевыми частицами в лабораторной плазме газовых разрядов [30–35]. Наибольшим преимуществом обладают методы, основанные на решении обратной задачи Ланжевена [34], или на анализе корреляторов смещений и скоростей частиц [35]. В отличие от других, упомянутые методы полностью учитывают диссипативные и случайные процессы. Тем не менее, и они могут давать некорректные результаты для частиц, колебания (смещения) которых искажены неучтенными регулярными и/или случайными внешними воздействиями [35].

## 2. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим равновесную систему, состоящую из  $N$  частиц массой  $M_i$  и зарядами  $Q_i$ , взаимодействующих с потенциалом произвольной формы в линейном электрическом поле  $E(r, z)$  цилиндрической ловушки с радиальной составляющей  $E_r = \beta^r r$  и вертикальной составляющей  $E_z = E_z^0 + \beta^z z$ . Здесь  $r \equiv \equiv (x^2 + y^2)^{1/2}$  — радиальная координата,  $z$  — вертикальная координата по оси  $z$  в направлении силы тяжести,  $\beta^r$  и  $\beta^z$  — величины градиентов электрического поля, а значение  $E_z^0$  определяется балансом сил, действующих в системе.

В предположении, что смещение  $\xi_i$  частиц, где  $i = 1, 2, \dots, N$ , от их положения равновесия под действием некоторой случайной силы  $F_{bi}$  ограничено малыми отклонениями, систему линеаризованных уравнений движения в выбранном направлении для каждой из степеней свободы можно записать в общем виде:

$$M_i \frac{dV_i}{dt} = -\nu_i M_i V_i - Q_i \beta^{r(z)} \xi_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N b_{ji} (\xi_i - \xi_j) + F_{bi}. \quad (1)$$

Здесь  $\nu_i$  — коэффициент трения  $i$ -й частицы за счет ее столкновений с нейтралами окружающего газа,  $V_i = d\xi_i/dt$  — скорость  $i$ -й частицы на одну степень свободы,  $F_{bi}$  — сила Ланжевена, являющаяся источником стохастической кинетической энергии частиц, а коэффициенты  $b_{ij}$  зависят от физики решаемой задачи (для попарного взаимодействия  $b_{ij} \equiv b_{ji}$ ) и рассматриваемой степени свободы смещений частиц.

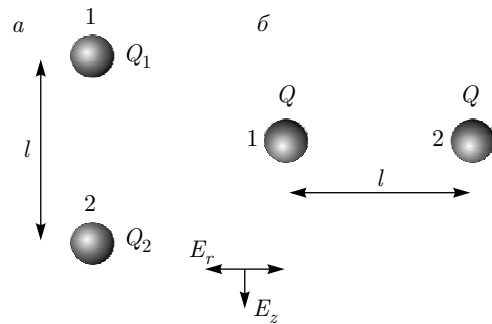


Рис. 1. Вертикальная (а) и горизонтальная (б) конфигурации двух взаимодействующих частиц в электрическом поле ловушки  $E = E(z, r)$  с цилиндрической симметрией

Основные гармоники для системы (1) (ее характерные частоты) можно найти путем решения характеристического уравнения

$$f(\lambda) = c_n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0,$$

где  $n$  определяется числом  $N$  взаимодействующих частиц [36]. Если корни этого уравнения имеют положительную действительную часть, то решение системы (1) является неустойчивым. Задача об устойчивом положении двух идентичных частиц, взаимодействующих с различными типами потенциалов, в электрическом поле ловушки рассматривалась в работах [20, 21, 37, 38], где было показано, что вертикальная конфигурация частиц наблюдается при  $\beta^r > \beta^z$ , в обратном случае ( $\beta^r < \beta^z$ ) формируется их горизонтальная конфигурация, см. рис. 1. Критерии устойчивости для малоразмерных кластерных систем, включающих до пяти заряженных частиц ( $2 \leq N \leq 5$ ), подробно рассмотрены в работе [38].

Спектральные характеристики частиц для системы (1) при  $F_{bi} = 0$ , такие как их характерные частоты  $\omega_i$  и спектральные плотности смещений  $G_i$  могут быть получены численно на основе существующих пакетов математического моделирования. Практически все современные программные пакеты имеют встроенные функции символьных вычислений и позволяют получить конечный результат в виде формул для  $\omega_i$  и  $G_i$ , которые являются математически решениями задачи и не несут какого-либо физического смысла. Кроме того, такие формулы имеют весьма громоздкий вид и занимают со всеми входящими в них коэффициентами от двух (для  $N = 3$ ) и более (при  $N > 3$ ) страниц текста. Таким образом, упомянутые соотношения являются малоэффективными для практического использования, включая анализ и/или обращение данных численных и лабораторных экспериментов.

Способ простого аналитического решения задачи для малоразмерных цепочек частиц, взаимодействующих с произвольным попарным потенциалом, описан в следующих разделах работы.

### 3. СЛУЧАЙ ДВУХ ЧАСТИЦ

В начале раздела отметим, что большинство экспериментов в пылевой плазме проводятся для монодисперсных частиц, когда различием между их массами и размерами (соответственно, между коэффициентами трения) можно пренебречь:  $M_i \cong M$ ,  $\nu_i \cong \nu$  [1–3].

Рассмотрим систему линеаризованных уравнений движения, описывающих отклонения двух заряженных частиц (равных масс  $M$  и размеров), взаимодействующих с потенциалом произвольной формы, от их положения равновесия  $\xi_{1(2)}$  под действием случайной силы  $F_{b1(2)}$ :

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = -\nu \frac{d\xi_1}{dt} + a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \frac{F_{b1}}{M}, \quad (2a)$$

$$\frac{d^2\xi_2}{dt^2} = -\nu \frac{d\xi_2}{dt} + a_{22}\xi_2 + a_{21}\xi_1 + \frac{F_{b2}}{M}. \quad (2b)$$

Для попарного взаимодействия  $a_{12} \equiv a_{21}$ . Случай  $a_{11} \neq a_{22}$  может реализоваться для пылевых частиц в лабораторной плазме даже для их попарного взаимодействия, например, из-за различия их зарядов или отличия градиентов внешнего поля в точке равновесного положения частиц. Такие условия могут возникать за счет пространственных изменений параметров окружающей плазмы (например, концентраций и температур ионов/электронов).

Здесь мы рассмотрим вертикальную конфигурацию частиц, рис. 1а. (Отметим, что все решения для горизонтальной конфигурации частиц при их попарном взаимодействии и  $Q_{1(2)} \equiv Q$ , см. рис. 1б, будут аналогичными [28].)

Для поиска корреляторов скоростей и смещений частиц в системе (2а), (2б) отметим, что корреляторы случайной силы  $F_{b1(2)}$  подчиняются уравнениям  $\langle F_{b1} \rangle = \langle F_{b2} \rangle \equiv 0$ ,  $\langle F_{b1} F_{b2} \rangle = 0$ ,  $\langle F_{b1} V_2 \rangle = \langle F_{b2} V_1 \rangle \equiv 0$ ,  $\langle F_{b1} \xi_2 \rangle = \langle F_{b2} \xi_1 \rangle \equiv 0$ ,  $\langle F_{b1} \xi_1 \rangle = \langle F_{b2} \xi_2 \rangle \equiv 0$ . Здесь и далее угловые скобки  $\langle \rangle$  обозначают усреднение по времени при  $t \rightarrow \infty$ . При движении частиц

по ограниченным траекториям  $\langle \xi_1 V_1 \rangle = \langle \xi_2 V_2 \rangle \equiv 0$ ,  $\langle V_{1(2)} F_{b1(2)} \rangle = \nu T_{1(2)}^0$ , где  $T_{1(2)}^0$  – температура тепловых источников [28, 29]. Тогда уравнения для корреляторов скоростей и смещений частиц можно представить в виде [39, 40]

$$-\frac{\nu \delta T_{1(2)}}{M} + a_{12(21)} \langle V_{1(2)} \xi_{2(1)} \rangle = 0, \quad (3a)$$

$$a_{11(22)} \langle (\xi_{1(2)})^2 \rangle + a_{12(21)} \langle \xi_1 \xi_2 \rangle + \frac{T_{1(2)}}{M} = 0, \quad (3b)$$

$$-\nu \langle V_{1(2)} \xi_{2(1)} \rangle + a_{11(22)} \langle \xi_1 \xi_2 \rangle + a_{12(21)} \langle (\xi_{2(1)})^2 \rangle + \langle V_1 V_2 \rangle = 0, \quad (3c)$$

$$-2\nu \langle V_1 V_2 \rangle + (a_{11} - a_{22}) \langle \xi_1 V_2 \rangle = 0, \quad (3d)$$

где  $T_{1(2)} = M \langle V_{1(2)}^2 \rangle$  – кинетическая температура частиц (удвоенная кинетическая энергия их стохастического движения на одну степень свободы) для равновесного состояния системы, а  $\delta T_{1(2)} = T_{1(2)}^0 - T_{1(2)}$  – приращение кинетической температуры в процессе установления равновесия. При численном моделировании задачи температура тепловых источников,  $T_{1(2)}^0$ , соответствует их заданной/начальной температуре, т. е. температуре термостата.

