ЖЭТФ, 2020, том 158, вып. 2 (8), стр. 374–394

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТРЕХМЕРНЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ТЕЧЕНИЯХ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ БУССИНЕСКА

М. А. Федотова [a*], ***А. С. Петросян*** [a,b]

[a] *Институт космических исследований Российской академии наук 117997, Москва, Россия*

[b] *Московский физико-технический институт 141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 20 декабря 2019 г.,
после переработки 3 февраля 2020 г.
Принята к публикации 4 февраля 2020 г.

Исследуются магнитогидродинамические волны в стратифицированной вращающейся плазме в поле силы тяжести в приближении Буссинеска. Развита теория течений на f-плоскости, на нестандартной f-плоскости (с учетом горизонтальной компоненты силы Кориолиса), на β-плоскости и на нестандартной β-плоскости. В каждом рассматриваемом случае получены линейные решения систем трехмерных магнитогидродинамических уравнений в приближении Буссинеска, описывающие магнитные инерционно-гравитационные волны, магнитострофические волны и волны магнито-Россби. С использованием дисперсионных уравнений найдены все существующие типы трехволновых взаимодействий. Для случая волн магнито-Россби в приближении β-плоскости показана эквивалентность низкочастотной моды волны магнито-Россби в приближении Буссинеска и в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды. Методом многомасштабных разложений получена система амплитудных уравнений для взаимодействующих волн и инкременты двух типов неустойчивости, имеющих место в системе: распада и усиления. Для каждого из найденных типов трехволновых взаимодействий показано различие в коэффициентах и дифференциальных операторах в системе трехволновых взаимодействий.

DOI: 10.31857/S0044451020080155

1. ВВЕДЕНИЕ

Большая часть объектов, наблюдаемых во Вселенной, находится в состоянии плазмы. Изучением плазменных объектов и сред за пределами земной атмосферы занимается такая наука, как плазменная астрофизика. Она включает в себя область астрофизики (при изучении объектов вне солнечной системы) и область космической физики (при изучении процессов на Солнце). Настоящая работа посвящена изучению волновых процессов в астрофизической плазме.

Отметим целый ряд новых приложений, возникших в последние годы, которые делают актуальной задачу изучения крупномасштабных магнитогидродинамических течений, например в тонком слое внутри Солнца [1–4], находящемся под конвективной зоной (солнечный тахоклин), при аккреции вещества на нейтронные звезды [5–7], а также в динамике атмосфер нейтронных звезд и магнитоактивных атмосфер экзопланет, захваченных приливами несущей звезды [8]. Практически, речь идет о развитии фундаментальных основ магнитной гидродинамики вращающейся плазмы для понимания широкого класса астрофизических объектов.

Одной из ключевых приближенных магнитогидродинамических моделей для описания крупномасштабных процессов во вращающихся течениях астрофизической плазмы, в том числе для перечисленных выше явлений, является модель мелкой воды. Магнитогидродинамические уравнения в приближении мелкой воды играют такую же важную роль в космической и астрофизической плазме, как и классические уравнения мелкой воды в гидродинамике нейтральной жидкости. Большое количество ра-

* E-mail: fedotova.maria@gmail.com

бот было посвящено изучению волн в магнитогидродинамическом приближении мелкой воды [9–27], в особенности волнам магнито-Россби. Такие волны определяют крупномасштабную динамику солнца и звезд [1, 21, 22], динамику магнитоактивных атмосфер экзопланет, захваченных приливами от несущей звезды [8], течений в аккреционных дисках нейтронных звезд [5]. Крупномасштабные волны Россби в нейтральной жидкости определяют глобальную динамику планетных атмосфер и являются предметом исследований в геофизической гидродинамике [23–25, 28]. Отметим также первые экспериментальные результаты по обнаружению волн Россби на Солнце [26, 29, 30].

Течения в плазменной астрофизике, так же как и течения в геофизике, как правило, являются стратифицированными. Учет стратификации в магнитогидродинамических моделях вращающейся плазмы важен для анализа множества астрофизических объектов и явлений, например процессов в солнечном тахоклине, устойчиво-стратифицированных областей в недрах звезд (излучающей зоны) и планет (внешний жидкий слой ядра) [31, 32], осцилляций вращающихся звезд и Солнца [33–36], астрофизических дисков [37], экзопланет [38]. Кроме того, учет стратификации позволяет существенно расширить возможности для интерпретации имеющихся данных наблюдений крупномасштабных волн Россби на Солнце [1, 22, 29]. Полная система уравнений магнитной гидродинамики вращающейся стратифицированной плазмы в поле силы тяжести представляет собой практически неразрешимую проблему как для аналитического исследования, так и для численного моделирования.

В работе [39] мы получили магнитогидродинамические уравнения мелкой воды во внешнем магнитном поле, которые учитывают стратификацию в модели двух слоев плазмы различной, но постоянной плотности. На основе данной модели были получены линейные волны магнито-Россби, найдены поправки к ним, связанные с различием в плотностях слоев, показано влияние стратификации в данной модели на групповые и фазовые скорости полученных волн, развита слабонелинейная теория волн магнито-Россби и предсказаны параметрические неустойчивости на основе полученных амплитудных уравнений трех взаимодействующих волн. Однако магнитогидродинамическая теория мелкой воды является двумерной, что исключает не только вертикальные компоненты скоростей и магнитного поля, но и учет вертикального изменения их горизонтальных составляющих. Таким образом, не являясь трехмерной, магнитогидродинамическая система уравнений в приближении мелкой воды не может полностью описывать важный для астрофизики случай устойчиво и непрерывно стратифицированного слоя плазмы.

В настоящей работе сделан существенный шаг вперед в изучении трехмерных волновых процессов в магнитогидродинамических течениях вращающейся стратифицированной плазмы, являющийся принципиальным для реальных течений с непрерывной стратификацией. Как хорошо известно, в геофизической гидродинамике стратифицированных вращающихся течений возникают инерционно-гравитационные волны [40] вследствие двух восстанавливающих механизмов — вращения и стратификации. В рассматриваемом нами случае магнитных течений волновая картина гораздо богаче вследствие наличия дополнительной восстанавливающей силы, а именно, силы Лоренца, наряду с силой Кориолиса и силой плавучести. Кроме того, учет трехмерности позволяет детально исследовать волновые процессы в магнитогидродинамике стратифицированной плазмы с учетом горизонтальной составляющей силы Кориолиса, что является особенно принципиальным при изучении экваториальных течений. Отметим, что волны Россби [34] обнаружены именно в экваториальной зоне Солнца.

Мы изучаем устойчиво стратифицированный слой астрофизической плазмы во вращающейся системе координат в приближении Буссинеска с линейным профилем плотности. Приближение Буссинеска повсеместно используется для изучения устойчиво-стратифицированных течений как нейтральной жидкости [41–43], так и астрофизической плазмы [44–46]. В нашей работе мы используем трехмерную магнитогидродинамическую систему в приближении Буссинеска с учетом силы Кориолиса в четырех различных приближениях: на f-плоскости, на нестандартной f-плоскости (с учетом горизонтальной составляющей силы Кориолиса), на β-плоскости и на нестандартной β-плоскости. Получены законы дисперсии различных типов магнитных инерционно-гравитационных волн, магнитострофических волн, и волн магнито-Россби, динамика которых определяется силами Лоренца, Кориолиса и плавучести. Для уравнений вращающейся стратифицированной плазмы без учета сферичности (в приближении f-плоскости и нестандартной f-плоскости) найдены дисперсионные соотношения для трехмерных магнитных инерционно-гравитационных волн и трехмерных магнитострофических волн. При распространении найденных волн только вдоль вертикальной компоненты волнового вектора их дисперсионные соотношения описывают два типа магнитных волн, первый из которых является частным случаем магнитных инерционно-гравитационных волн, распространяющихся только по вертикали, а второй — частным случаем магнитострофических волн, распространяющихся только по вертикали.

Кроме того, обнаружено, что аналогичный частный вид имеют и дисперсионные соотношения, описывающие распространение волн с учетом сферичности в первом приближении (на β-плоскости и на нестандартной β-плоскости) вдоль вертикальной компоненты волнового вектора. В частном случае распространения волн в горизонтальной плоскости магнитные инерционно-гравитационные волны превращаются в волны Альфвена, а магнитострофические волны превращаются в магнитогравитационные волны. Кроме того, для волн на нестандартной f-плоскости показано влияние горизонтальной составляющей силы Кориолиса на существование различных типов трехволновых взаимодействий.

Для уравнений вращающейся стратифицированной плазмы в приближениях β-плоскости и нестандартной β-плоскости найдены дисперсионные соотношения для двумерных волн на горизонтальной плоскости, описывающие магнитогравитационные волны, аналогичные волнам на f-плоскости, и различные типы волн магнито-Россби. Кроме того, показано, что в низкочастотном пределе дисперсионное уравнение, описывающее горизонтально распространяющиеся волны в стратифицированных вращающихся течениях в приближении Буссинеска, имеет решение в виде волны магнито-Россби, аналогичное полученному в работах по исследованию магнитогидродинамических течений вращающейся плазмы на β-плоскости в приближении мелкой воды [13, 39]. Дисперсионные кривые для всех найденных типов волн качественно проанализированы для выявления выполнения условия синхронизма, обеспечивающего наличие трехволновых взаимодействий. Для всех найденных типов трехволновых взаимодействий получены амплитудные уравнения и описаны возможные параметрические неустойчивости и найдены их инкременты.

В разд. 2.1 получены дисперсионные соотношения для линейных магнитных инерционно-гравитационных волн и магнитострофических волн в приближении Буссинеска на f-плоскости, а в разд. 2.2 описаны возможные для найденных типов волн трехволновые взаимодействия, удовлетворяющие условию синхронизма, выведены уравнения для амплитуд взаимодействующих волн и получены инкременты двух возможных в данной системе неустойчивостей — распада и усиления. В разд. 3.1 получены дисперсионные соотношения для линейных магнитных инерционно-гравитационных волн и магнитострофических волн в приближении Буссинеска на нестандартной f-плоскости, а в разд. 3.2 описаны возможные для найденных типов волн трехволновые взаимодействия, получены уравнения для амплитуд взаимодействующих волн и инкременты неустойчивостей.

В разд. 4.1 получены дисперсионные соотношения для горизонтальных магнитогравитационных волн и волн магнито-Россби в приближении Буссинеска на β-плоскости, а в разд. 4.2 описаны возможные для найденных типов волн трехволновые взаимодействия, получены уравнения для амплитуд взаимодействующих волн и инкременты неустойчивостей. В разд. 5.1 получены дисперсионные соотношения для горизонтальных магнитогравитационных волн и волн магнито-Россби в приближении Буссинеска на нестандартной β-плоскости, а в разд. 5.2 описаны возможные для найденных типов волн трехволновые взаимодействия, получены уравнения для амплитуд взаимодействующих волн и инкременты неустойчивостей.

2. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ БУССИНЕСКА НА f-ПЛОСКОСТИ

2.1. Магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофические волны в стратифицированных течениях вращающейся плазмы. Линейная теория

Будем исследовать плоские течения несжимаемой вращающейся стратифицированной плазмы в рамках трехмерных магнитогидродинамических уравнений в приближении Буссинеска в геометрии устойчиво стратифицированного слоя с линейным профилем плотности:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{f}\times\mathbf{u} = -\frac{1}{\tilde{\rho}_0}\nabla p + \frac{\rho\mathbf{g}}{\tilde{\rho}_0} - \\ - \frac{1}{4\pi\tilde{\rho}_0}\mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{b}),$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{b} = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{u},\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)_h\rho = -\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}u_z, \qquad (1)\\
&\operatorname{div}\mathbf{u} = 0,
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{u}$ — скорость плазмы, $\mathbf{b}$ — напряженность магнитного поля в плазме, f — параметр Кориолиса, ρ — плотность плазмы, $\tilde{\rho}_0$ — плотность при равновесной температуре, $\bar{\rho}(z) = N^2 z\tilde{\rho}_0/g$ — начальный линейный профиль плотности, обеспечивающий устойчивую стратификацию (N^2 — частота Брента–Вяйсяля), p — давление, $\mathbf{g} = (0,0,-g)$, $(\mathbf{u}\cdot\nabla)h = u_x\frac{\partial}{\partial x} + u_y\frac{\partial}{\partial y}$. Первое уравнение системы — уравнение изменения импульса, второе — уравнение переноса магнитного поля, третье — уравнение изменения плотности, четвертое — условие бездивергентности поля скоростей. Введем следующие переобозначения:

$$
\rho' = \frac{\rho g}{\tilde{\rho}_0}, \quad P = \frac{p}{\tilde{\rho}_0}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{4\pi\tilde{\rho}_0}}.
$$

Исследуем плоские течения несжимающейся вращающейся стратифицированной плазмы в приближении Буссинеска на f-плоскости. В данном приближении параметр Кориолиса имеет вид $\mathbf{f} = (0,0,f_V)$. Запишем стационарное решение, удовлетворяющее системе (1), в виде

$$
\mathbf{q}_0 = (u_{x0}, u_{y0}, u_{z0}, B_{x0}, B_{y0}, B_{z0}, P_0, \bar{\rho})^T, \qquad (2)
$$

где $\mathbf{u}_0 = 0$, $\mathbf{B}_0 = \mathrm{const}$, $\partial P_0/\partial z = -\bar{\rho}(z)$. Линеаризованная система (1) на фоне стационарного решения (2) имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + \mathbf{f}\times\mathbf{u}_1 + \nabla P_1 + \rho_1'\hat{\mathbf{z}} +\\
&\qquad + \mathbf{B}_0\times(\nabla\times\mathbf{B}_1) = 0,\\
&\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} - (\mathbf{B}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}_1 = 0, \qquad (3)\\
&\frac{\partial \rho_1'}{\partial t} + N^2 u_{z1} = 0,\\
&\operatorname{div}\mathbf{u}_1 = 0,
\end{aligned}
$$

где $\hat{\mathbf{z}}$ — единичный вектор вдоль оси z.

