ЖЭТФ, 2020, том 158, вып. 2 (8), стр. 334–344

НЕГЕЙЗЕНБЕРГОВСКИЙ АНИЗОТРОПНЫЙ ФЕРРИМАГНЕТИК

А. В. Кривцова, Я. Ю. Матюнина, Ю. А. Фридман[*]

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
295007, Симферополь, Республика Крым, Россия

Поступила в редакцию 31 декабря 2019 г.,
после переработки 7 февраля 2020 г.
Принята к публикации 7 февраля 2020 г.

Исследованы статические и динамические свойства анизотропного ферримагнетика с подрешетками $S = 1$ и $\sigma = 1/2$ и негейзенберговским (билинейным и биквадратичным по спинам) обменным взаимодействием для подрешетки с $S = 1$. Анизотропия определяется изинговским взаимодействием подрешеток. Показано, что при учете негейзенберговского обменного взаимодействия подрешетки с $S = 1$ в анизотропной системе возможна реализация фазы с векторными параметрами порядка (ферримагнитная фаза) и фаза, характеризуемая как векторными, так и тензорными параметрами порядка (квадрупольно-ферримагнитная). Определен тип фазового перехода между этими фазами, а также условие компенсации магнитных моментов подрешеток.

DOI: 10.31857/S0044451020080118

1. ВВЕДЕНИЕ

Ферримагнетики представляют собой магнитные материалы, свойства которых в некотором смысле промежуточные между ферромагнетиками и антиферромагнетиками. Как и антиферромагнетики, ферримагнетики содержат магнитные подрешетки с антипараллельными намагниченностями. Как и ферромагнетики, ферримагнетики обладают ненулевой суммарной намагниченностью, которая, однако, может обращаться в нуль в точке компенсации. Ферримагнетики всегда рассматривались как важные материалы магнитной электроники, но в этих материалах постоянно обнаруживаются новые интересные свойства. В начале нашего столетия оформилась новая перспективная область фундаментальной и прикладной физики магнетизма, получившая название фемтомагнетизм, основанная на возможности манипулирования спиновой системой магнетиков с помощью фемтосекундных лазерных импульсов [1–4]. Для ферримагнетиков (конкретно, сплава редкоземельных и переходных металлов GdFeCo) был обнаружен сверхбыстрый (за время порядка нескольких пикосекунд) переворот намагниченностей подрешеток под действием лазерного импульса с длительностью меньше 100 фс [5,6]. Оказалось, что этот эффект напрямую связан с наличием двух подрешеток и в формировании эффекта существенную роль играет обусловленное обменным взаимодействием изменение модулей магнитных моментов подрешеток $\mathbf{M}_1(t)$ и $\mathbf{M}_2(t)$, такое, что их сумма остается постоянной [7,8]. Таким образом, для описания эффекта существенна чисто продольная эволюция магнитных моментов подрешеток.

В новой и интенсивно развивающейся области прикладной физики магнетизма — спинтронике в последние годы возник интерес к скомпенсированным магнетикам (см. [9–11]). Это связано с тем, что для них динамические параметры (частоты магнитного резонанса, скорости доменных стенок) являются обменно усиленными. Возможность использования спиновой накачки антиферромагнетиков стала понятна после работы [12], в которой было показано, что спиновый ток активно влияет на магнитоупорядоченные системы с нулевым интегральным магнитным моментом. В принципе, это позволяет повысить скорость работы систем записи и считывания информации [13–16] и существенно (до величин порядка терагерц) повысить рабочую частоту генераторов с накачкой спиновым током [17–19]. Однако антиферромагнетики обладают высокой чувствительностью магнитного порядка к наличию дефектов, нарушающих подрешеточную структуру кристаллического образца, что затрудняет их примене-

[*] E-mail: yuriifridman@gmail.com

ние в наносистемах. С другой стороны, для ферримагнетиков типа GdFeCo, аморфных сплавов редкоземельных элементов с элементами группы железа, можно использовать стандартные нанотехнологии, такие же, как для классических материалов наномагнетизма, железа, никеля или пермаллоя. Давно известен тот факт, что эффекты обменного усиления динамических параметров, сходные с теми, что известны для антиферромагнетиков, имеют место для ферримагнетиков, находящихся в непосредственной близости точки компенсации подрешеток [20]. В связи с этим возникает возможность использовать ферримагнетики, находящиеся вблизи точки компенсации, для различных приборов сверхбыстрой спинтроники. В недавних работах экспериментально и теоретически исследована сверхбыстрая (со скоростями порядка км/с) динамика доменных стенок [21, 22] и высокочастотная динамика ферримагнитных вихрей [23, 24]. Предложена схема магнитного наногенератора на основе ферримагнетиков с накачкой спиновым током, работающего в диапазоне терагерц [25]. Эти обстоятельства делают детальное исследование различных аспектов спиновой динамики ферримагнетиков практически важными и актуальными (см. недавний обзор [26]).