Решение системы (3а)–(3д) дает уравнения энергетического баланса для двух взаимодействующих частиц, которые описывают перераспределение стохастической кинетической энергии между этими частицами при  $T_1^0 \neq T_2^0$  [28] или «подкачку» энергии для случая непопарного взаимодействия частиц [39, 40]:

$$\delta T_{1(2)} = \pm \frac{2a_{12(21)}(T_1^0 a_{21} - T_2^0 a_{12})}{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} - 2\nu^2(a_{11} + a_{22})}, \quad (4a)$$

где знак «плюс» для  $\delta T_2$ , а знак «минус» для  $\delta T_1$ . Уравнение баланса (4а) согласуется со всеми ранее полученными результатами для любых взаимодействий между двумя частицами системы [28, 39, 40].

Решение системы (3а)–(3д) позволяет также получить соотношения для корреляторов скоростей и смещений частиц, которые необходимы для поиска спектральных плотностей:

$$\langle V_1 V_2 \rangle = \frac{(a_{11} - a_{22})(T_1 a_{21} - T_2 a_{12})}{M \{(a_{11} - a_{22})^2 - 2\nu^2(a_{11} + a_{22})\}}, \quad (4b)$$

$$\langle \xi_{1(2)}^2 \rangle = -\frac{(a_{22(11)}^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})T_{1(2)} + a_{12}^2 T_{2(1)} - 2a_{12(21)}a_{22(11)}M \langle V_1 V_2 \rangle}{(a_{11} + a_{22})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})M}. \quad (4c)$$

Перейдем к определению спектральных характеристик рассматриваемой системы. Еще раз отметим, что  $\langle \xi_{1(2)}^2 \rangle$  (4с) описывает отклонения частиц от их равновесного положения при  $t \rightarrow \infty$ . При вычислениях спектральной плотности обычно используют преобразование Фурье для среднеквадратичного отклонения частиц от их начального положения:  $\langle \xi_{1(2)}^2 \rangle_t = \langle (\xi_{1(2)}(t) - \xi_{1(2)}(0))^2 \rangle_t$ , где угловые скобки  $\langle \dots \rangle_t$  обозначают усреднение по всем отрезкам времени равным  $t$ ; при  $t \rightarrow \infty$ :  $\langle \xi_{1(2)}^2 \rangle_{t \rightarrow \infty} \equiv 2 \langle \xi_{1(2)}^2 \rangle$  [6, 23–25].

Корни характеристического уравнения для задачи (2а), (2б) можно записать как [28, 36]

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\nu}{2} \pm \left( \frac{\nu^2}{4} - \omega_1^2 \right)^{1/2}, \quad (5a)$$

$$\lambda_{3,4} = -\frac{\nu}{2} \pm \left( \frac{\nu^2}{4} - \omega_2^2 \right)^{1/2}, \quad (5b)$$

где  $\omega_1^2 = -(a_{11} + a_{22})/2 - d$ ,  $\omega_2^2 = -(a_{11} + a_{22})/2 + d$ ,  $d = ((a_{11} - a_{22})^2/4 + a_{12}a_{21})^{1/2}$ .

Любое решение для рассматриваемой здесь задачи  $(\xi_i(t), \dot{\xi}_i(t), \langle \xi_i^2 \rangle_t; i = 1, 2)$  можно представить в виде суперпозиции [28, 36]:

$$\Phi(t) = C_0 + \sum_{k=1}^4 C_k \exp(\lambda_k t), \quad (6)$$

где коэффициенты  $C_k$  ( $k = 0 \div 4$ ) вычисляются для условий конкретной задачи. Так, при определении  $\langle \xi_{1(2)}^2 \rangle_t$  величина  $C_0 \equiv A_1 = \langle \xi_{1(2)}^2 \rangle_{t \rightarrow \infty} \equiv 2 \langle \xi_{1(2)}^2 \rangle$ , а для поиска значений  $C_k$  ( $k = 1 \div 4$ ) используют начальные условия  $\Phi(0) = 0$ ,  $d\Phi(0)/dt = 0$ ,  $d^2\Phi(0)/dt^2 \equiv A_2 = 2T_{1(2)}/M$ ,  $d^3\Phi(0)/dt^3 \equiv A_3 = 2\nu T_{1(2)}^0/M$  [6, 23]. Таким образом, для коэффициентов  $C_k$  имеет место следующая система уравнений [28]:

$$C_1 = -\frac{A_3 + A_2(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) - A_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}, \quad (7a)$$

$$C_2 = \frac{A_3 + A_2(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4) - A_1\lambda_1\lambda_3\lambda_4}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}, \quad (7b)$$

$$C_3 = -\frac{A_3 + A_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4) - A_1\lambda_1\lambda_2\lambda_4}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)}, \quad (7c)$$

$$C_4 = \frac{A_3 + A_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - A_1\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)}. \quad (7d)$$

С учетом корней характеристического уравнения (5а), (5б) и уравнений баланса энергии (4а) в рассматриваемой системе фурье-преобразование функции  $\Phi(t)$  дает для спектральной плотности смещений частиц,  $G_{1(2)} = G_{1(2)}(\omega)$ , соотношение

$$G_{1(2)} = \frac{2\nu \left\{ T_{1(2)}^0 ((\omega^2 + a_{22(11)})^2 + \nu^2\omega^2) + T_{2(1)}^0 a_{12(21)}^2 \right\} / M}{\{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_1^2)\omega^2 + \omega_1^4\} \{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_2^2)\omega^2 + \omega_2^4\}}. \quad (8)$$

Аналогичное соотношение было получено ранее в работе [29] независимым спектральным методом. Численное моделирование спектральных плотностей для смещений частиц, выполненное для попарных потенциалов ( $a_{12} \equiv a_{21}$ ) [28], показывает хорошее согласие с формулой (8).

В случае попарного взаимодействия между частицами ( $a_{12} \equiv a_{21} = b$ ,  $a_{11} = a_1$ ,  $a_{22} = a_2$ ) для их вертикальных смещений,  $\xi_{1(2)} = \delta z_{1(2)}$ , величины  $a_{1(2)} = -(Q_{1(2)}\beta^z - F')/M$  и  $b = -F'/M$ , где  $F'$  — производная силы  $F$  взаимодействия между двумя частицами в направлении оси  $z$ . Для радиальных смещений частиц,  $\xi_{1(2)} = \delta r_{1(2)}$ , величины  $a_{1(2)} = -(Q_{1(2)}\beta^r - F/l)/M$  и  $b = F/lM$ , где  $l$  — расстояние между частицами. При этом соотношение (8) может быть представлено в виде суперпозиции спектральных плотностей для двух классических осцилляторов  $S_i = S_i(\omega, \nu, \omega_i)$ :

$$G_{1(2)} = B_{1(2)} \frac{2\nu T/M}{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_1^2)\omega^2 + \omega_1^4} + B_{2(1)} \frac{2\nu T/M}{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_2^2)\omega^2 + \omega_2^4} = B_{1(2)}S_1 + B_{2(1)}S_2, \quad (9)$$

где  $B_1 = 0.5 + (a_1 - a_2)/4d$ ,  $B_2 = 0.5 - (a_1 - a_2)/4d$ . Отсюда легко заметить, что  $G_1 + G_2 \equiv S_1 + S_2$ . Тогда для двух идентичных частиц  $G_1(\omega) \equiv G_2(\omega) = G(\omega)$  получим [28]

$$G(\omega) = \sum_{i=1}^2 \frac{\nu T/M}{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_i^2)\omega^2 + \omega_i^4} \equiv \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} S_i. \quad (10)$$

Для одной частицы ( $N = 1$ ) в ловушке получим формулу для классического осциллятора в виде

$$G_1(\omega) = \frac{2\nu T/M}{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_1^2)\omega^2 + \omega_1^4}, \quad (11)$$

где  $\omega_1^2 = (\omega_i^{z(r)})^2 \equiv Q\beta^{z(r)}/M$ .

Нормированные спектральные плотности  $G^*(\omega) = G(\omega)/B$ ,  $S_1^*(\omega) = S_1(\omega)/B$  и  $S_2^*(\omega) = S_2(\omega)/B$  смещений в вертикальном и радиальном направлениях для двух идентичных частиц с кулоновским взаимодействием представлены на рис. 2 при  $\beta^r/\beta^z = 4$  и  $\nu = 5 \text{ с}^{-1}$ , когда  $\omega_t^z/\nu = 2$ ,  $\omega_t^r/\nu = 4$ . Здесь и далее  $B = 2T/(\omega_t^2\nu M)$ , где  $\omega_t = \omega_t^{z(r)} \equiv (Q\beta^{z(r)}/M)^{1/2}$ .

Следует отметить, что при  $(\omega_i/\nu)^2 \gg 1$  максимумы спектральных функций  $G(\omega)$ ,  $S_1(\omega)$ ,  $S_2(\omega)$  хорошо соответствуют аналитическим значениям  $\omega_i$ . С уменьшением отношения  $\omega_i/\nu$  (например, с ростом коэффициента трения  $\nu$ ) максимумы упомянутых функций смещаются в сторону более низких частот [23, 28], см. рис. 3.