Ищем решение системы (3) в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1 e^{i\varphi} = (u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}, B_{x1}, B_{y1}, B_{z1}, P_1, \rho_1')^T \times\\
\times \exp\left[i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)\right], \qquad (4)
\end{aligned}
$$

где ω — частота возмущения, а $\mathbf{k}$ — волновой вектор. Условие равенства нулю детерминанта матрицы линеаризованной системы (3) обеспечивает наличие нетривиальных решений. Дисперсионное соотношение для волн во вращающейся стратифицированной плазме в приближении Буссинеска на f-плоскости имеет вид

$$
\begin{aligned}
\omega^4 - \omega^2\left(f_V^2\frac{k_z^2}{k^2} - N^2\frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2\right) +\\
+ (\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2\left((\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2 - N^2\frac{k_h^2}{k^2}\right) = 0, \qquad (5)
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{k}_h = (k_x, k_y)$ — горизонтальная составляющая волнового вектора.

Решениями уравнения (5) являются дисперсионные соотношения, описывающие два типа волн, восстанавливающими силами которых являются сила Лоренца, сила Кориолиса и сила плавучести — трехмерные инерционно-гравитационные волны и трехмерные магнитострофические волны. Рассмотрим подробнее первый тип волн. Дисперсионное соотношение для трехмерных магнитных инерционно-гравитационных волн в приближении Буссинеска имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
\omega_{mig_{3D}} = \pm\Bigg\{\frac{1}{2}\left(f_V^2\frac{k_z^2}{k^2} - N^2\frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2\right) +\\
+ \frac{1}{2k^2}\Bigg[f_V^4 k_z^4 + 4(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^4 f_V^2\frac{k_z^2}{k^2} -\\
- 2f_V^2 k_z^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4\Bigg]^{1/2}\Bigg\}^{1/2}, \qquad (6)
\end{aligned}
$$

в котором знак «+» соответствует волне, распространяющейся по направлению волнового вектора $\mathbf{k}$, а знак «$-$» — волне, распространяющейся в направлении, противоположном $\mathbf{k}$. В отсутствие магнитного поля в системе ($B_0 = 0$) полученный тип волн описывает трехмерные инерционно-гравитационные волны [47], являющиеся точным решением дисперсионного соотношения (5) при $B_0 = 0$:

$$
\omega_{gr_{3D}} = \pm\sqrt{f_V^2\frac{k_z^2}{k^2} - N^2\frac{k_h^2}{k^2}}. \qquad (7)
$$

Отметим, что для инерционно-гравитационных волн в отсутствие магнитного поля (7) выполняется условие перпендикулярности групповой скорости волновому вектору, $\mathbf{v}_{gr}\cdot\mathbf{k} = 0$ [47], в то время как присутствие магнитного поля это условие нарушает.

При распространении магнитных инерционно-гравитационных волн только вдоль вертикальной компоненты k_z волнового вектора $\mathbf{k}$ их дисперсионное соотношение принимает вид

$$
\omega_{z1} = \pm\sqrt{\frac{f_V^2}{2} + B_{0z}^2 k_z^2 + f_V\sqrt{\frac{f_V^2}{4} + B_{0z}^2 k_z^2}}. \qquad (8)
$$

Знак «+» соответствует волнам, распространяющимся в направлении k_z, а знак «−» — волнам, распространяющимся в направлении, противоположном k_z. Динамика полученных волн определяется уже только силой Кориолиса и силой Лоренца. Отметим, что данный тип волн в отсутствие магнитного поля в системе ($B_0 = 0$) описывается дисперсионным соотношением $\omega = \pm f_0$.

При распространении магнитных инерционно-гравитационных волн в плоскости (k_x, k_y) их дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega_A = \pm(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2, \qquad (9)$$

и описывает волны Альфвена, динамика которых определяется только силой Лоренца. Знак «+» соответствует волнам Альфвена, распространяющимся в направлении $\mathbf{k}_h$, а знак «−» — волнам Альфвена, распространяющимся в направлении, противоположном $\mathbf{k}_h$.

Рассмотрим второй тип волн, удовлетворяющих дисперсионному уравнению (5) и не имеющих аналога в гидродинамике нейтральной жидкости. Дисперсионное соотношение для трехмерных магнитострофических волн имеет следующий вид:

$$\omega_{mstr} = \pm\left\{\frac{1}{2}\left(f_V^2\frac{k_z^2}{k^2} - N^2\frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2\right) - \frac{1}{2k^2}\left[f_V^4k_z^4 + 4(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^4 f_V^2\frac{k_z^2}{k^2} - 2f_V^2k_z^2N^2k_h^2 + N^4k_h^4\right]^{1/2}\right\}^{1/2}, \qquad (10)$$

в котором знак «+» соответствует волне, распространяющейся в направлении $\mathbf{k}$, а знак «−» — волне, распространяющейся в направлении, противоположном $\mathbf{k}$. Данный тип волн исчезает в отсутствие магнитного поля.

При распространении магнитострофических волн только вдоль вертикальной компоненты k_z волнового вектора $\mathbf{k}$ их дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega_{z2} = \pm\sqrt{\frac{f_V^2}{2} + B_{0z}^2k_z^2 - f_V\sqrt{\frac{f_V^2}{4} + B_{0z}^2k_z^2}}. \qquad (11)$$

Знак «+» соответствует волнам, распространяющимся в направлении k_z, а знак «−» — волнам, распространяющимся в направлении, противоположном k_z. Динамика полученных волн определяется уже только силой Кориолиса и силой Лоренца.

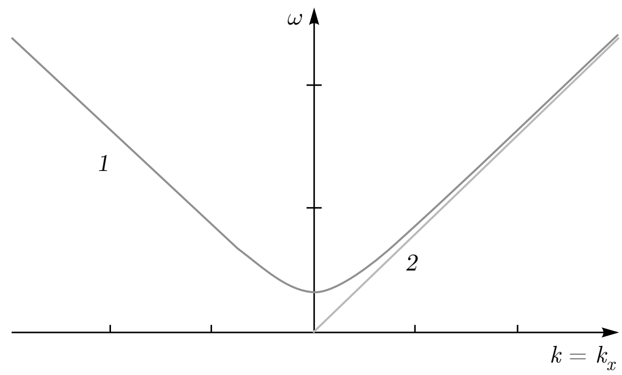

Рис. 1. Дисперсионные кривые: *1* — ω_{mgr}; *2* — ω_A

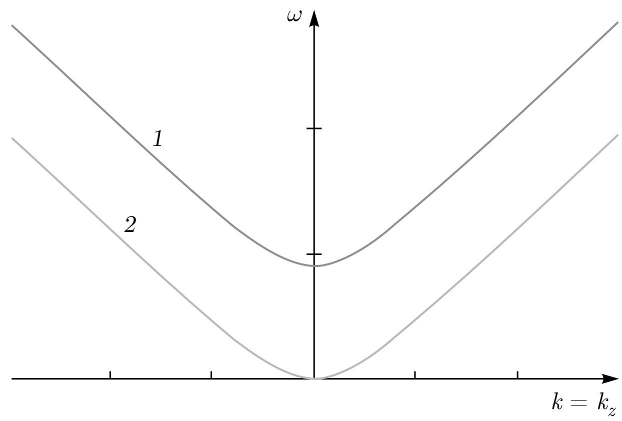

Рис. 2. Дисперсионные кривые: *1* — ω_{z1}; *2* — ω_{z2}

При распространении магнитострофических волн в плоскости (k_x, k_y) их дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega_{mgr} = \pm\sqrt{(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})_h^2 - N^2}, \qquad (12)$$

и описывает магнитогравитационные волны, динамика которых определяется силой Лоренца и силой плавучести. Знак «+» соответствует магнитогравитационным волнам, распространяющимся в направлении $\mathbf{k}_h$, а знак «−» — магнитогравитационным волнам, распространяющимся в направлении, противоположном $\mathbf{k}_h$.

Общий вид дисперсионных кривых для волн на f-плоскости при $\omega > 0$ и $k = k_x$, $k = k_z$ представлен на рис. 1 и 2.

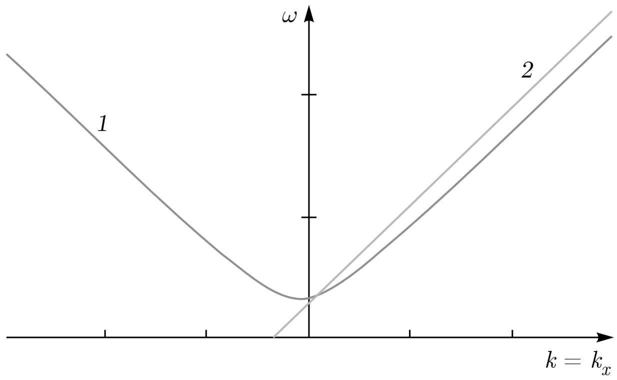

Рис. 3. Условие синхронизма для двух магнитогравитационных волн и одной волны Альфвена: *1* — $\omega = \omega_{mgr}(k_x)$; *2* — $\omega = \omega_A(k_x - k_{x_c}) + \omega_{mgr}(k_{x_c})$

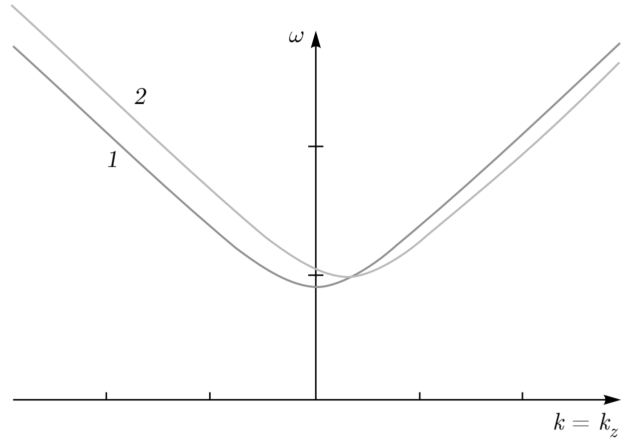

Рис. 4. Условие синхронизма для двух волн с частотами ω_{z1} и одной волны с частотой ω_{z2}: *1* — $\omega = \omega_{z1}(k_z)$; *2* — $\omega = \omega_{z2}(k_z - k_{z_c}) + \omega_{z1}(k_{z_c})$

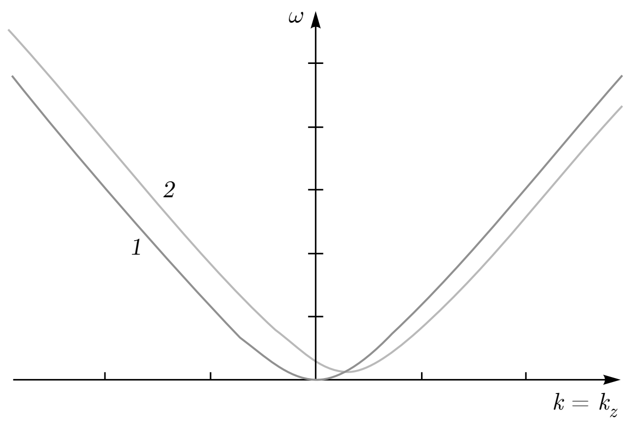

Рис. 5. Условие синхронизма для трех волн с частотами ω_{z2}: *1* — $\omega = \omega_{z2}(k_z)$; *2* — $\omega = \omega_{z2}(k_z - k_{z_c}) + \omega_{z2}(k_{z_c})$

2.2. Трехволновые взаимодействия и параметрические неустойчивости в стратифицированных течениях вращающейся плазмы

Ниже будем исследовать трехволновые взаимодействия волн на f-плоскости. Чтобы оценить возможность существования межволновых взаимодействий для найденных волн, проанализируем их дисперсионные соотношения. Наличие трехволновых взаимодействий определяется выполнением условия синхронизма [48]

$$\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3. \tag{13}$$

Проверим, существует ли трехволновое взаимодействие между двумя магнитогравитационными волнами (12) и волной Альфвена (9). Для этого изобразим дисперсионную кривую для магнитогравитационной волны (12) и смещенную относительно начала координат дисперсионную кривую для волны Альфвена (9). Если две дисперсионные кривые пересекаются в некоторой точке $(\omega(k_3), k_3)$, то это означает выполнение условия синхронизма (13). На рис. 3 показано пересечение дисперсионных кривых двух магнитогравитационных волн (12) и одной волны Альфвена (9).

Для волн, распространяющихся строго по k_z на рис. 4 показано пересечение дисперсионных кривых двух волн с частотами ω_{z1} (8) и одной волны с частотой ω_{z2}, а на рис. 5 — трех волн с частотами ω_{z2} (11).

Таким образом, качественный анализ линейных дисперсионных соотношений показывает возможность существования следующих трехволновых взаимодействий: две магнитогравитационные волны с частотой ω_{mgr} (12) взаимодействуют с волной Альфвена с частотой ω_A (9); две магнитные волны с частотой ω_{z1} (8) взаимодействуют с магнитной волной с частотой ω_{z2} (11); три магнитные волны с частотой ω_{z2} (11) взаимодействуют между собой.

Для анализа слабонелинейных взаимодействий на f-плоскости используем асимптотический метод многомасштабных разложений для системы трехмерных магнитогидродинамических уравнений вращающейся стратифицированной плазмы в приближении Буссинеска (1). Данный метод широко используется для исследования слабонелинейных взаимодействий, поэтому ограничимся кратким изложением вывода амплитудных уравнений и приведем полученные выражения для коэффициентов взаимодействия трех волн. Существенные различия между полученными амплитудными уравнениями для взаимодействующих волн содержатся в дифференциальных операторах и коэффициентах, зависящих от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн. Таким образом, краткий вывод уравнений приведен далее только для случая f-плоскости. Детали применения метода многих масштабов в магнитогидродинамических течениях вращающейся плазмы можно найти в работах [12, 13, 15].