Важно отметить, что ряд аспектов физики ферримагнетиков изучен сравнительно слабо. В частности, отмеченный выше эффект переориентации наблюдался для ферримагнетика, содержащего как слабоанизотропные ионы, так и редкоземельные ионы, обладающие немалой одноионной анизотропией. Наличие немалой одноионной анизотропии приводит к существенно квантовым эффектам, не описываемым стандартной феноменологической теорией [27]. Полное описание подобных эффектов требует учета динамики тензорных переменных, представляющих собой квантовые средние от операторов, билинейных по компонентам спина, что выходит за рамки уравнения Ландау – Лифшица [28, 29]. В частности, для магнетика с ферромагнитным взаимодействием эквивалентных спинов и большой одноионной анизотропией показана возможность эффекта квантового сокращения спина, при этом намагниченность меньше номинальной даже при нулевой температуре [30]. Явление квантового сокращения спина характерно для магнетиков с одноионной анизотропией типа «легкая плоскость», но не наблюдается в магнетиках с одноионной анизотропией типа «легкая ось», что обусловлено структурой основного состояния [31, 32]. Эффект сокращения спина был предложен для сверхбыстрого продольного «переключения» спинов [33, 34].

Однако эффект квантового сокращения спина наблюдается не только в сильно анизотропных магнетиках, но и в так называемых негейзенберговских магнетиках. Хорошо известно, что в общем случае изотропное обменное взаимодействие для магнетика со спином $S > 1/2$ не ограничивается билинейным взаимодействием и может включать высшие инварианты типа $(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)^n$ со значениями n до $2S$, где S — величина спина магнитного иона [35–48]. В частности, общий гамильтониан для изотропного обменного взаимодействия двух спинов $S = 1$ содержит слагаемые $(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)$ и $(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)^2$. Магнетики, которые описываются таким гамильтонианом, принято называть негейзенберговскими магнетиками [35, 39, 44–50]. В модели изотропного негейзенберговского магнетика при всех соотношениях параметров билинейного и биквадратичного обменных взаимодействий возможно динамическое сокращение спина, что приводит к принципиальной невозможности использования уравнения Ландау – Лифшица для описания динамики магнитоупорядоченной системы. Таким образом, в таких системах важную роль также играет продольная динамика магнитного момента.

В связи с этим, представляет интерес исследовать фазовые состояния и динамические свойства изотропного негейзенберговского ферримагнетика, в котором одна из подрешеток имеет спин магнитного иона равный единице, а вторая — спин $1/2$. При этом в подрешетке со спином единица учитывается не только билинейное обменное взаимодействие, но и биквадратичное. В одноподрешеточных магнетиках или магнетиках с эквивалентными подрешетками с $S \geq 1$ учет высших спиновых инвариантов при определенных условиях приводит к возникновению состояния, в котором параметр дипольного спинового упорядочения равен нулю, $\langle \mathbf{S} \rangle = 0$ и характеризуется спонтанным нарушением вращательной симметрии, которое связано со спиновыми квадрупольными параметрами

$$S_{ik} = \langle S_i S_k + S_k S_i \rangle, \quad i, k = x, y, z$$

(для $S = 1$) или более сложными мультипольными средними (для $S > 1$) [32, 37]. Возникновение этого состояния связано с влиянием большого биквадратичного обменного взаимодействия (сравнимого, или даже превышающего билинейное обменное взаимодействие). При этом большое биквадратичное взаимодействие приводит к квантовому сокращению спина и возникновению продольной динамики в системе.

Таким образом, учет негейзенберговского обменного взаимодействия в анизотропном ферримагнетике может приводить к возникновению квантовых эффектов и, как следствие, к проявлению специфических фазовых состояний. Эти эффекты практически не исследованы, отметим только работы [51, 52], в которых проводился анализ основных состояний и спектров точно решаемых одномерных моделей типа спиновых цепочек. Понимание роли специфических квантовых эффектов сокращения спина может оказаться существенным для описания эффектов типа лазерной переориентации в ферримагнетиках, тем более что основная стадия переориентации происходит в течение времени, когда температура меняется слабо.