#### 4. СЛУЧАИ ТРЕХ, ЧЕТЫРЕХ И ПЯТИ ЧАСТИЦ

Рассмотрим спектральные характеристики для случаев трех, четырех и пяти идентичных частиц ( $Q_i = Q$ ,  $M_i = M$ ,  $\nu_i = \nu$ ), взаимодействующих с произвольной попарной силой  $F_{ij} = F_{ji} \equiv F(l_{ij})$  в линейном электрическом поле  $E(r, z)$  ловушки с цилиндрической симметрией (см. рис. 4); здесь  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  и  $i \neq j$ . Критерии устойчивости таких систем представлены в работе [38]. В силу симметрии задачи относительно центра ловушки в этих системах функции равны  $G_j(\omega) = G_i(\omega)$  для частиц  $j$  и  $i$ , которые расположены на одинаковом расстоянии от центра структуры, см. рис. 4.

Численное моделирование стохастических процессов выполнялось методом Ланжевена для идентичных частиц с равными массами, зарядами и температурой. Техника моделирования подробно описана в работах [1–3]. Шаг интегрирования составлял от  $\Delta t \cong (40 \max[\omega_t^{z(r)}; \nu])^{-1}$  до  $\Delta t \cong (100 \max[\omega_t^{z(r)}; \nu])^{-1}$  в зависимости от начальных условий задачи. Время расчетов  $t_c$  после установления равновесия в моделируемых системах варьировалось от  $\sim 10^3 / \min[\omega_t^{z(r)}; \nu]$  до  $\sim 10^4 / \min[\omega_t^{z(r)}; \nu]$ ; здесь  $\omega_t^{z(r)} = (Q\beta^{z(r)}/M)^{1/2}$  — характерные частоты ловушки. Температура частиц в процессе моделирования не менялась, т. е. оставалась равной заданной,  $T_i = T_i^0 \equiv T$ .

Вычисления спектральной плотности по результатам моделирования проводились на основе численных расчетов смещений  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$  для отдельных частиц системы при помощи процедуры «N–D fast Fourier transform» в пакете прикладных программ MATLAB.

Представленные аналитические соотношения для спектральной плотности смещений частиц сравнивались с результатами определения спектральной плотности, полученными путем преобразования Фурье для решений системы (1) при  $F_{bi} = 0$  с помощью пакета прикладных программ MATLAB.

#### 4.1. Три частицы

Обратимся к случаю трех частиц ( $N = 3$ ), см. рис. 4а. В состоянии равновесия средние расстояния между двумя ближайшими частицами равны  $l_{12} = l_{23} \equiv l_d$ , а уравнение баланса сил дает  $Q\beta^z l_d = F_{12} + F_{13}$ , где  $F_{12} = F_{23} \equiv F$ . Исследование динамики таких частиц в цепочечной структуре сводится к анализу системы уравнений движения (1) для  $i = 1, 2, 3$ .

Для поиска спектральных характеристик выполним замену переменных:  $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ ,  $\eta_2 = \xi_1 - \xi_3$ ,  $\eta_3 = 2\xi_2 - (\xi_1 + \xi_3)$ . (Здесь и далее для вертикальных смещений частиц в цепочке  $\xi_i = \delta z_i$ , а для их радиальных смещений  $\xi_i = \delta r_i$ .) С учетом указанной замены переменных преобразуем систему уравнений движения (1) для случая  $F_{bi} = 0$  к виду

$$\frac{d^2 \eta_1}{dt^2} = -\nu \frac{d\eta_1}{dt} - \frac{Q\beta}{M} \eta_1, \tag{12a}$$

$$\frac{d^2 \eta_2}{dt^2} = -\nu \frac{d\eta_2}{dt} - \left( \frac{Q\beta}{M} - b_{12} - 2b_{13} \right) \eta_2, \tag{12b}$$

$$\frac{d^2 \eta_3}{dt^2} = -\nu \frac{d\eta_3}{dt} - \left( \frac{Q\beta}{M} - 3b_{12} \right) \eta_3. \tag{12c}$$

Здесь для вертикальных смещений частиц от их положения равновесия  $\beta = \beta^z$ ,  $b_{12} = F'_{12} \equiv F'_{23} = F'$ ,  $b_{13} = F'_{13}$ , где  $F'$  — первая производная силы взаимодействия  $F$  в точке  $l_d$  и  $F'_{13}$  — первая производная силы взаимодействия  $F_{13}$  в точке  $l_{13} \equiv 2l_d$ . Для радиальных смещений частиц  $\beta = \beta^r$ ,  $b_{12} = F/l_d$ ,  $b_{13} = F_{13}/2l_d$ . Для систем с кулоновским взаимодействием  $F = Q^2/l_d^2$ ,  $F_{13} = Q^2/4l_d^2$ ,  $F' = -2Q^2/l_d^3$ ,  $F'_{13} = -Q^2/4l_d^3$ .

Рассматриваемая система (12a)–(12c) имеет по три характерных частоты в вертикальном и радиальном направлениях:  $\omega_1^2 = (Q\beta/M)$ ,  $\omega_2^2 = (Q\beta/M - b_{12} - 2b_{13})$ ,  $\omega_3^2 = (Q\beta/M - 3b_{12})$ . Ее решение для  $\langle \eta_k^2 \rangle$  ( $k = 1, 2, 3$ ) с учетом  $\langle \xi_i \xi_j \rangle = 0$  при  $i \neq j$  позволяет получить для спектральной плотности смещений отдельных частиц:

$$G_2(\omega) = \frac{S_1 + 2S_3}{3}, \tag{13}$$

$$G_1(\omega) \equiv G_3(\omega) = \frac{2G_2(\omega) - S_3 + S_2}{2}, \tag{14}$$

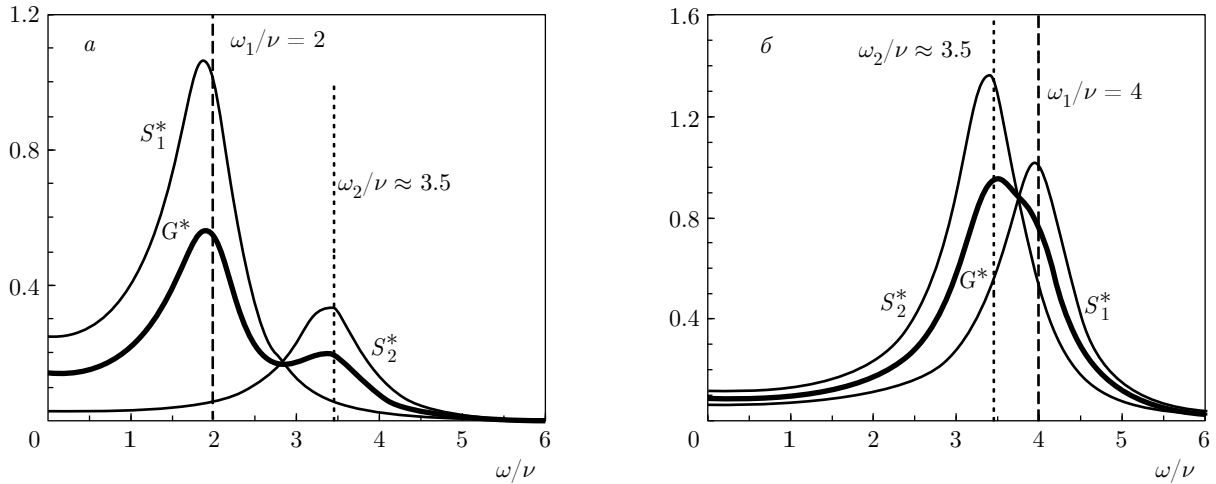


Рис. 2. Функции  $G^*(\omega)$ ,  $S_1^*(\omega)$  и  $S_2^*(\omega)$  для вертикального (а) и радиального (б) направлений смещения частиц при  $\beta^r/\beta^z = 4$ ,  $\nu = 5 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_t^z/\nu = 2$  и  $\omega_t^r/\nu = 4$

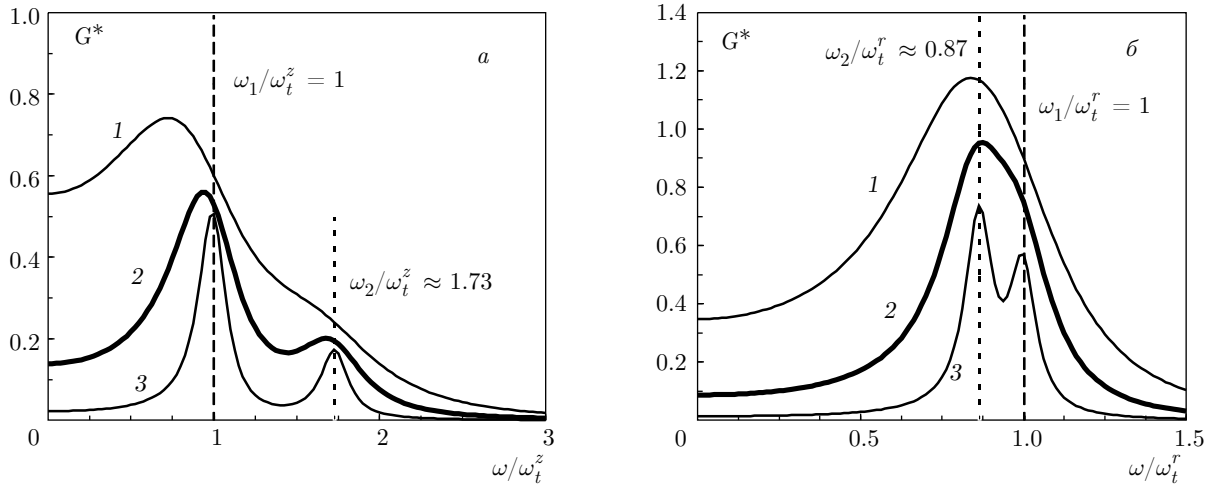


Рис. 3. Функции  $G^*(\omega)$  для вертикального (а) и радиального (б) направлений смещения частиц при  $\beta^r/\beta^z = 4$ ,  $\omega_t^z = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_t^r = 20 \text{ с}^{-1}$  и коэффициентах трения  $\nu = 10 \text{ с}^{-1}$  (1),  $5 \text{ с}^{-1}$  (2),  $2 \text{ с}^{-1}$  (3)

где  $S_k$  — плотность классического осциллятора с частотой  $\omega_k$ . Отметим, что представленные аналитические кривые полностью совпадают с результатами вычислений спектральной плотности путем преобразования Фурье для решений системы (1) при  $F_{bi} = 0$ .