Получим амплитудные уравнения для всех выявленных нелинейных трехволновых взаимодействий, используя метод многомасштабных разложений. Подставим в систему (1) на f-плоскости решение в виде асимптотически сходящегося ряда $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \varepsilon\mathbf{q}_1 + \varepsilon^2\mathbf{q}_2 + \ldots$ по малому параметру ε, характеризующему слабую нелинейность. Здесь $\mathbf{q}_0$ — стационарное решение (2), $\mathbf{q}_1$ — решение линейной системы (3), а $\mathbf{q}_2$ — слагаемое, описывающее эффекты квадратичной нелинейности. Во втором порядке малости по ε получим уравнение для $\mathbf{q}_2$, содержащее резонансные слагаемые, нарушающие условие сходимости ряда ($\varepsilon\mathbf{q}_1 \gg \varepsilon^2\mathbf{q}_2$). Исключим эти слагаемые следующим образом. Введем медленно-меняющуюся амплитуду $\mathbf{q}_1(T_1, X_1, Y_1, Z_1)$ и представим решение в виде суммы трех взаимодействующих волн:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{q}_1(T_1, X_1, Y_1, Z_1) \times \\
&\quad\times \exp\left(i\omega T_0 - ik_x X_0 - ik_y Y_0 - ik_z Z_0\right) = \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mathbf{a}(\mathbf{k}_i)\exp(i\vartheta_i) + \text{c.c.},
\end{aligned} \tag{14}$$

где $\alpha_1 \equiv \phi$, $\alpha_2 \equiv \psi$, $\alpha_3 \equiv \chi$ — амплитуды трех взаимодействующих волн, а взаимосвязь «медленных» переменных (с индексом «1») и «быстрых» (с индексом «0») определена следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial X_1}, \\
&\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial Y_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial Y_1}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial Z_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial Z_1}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Подставим решение в виде суммы трех волн (14) в систему уравнений (1) на f-плоскости с учетом (15). Во втором порядке малости получим систему с резонансными слагаемыми, от которых мы можем избавиться, используя условие совместности, а именно, ортогональность правой части уравнения ядру линейного оператора, стоящего в левой части. Систему во втором порядке малости по ε для квадратичной поправки $\mathbf{q}_2$ запишем в следующем виде:

$$\mathrm{A}\mathbf{q}_2 = -\mathrm{NL}_1(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) - \mathrm{NL}_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1),$$

где A — линейный оператор системы (3) на f-плоскости, зависящий от $\mathbf{q}_0, T_0, X_0, Y_0, Z_0$; оператор NL_1 из правой части включает в себя производные по медленным переменным, а NL_2 — по быстрым. Умножая уравнение на собственный вектор $\mathbf{z}$ оператора A и последовательно выписывая слагаемые в правой части пропорциональные $e^{i\vartheta_1}$, $e^{i\vartheta_2}$ и $e^{i\vartheta_3}$, получим систему для трех взаимодействующих волн:

$$\begin{aligned}
s_1\phi &= f_1\psi^*\chi, \\
s_2\psi &= f_2\phi^*\chi, \\
s_3\chi &= f_3\phi\psi,
\end{aligned} \tag{16}$$

где s_j — дифференциальный оператор по медленным переменным,

$$s_j = r_j\frac{\partial}{\partial T_1} + p_j\frac{\partial}{\partial X_1} + q_j\frac{\partial}{\partial Y_1} + w_j\frac{\partial}{\partial Z_1}, \tag{17}$$

а коэффициенты f_j зависят только от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн. Именно в выражениях для операторов s_j и коэффициентов f_j состоит различие в амплитудных уравнениях (16) для различных типов взаимодействующих волн.

Выпишем полученные выражения для дифференциальных операторов и коэффициентов взаимодействия волн в магнитной гидродинамике стратифицированной вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на f-плоскости. Коэффициент r_j при производной по медленному времени имеет вид

$$r_j = \sum_{i=1}^{3} z_i a_i + z_4 a_8 + \sum_{i=5}^{7} z_i a_{i-1}. \tag{18}$$

Коэффициент p_j при производной по медленной координате X_1 —

$$\begin{aligned}
p_j &= z_1(a_7 + B_{y0}a_5 + B_{z0}a_6) - \\
&\quad - B_{x0}\left(\sum_{i=2}^{3} z_i a_{i+3} + \sum_{i=5}^{7} z_i a_{i-4}\right) + z_8 a_1.
\end{aligned} \tag{19}$$

Коэффициент q_j при производной по медленной координате Y_1 —

$$\begin{aligned}
q_j &= z_2(a_7 + B_{y0}a_5 + B_{z0}a_6) - \\
&\quad - B_{y0}\left(\sum_{i=1}^{2} z_i a_{i+3} + \sum_{i=5}^{7} z_i a_{i-4}\right) + z_8 a_2.
\end{aligned} \tag{20}$$

Коэффициент w_j при производной по медленной координате Z_1 —

$$\begin{aligned}
w_j &= z_3(a_7 + B_{x0}a_4 + B_{y0}a_5) + \rho_0 z_4 a_3 - \\
&\quad - B_{z0}\left(\sum_{i=1}^{2} z_i a_{i+3} + \sum_{i=5}^{7} z_i a_{i-4}\right) + z_8 a_3.
\end{aligned} \tag{21}$$

Коэффициенты f_j, зависящие от начальных условий и характеристик взаимодействующих волн, представим в виде

$$f_j = \sum_{s=1}^{7} z_s \varkappa_{sj}. \quad (22)$$

Выражение (22) содержит семь слагаемых вместо восьми, поскольку $\varkappa_8 = 0$. Для слагаемых в сумме (22) в случае волн на f-плоскости имеем

$$\begin{aligned}\varkappa_{1j} = \big[&-ik_{xn}(a^2_{1_{lm}} + a^2_{5_{lm}} + a^2_{6_{lm}}) + \\ &+ i\gamma k_{ym}(a_{2_{k_l}} a'_{1_{k_m}} - a_{5_{k_l}} a'_{4_{k_m}}) + \\ &+ ik_{yl}(a'_{5_{k_m}} a_{4_{k_l}} - a'_{2_{k_m}} a_{1_{k_l}}) + \\ &+ i\gamma k_{zm}(a_{3_{k_l}} a'_{1_{k_m}} - a_{6_{k_l}} a'_{4_{k_m}}) + \\ &+ ik_{zl}(a'_{6_{k_m}} a_{4_{k_l}} - a'_{3_{k_m}} a_{1_{k_l}})\Big], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}\varkappa_{2j} = \Big[&i\gamma k_{xm}(a_{1_{k_l}} a'_{2_{k_m}} - a_{4_{k_l}} a'_{5_{k_m}}) + \\ &+ ik_{xl}(a'_{4_{k_m}} a_{5_{k_l}} - a'_{1_{k_m}} a_{2_{k_l}}) - ik_{yn}(a^2_{2_{lm}} + a^2_{4_{lm}} + a^2_{6_{lm}}) + \\ &+ i\gamma k_{zm}(a_{3_{k_l}} a'_{2_{k_m}} - a_{6_{k_l}} a'_{5_{k_m}}) + \\ &+ ik_{zl}(a'_{6_{k_m}} a_{5_{k_l}} - a'_{3_{k_m}} a_{2_{k_l}})\Big], \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}\varkappa_{3j} = \Big[&i\gamma k_{xm}(a_{1_{k_l}} a'_{3_{k_m}} - a_{4_{k_l}} a'_{6_{k_m}}) + \\ &+ ik_{x_l}(a'_{k_m} a_{6_{k_l}} - a'_{1_{k_m}} a_{3_{k_l}}) + \\ &+ i\gamma k_{ym}(a_{2_{k_l}} a'_{3_{k_m}} - a_{5_{k_l}} a'_{6_{k_m}}) + \\ &+ ik_{yl}(a'_{5_{k_m}} a_{6_{k_l}} - a'_{2_{k_m}} a_{3_{k_l}}) - \\ &- ik_{zn}(a^2_{3_{lm}} + a^2_{4_{lm}} + a^2_{5_{lm}})\Big], \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}\varkappa_{4j} = \Big[&i\gamma a'_{8_{k_m}}(k_{xm} a_{1_{k_l}} + k_{ym} a_{2_{k_l}} + k_{zm} a_{3_{k_l}}) - \\ &- ia_{8_{k_l}}(k_{xl} a'_{1_{k_m}} + k_{yl} a'_{2_{k_m}} + k_{zl} a'_{3_{k_m}})\Big], \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}\varkappa_{5j} = \Big[&i(\gamma k_{xm} + k_{xl})\hat{a}_{14_{lm}} + \\ &+ i\gamma k_{ym}(a_{2_{k_l}} a'_{4_{k_m}} - a_{5_{k_l}} a'_{1_{k_m}}) + \\ &+ ik_{yl}(a'_{5_{k_m}} a_{1_{k_l}} - a'_{2_{k_m}} a_{4_{k_l}})\Big], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}\varkappa_{6j} = \Big[&i\gamma k_{xm}(a_{1_{k_l}} a'_{5_{k_m}} - a_{4_{k_l}} a'_{2_{k_m}}) + \\ &+ ik_{xl}(a'_{4_{k_m}} a_{2_{k_l}} - a'_{1_{k_m}} a_{5_{k_l}}) + i(\gamma k_{ym} + k_{yl})\hat{a}_{25_{lm}} + \\ &+ i\gamma k_{zm}(a_{3_{k_l}} a'_{5_{k_m}} - a_{6_{k_l}} a'_{2_{k_m}}) + \\ &+ ik_{zl}(a'_{6_{k_m}} a_{2_{k_l}} - a'_{3_{k_m}} a_{5_{k_l}})\Big], \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}\varkappa_{7j} = \Big[&i\gamma k_{xm}(a_{1_{k_l}} a'_{6_{k_m}} - a_{4_{k_l}} a'_{3_{k_m}}) + \\ &+ ik_{xl}(a'_{4_{k_m}} a_{3_{k_l}} - a'_{1_{k_m}} a_{6_{k_l}}) + \\ &+ \gamma k_{ym}(a_{2_{k_l}} a'_{6_{k_m}} - a_{5_{k_l}} a'_{3_{k_m}}) + \\ &+ ik_{yl}(a'_{5_{k_m}} a_{3_{k_l}} - a'_{2_{k_m}} a_{6_{k_l}}) + \\ &+ i(\gamma k_{zm} + k_{zl})\hat{a}_{36_{lm}}\Big]. \end{aligned} \quad (29)$$

В выражениях (23)–(29) использованы следующие обозначения:

$$a^2_{i_{lm}} = a_{i_{k_l}} a'_{i_{k_m}}, \quad a_{i,ii_{lm}} = a_{i_{k_l}} a'_{ii_{k_m}} + a_{ii_{k_l}} a'_{i_{k_m}},$$

$$\hat{a}_{i,ii_{lm}} = a_{i_{k_l}} a'_{ii_{k_m}} - a_{ii_{k_l}} a'_{i_{k_m}}.$$

Индексы в коэффициентах f_j связаны следующим образом: когда индекс $j = 1$, то индекс $l = 3$, индекс $m = 2$, индекс $n = 1$, $\gamma = 1$, индекс «$'$» (штрих) $\to$ «$*$» (комплексное сопряжение); когда индекс $j = 2$, то индекс $l = 3$, индекс $m = 1$, индекс $n = 2$, $\gamma = 1$, индекс «$'$» (штрих) $\to$ «$*$» (комплексное сопряжение); когда индекс $j = 3$, то индекс $l = 1$, индекс $m = 2$, индекс $n = 3$, $\gamma = -1$, а индекс «$'$» снимается.

В приближении f-плоскости при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_h$ взаимодействуют две магнитогравитационные волны и волна Альфвена. В таком случае индекс $j = 1$ соответствует волне Альфвена, а индексы $j = 2$, $j = 3$ — магнитогравитационным волнам. При $k = k_z$ взаимодействуют либо две волны с частотой ω_{z1} и одна волна с частотой ω_{z2}, либо три волны с частотами ω_{z2}. В первом случае индекс $j = 1$ соответствует волне с частотой ω_{z2}, а индексы $j = 2$, $j = 3$ соответствуют волнам с частотой ω_{z1}. Во втором случае, очевидно, индексы $j = 1$, $j = 2$, $j = 3$ соответствуют волнам с частотой ω_{z2}.

Система уравнений (16) является универсальной системой для описания параметрических неустойчивостей трехволновых взаимодействий и для различных случаев различается только коэффициентами взаимодействия и дифференциальными операторами. Таким образом, можно говорить о реализации двух типов параметрических неустойчивостей [12, 13, 15] в магнитогидродинамических течениях стратифицированной вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на f-плоскости. Первый — распад волны (магнитогравитационной волны; магнитной волны, распространяющейся вертикально с частотой ω_{z1}; магнитной волны, распространяющейся вертикально с частотой ω_{z2}) с волновым вектором $\mathbf{k}_1$ и частотой $\omega(\mathbf{k}_1)$ на две волны (волна Альфвена и магнитогравитационная волна; магнитная волна, распространяющаяся вертикально с частотой ω_{z2} и магнитная волна, распространяющаяся вертикально с частотой ω_{z1}; две магнитные волны, распространяющиеся вертикально с частотами ω_{z2}) с волновыми векторами $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$, частотами $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$ и инкрементом неустойчивости $\Gamma = \sqrt{|f_2 f_3|/|r_2 r_3|}|\phi_0| > 0$ реализуется, когда в начальный момент времени амплитуда одной из волн много больше двух других ($\phi = \phi_0 \gg \psi, \chi$).