Напомним, что спектральная плотность для смещений  $\eta_k$  является фурье-преобразованием функций  $\langle \eta_k^2 \rangle_t$ , а величина  $S_{\eta k} = D_k S_k$ , где коэффициент  $D_k$  определяется суммарной температурой частиц, входящих в данный коррелятор. Так, для  $\eta_1$  величина  $D_1 = 3$ , для  $\eta_2$  —  $D_2 = 2$ , для  $\eta_3$  —  $D_3 = 6$ .

Нормированные спектральные плотности  $S_i^*(\omega) = S_i(\omega)/B$  и  $G_i^*(\omega) = G_i(\omega)/B$  для системы из трех частиц с кулоновским взаимодействием представлены соответственно на рис. 5 и рис. 6 при  $\nu = 2 \text{ с}^{-1}$  и  $\beta^r/\beta^z = 4$ .

#### 4.2. Четыре частицы

Уравнения баланса сил для вертикальной конфигурации четырех частиц ( $N = 4$ ), см. рис. 4б, можно записать в виде системы двух уравнений:

$$Q\beta^z(2l_o + l_d) = 2F_{s2}, \tag{15a}$$

$$Q\beta^z l_d = 2F_{s1}, \tag{15b}$$

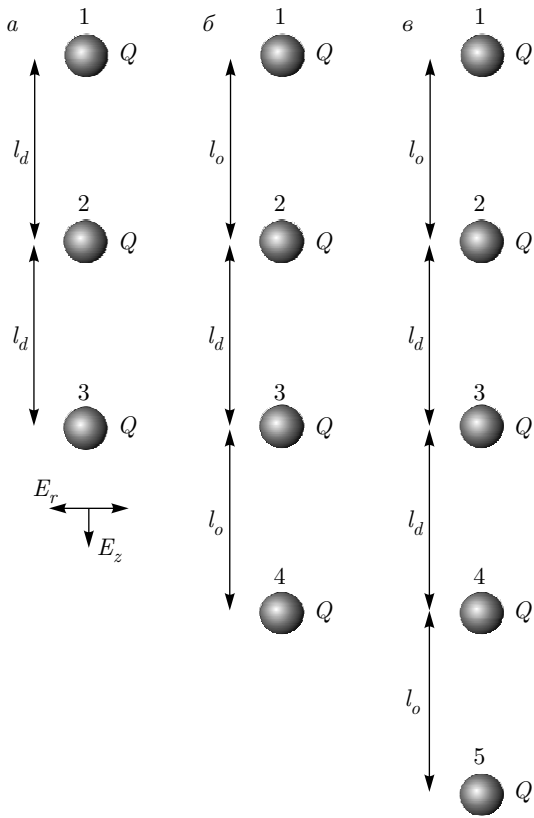


Рис. 4. Вертикальная конфигурация трех (а), четырех (б) и пяти (в) взаимодействующих частиц в электрическом поле ловушки  $E = E(z, r)$  с цилиндрической симметрией

где  $l_d$  — среднее расстояние между двумя центральными частицами,  $l_o$  — среднее расстояние между двумя частицами на периферии. Здесь  $F_{s1} \equiv F_{23} + F_{24} - F_{12} \equiv F_{23} + F_{13} - F_{34}$ ,  $F_{s2} \equiv F_{13} + F_{14} + F_{12} \equiv F_{34} + F_{14} + F_{24}$ , поскольку цепочка симметрична относительно центра системы. Совместное решение уравнений (15а), (15б) позволяет найти и отношение  $l_o/l_d$ , и величину градиента  $\beta^z$  электрического поля ловушки. Для систем с кулоновским взаимодействием

$$F_{14} = \frac{Q^2}{(l_d + 2l_o)^2}, \quad F_{23} = \frac{Q^2}{l_d^2},$$

$$F_{24} = F_{13} = \frac{Q^2}{(l_d + l_o)^2}, \quad F_{12} = F_{34} = \frac{Q^2}{l_o^2}.$$

Исследование динамики четырех частиц в цепочной структуре сводится к анализу системы уравнений (1) для  $i = 1 \div 4$ . Для поиска спектральных характеристик выполним замену переменных:  $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$ ,  $\eta_2 = (\xi_1 + \xi_4) - (\xi_2 + \xi_3)$ ,  $\eta_3 = \xi_1 - \xi_4$ ,  $\eta_4 = \xi_2 - \xi_3$ . С учетом указанной замены преобразуем

систему уравнений движения (1) для  $F_{bi} = 0$  к виду

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} = -\nu \frac{d\eta_1}{dt} - \frac{Q\beta}{M} \eta_1, \quad (16a)$$

$$\frac{d^2\eta_2}{dt^2} = -\nu \frac{d\eta_2}{dt} - \left( \frac{Q\beta}{M} - 2(b_{12} + b_{13}) \right) \eta_2, \quad (16b)$$

$$\frac{d^2\eta_3}{dt^2} = -\nu \frac{d\eta_3}{dt} - \left( \frac{Q\beta}{M} - 2b_{14} - b_{12} - b_{13} \right) \eta_3 + (b_{13} - b_{12})\eta_4, \quad (16c)$$

$$\frac{d^2\eta_4}{dt^2} = -\nu \frac{d\eta_4}{dt} - \left( \frac{Q\beta}{M} - 2b_{23} - b_{12} - b_{13} \right) \eta_4 + (b_{13} - b_{12})\eta_3. \quad (16d)$$

Здесь в случае вертикальных смещений частиц от их положения равновесия  $\beta = \beta^z$ ,  $b_{12} = F'_{12}$ ,  $b_{13} = F'_{13}$ ,  $b_{14} = F'_{14}$ ,  $b_{23} = F'_{23}$ , где  $F'$  — первая производная соответствующей силы взаимодействия, а в случае их радиальных смещений  $\beta = \beta^r$ ,  $b_{12} = F_{12}/l_o$ ,  $b_{13} = F_{13}/(l_d + l_o)$ ,  $b_{14} = F_{14}/(l_d + 2l_o)$ ,  $b_{23} = F_{23}/l_d$ .

Рассматриваемая система имеет по четыре характерных частоты в вертикальном и радиальном направлениях соответственно  $\omega_1^2 = Q\beta/M$ ,  $\omega_2^2 = Q\beta/M - 2(b_{12} + b_{13})$ ,  $\omega_3^2 = (Q\beta/M - b_{14} - b_{23} - b_{12} - b_{13}) - d$ ,  $\omega_4^2 = (Q\beta/M - b_{14} - b_{23} - b_{12} - b_{13}) + d$ , где  $d = \{(b_{14} - b_{23})^2 + (b_{13} - b_{12})^2\}^{1/2}$ . А ее решение дает для спектральной плотности смещений частиц

$$G_1(\omega) \equiv G_4(\omega) = \frac{1}{2} \left( \frac{S_1 + S_2}{2} + B_1 S_3 + B_2 S_4 \right), \quad (17a)$$

$$G_2(\omega) \equiv G_3(\omega) = \frac{1}{2} \left( \frac{S_1 + S_2}{2} + B_2 S_3 + B_1 S_4 \right), \quad (17b)$$

где  $S_k$  — плотность классического осциллятора с частотой  $\omega_k$ , а  $B_1 = 0.5 + (b_{23} - b_{14})/4d$ ,  $B_2 = 0.5 - (b_{23} - b_{14})/4d$ , см. (9). Полученные аналитические кривые полностью совпадают с результатами вычислений спектральной плотности путем преобразования Фурье для решений системы (1) при  $F_{bi} = 0$ .

Нормированные спектральные плотности  $G_i^*(\omega) = G_i(\omega)/B$  для системы из четырех частиц с кулоновским взаимодействием представлены на рис. 7 при  $\nu = 5 \text{ с}^{-1}$  и  $\beta^r/\beta^z = 9$ .

В заключение данного раздела отметим, что с ростом коэффициента трения  $\nu$  или радиальной частоты ловушки  $\omega_r^r$  экспериментальный анализ спек-

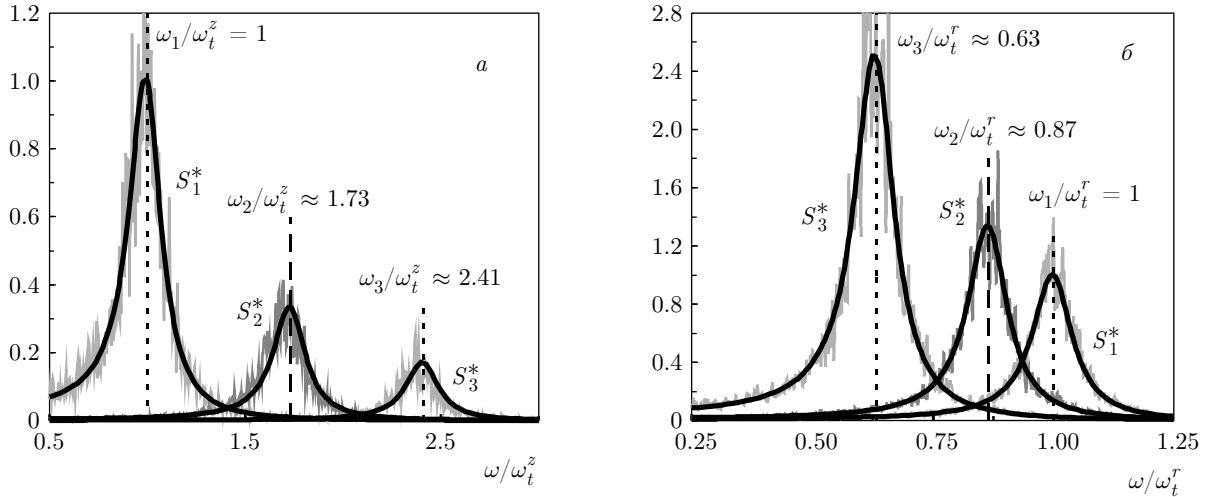


Рис. 5. Функции  $S_i^*(\omega)$  для вертикальных (а) и радиальных (б) смещений частиц при  $\beta^r/\beta^z = 4$ ,  $\omega_t^z = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_t^r = 20 \text{ с}^{-1}$  и  $\nu = 2 \text{ с}^{-1}$ . Здесь  $S_1^* = S_{\eta 1}^*/3$ ,  $S_2^* = S_{\eta 2}^*/2$ ,  $S_3^* = S_{\eta 3}^*/6$ . Черными линиями показаны аналитические решения задачи, серыми — результаты численного моделирования

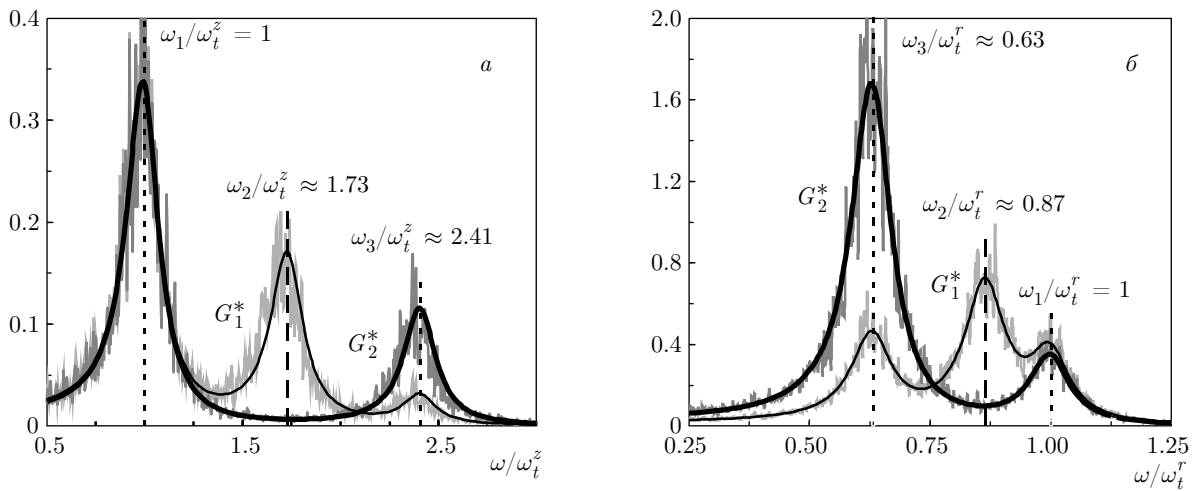


Рис. 6. Функции  $G_i^*(\omega)$  для вертикальных (а) и радиальных (б) смещений частиц при  $\beta^r/\beta^z = 4$ ,  $\omega_t^z = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_t^r = 20 \text{ с}^{-1}$  и  $\nu = 2 \text{ с}^{-1}$ . Черными линиями показаны аналитические решения задачи, серыми — результаты численного моделирования

ральной плотности смещений для отдельных частиц с целью определения основных характеристик системы  $(\omega_k, \nu)$  становится затруднительным, см. рис. 3, 7. Тем не менее, измерение  $\eta_k$  позволяет без особого труда определить и коэффициент трения  $\nu$ , и основные гармоники системы  $\omega_k$ . Спектральные плотности  $S_{\eta k}(\omega)$  для рассматриваемых смещений  $\eta_k$  ( $k = 1 \div 4$ ) связаны с функцией  $S_k(\omega)$  следующими соотношениями:  $S_{\eta k} = 4S_k$  для  $k = 1, 2$ ; а сумма спектральных плотностей  $S_{\eta 3} + S_{\eta 4} \equiv 2(S_3 + S_4)$ , см. рис. 8.

### 4.3. Пять частиц

Уравнения баланса сил для вертикальной конфигурации пяти частиц ( $N = 5$ ), см. рис. 4в, можно записать в виде системы двух уравнений:

$$Q\beta^z(l_o + l_d) = F_{s2}, \tag{18a}$$

$$Q\beta^z l_d = F_{s1}, \tag{18b}$$

где  $l_d = l_{23} \equiv l_{34}$  — среднее расстояние между центральными частицами системы, а  $l_o = l_{12} \equiv l_{45}$  — среднее расстояние между двумя частицами на пе-



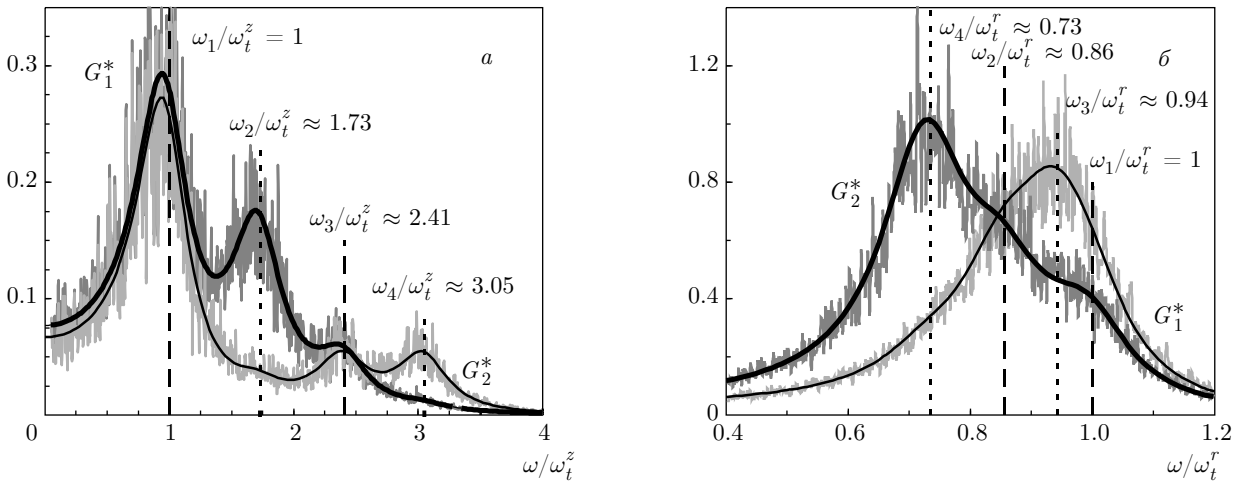


Рис. 7. Функции  $G_i^*(\omega)$  для вертикальных (а) и радиальных (б) смещений частиц при  $\beta^r/\beta^z = 9$ ,  $\omega_t^z = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_t^r = 30 \text{ с}^{-1}$  и  $\nu = 5 \text{ с}^{-1}$ . Черными линиями показаны аналитические решения задачи, серыми — результаты численного моделирования