Второй тип параметрической неустойчивости — усиление волны (волна Альфвена и магнитогравитационная волна; магнитная волна, распространяющаяся вертикально с частотой ω_{z2} и магнитная волна, распространяющаяся вертикально с частотой ω_{z1}; две магнитные волны, распространяющиеся вертикально с частотами ω_{z2}) с волновым вектором $\mathbf{k}_1$ и частотой $\omega(\mathbf{k}_1)$ двумя волнами (волной Альфвена и магнитогравитационной волной; магнитной волной, распространяющейся вертикально с частотой ω_{z2} и магнитной волной, распространяющейся вертикально с частотой ω_{z1}; двумя магнитными волнами, распространяющимися вертикально с частотами ω_{z2}) с волновыми векторами $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$, частотами $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$ и коэффициентом усиления $\Gamma = (|f_1|/|r_1|)|\psi_0\chi_0| > 0$ реализуется, когда в начальный момент времени амплитуда одной из волн много меньше двух других ($\phi \ll \psi = \psi_0, \chi = \chi_0$).

Таким образом, магнитогидродинамические течения вращающейся плазмы в приближении Буссинеска в устойчиво стратифицированном слое с линейным профилем плотности на f-плоскости включают трехмерные магнитные инерционно-гравитационные волны и трехмерные магнитострофические волны. Показано, что в частном случае горизонтальных течений магнитные инерционно-гравитационные волны превращаются в волны Альфвена, а магнитострофические волны превращаются в магнитогравитационные волны. Для них исследовано трехволновое взаимодействие двух магнитогравитационных волн и одной волны Альфвена. Также найден частный вид магнитных инерционно-гравитационных и магнитострофических волн в случае распространения только по вертикали, для которых исследованы два типа трехволновых взаимодействий.

3. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ БУССИНЕСКА НА НЕСТАНДАРТНОЙ *f*-ПЛОСКОСТИ

3.1. Магнитные инерционно-гравитационные и магнитострофические волны в стратифицированных течениях вращающейся плазмы. Линейная теория

Будем исследовать плоские течения в рамках линеаризованных уравнений (3) в приближении нестандартной f-плоскости. В изучении вращающихся течений на f-плоскости горизонтальной компонентой вектора силы Кориолиса обычно пренебрегают, однако рост интереса к ее роли в динамике волн на f-плоскости возрос в последнее время в силу того, что она играет ключевую роль в экваториальных течениях, поскольку вертикальная компонента силы Кориолиса на экваторе исчезает [42]. Если в приближении f-плоскости предполагается, что вектор $\mathbf{f}$ направлен строго по вертикали ($\mathbf{f} = (0, 0, f_V)$), то в приближении нестандартной f-плоскости будем полагать небольшое отклонение вектора $\mathbf{f}$ от вертикали. Таким образом, в параметре Кориолиса появляется горизонтальная составляющая: $\mathbf{f} = (0, f_H, f_V)$, где $f_V = 2\Omega\sin\theta$, $f_H = 2\Omega\cos\theta$, Ω — угловая скорость вращения, а θ — широта. Стационарное решение (2) удовлетворяет системе (1) в приближении нестандартной f-плоскости. Решением линеаризованной системы (3) на нестандартной f-плоскости будет дисперсионное соотношение

$$\omega^4 - \omega^2\left(\frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - N^2\frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2\right) + (\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2\left((\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2 - N^2\frac{k_h^2}{k^2}\right) = 0, \quad (30)$$

где $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, $k_h^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Решениями уравнения (30) являются дисперсионные соотношения, которые аналогичны полученным в разд. 2 уравнениям (6), (10) и описывают два типа волн: трехмерные инерционно-гравитационные волны и трехмерные магнитострофические волны. Дисперсионное соотношение для трехмерных магнитных инерционно-гравитационных волн в приближении Буссинеска на нестандартной f-плоскости имеет следующий вид:

$$\omega_{mig_{3D}} = \pm\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - N^2\frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2\right) + \frac{1}{2k^2}\left[(f_H k_y + f_V k_z)^4 + 4(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^4\frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - 2(f_H k_y + f_V k_z)^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4\right]^{1/2}\right\}^{1/2}. \quad (31)$$

При распространении магнитных инерционно-гравитационных волн только вдоль z-компоненты волнового вектора ($k = k_z$) дисперсионное соотношение (31) описывает магнитные волны, аналогичные волнам на f-плоскости (8):

$$\omega_{z1} = \pm\sqrt{\frac{f_V^2}{2} + B_{0z}^2 k_z^2 + f_V\sqrt{\frac{f_V^2}{4} + B_{0z}^2 k_z^2}}. \quad (32)$$

При распространении магнитных инерционно-гравитационных волн в плоскости (k_x, k_y) дисперсионное соотношение (31) принимает вид

$$\omega_{mig'} = \pm\left\{\frac{f_H^2 k_y^2}{2k_h^2} - \frac{N^2}{2} + (\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})_h^2 + \left[\frac{f_H^2 k_y^2}{4k_h^2} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left(\frac{f_H^2 k_y^2}{k_h^2} - 2N^2 + 4(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})_h^2\right) + \frac{N^4}{4}\right]^{1/2}\right\}^{1/2} \quad (33)$$

и описывает двумерные магнитные инерционно-гравитационные волны на нестандартной f-плоскости. В отсутствие магнитного поля дисперсонное соотношение (33) переходит в

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{f_H^2 k_y^2}{k_h^2} - N^2}$$

и описывает двумерные инерционно-гравитационные волны.

Дисперсионное соотношение для трехмерных магнитострофических волн на нестандартной f-плоскости имеет следующий вид:

$$\omega_{mstr} =$$
$$= \pm\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - N^2\frac{k_h^2}{k^2} + 2(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2\right) - \right.$$
$$- \frac{1}{2k^2}\left[(f_H k_y + f_V k_z)^4 + 4(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^4\frac{(f_H k_y + f_V k_z)^2}{k^2} - \right.$$
$$\left.\left. - \; 2(f_H k_y + f_V k_z)^2 N^2 k_h^2 + N^4 k_h^4\right]^{1/2}\right\}^{1/2}. \quad (34)$$

При распространении магнитострофических волн только вдоль z-компоненты волнового вектора $(k = k_z)$ дисперсионное соотношение (34) описывает магнитные волны, аналогичные волнам на f-плоскости (11):

$$\omega_{z2} = \pm\sqrt{\frac{f_V^2}{2} + B_{0z}^2 k_z^2 - f_V\sqrt{\frac{f_V^2}{4} + B_{0z}^2 k_z^2}}. \quad (35)$$

При распространении магнитострофических волн в плоскости (k_x, k_y) дисперсионное соотношение (34) принимает вид

$$\omega_{mstr'} = \pm\left\{\frac{f_H^2 k_y^2}{2k_h^2} - \frac{N^2}{2} + (\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})_h^2 - \left[\frac{f_H^2 k_y^2}{4k_h^2} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left(\frac{f_H^2 k_y^2}{k_h^2} - 2N^2 + 4(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})_h^2\right) + \frac{N^4}{4}\right]^{1/2}\right\}^{1/2} \quad (36)$$

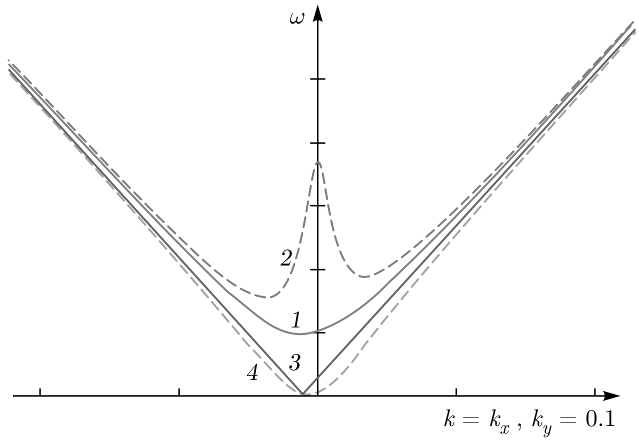

Рис. 6. Дисперсионные кривые: *1* и *3* — магнитная инерционно-гравитационная волна с частотой $\omega_{mig'}(k_x)$ и магнитострофическая волна с частотой $\omega_{mstr'}(k_x)$ при $f_H < 1$; *2* и *4* — магнитная инерционно-гравитационная волна с частотой $\omega_{mig'}(k_x)$ и магнитострофическая волна с частотой $\omega_{mstr'}(k_x)$ при $f_H \gg 1$

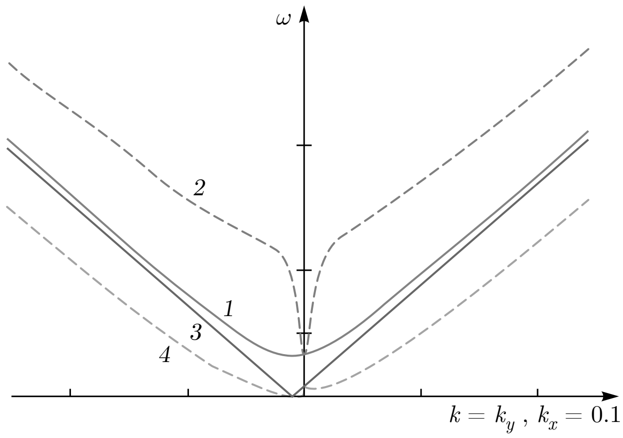

Рис. 7. Дисперсионные кривые: *1* и *3* — магнитная инерционно-гравитационная волна с частотой $\omega_{mig'}(k_y)$ и магнитострофическая волна с частотой $\omega_{mstr'}(k_y)$ при $f_H < 1$; *2* и *4* — магнитная инерционно-гравитационная волна с частотой $\omega_{mig'}(k_y)$ и магнитострофическая волна с частотой $\omega_{mstr'}(k_y)$ при $f_H \gg 1$

и описывает двумерные магнитострофические волны на нестандартной f-плоскости, не имеющие аналога в гидродинамике нейтральной жидкости.

Дисперсионные кривые имеют различный вид в зависимости от порядка величины горизонтальной составляющей f_H параметра Кориолиса. Общий вид дисперсионных кривых при $\omega(k_x) > 0$, $k_y = \text{const}$ и $k_x = \text{const}$ представлены на рис. 6 и 7.

Найденные различия в дисперсионных кривых, связанные с горизонтальной компонентой f_H в

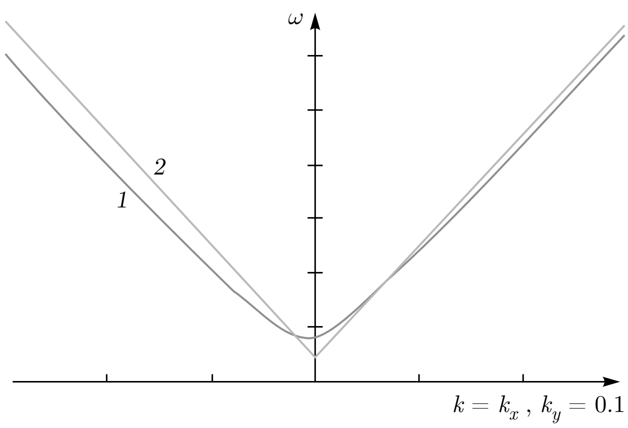

Рис. 8. Условие синхронизма для двух магнитострофических волн с частотами $\omega_{mstr'}$ и одной магнитной инерционно-гравитационной волны с частотой $\omega_{mig'}$ при $f_H < 1$: *1* — $\omega = \omega_{mig'(k_x)}$; *2* — $\omega = \omega_{mstr'}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{mstr'}(k_{x_c})$

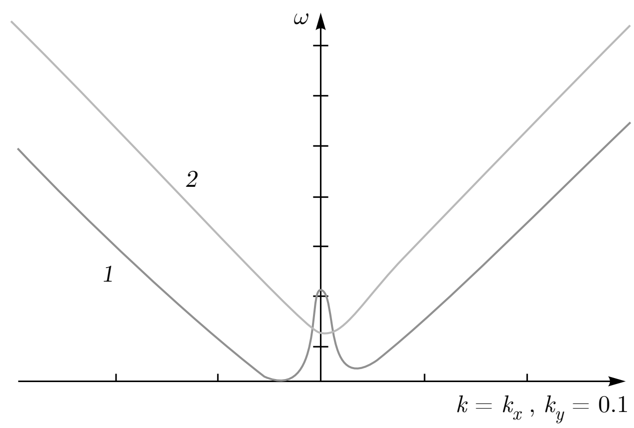

Рис. 9. Условие синхронизма для двух магнитных инерционно-гравитационных волн с частотами $\omega_{mig'}$ и одной магнитострофической волны с частотой $\omega_{mstr'}$ при $f_H \gg 1$: *1* — $\omega = \omega_{mig'}(k_x)$; *2* — $\omega = \omega_{mstr'}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{mig'}(k_{x_c})$

нестандартном приближении f-плоскости, существенно влияют на трехволновые взаимодействия, что будет показано ниже.

3.2. Трехволновые взаимодействия и параметрические неустойчивости в стратифицированных течениях вращающейся плазмы

Исследуем слабонелинейные взаимодействия волн в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на нестандартной f-плоскости. Так же как в разд. 2, проверим выполнение условия синхронизма для полученных в разд. 3.1 волн. Поскольку для нестандартной f-плоскости в частном случае распространения магнитных волн вдоль k_z получены решения, аналогичные решениям на стандартной f-плоскости, для них будут существовать аналогичные трехволновые взаимодействия, а именно, взаимодействие двух магнитных волн с частотой ω_{z1} (8) и магнитной волны с частотой ω_{z2} (11), взаимодействие трех магнитных волн с частотой ω_{z2} (11).

Перейдем далее к анализу дисперсионных кривых для волн в плоскости (k_x, k_y). При малой горизонтальной составляющей f_H силы Кориолиса существует один тип трехволновых взаимодействий как при $k_y = \mathrm{const}$, так и при $k_x = \mathrm{const}$ — возникновение магнитной инерционно-гравитационной волны с частотой $\omega_{mig'}$ (33) при взаимодействии двух магнитострофических волн с частотой $\omega_{mstr'}$ (36). Существование данного типа трехволновых взаимодействий отображено на рис. 8 при $k = k_x$ (аналогичный вид будет иметь условие синхронизма при $k = k_y$).

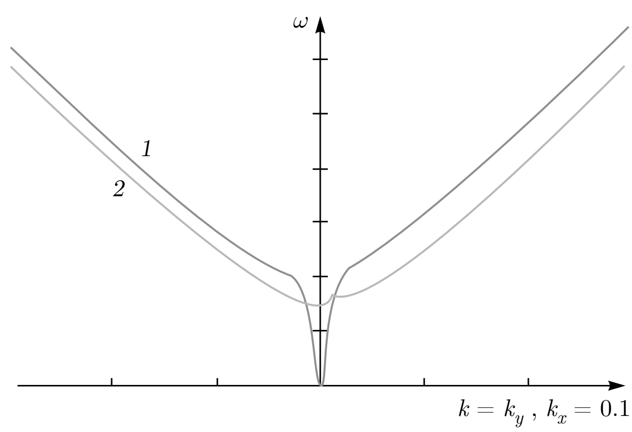

Рис. 10. Условие синхронизма для двух магнитных инерционно-гравитационных волн с частотами $\omega_{mig'}$ и одной магнитострофической волны с частотой $\omega_{mstr'}$ при $f_H \gg 1$: *1* — $\omega = \omega_{mig'}(k_y)$; *2* — $\omega = \omega_{mstr'}(k_y - k_{y_c}) + \omega_{mig'}(k_{y_c})$

Однако при достаточно большом значении f_H вид дисперсионных кривых сильно изменяется, что допускает возникновение еще одного типа трехволновых взаимодействий помимо найденного выше — возникновение магнитной инерционно-гравитационной волны с частотой $\omega_{mig'}$ при взаимодействии магнитной инерционно-гравитационной волны с частотой $\omega_{mig'}$ и магнитострофической волны с частотой $\omega_{mstr'}$. Выполнение условия синхронизма для этих трех взаимодействующих волн показано на рис. 9 для $k = k_x$ и на рис. 10 для $k = k_y$.

Используя метод многомасштабных разложений, описанный в разд. 2, получим систему уравнений для амплитуд взаимодействующих волн на нестандартной f-плоскости:

$$
\begin{aligned}
&s'_1\phi = f'_1\psi^*\chi,\\
&s'_2\psi = f'_2\phi^*\chi,\\
&s'_3\chi = f'_3\phi\psi.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Отметим, что коэффициенты f'_j и дифференциальные операторы s'_j в полученной системе имеют такой же вид, как и коэффициенты f_j (22) и операторы s_j (17) на стандартной f-плоскости и отличаются только собственным вектором $\mathbf{z}$ линейного оператора системы (3).

Таким образом, в нестандартном приближении f-плоскости возникает магнитная инерционно-гравитационная волна с частотой $\omega_{mig'}$ при взаимодействии двух магнитострофических волн с частотами $\omega_{mstr'}$. Кроме того, может возникать магнитная инерционно-гравитационная волна с частотой $\omega_{mig'}$ при взаимодействии магнитной инерционно-гравитационной волны с частотой $\omega_{mig'}$ и магнитострофической волны с частотой $\omega_{mstr'}$ при большом значении k_H. В первом случае индекс $j=1$ соответствует магнитной инерционно-гравитационной волне с частотой $\omega_{mig'}$, а индексы $j=2$, $j=3$ соответствуют магнитострофическим волнам с частотами $\omega_{mstr'}$. Во втором случае индексы $j=1$, $j=2$ соответствуют магнитным инерционно-гравитационным волнам с частотами $\omega_{mig'}$, а индекс $j=3$ соответствует магнитострофической волне с частотой $\omega_{mstr'}$.

В силу универсальности системы уравнений (16) в ней реализуются два типа параметрических неустойчивостей — распад магнитной инерционно-гравитационной волны с волновым вектором $\mathbf{k}_1$ и частотой $\omega(\mathbf{k}_1)$ на две волны (либо магнитострофические, либо магнитную инерционно-гравитационную и магнитострофическую) с волновыми векторами $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$, частотами $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$ и инкрементом неустойчивости $\Gamma = \sqrt{|f'_2f'_3|/|r'_2r'_3|}|\phi_0| > 0$; усиление магнитной инерционно-гравитационной волны с волновым вектором $\mathbf{k}_1$ и частотой $\omega(\mathbf{k}_1)$ двумя волнами (либо магнитострофическими либо магнитной инерционно-гравитационной и магнитострофической) с волновыми векторами $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$, частотами $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$ и коэффициентом усиления $\Gamma = (|f'_1|/|r'_1|)|\psi_0\chi_0| > 0$.

Таким образом, в приближении нестандартной f-плоскости показано влияние горизонтальной компоненты вектора силы Кориолиса на общий вид дисперсионных кривых для магнитных инерционно-гравитационных волн и магнитострофических волн. Кроме того, помимо описанного трехволнового взаимодействия двух магнитострофических волн и одной магнитной инерционно-гравитационной волны при достаточно большой горизонтальной составляющей силы Кориолиса обнаружено и исследовано трехволновое взаимодействие двух магнитных инерционно-гравитационных волн и одной магнитострофической волны.

4. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ БУССИНЕСКА НА β-ПЛОСКОСТИ

4.1. Волны магнито-Россби в стратифицированных течениях вращающейся плазмы. Линейная теория

Исследуем магнитогидродинамические течения стратифицированной вращающейся плазмы с учетом эффектов сферичности в приближении β-плоскости. Считая, что параметр Кориолиса f слабо меняется при малых изменениях широты, разложим его в ряд:

$$
f = 2\Omega\sin\theta \approx 2\Omega\sin\theta_0 + 2\Omega(\theta-\vartheta_0)\cos\theta_0 \approx \approx f_0 + \beta y, \tag{38}
$$

где $f_0 = 2\Omega\sin\vartheta_0$ ($f_0 \equiv f_V$), $\beta = \partial f/\partial y$. Приближение β-плоскости, в отличие от приближения f-плоскости, сохраняет первый порядок малости в разложении параметра Кориолиса.

Система магнитогидродинамических уравнений вращающейся плазмы с линейным профилем плотности в приближении Буссинеска на β-плоскости имеет вид

$$
\frac{\partial^2 u_x}{\partial y\partial t} + \frac{\partial[(\mathbf{u}\cdot\nabla)u_x]}{\partial y} - f_0\frac{\partial u_y}{\partial y} - \beta u_y + \frac{\partial^2 P}{\partial y\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left[B_y\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) + B_z\left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\right] = 0,
$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_y}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)u_y + f_0 u_x + \frac{\partial P}{\partial y} + \\
&+ B_z\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) + B_x\left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x}\right) = 0,\\
&\frac{\partial u_z}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)u_z \frac{\partial P}{\partial z} + \rho' + B_x\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) + \\
&\qquad + B_y\left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\right) = 0,\\
&\frac{\partial B_x}{\partial t} - (\mathbf{B}\cdot\nabla)u_x = 0,\\
&\frac{\partial B_y}{\partial t} - (\mathbf{B}\cdot\nabla)u_y = 0,\\
&\frac{\partial B_z}{\partial t} - (\mathbf{B}\cdot\nabla)u_z = 0,\\
&\frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)_h \rho' + N^2 u_z = 0,\\
&\operatorname{div}\mathbf{u} = 0.
\end{aligned} \tag{39}$$

Стационарное решение, удовлетворяющее системе (39), имеет вид (2).

Запишем линеаризованную систему (39) на фоне стационарного решения (2) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial y \partial t} - f_0 \frac{\partial u_{y1}}{\partial y} - \beta u_{y1} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} + \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial y}\left(B_{y0}\frac{\partial B_{y1}}{\partial x} + B_{z0}\frac{\partial B_{z1}}{\partial x} - \right.\\
&\qquad \left. - B_{y0}\frac{\partial B_{x1}}{\partial y} - B_{z0}\frac{\partial B_{x1}}{\partial z}\right) = 0,\\
&\frac{\partial u_{y1}}{\partial t} + f_0 u_{x1} + \frac{\partial P}{\partial y} + B_{z0}\frac{\partial B_{z1}}{\partial y} + B_{x0}\frac{\partial B_{x1}}{\partial y} - \\
&\qquad - B_{z0}\frac{\partial B_{y1}}{\partial z} - B_{x0}\frac{\partial B_{y1}}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial u_{z1}}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} + \rho_1' + B_{x0}\frac{\partial B_{x1}}{\partial z} + B_{y0}\frac{\partial B_{y1}}{\partial z} - \\
&\qquad - B_{x0}\frac{\partial B_{z1}}{\partial x} - B_{y0}\frac{\partial B_{z1}}{\partial y} = 0,\\
&\frac{\partial B_{x1}}{\partial t} - (\mathbf{B}_0\cdot\nabla)u_{x1} = 0,\\
&\frac{\partial B_{y1}}{\partial t} - (\mathbf{B}_0\cdot\nabla)u_{y1} = 0,\\
&\frac{\partial B_{z1}}{\partial t} - (\mathbf{B}_0\cdot\nabla)u_{z1} = 0,\\
&\frac{\partial \rho_1'}{\partial t} + N^2 u_{z1} = 0,\\
&\operatorname{div}\mathbf{u}_1 = 0.
\end{aligned} \tag{40}$$

Из условия равенства нулю детерминанта матрицы линеаризованной системы (40) получаем следующее дисперсионное соотношение для волн во вращающейся стратифицированной плазме на β-плоскости в приближении Буссинеска:

$$\begin{aligned}
&k^2\omega^4 + \beta k_x \omega^3 - \omega^2[f_0^2 k_z^2 - N^2 k_h^2 + 2k^2(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2] - \\
&- \beta k_x \omega[(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2 - N^2] + (\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2[k^2(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2 - \\
&- N^2 k_h^2] = 0,
\end{aligned} \tag{41}$$

где $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, $k_h^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Рассмотрим распространение волн в плоскости (k_x, k_y) при условии $k_z \ll k$. Дисперсионное соотношение в данном приближении имеет вид

$$\begin{aligned}
&\left(\omega^2 - N^2 + (\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k}_h)^2\right) \times \\
&\times \left(\omega^2 + \omega\frac{\beta k_x}{k_h^2} - (\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k}_h)^2\right) = 0
\end{aligned} \tag{42}$$

и описывает три типа волн. Первый тип волн — магнитогравитационные волны, аналогичные волнам на f-плоскости (12). Второй тип волн — волны магнито-Россби с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mr1} = -\frac{\beta k_x}{2k_h^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2 k_x^2}{k_h^4} + 4(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2}, \tag{43}$$

которое в случае отсутствия магнитного поля переходит в дисперсионное соотношение для стандартной гидродинамической волны Россби:

$$\omega_R = -\frac{\beta k_x}{k_h^2}. \tag{44}$$

Третий тип волн — волны магнито-Россби с дисперсионным соотношением

$$\omega_{mr2} = -\frac{\beta k_x}{2k^2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2 k_x^2}{k_h^4} + 4(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2}, \tag{45}$$

которое обращается в нуль в отсутствие магнитного поля в системе.

Динамика волн магнито-Россби определяется силой Кориолиса и силой Лоренца. Оба типа волн магнито-Россби, (43) и (45), при распространении строго по k_y вырождаются в альфвеновские волны с дисперсионным соотношением

$$\omega_{A_y} = \pm B_{0y} k_y, \tag{46}$$

аналогичные волнам Альфвена на f-плоскости при $k = k_y$ (9).

Отметим, что в низкочастотном пределе уравнение (41) имеет решение в виде волны магнито-Россби, динамику которой определяют не только сила Кориолиса и Лоренца, но и сила плавучести:

$$\omega \approx \frac{(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2(k^2(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2)}{\beta k_x((\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})^2 - N^2)}. \tag{47}$$

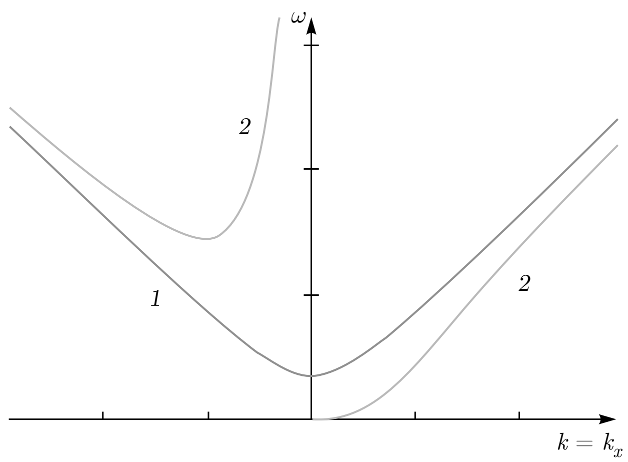

Рис. 11. Дисперсионные кривые: *1* — магнитогравитационная мода; *2* — мода магнито-Россби

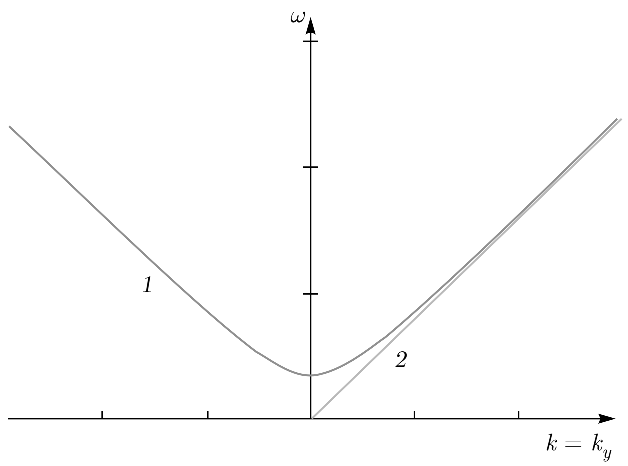

Рис. 12. Дисперсионные кривые: *1* — магнитогравитационная мода; *2* — мода Альфвена

Дисперсионное соотношение (47) переходит в дисперсионное соотношение для волны магнито-Россби, аналогичное полученному в работах по исследованию магнитогидродинамических течений вращающейся плазмы на β-плоскости в приближении мелкой воды [13, 39] при $k_z \ll k$:

$$\omega = \frac{k_h^2(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{k})_h^2}{\beta k_x}. \tag{48}$$

При распространении волн строго по k_z мы получаем два типа магнитных волн, аналогичных волнам на f-плоскости (8), (11).