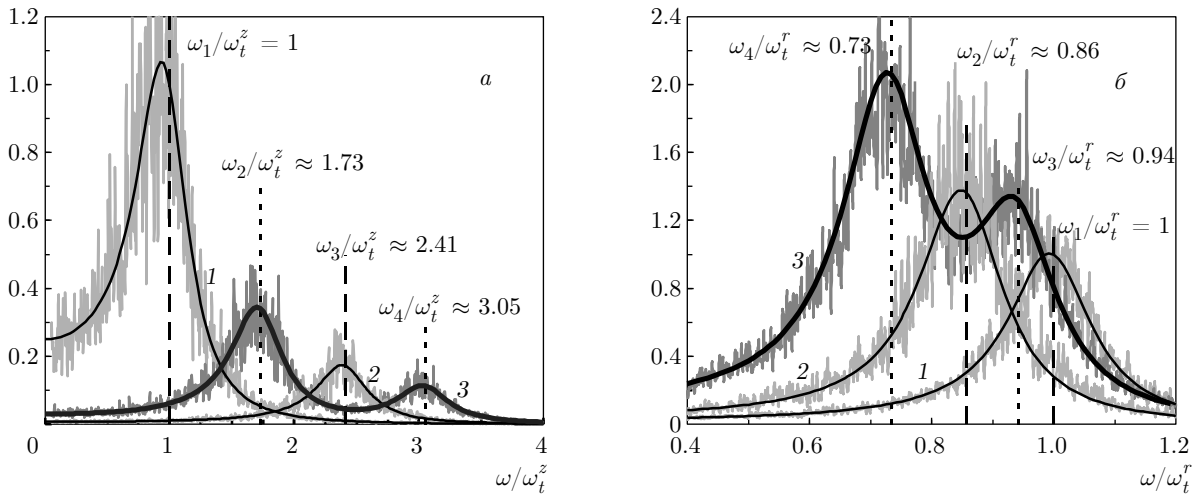


Рис. 8. Функции  $S_{nk}^*(\omega) = S_{nk}(\omega)/B$  при  $\beta^r/\beta^z = 9$ ,  $\omega_t^z = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_t^r = 30 \text{ с}^{-1}$  и  $\nu = 5 \text{ с}^{-1}$  для вертикальных (а) и радиальных (б) смещений частиц: 1 —  $S_{\eta_1}^*/4 = S_1^*$ , 2 —  $S_{\eta_2}^*/4 = S_2^*$ , 3 —  $(S_{\eta_3}^* + S_{\eta_4}^*)/2 \equiv S_3^* + S_4^*$ . Черными линиями показаны аналитические решения задачи, серыми — результаты численного моделирования

рифери. Здесь  $F_{s1} \equiv F_{23} + F_{24} + F_{25} - F_{12}$ ,  $F_{s2} \equiv F_{12} + F_{13} + F_{14} + F_{15}$ . Совместное решение уравнений (18а), (18б) позволяет найти равновесные значения  $l_o$ ,  $l_d$  и величину  $\beta^z$ . Для систем с кулоновским взаимодействием

$$F_{23} = \frac{Q^2}{l_d^2}, \quad F_{24} = \frac{Q^2}{4l_d^2}.$$

$$F_{12} = \frac{Q^2}{l_o^2}, \quad F_{13} = \frac{Q^2}{(l_d + l_o)^2},$$

$$F_{14} \equiv F_{25} = \frac{Q^2}{(2l_d + l_o)^2}, \quad F_{15} = \frac{Q^2}{(2l_d + 2l_o)^2},$$

Исследование динамики системы сводится к анализу системы уравнений (1) для  $i = 1 \div 5$ . Для поиска спектральных характеристик выполним замену переменных:  $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5$ ,  $\eta_2 = \xi_1 - \xi_5$ ,  $\eta_3 = \xi_2 - \xi_4$ ,  $\eta_4 = 2\xi_3 - (\xi_1 + \xi_5)$ ,  $\eta_5 = 2\xi_3 - (\xi_2 + \xi_4)$ . С учетом указанной замены преобразуем систему уравнений движения (1) при  $F_{bi} = 0$  к виду

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} = -\nu\frac{d\eta_1}{dt} - \frac{Q\beta}{M}\eta_1, \quad (19a)$$

$$\frac{d^2\eta_2}{dt^2} = -\nu\frac{d\eta_2}{dt} - \left(\frac{Q\beta}{M} - 2b_{15} - b_{12} - b_{13} - b_{14}\right)\eta_2 + (b_{14} - b_{12})\eta_3, \quad (19b)$$

$$\frac{d^2\eta_3}{dt^2} = -\nu\frac{d\eta_3}{dt} - \left(\frac{Q\beta}{M} - 2b_{24} - b_{12} - b_{13} - b_{14}\right)\eta_3 + (b_{14} - b_{12})\eta_2, \quad (19c)$$

$$\frac{d^2\eta_4}{dt^2} = -\nu\frac{d\eta_4}{dt} - \left(\frac{Q\beta}{M} - 3b_{13} - b_{12} - b_{14}\right)\eta_4 + (2b_{23} - b_{12} - b_{14})\eta_5, \quad (19d)$$

$$\frac{d^2\eta_5}{dt^2} = -\nu\frac{d\eta_5}{dt} - \left(\frac{Q\beta}{M} - 3b_{23} - b_{12} - b_{14}\right)\eta_5 + (2b_{13} - b_{12} - b_{14})\eta_4. \quad (19e)$$

В случае вертикальных смещений частиц  $\beta = \beta^z$ ,  $b_{12} = F'_{12}$ ,  $b_{13} = F'_{13}$ ,  $b_{14} = F'_{14}$ ,  $b_{15} = F'_{15}$ ,  $b_{23} = F'_{23}$ ,  $b_{24} = F'_{24}$ , где  $F'$  — первая производная соответствующей силы взаимодействия, а в случае их радиальных смещений  $\beta = \beta^r$ ,  $b_{12} = F_{12}/l_o$ ,  $b_{13} = F_{13}/(l_d + l_o)$ ,  $b_{14} = F_{14}/(2l_d + l_o)$ ,  $b_{15} = F_{15}/(2l_d + 2l_o)$ ,  $b_{23} = F_{23}/l_d$ ,  $b_{24} = F_{24}/2l_d$ .

Рассматриваемая система имеет пять характерных частот:  $\omega_1^2 = Q\beta/M$ ,  $\omega_2^2 = c_1 + d_1$ ,  $\omega_3^2 = c_1 - d_1$ ,  $\omega_4^2 = c_2 - d_2$ ,  $\omega_5^2 = c_2 + d_2$ . Здесь

$$c_1 = \frac{Q\beta}{M} - b_{14} - b_{15} - b_{24} - b_{12} - b_{13},$$

$$c_2 = \frac{Q\beta}{M} - b_{12} - b_{14} - \frac{3(b_{13} + b_{23})}{2},$$

$$d_1 = \{(b_{15} - b_{24})^2 + (b_{14} - b_{12})^2\}^{1/2},$$

$$d_2 = \left\{ \frac{9(b_{13} - b_{23})^2}{4} + (2b_{23} - b_{12} - b_{14})(2b_{13} - b_{12} - b_{14}) \right\}^{1/2}.$$

Нормированные спектральные плотности  $G_i^*(\omega) = G_i(\omega)/B$ , полученные в результате моделирования системы из пяти частиц с кулоновским взаимодействием при их смещениях в вертикальном и радиальном направлениях, представлены на рис. 9 при  $\nu = 2 \text{ с}^{-1}$  и  $\beta^r/\beta^z = 16$ . Там же показаны результаты определения спектральной плотности для системы (1) при  $F_{bi} = 0$ . Легко увидеть, что с ростом частоты ловушки  $\omega_i^r$  экспериментальный анализ спектра частот для отдельных частиц с целью определения основных характеристик системы ( $\omega_k, \nu$ ) становится затруднительным.

Здесь мы не приводим аналитических решений для  $G_i(\omega)$ , поскольку данные решения совпадают с результатами определения спектральной плотности для системы (1) при  $F_{bi} = 0$  и имеют те же недостатки, которые были перечислены выше.

Необходимо отметить, что уравнение (9) не описывает решение системы (19d), (19e) для  $\eta_4$  и  $\eta_5$ , поскольку в ней отсутствует подкачка энергии ( $\delta T_i = 0$ ,  $T_i = T_i^0 \equiv T$ ). Тем не менее задачу можно решить способом, описанным в разд. 3. При этом для системы уравнений (19d), (19e)  $A_3 = 12\nu T/M$ , а  $C_0 \equiv A_1 = 2\langle\eta_4^2\rangle$  или  $C_0 \equiv A_1 = 2\langle\eta_5^2\rangle$  в зависимости от смещений «квазичастиц». (Здесь под «квазичастицей» рассматривается совокупность частиц и их взаимных смещений  $\eta_4$  и  $\eta_5$ .) Значения  $\langle\eta_4^2\rangle$  и  $\langle\eta_5^2\rangle$  также подчиняются уравнению (4с) с учетом температур «квазичастиц»,  $T_{\eta_4} = T_{\eta_5} \equiv 6T$ , и корреляционной функции их скоростей,

$$\langle V_{\eta_4} V_{\eta_5} \rangle = 4T \equiv \frac{6T(a_{21} - a_{12})}{M(a_{11} - a_{22})},$$

где

$$a_{11} = Q\beta/M - 3b_{13} - b_{12} - b_{14},$$

$$a_{22} = Q\beta/M - 3b_{23} - b_{12} - b_{14}, \quad a_{12} = 2b_{23} - b_{12} - b_{14},$$

$$a_{21} = 2b_{13} - b_{12} - b_{14},$$

см. (19d), (19e).