Общий вид дисперсионных кривых для случая $\omega > 0$ для $k = k_x$ представлен на рис. 11, а для $k = k_y$ на рис. 12.

Рассмотрим переход в дисперсионном соотношении (41) к случаю гидродинамики нейтральной вращающейся жидкости. В отсутствие магнитного поля ($B_0 = 0$) уравнение (41) принимает вид

$$\omega^3 + \beta\frac{k_x}{k^2}\omega^2 - \omega\left(f_0^2\frac{k_z^2}{k^2} - N^2\frac{k_h^2}{k^2}\right) + N^2\beta\frac{k_x}{k^2} = 0. \tag{49}$$

Заметим, что для решения в низкочастотном пределе можно получить выражение для частоты трехмерной гидродинамической волны Россби в приближении Буссинеска

$$\omega = \frac{N^2\beta k_x}{f_0^2k_z^2 - N^2k_h^2}, \tag{50}$$

которое при условии $k_z \ll k$ переходит в стандартную гидродинамическую волну Россби (44). Динамика трехмерной волны Россби (50) определяется не только силой Кориолиса, но и силой плавучести.

Для двумерных течений в плоскости (k_x, k_y) при условии $k_z \ll k$ происходит переход к волнам во вращающейся нейтральной жидкости. Дисперсионное соотношение магнитогравитационных волн (12) переходит в соотношение для гравитационных волн с частотой $\omega = \pm\sqrt{-N^2}$, а дисперсионное соотношение для волн магнито-Россби (43), как было сказано выше, переходит в дисперсионное соотношение для гидродинамической волны Россби (44).

4.2. Трехволновые взаимодействия и параметрические неустойчивости в стратифицированных течениях вращающейся плазмы

Ниже будем исследовать слабонелинейные взаимодействия волн в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на β-плоскости. Качественный анализ дисперсионных соотношений для волн вдоль k_x показывает наличие следующих трехволновых взаимодействий: три волны магнито-Россби с частотами ω_{mr1} взаимодействуют между собой (рис. 13), две магнитогравитационные волны с частотами (12) взаимодействуют с волной магнито-Россби с частотой (43) (рис. 14); две волны магнито-Россби с частотами (43) взаимодействуют с магнитогравитационной волной с частотой (12) (рис. 15).

Для волн вдоль k_y, аналогично волнам на f-плоскости, реализуется взаимодействие двух магнитогравитационных волн с частотами (12) и одной волны Альфвена с частотой (46). Для волн вдоль k_z существуют два типа взаимодействий: три магнитные волны с частотами ω_{z2} (11), взаимодействующие между собой; две магнитные волны с

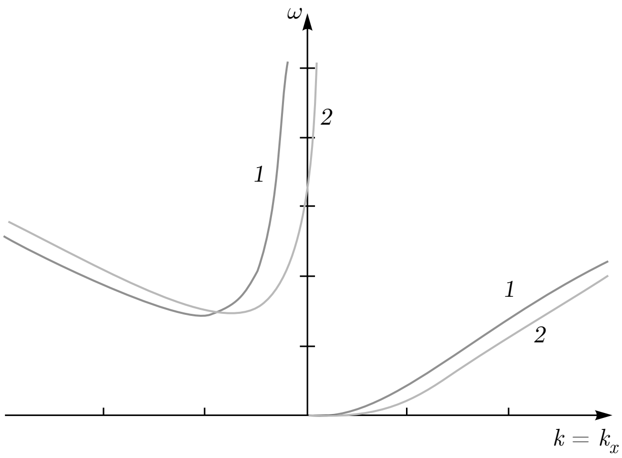

Рис. 13. Условие синхронизма для трех волн магнито-Россби: *1* — $\omega = \omega_{mr1}(k_x)$; *2* — $\omega = \omega_{mr1}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{mr1}(k_{x_c})$

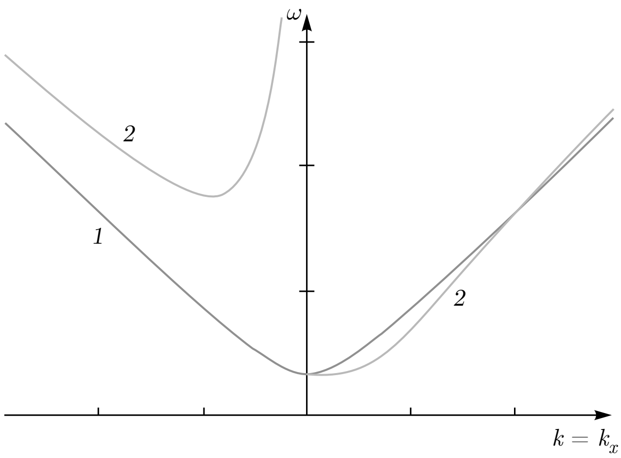

Рис. 14. Условие синхронизма для двух магнитогравитационных волн и одной волны магнито-Россби: *1* — $\omega = \omega_{mgr}(k_x)$; *2* — $\omega = \omega_{mr1}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{mgr}(k_{x_c})$

частотами ω_{z1} (8), взаимодействующие с магнитной волной с частотой ω_{z2} (11).

Методом многомасштабных разложений получаем систему уравнений для амплитуды трех взаимодействующих волн на β-плоскости, удовлетворяющих условию синхронизма (13):

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1\phi &= \tilde{f}_1\psi^*\chi, \\ \tilde{s}_2\psi &= \tilde{f}_2\phi^*\chi, \\ \tilde{s}_3\chi &= \tilde{f}_3\phi\psi, \end{aligned} \tag{51}$$

где $\tilde{s}_j$ — дифференциальный оператор по медленным переменным, аналогичный оператору s_j (17), а коэффициенты $\tilde{f}_j$, как и f_j (22), зависят только от начальных условий и параметров взаимодействующих волн.

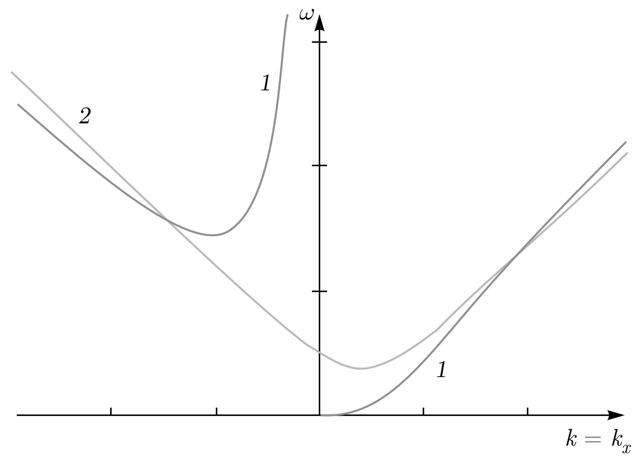

Рис. 15. Условие синхронизма для двух волн магнито-Россби и одной магнитогравитационной волны: *1* — $\omega = \omega_{mr1}(k_x)$; *2* — $\omega = \omega_{mg}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{mr1}(k_{x_c})$

Коэффициент $\tilde{r}_j$ при производной по медленному времени T_1 имеет вид

$$\tilde{r}_j = -iz_1k_{yj}a_1 + \sum_{i=2}^{3} z_ia_i + z_4a_8 + \sum_{i=5}^{7} z_ia_{i-1}. \tag{52}$$

Коэффициент $\tilde{p}_j$ при производной по медленной координате X_1 имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{p}_j = -iz_1k_{yj}(a_7 + B_{y0}a_5 + B_{z0}a_6) - \\ - B_{x0}\left(\sum_{i=2}^{3} z_ia_{i+3} + \sum_{i=5}^{7} z_ia_{i-4}\right) + z_8a_1. \end{aligned} \tag{53}$$

Коэффициент $\tilde{q}_j$ при производной по медленной координате Y_1 имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{q}_j = z_1\left[i\omega a_1 - f_0a_2 - ik_{xj}(a_7 + B_{y0}a_5 + B_{z0}a_6) + \right. \\ \left. + (2ik_{yj}B_{y0} + ik_{zj}B_{z0})a_4\right] + z_2(a_7 + B_{x0}a_4 + B_{z0}a_6) - \\ - B_{y0}\left(z_3a_6 + \sum_{i=5}^{7} z_ia_{i-4}\right) + z_8a_2. \end{aligned} \tag{54}$$

Коэффициент $\tilde{w}_j$ при производной по медленной координате Z_1 имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{w}_j = z_3(a_7 + B_{x0}a_4 + B_{y0}a_5) + \rho_0z_4a_3 - \\ - B_{z0}\left(ik_{yj}z_1a_4 + z_2a_5 + \sum_{i=5}^{7} z_ia_{i-4}\right) + z_8a_3. \end{aligned} \tag{55}$$

Коэффициенты $\tilde{f}_j$ аналогично коэффициентам f_j (22) представимы в виде суммы:

$$\tilde{f}_j = \sum_{s=1}^{7} z_s\tilde{\varkappa}_{sj}. \tag{56}$$

Первое слагаемое в сумме (56) имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{\varkappa}_{1j} = \gamma(k_{yl}k_{xm} + k_{ym}k_{xl})(a^2_{1_{lm}} + a^2_{5_{lm}} + a^2_{6_{lm}}) + \\ + \gamma k_{ym}k_{yl}(a_{21_{lm}} - a_{54_{lm}}) + \\ + \gamma k_{ym}k_{zl}(a'_{3_{k_m}} a_{1_{k_l}} - a'_{6_{k_m}} a_{4_{k_l}}) + \\ + \gamma k_{yl}k_{zm}(a_{3_{k_l}} a'_{1_{k_m}} - a_{6_{k_l}} a'_{4_{k_m}}).\end{aligned} \quad (57)$$

Остальные слагаемые в сумме (56) не отличаются от слагаемых в сумме (22).

На β-плоскости при $k = k_y$ взаимодействуют волна Альфвена (46) и две магнитогравитационные волны (12). При этом индекс $j = 1$ соответствует волне Альфвена (46), а индексы $j = 2$, $j = 3$ соответствуют магнитогравитационным волнам (12).

Для волн, распространяющихся вдоль k_x, существуют три типа трехволновых взаимодействий. Первый тип определяет возникновение магнитогравитационной волны (12) при взаимодействии волны магнито-Россби (43) и магнитогравитационной волны (12). В этом случае индекс $j = 1$ соответствует волне магнито-Россби (43), а индексы $j = 2$, $j = 3$ соответствуют магнитогравитационным волнам (12). Второй тип описывает возникновение волны магнито-Россби (43) при взаимодействии магнитогравитационной волны (12) и волны магнито-Россби (43). В этом случае индекс $j = 1$ соответствует магнитогравитационной волне (12), а индексы $j = 2$, $j = 3$ соответствуют волнам магнито-Россби (43). Третий тип определяет взаимодействие трех волн магнито-Россби (43). В этом случае, очевидно, индексы $j = 1$, $j = 2$, $j = 3$ соответствуют волнам магнито-Россби (43).

Для волн, распространяющихся вдоль k_z, при взаимодействии трех магнитных волн ω_{z2} (11) индексы $j = 1$, $j = 2$, $j = 3$ соответствуют волнам (11); при взаимодействии двух магнитных волн с частотой ω_{z1} и одной магнитной волны с частотой ω_{z2} индекс $j = 1$ соответствует магнитной волне (11), а индексы $j = 2$, $j = 3$ соответствуют волнам (8).

В силу универсальности системы уравнений (16) можно говорить о реализации двух типов параметрических неустойчивостей: распад волны с волновым вектором $\mathbf{k}_1$ и частотой $\omega(\mathbf{k}_1)$ на две волны с волновыми векторами $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$, частотами $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$ и инкрементом неустойчивости $\Gamma = \sqrt{|\tilde{f}_2\tilde{f}_3|/|\tilde{r}_2\tilde{r}_3|}|\phi_0| > 0$; усиление волны с волновым вектором $\mathbf{k}_1$ и частотой $\omega(\mathbf{k}_1)$ двумя волнами с волновыми векторами $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$, частотами $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$ и коэффициентом усиления $\Gamma = (|\tilde{f}_1|/|\tilde{r}_1|)|\psi_0\chi_0| > 0$.

Таким образом, магнитогидродинамические течения устойчиво стратифицированного слоя вращающейся плазмы с линейным профилем плотности в приближении Буссинеска на β-плоскости в низкочастотном пределе описывают волны магнито-Россби, восстанавливающими силами которых являются не только сила Кориолиса и Лоренца, но и сила плавучести. В приближении горизонтальных течений данный тип волн описывает волны магнито-Россби с дисперсионным соотношением в виде, аналогичном полученному в работах [13, 39] по исследованию магнитогидродинамических течений вращающейся плазмы на β-плоскости в приближении мелкой воды. Кроме того, горизонтальные магнитогидродинамические течения описывают два типа волн магнито-Россби и магнитогравитационные волны. Для найденных типов волн описаны следующие трехволновые взаимодействия: три волны магнито-Россби, две магнитогравитационные волны и волна магнито-Россби, две волны магнито-Россби и магнитогравитационная волна.

5. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ БУССИНЕСКА НА НЕСТАНДАРТНОЙ β-ПЛОСКОСТИ

5.1. Волны магнито-Россби в стратифицированных течениях вращающейся плазмы. Линейная теория

Исследуем сферические течения в нестандартном приближении β-плоскости [49]. По аналогии с нестандартным приближением f-плоскости предполагается наличие горизонтальной компоненты, которая, как и вертикальная компонента, раскладывается в ряд. Таким образом, в приближении нестандартной β-плоскости параметр Кориолиса выглядит следующим образом:

$$\mathbf{f} = (0, f_H + \gamma y, f_V + \beta y), \quad (58)$$

где

$$f_V = 2\Omega\sin\theta, \quad \beta = \frac{2\Omega\cos\theta}{R}, \quad f_H = 2\Omega\cos\theta,$$
$$\gamma = -\frac{2\Omega\sin\theta}{R}.$$

Разложение горизонтальной составляющей компоненты силы Кориолиса добавляет слагаемые $f_H\partial_y u_z + \gamma u_z$ в уравнение для x-компоненты импульса и слагаемое $-f_H u_x$ в уравнение для z-компоненты импульса в системе магнитогидродинамических уравнений на β-плоскости (39).

Стационарное решение (2) удовлетворяет полученной системе. Линеаризованная система на нестандартной β-плоскости имеет вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial y \partial t} - f_0 \frac{\partial u_{y1}}{\partial y} - \beta u_{y1} + f_H \frac{\partial u_{z1}}{\partial y} + \\
+ \gamma u_{z1} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(B_{y0}\frac{\partial B_{y1}}{\partial x} + B_{z0}\frac{\partial B_{z1}}{\partial x} - \right. \\
\left. - B_{y0}\frac{\partial B_{x1}}{\partial y} - B_{z0}\frac{\partial B_{x1}}{\partial z}\right) = 0, \\
\frac{\partial u_{y1}}{\partial t} + f_0 u_{x1} + \frac{\partial P}{\partial y} + B_{z0}\frac{\partial B_{z1}}{\partial y} + B_{x0}\frac{\partial B_{x1}}{\partial y} - \\
- B_{z0}\frac{\partial B_{y1}}{\partial z} - B_{x0}\frac{\partial B_{y1}}{\partial x} = 0, \\
\frac{\partial u_{z1}}{\partial t} - f_H u_{x1} + \frac{\partial P}{\partial z} + \rho_1' + B_{x0}\frac{\partial B_{x1}}{\partial z} + \\
+ B_{y0}\frac{\partial B_{y1}}{\partial z} - B_{x0}\frac{\partial B_{z1}}{\partial x} - B_{y0}\frac{\partial B_{z1}}{\partial y} = 0, \\
\frac{\partial B_{x1}}{\partial t} - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) u_{x1} = 0, \\
\frac{\partial B_{y1}}{\partial t} - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) u_{y1} = 0, \\
\frac{\partial B_{z1}}{\partial t} - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) u_{z1} = 0, \\
\frac{\partial \rho_1'}{\partial t} + N^2 u_{z1} = 0, \\
\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0.
\end{gathered} \tag{59}$$

Из условия равенства нулю детерминанта матрицы линеаризованной системы (59) получим следующее дисперсионное соотношение для волн во вращающейся стратифицированной плазме на нестандартной β-плоскости в приближении Буссинеска:

$$\begin{gathered}
k^2\omega^4 + k_x\omega^3\left(\beta - \gamma\frac{k_z}{k_y}\right) - \omega^2\left[(f_V k_z + f_H k_y)^2 - \right. \\
\left. - N^2 k_h^2 + 2k^2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2\right] - \\
- k_x\omega\left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2\left(\beta - \gamma\frac{k_z}{k_y}\right) - \beta N^2\right] + \\
+ (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2\left[k^2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2\right] = 0,
\end{gathered} \tag{60}$$

где $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, $k_h^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Рассмотрим распространение волн в плоскости (k_x, k_y) при условии $k_z \ll k$. Дисперсионное соотношение в данном приближении имеет вид

$$\begin{gathered}
\omega^4 + \omega^3\frac{\beta k_x}{k_h^2} - \omega^2\left[\frac{f_H^2 k_y^2}{k_h^2} - N^2 + 2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2\right] - \\
- \omega\frac{\beta k_x}{k_h^2}\left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2\right] + (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 \times \\
\times \left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2 - N^2\right] = 0.
\end{gathered} \tag{61}$$

Точное аналитическое решение (61) мы можем найти при $k = k_x$ или $k = k_y$. При $k = k_x$ уравнение (60) описывает три типа волн, аналогичных волнам на стандартной β-плоскости: магнитогравитационные волны, аналогичные волнам на f-плоскости (12) и волны магнито-Россби с дисперсионными соотношениями (43) и (45). При $k = k_y$ получаем два типа волн, аналогичных волнам на нестандартной f-плоскости: одномерные магнитные инерционно-гравитационные волны

$$\begin{gathered}
\omega_{mig_y} = \pm\left\{\frac{f_H^2}{2} - \frac{N^2}{2} + B_{0y}^2 k_y^2 + \right. \\
\left. + \left[\left(\frac{f_H^2}{2} - \frac{N^2}{2}\right)^2 + f_H^2 B_{0y}^2 k_y^2\right]^{1/2}\right\}^{1/2}
\end{gathered} \tag{62}$$

и одномерные магнитострофические волны

$$\begin{gathered}
\omega_{mstr_y} = \pm\left\{\frac{f_H^2}{2} - \frac{N^2}{2} + B_{0y}^2 k_y^2 - \right. \\
\left. - \left[\left(\frac{f_H^2}{2} - \frac{N^2}{2}\right)^2 + f_H^2 B_{0y}^2 k_y^2\right]^{1/2}\right\}^{1/2}.
\end{gathered} \tag{63}$$

Важное отличие, связанное с нестандартным приближением β-плоскости, которые мы можем получить аналитически, — низкочастотный предел в уравнении (60), который дает новое выражение для волны магнито-Россби:

$$\omega_{mr'} \approx \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2\left[k^2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2 - N^2 k_h^2\right]}{k_x\left[(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2\left(\beta - \gamma\dfrac{k_z}{k_y}\right) - \beta N^2\right]}. \tag{64}$$

Выражение (64), так же как и выражение (47), описывает волны магнито-Россби, динамика которых определяется не только силами Кориолиса и Лоренца, но и силой плавучести, а при $k_z \ll k$ сводится к выражению, аналогичному полученному в работах по исследованию магнитогидродинамических течений вращающейся плазмы на β-плоскости в приближении мелкой воды [13, 39]:

$$\omega = \frac{k_h^2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})_h^2}{\beta k_x}. \tag{65}$$

Общий вид дисперсионных кривых волны магнито-Россби (64) для различных направлений ($k = k_x$, $k = k_y$, $k = k_z$) при $\omega > 0$, $\gamma < \beta$ приведен на рис. 16.

Рассмотрим переход в дисперсионном соотношении (60) к случаю вращающейся нейтральной жидкости. В отсутствие магнитного поля ($B_0 = 0$) уравнение (60) принимает вид

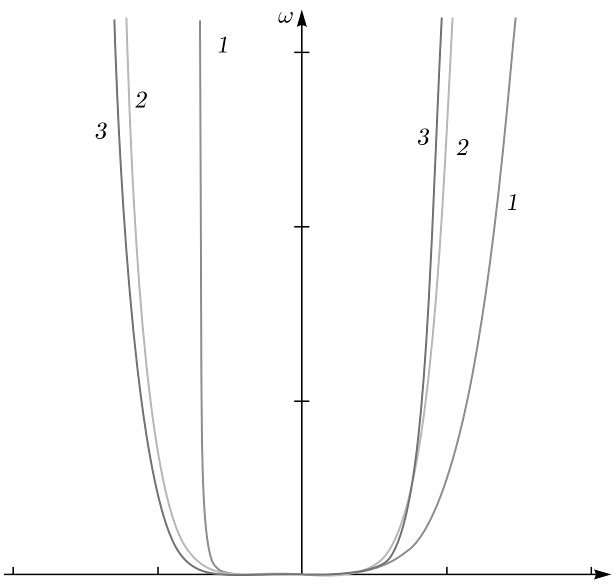

Рис. 16. Дисперсионные кривые для волны магнито-Россби с частотой $\omega_{mr'}$: *1* — $\omega = \omega_{mr'}(k_x)$, $k_y = k_z = 0.1$; *2* — $\omega = \omega_{mr'}(k_y)$, $k_x = k_z = 0.1$; *3* — $\omega_{mr'}(k_z)$, $k_x = k_y = 0.1$

$$k^2\omega^3 + k_x\omega^2\left(\beta - \gamma\frac{k_z}{k_y}\right) - \omega\left[(f_V k_y + f_H k_z)^2 - - N^2 k_h^2\right] + N^2\beta k_x = 0. \quad (66)$$

В низкочастотном пределе получаем выражение для частоты трехмерной гидродинамической волны Россби в приближении Буссинеска:

$$\omega = \frac{N^2\beta k_x}{(f_V k_y + f_H k_z)^2 - N^2 k_h^2}, \quad (67)$$

которое при условии $k_z \ll k$ переходит в стандартную гидродинамическую волну Россби (44).

5.2. Трехволновые взаимодействия и параметрические неустойчивости в стратифицированных течениях вращающейся плазмы

Ниже исследуем слабонелинейные взаимодействия волн в стратифицированных течениях вращающейся плазмы в приближении Буссинеска на нестандартной β-плоскости. Качественный анализ дисперсионных кривых для волн, распространяющихся вдоль k_x, показывает существование следующих трехволновых взаимодействий: три волны магнито-Россби с частотами ω_{mr1} взаимодействуют между собой; две магнитогравитационные волны с частотами (12) взаимодействуют с волной магнито-Россби с частотой (43); две волны магнито-Россби с частотами (43) взаимодействуют с магнитогравитационной волной с частотой (12). Для волн, распространяющихся вдоль k_y, реализуются взаимодействие двух магнитострофических волн с частотами (36) и одной магнитной инерционно-гравитационной волны с частотой (33) при малом значении f_H и взаимодействие двух магнитных инерционно-гравитационных волн с частотами (33) и одной магнитострофической волны с частотой (36) при большом значении f_H. Кроме того, реализуется взаимодействие трех волн магнито-Россби с частотами $\omega_{mr'}$ (64), полученных в низкочастотном пределе, что показано на рис. 17.

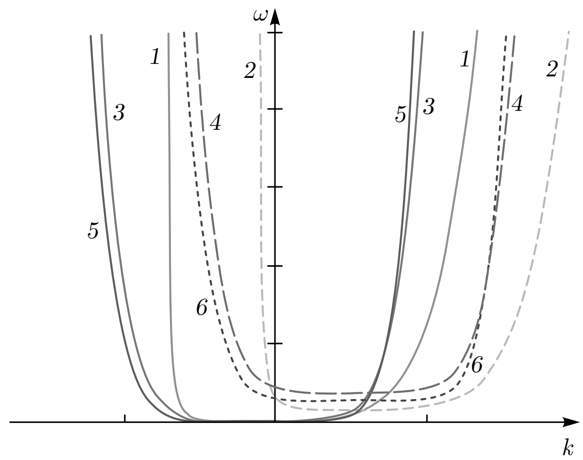

Рис. 17. Условие синхронизма для трех магнито-Россби волн: *1* — $\omega = \omega_{mr'}(k_x)$; *2* — $\omega = \omega_{mr'}(k_x - k_{x_c}) + \omega_{mr'}(k_{x_c})$; *3* — $\omega = \omega_{mr'}(k_y)$; *4* — $\omega = \omega_{mr'}(k_y - k_{y_c}) + \omega_{mr'}(k_{y_c})$; *5* — $\omega = \omega_{mr'}(k_z)$; *6* — $\omega = \omega_{mr'}(k_z - k_{z_c}) + \omega_{mr'}(k_{z_c})$

Методом многомасштабных разложений получим систему уравнений для амплитуд трех взаимодействующих волн на нестандартной β-плоскости, удовлетворяющих условию синхронизма (13):

$$\tilde{s}'_1\phi = \tilde{f}'_1\psi^*\chi,$$
$$\tilde{s}'_2\psi = \tilde{f}'_2\phi^*\chi, \quad (68)$$
$$\tilde{s}'_3\chi = \tilde{f}'_3\phi\psi,$$

где $\tilde{s}'_j$ — дифференциальный оператор по медленным переменным, аналогичный оператору s_j (17), а коэффициенты $\tilde{f}'_j$, как и f_j (22), зависят только от начальных условий и параметров взаимодействующих волн.

Коэффициенты $\tilde{r}'_j$, $\tilde{p}'_j$ и $\tilde{w}'_j$ не отличаются от аналогичных коэффициентов на стандартной β-плоскости, а коэффициент $\tilde{q}'_j$ имеет вид

$$\tilde{q}'_j = z_1\,[i\omega a_1 - f_V a_2 + f_H a_3 - \\ - ik_{xj}(a_7+B_{y0}a_5+B_{z0}a_6)+(2ik_{yj}B_{y0}+ik_{zj}B_{z0})a_4] + \\ + z_2(a_7 + B_{x0}a_4 + B_{z0}a_6) - B_{y0}\left(z_3 a_6 + \sum_{i=5}^{7} z_i a_{i-4}\right) + \\ + z_8 a_2. \quad (69)$$

Коэффициенты $\tilde{f}'_j$ аналогично коэффициентам f_j (22) представимы в виде суммы:

$$\tilde{f}'_j = \sum_{s=1}^{7} z_s \tilde{\varkappa}_{sj}. \quad (70)$$

Слагаемые в сумме (70) не отличаются от слагаемых в сумме (56).