Спектральные плотности  $S_{\eta k}(\omega)$  для рассматриваемых смещений  $\eta_k$  ( $k = 1 \div 5$ ) связаны с функциями  $S_k(\omega)$  следующими соотношениями:

$$S_{\eta 1} = 5S_1, \quad (20a)$$

$$S_{\eta 3} + S_{\eta 4} = 2(S_3 + S_4), \quad (20b)$$

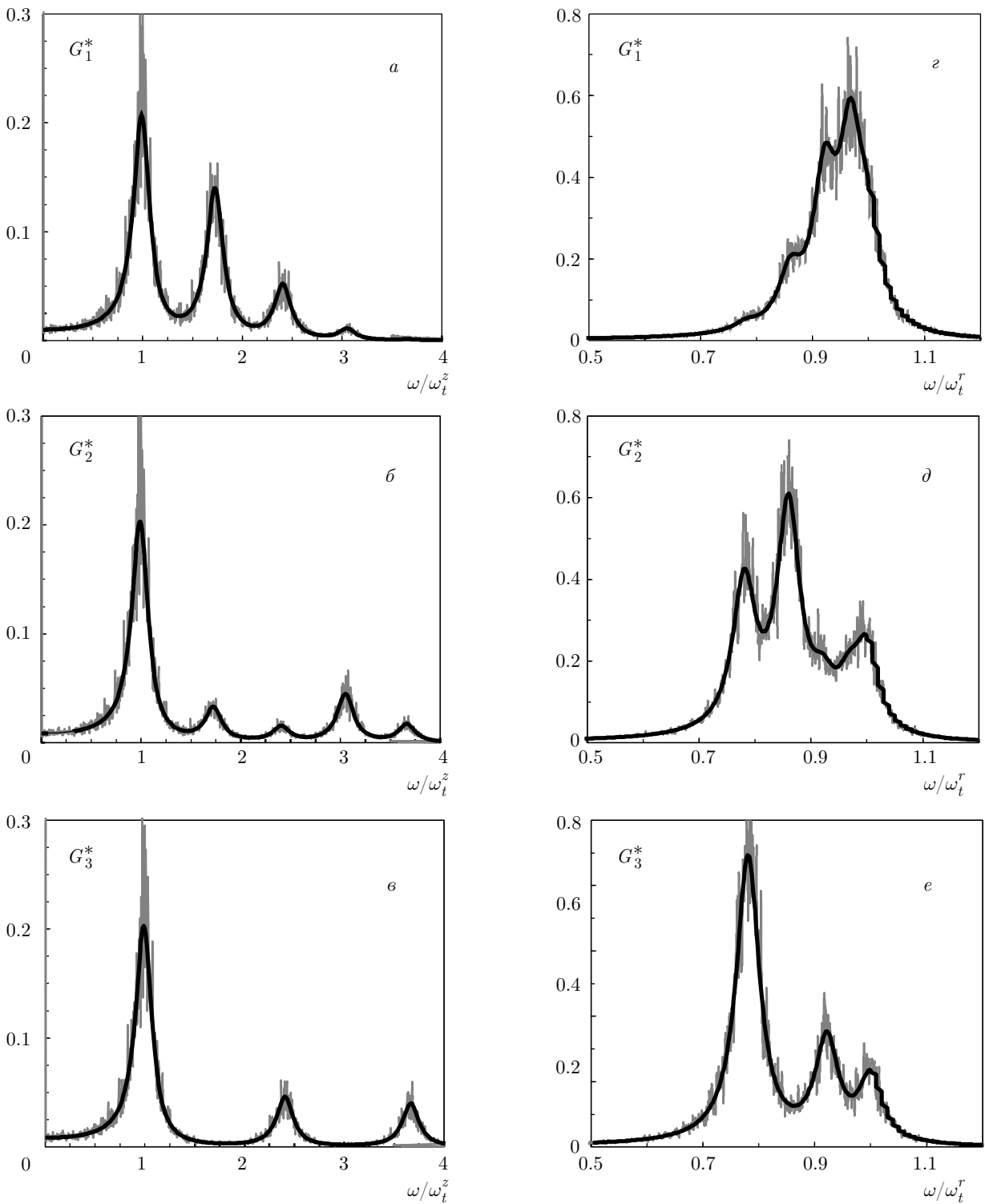
$$S_{\eta 4} + S_{\eta 5} = 6(C_1 S_4 + C_2 S_5), \quad (20c)$$

где  $C_1 = 2/3$ ,  $C_2 = 4/3$  для вертикальных смещений частиц и  $C_1 = 4/3$ ,  $C_2 = 2/3$  для их радиальных смещений.

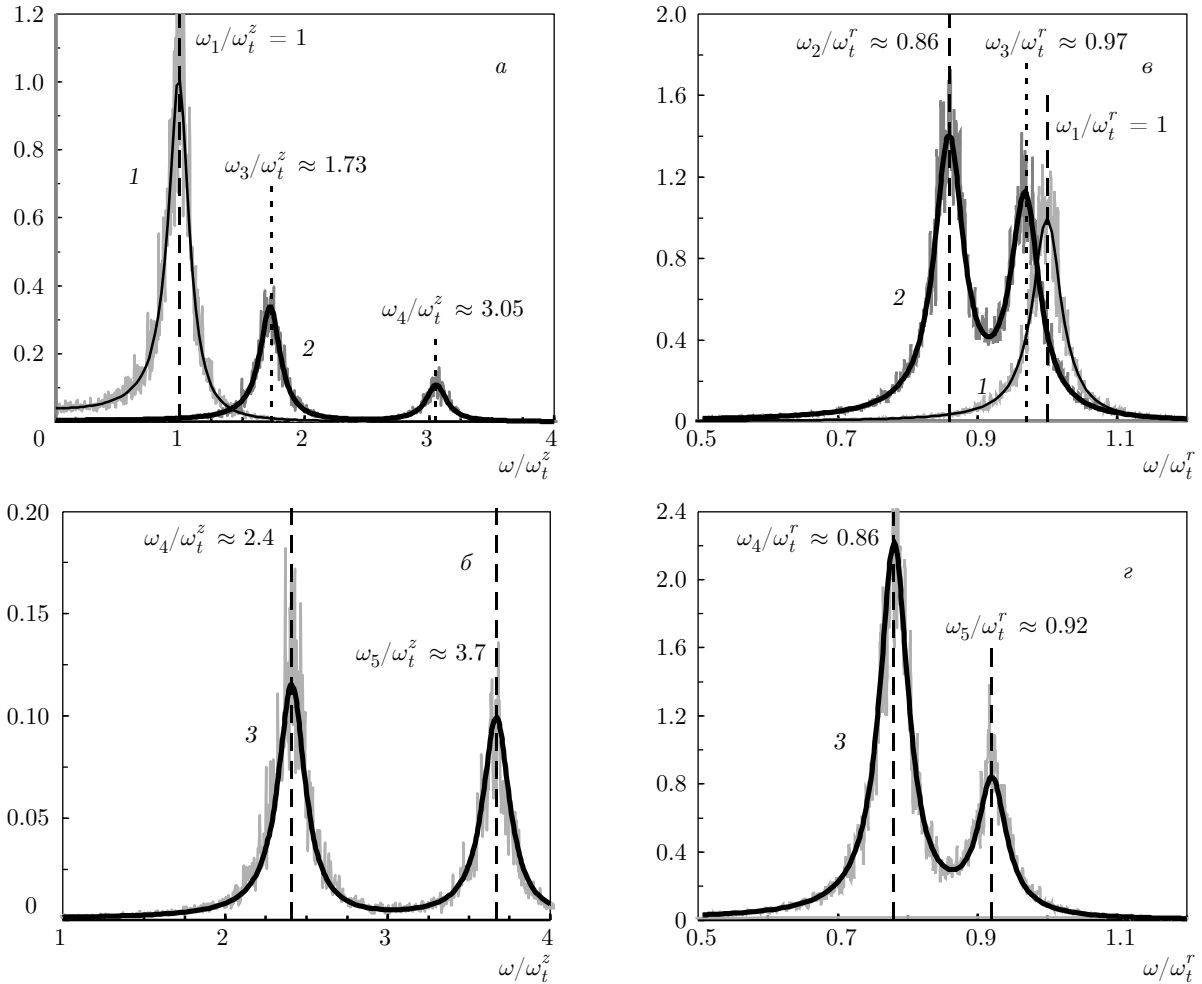
Нормированные функции  $S_{\eta k}^*(\omega) = S_{\eta k}(\omega)/B$  для системы из пяти частиц с кулоновским взаимодействием представлены на рис. 10 при  $\nu = 2 \text{ с}^{-1}$  и  $\beta^r/\beta^z = 16$ . Еще раз подчеркнем, что измерение смещений  $\eta_k$  в ходе реальных экспериментов с последующим вычислением их спектральных плотностей  $S_{\eta k}(\omega)$  позволяет определить и коэффициент трения частиц  $\nu$ , и основные гармоники системы  $\omega_k$ .

#### 4.4. Обсуждение результатов

По результатам настоящей работы можно предположить, что для случая ограниченной цепочки,



**Рис. 9.** Функции  $G_i^*(\omega)$  для вертикальных (*a-e*) и радиальных (*z-e*) смещений частиц при  $\beta^r/\beta^z = 16$ ,  $\omega_t^z = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_t^r = 40 \text{ с}^{-1}$  и  $\nu = 2 \text{ с}^{-1}$ . Черными линиями показаны результаты определения спектральной плотности для системы (1) при  $F_{bi} = 0$ , серыми — результаты численного моделирования



**Рис. 10.** Функции  $S_{\eta k}^*(\omega) = S_{\eta k}(\omega)/B$  при  $\beta^r/\beta^z = 16$ ,  $\omega_t^z = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_t^r = 40 \text{ с}^{-1}$  и  $\nu = 2 \text{ с}^{-1}$  для вертикальных (а, б) и радиальных (в, г) смещений частиц: 1 —  $S_{\eta 1}^*/5 = S_1^*$ , 2 —  $(S_{\eta 2}^* + S_{\eta 3}^*)/2 \equiv S_2^* + S_3^*$ , 3 —  $(S_{\eta 4}^* + S_{\eta 5}^*)/6 \equiv C_1 S_4^* + C_2 S_5^*$ . Черными линиями показаны аналитические решения задачи, серыми — результаты моделирования

состоящей из идентичных частиц с попарным взаимодействием, процедуру вычисления спектральной плотности для смещений каждой из частиц  $G_i(\omega)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) можно свести к определению суперпозиции спектральных плотностей  $S_k = S_k(\omega, \nu, \omega_k)$  для отдельных гармоник системы  $\omega_k$ :

$$G_i(\omega) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{2\nu T/M}{\omega^4 + (\nu^2 - 2\omega_k^2)\omega^2 + \omega_k^4} \equiv \sum_{k=1}^N A_k S_k, \quad (21)$$

где  $A_k$  — некоторые коэффициенты,  $N$  — число частиц.

При этом для такой системы коэффициент трения частиц  $\nu$  и частоту ловушки  $\omega_t = \omega_t^{z(r)} \equiv$

$\equiv (Q\beta^{z(r)}/M)^{1/2}$  (а, соответственно, и величины градиентов внешнего поля,  $\beta^z$  и  $\beta^r$ ) в реальном эксперименте легко определить из измерений спектральной плотности для суммы их смещений,  $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$ , которая пропорциональна смещению центра масс системы. Для определения других гармоник системы,  $\omega_k \neq \omega_t$ , можно использовать как измерения спектральных плотностей для отдельных частиц  $G_i(\omega)$ , так и измерения спектральных плотностей для их взаимных смещений  $\xi_i - \xi_j$ ; здесь  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  и  $i \neq j$ . Последняя процедура является предпочтительней, поскольку с ростом коэффициента трения частиц  $\nu$  или радиальной частоты ловушки  $\omega_t^r$  экспериментальный анализ спектра частот для отдельных частиц,  $G_i(\omega)$ , становится затруднительным.

Добавим также, что измерение вертикальных и радиальных смещений в цепочке заряженных частиц дает информацию о силах межчастичного взаимодействия  $F_{ij} = F(l_{ij})$  и их производных  $F'_{ij}$ , что, в свою очередь, позволяет определить характер и тип потенциала взаимодействия между частицами системы. Расстояние между частицами как в численных, так и в реальных экспериментах легко измеряется и в случае численного моделирования полностью соответствует аналитическим уравнениям баланса сил, см. (15), (18).

Еще раз отметим, что значения характерных частот частиц,  $\omega_k$ , и спектральной плотности их смещений,  $G_i(\omega, \nu, \omega_k)$ , в системе из любого количества  $N$  взаимодействующих частиц можно получить численно на основе существующих программных пакетов, которые используют различные методики для вычисления указанных спектральных характеристик для уравнений (1) при  $F_{bi} = 0$ . Однако использование простых аналитических соотношений существенно сокращает время, необходимое для обращения экспериментальных данных.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены результаты аналитических и численных исследований спектральных характеристик стохастического движения для малоразмерных цепочечных структур (состоящих из нескольких частиц, взаимодействующих с произвольным попарным потенциалом) в анизотропном электрическом поле ловушки. Предложены соотношения для спектральной плотности смещений частиц в таких системах. Рассмотрены характерные частоты частиц и способ их аналитического вычисления.

Результаты настоящей работы применимы для систем при любом типе попарных взаимодействий, а также могут быть адаптированы для случая непопарных (невзаимных) потенциалов. Полученные результаты могут быть полезны для разработки новых методов диагностики физических свойств пылевой плазмы.

**Финансирование.** Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 18-38-20175), а также Программой Президиума Российской академии наук.

## ЛИТЕРАТУРА

1. О. С. Ваулина, О. Ф. Петров, В. Е. Фортов, А. Г. Храпак, С. А. Храпак, *Пылевая плазма (эксперимент и теория)*, Физматлит, Москва (2009).
2. *Complex and Dusty Plasmas*, ed. by V. E. Fortov and G. E. Morfill, CRC Press (2010).
3. A. Ivlev, G. Morfill, H. Lowen, and C. P. Royall, *Complex Plasmas and Colloidal Dispersions: Particle-Resolved Studies of Classical Liquids and Solids*, World Sci., Singapore (2012).
4. *Photon Correlation and Light Beating Spectroscopy*, ed. by H. Z. Cummins and E. R. Pike, Plenum, New York (1974).
5. R. Balescu, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Wiley Interscience, Chichester (1975).
6. А. А. Овчинников, С. Ф. Тимашев, А. А. Белый, *Кинетика диффузионно-контролируемых химических процессов*, Химия, Москва (1986).
7. О. С. Ваулина, К. Г. Адамович, ЖЭТФ **133**, 1091 (2008).
8. О. С. Ваулина, К. Г. Адамович, О. Ф. Петров, В. Е. Фортов, ЖЭТФ **134**, 367 (2008).
9. E. A. Lisin, R. A. Timirkhanov, O. S. Vaulina, O. F. Petrov, and V. E. Fortov, *New J. Phys.* **15**, 053004 (2013).
10. O. S. Vaulina and E. A. Lisin, *Phys. Plasmas* **16**, 113702 (2009).
11. В. Е. Фортов, О. Ф. Петров, О. С. Ваулина, К. Г. Косс, Письма в ЖЭТФ **97**, 366 (2013).
12. G. A. Hebner, M. E. Riley, and K. E. Greenberg, *Phys. Rev. E* **66**, 046407 (2002).
13. O. S. Vaulina and I. E. Drangevski, *Phys. Scripta* **73**, 577 (2006).
14. Ю. П. Райзер, *Физика газового разряда*, Наука, Москва (1987).
15. W.-T. Juan, Z.-H. Huang, J.-W. Hsu, Y.-J. Lai, and L. I, *Phys. Rev. E* **58**, 6947 (1998).
16. O. Ishihara, T. Kamimura, K. I. Hirose, and N. Sato, *Phys. Rev. E* **66**, 046406 (2002).
17. M. Klindworth, A. Melzer, A. Piel, and V. A. Schweigert, *Phys. Rev. B* **61**, 8404 (2000).
18. A. Melzer, M. Klindworth, and A. Piel, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 115002 (2001).
19. A. V. Ivlev, J. Bartnick, M. Heinen, C. R. Du, V. Nosenko, and H. Löwen, *Phys. Rev. X* **5**, 011035 (2015).
20. О. С. Ваулина, И. И. Лисина, К. Г. Косс, *Физика плазмы* **39**, 455 (2013).
21. I. I. Lisina and O. S. Vaulina, *Europhys. Lett.* **103**, 55002 (2013).

22. A. K. Mukhopadhyay and J. Goree, Phys. Rev. E **90**, 013102 (2014).
23. О. С. Ваулина, Э. А. Саметов, ЖЭТФ **154**, 407 (2018).
24. Ю. Л. Климонтович, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1982).
25. А. А. Воронов, *Теория автоматического управления*, ч. 2, Высш. школа, Москва (1986).
26. Е. А. Лисин, О. С. Ваулина, ЖЭТФ **142**, 1077 (2012).
27. Е. А. Лисин, О. С. Ваулина, О. Ф. Петров, ЖЭТФ **151**, 791 (2017).
28. Э. А. Саметов, Е. А. Лисин, О. С. Ваулина, ЖЭТФ **157**, 552 (2020).
29. Э. А. Саметов, Е. А. Лисин, О. С. Ваулина, Вестник ОИВТ **2**, 33 (2019).
30. J. B. Pieper and J. Goree, Phys. Rev. Lett. **77**, 3137 (1996).
31. A. Homann, A. Melzer, and A. Piel, Phys. Rev. E **59**, 3835 (1996).
32. K. Qiao, Z. Ding, J. Kong, M. Chen, L. S. Matthews, and T. W. Hyde, arXiv:1810.07173 (2018).
33. R. Yousefi, M. Chen, L. S. Matthews, and T. W. Hyde, arXiv:1607.03177 (2016).
34. О. С. Ваулина, Е. А. Лисин, А. В. Гавриков, О. Ф. Петров, В. Е. Фортов, ЖЭТФ **137**, 751 (2010).
35. E. A. Lisin, O. S. Vaulina, and O. F. Petrov, Phys. Plasmas **25**, 013702 (2018).
36. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев, *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов*, Наука, Москва (1986).
37. О. С. Ваулина, К. Г. Адамович, И. Е. Дранжевский, Физика плазмы **31**, 612 (2005).
38. О. С. Ваулина, И. И. Лисина, Е. А. Лисин, Физика плазмы **44**, 229 (2018).
39. O. S. Vaulina, Phys. Plasmas **24**, 023705 (2017).
40. О. С. Ваулина, ЖЭТФ **151**, 982 (2017).