На нестандартной β-плоскости в низкочастотном пределе найден новый тип взаимодействия помимо описанных в предыдущих разделах: трехволновое взаимодействие волн магнито-Россби с частотами $\omega_{mr'}$. При этом, очевидно, индексы $j = 1$, $j = 2$, $j = 3$ соответствуют волнам магнито-Россби (64).

В силу универсальности системы уравнений (68) можно говорить о реализации двух типов параметрических неустойчивостей: распад волны с волновым вектором $\mathbf{k}_1$ и частотой $\omega(\mathbf{k}_1)$ на две волны с волновыми векторами $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$, частотами $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$ и инкрементом неустойчивости $\Gamma = \sqrt{|\tilde{f}'_2\tilde{f}'_3|/|\tilde{r}'_2\tilde{r}'_3|}|\phi_0| > 0$; усиление волны с волновым вектором $\mathbf{k}_1$ и частотой $\omega(\mathbf{k}_1)$ двумя волнами с волновыми векторами $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$, частотами $\omega(\mathbf{k}_2)$ и $\omega(\mathbf{k}_3)$ и коэффициентом усиления $\Gamma = (|\tilde{f}'_1|/|\tilde{r}'_1|)|\psi_0\chi_0| > 0$.

Таким образом, в нестандартном приближении β-плоскости найден новый тип волн магнито-Россби, восстанавливающими силами которых являются не только сила Кориолиса и Лоренца, но и сила плавучести, а дисперсионное соотношение включает в себя как параметр β, так и параметр γ. Для найденного типа волн магнито-Россби исследовано трехволновое взаимодействие при $\mathbf{k} = (k_x,\text{const},\text{const})$, $\mathbf{k} = (\text{const}, k_y, \text{const})$ и $\mathbf{k} = (\text{const},\text{const}, k_z)$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы магнитогидродинамические волны в стратифицированной вращающейся плазме в поле силы тяжести в приближении Буссинеска (в устойчиво стратифицированном слое с линейным профилем плотности). Для плоских течений на f-плоскости и на нестандартной f-плоскости получены дисперсионные уравнения и найдены решения, описывающие трехмерные магнитные инерционно-гравитационные волны (6), которые в отсутствие магнитного поля переходят в трехмерные инерционно-гравитационные волны в приближении Буссинеска в нейтральной жидкости (7), и трехмерные магнитострофические волны (10), не имеющие аналога в гидродинамике нейтральной жидкости. Найдено, что наличие магнитного поля нарушает условие перпендикулярности групповой скорости инерционно-гравитационных волн волновому вектору. В частном случае распространения трехмерных волн в горизонтальной плоскости ($\mathbf{k} = (k_x, k_y)$) магнитые инерционно-гравитационные волны на f-плоскости превращаются в волны Альфвена (9), магнитострофические волны на f-плоскости — в магнитогравитационные волны (12), магнитные инерционно-гравитационные волны на нестандартной f-плоскости — в двумерные магнитные инерционно-гравитационные волны (33), а магнитострофические волны на нестандартной f-плоскости — в двумерные магнитострофические волны (36). При распространении волн на f-плоскости и на нестандартной f-плоскости только вдоль вертикальной составляющей волнового вектора ($k = k_z$) магнитные инерционно-гравитационные волны превращаются в магнитные волны с частотой ω_{z1} (8), а магнитострофические волны — в волны с частотой ω_{z2} (11), динамика которых определяется только силой Лоренца и силой Кориолиса.

Для сферических течений на β-плоскости и на нестандартной β-плоскости также получены дисперсионные уравнения и найдены решения в виде магнитогравитационных волн (12), одномерных магнитных инерционно-гравитационных волн (62) и одномерных магнитострофических волн (63), аналогичных волнам в плоских течениях, волн магнито-Россби (43), которые в отсутствие магнитного поля превращаются в гидродинамические волны Россби (44), и волн магнито-Россби (45), исчезающих в отсутствие магнитного поля. Отметим, что в низкочастотном пределе найдены дисперсионные соотношения для трехмерных волн магнито-Россби на β-плоскости (47) и трехмерных волн магнито-Россби на нестандартной β-плоскости (64), которые в приближении двумерных потоков ($k_z \ll k$) описывают волны магнито-Россби (65), аналогичные полученным в работах [13, 39] по исследованию магнитогидродинамических течений вращающейся плазмы в приближении мелкой воды. Кроме того, в приближении вертикальных течений ($k = k_z$) дисперсионные соотношения как на β-плоскости (41), так и на нестандартной β-плоскости (60) описывают магнитные волны, распространяющиеся вдоль вертикальной составляющей волнового вектора, аналогичные магнитным волнам на f-плоскости и на нестандартной f-плоскости (8), (11).

Качественный анализ полученных дисперсионных соотношений показывает условие синхронизма для следующих типов трехволновых взаимодействий. Для плоских течений на f-плоскости реализуются три типа трехволновых взаимодействий: возникновение магнитогравитационной волны с частотой ω_{mgr} (12) при взаимодействии альфвеновской волны с частотой ω_A (9) и магнитогравитационной волны с частотой ω_{mgr} (12); возникновение магнитной волны с частотой ω_{z1} (8) при взаимодействии магнитных волн с частотами ω_{z2} (11) и ω_{z1} (8); возникновение магнитной волны с частотой ω_{z2} (11) при взаимодействии двух магнитных волн с частотами ω_{z2} (11).

На нестандартной f-плоскости при малой горизонтальной компоненте параметра Кориолиса ($k_H <$ < 1) при взаимодействии двух магнитострофических волн с частотами $\omega_{mstr'}$ (36) возникает магнитная инерционно-гравитационная волна с частотой $\omega_{mig'}$ (33). Кроме того, при исследовании влияния горизонтальной составляющей параметра Кориолиса на общий вид дисперсионных кривых на нестандартной f-плоскости обнаружено, что помимо описанного выше трехволнового взаимодействия, возможно возникновение магнитной инерционно-гравитационной волны с частотой $\omega_{mig'}$ (33) при взаимодействии магнитострофической волны с частотой $\omega_{mstr'}$ (36) и магнитной инерционно-гравитационной волны с частотой $\omega_{mig'}$ (33) при $f_H \gg 1$.

Для сферических течений на β-плоскости реализуются следующие типы трехволновых взаимодействий: два типа взаимодействий магнитных волн, распространяющихся вдоль вертикальной составляющей волнового вектора, а также возникновение магнитогравитационной волны (12) при взаимодействии волны Альфвена (46) с магнитогравитационной волной (12), аналогичные взаимодействиям на f-плоскости; возникновение магнитогравитационной волны с частотой ω_{mgr} (12) при взаимодействии волны магнито-Россби с частотой ω_{mr1} (43) и магнитогравитационной волны с частотой ω_{mgr} (12); возникновение волны магнито-Россби с частотой ω_{mr1} (43) при взаимодействии магнитогравитационной волны с частотой ω_{mgr} (12) и волны магнито-Россби с частотой ω_{mr1} (43); возникновение волны магнито-Россби с частотой ω_{mr1} (43) при взаимодействии двух волн магнито-Россби с частотой ω_{mr1} (43).

На нестандартной β-плоскости существуют следующие типы трехволновых взаимодействий: взаимодействия волн магнито-Россби (43) и магнитогравитационных волн (12), аналогичные взаимодействиям на β-плоскости; взаимодействия одномерных магнитных инерционно-гравитационных волн (62) и одномерных магнитострофических волн (63), аналогичные взаимодействиям на нестандартной f-плоскости; взаимодействие трех волн магнито-Россби с частотами $\omega_{mr'}$ (64).

Методом многомасштабных разложений получены амплитудные уравнения для взаимодействующих волн и инкременты двух типов неустойчивостей, имеющих место в системе, — распад и усиление. Для каждого из найденных типов трехволновых взаимодействий показано различие в коэффициентах и дифференциальных операторах в системе трехволновых взаимодействий.

Благодарности. Авторы признательны Д. А. Климачкову за полезные обсуждения.

Финансирование. Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики «Базис» и Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 19-02-00016). Работа выполнена по проекту КП19-270 «Вопросы происхождения и эволюции Вселенной с применением методов наземных наблюдений и космических исследований» Программы крупных проектов по проведению фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым Президиумом РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. W. Hughes, R. Rosner, and N. O. Weiss, *The Solar Tachocline*, Cambridge Univ. Press (2007).

2. P. A. Gilman, Astrophys. J. Lett. **544**, L79 (2000).

3. M. S. Miesch and P. A. Gilman, Solar Phys. **220**, 287 (2004).

4. M. Dikpati and P. A. Gilman, Astrophys. J. **551**, 536 (2001).

5. Н. А. Иногамов, Р. А. Сюняев, Письма в Астрон. ж. **36**, 896 (2010).

6. N. A. Inogamov and R. A. Sunyaev, arXiv:astro-ph/9904333 (1999).

7. A. Spitkovsky, Y. Levin, and G. Ushomirsky, Astrophys. J. **566**, 1018 (2002).

8. J. Y. K. Cho, Phil. Trans. Roy. Soc. London A **366**, 4477 (2008).

9. К. В. Карельский, А. С. Петросян, С. В. Тарасевич, ЖЭТФ **140**, 606 (2011).

10. K. V. Karelsky, A. S. Petrosyan, and S. V. Tarasevich, Phys. Scripta **155**, 014024 (2013).

11. K. V. Karelsky, A. S. Petrosyan, and S. V. Tarasevich, ЖЭТФ **146**, 352 (2014).

12. Д. А. Климачков, А. С. Петросян, ЖЭТФ **149**, 965 (2016).

13. Д. А. Климачков, А. С. Петросян, ЖЭТФ **152**, 705 (2017).

14. Д. А. Климачков, А. С. Петросян, ЖЭТФ **150**, 602 (2016).

15. D. A. Klimachkov and A. S. Petrosyan, Phys. Lett. A **381**, 106 (2017).

16. T. V. Zaqarashvili, R. Oliver, and J. L. Ballester, Astrophys. J. Lett. **691**, L41 (2009).

17. K. Heng and A. Spitkovsky, Astrophys. J. **703**, 1819 (2009).

18. M. Dikpati, S. W. McIntosh, and G. Bothunet, Astrophys. J. **853**, 144 (2018).

19. X. Márquez-Artavia, C. A. Jones, and S. M. Tobias, Geophys. Astrophys. Fluid Dynam. **111**, 282 (2017).

20. T. V. Zaqarashvili, Astrophys. J. **856**, 32 (2018).

21. T. V. Zaqarashvili, R. Oliver, J. L. Ballester, and B. M. Shergelashvili, Astron. Astrophys. **470**, 815 (2007).

22. T. V. Zaqarashvilli, R. Oliver, J. L. Ballester et al., Astron. Astropys. **532**, A139 (2011).

23. В. И. Петвиашвили, О. А. Похотелов, *Уединенные волны в плазме и атмосфере*, Энергоатомиздат, Москва (1989).

24. G. K. Vallis, *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*: *Fundamentals and Large-Scale Circulation*, Cambridge Univ. Press (2006).

25. V. Zeitlin, *Geophysical Fluid Dynamics*, Oxford Univ. Press (2018).

26. S. W. McIntosh et al., Nature Astron. **1**(4), 0086 (2017).

27. T. D. Kaladze, W. Horton, L. Z. Kahlon et al., Phys. Scripta **88**, 065501 (2013).

28. О. Г. Онищенко, О. А. Похотелов, Н. М. Астафьева, УФН **178**, 605 (2008).

29. T. V. Zaqarashvili and E. Gurgenashvili, Front. Astron. Space Sci. **6**, 7 (2018).

30. Z.-C. Liang, L. Gizon, A. C. Birch, and T. L. Duvall Jr., Astron. Astrophys. **626**, A3 (2019).

31. J. Braithwaite and H. C. Spruit, Roy. Soc. Open Sci. **4**, 160271 (2017).

32. J. Philidet, C. Gissinger, F. Lignières, and L. Petitdemange, Geophys. Astrophys. Fluid Dynam. DOI: 10.1080/03091929.2019.1670827.

33. V. G. A. Böning, H. Hu, and L. Gizon, Astron. Astrophys. **629**, A26 (2019).

34. B. Loeptien, L. Gizon, A. C. Birch et al., Nature Astron. **2**, 568 (2018).

35. M. Dikpati, P. S. Cally, S. W. McIntosh, and E. Heifetz, Sci. Rep. **7**, 14750 (2017).

36. M. Dikpati, B. Belucz, P. A. Gilman, and S. W. McIntosh, Astrophys. J. **862**, 159 (2018).

37. J. M. Stone, J. F. Hawley, C. F. Gammie, and S. A. Balbus, Astrophys. J. **463**, 656 (1996).

38. K. Batygin, S. Stanley, and D. J. Stevenson, Astrophys. J. **776**, 53 (2013).

39. М. А. Федотова, Д. А. Климачков, А. С. Петросян, Физика плазмы **46**, 57 (2020).

40. B. Dintrans, M. Rieutord, and L. Valdettaro, J. Fluid Mech. **398**, 271 (1999).

41. P. Billant and J. M. Chomaz, Phys. Fluids **13**, 1645 (2001).

42. J. I. Yano, J. Fluid Mech. **810**, 475 (2017).

43. S. Lee and R. Takada, Indiana Univ. Math. J. **66**, 2037 (2017).

44. S. Takehiro, Phys. Earth Planet. Inter. **241**, 37 (2015).

45. S. Takehiro and Y. Sasaki, Phys. Earth Planet. Int. **276**, 258 (2018).

46. T. Nakagawa, Phys. Earth Planet. Int. **187**, 342 (2011).

47. D. J. Raymond, http://kestrel.nmt.edu/ raymond/ classes/ph589/notes/ssmodes/ssmodes. pdf.

48. G. Falkovich, *Fluid Mechanics*: *a Short Course for Physicists*, Cambridge Univ. Press (2011).

49. P. J. Dellar, J. Fluid Mech. **674**, 174 (2011).