2. ФАЗОВЫЕ СОСТОЯНИЯ

В качестве исследуемой системы рассмотрим двухподрешеточный анизотропный магнетик со спином магнитного иона первой подрешетки $S = 1$ и второй — $\sigma = 1/2$ и негейзенберговским обменным взаимодействием для подрешетки с $S = 1$. Анизотропия определяется изинговским взаимодействием подрешеток. При этом в первой подрешетке учитывается как билинейное обменное, так и биквадратичное обменные взаимодействия. Гамильтониан такой системы можно представить в виде

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\sum_{m,m'} J_1(m-m')\boldsymbol{\sigma}_m\boldsymbol{\sigma}_{m'} - \\ -\frac{1}{2}\sum_{n,n'} J_2(n-n')\mathbf{S}_n\mathbf{S}_{n'} - \frac{1}{2}\sum_{n,n'} K(n-n')(\mathbf{S}_n\mathbf{S}_{n'})^2 - \\ -\frac{1}{2}\sum_{m,n} A(m-n)\sigma_m^z S_n^z, \quad (1)$$

где $J_1 > 0$ — константа обменного взаимодействия для подрешетки со спином $\sigma = 1/2$; $J_2 > 0$, $K > 0$ — константы билинейного и биквадратичного обменных взаимодействий для $S = 1$; $A < 0$ — константа анизотропного (изинговского) межподрешеточного взаимодействия. Дальнейшее рассмотрение будем проводить для случая низких температур ($T \ll T_N$, T_N — температура Нееля).

Изменение фазовых состояний связано с изменением величины обменных интегралов (и их соотношения между собой) [28, 44, 50, 53, 54]. Вариация материальных параметров системы может происходить, например, путем изменения концентрации магнитных ионов, или приложением внешних механических напряжений, приводящих к деформации кристаллической решетки. В контексте данной работы не принципиально, каким образом происходит изменение материальных констант в рассматриваемой модели.

Поскольку межподрешеточное обменное взаимодействие является анизотропным и выделяет легкую ось — ось z, эту ось удобно выбрать в качестве оси квантования. Дальнейшие вычисления будем проводить, используя операторы Стивенса [55], поскольку они являются генераторами группы $SO(3)$ и реализуют полный набор динамических переменных. Тогда гамильтониан системы принимает вид

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\sum_{m,m'} J_1(m-m')\left(\sigma_m^x\sigma_{m'}^x + \sigma_m^y\sigma_{m'}^y + \sigma_m^z\sigma_{m'}^z\right) - \\ -\frac{1}{2}\sum_{n,n'}\left[J_2(n-n') - \frac{K(n-n')}{2}\right] \times \\ \times \left(S_n^x S_{n'}^x + S_n^y S_{n'}^y + S_n^z S_{n'}^z\right) - \frac{1}{2}\sum_{n,n'} K(n-n') \times \\ \times \left(\frac{1}{3}O_{2n}^0 O_{2n'}^0 + O_{2n}^1 O_{2n'}^1 + \tilde{O}_{2n}^1\tilde{O}_{2n'}^1 + O_{2n}^2 O_{2n'}^2 + \right. \\ \left. + \tilde{O}_{2n}^2\tilde{O}_{2n'}^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{m,n} A(m-n)\sigma_m^z S_n^z, \quad (2)$$

где

$$O_2^0 = 3(S^z)^2 - S(S+1), \quad O_2^1 = \frac{1}{2}\left[S^z, (S^+ + S^-)\right]_+,$$

$$\tilde{O}_2^1 = \frac{1}{2i}\left[S^z, (S^+ - S^-)\right]_+, \quad O_2^2 = \frac{1}{2}\left[(S^+)^2 + (S^-)^2\right],$$

$$\tilde{O}_2^2 = \frac{1}{2i}\left[(S^+)^2 - (S^-)^2\right]$$

— операторы Стивенса.

Выделяя в гамильтониане (2) средние поля, связанные как с дипольными параметрами порядка $\langle S^z\rangle$, так и с квадрупольными ($q_2^t = \langle O_2^t\rangle$), получим одноузельный гамильтониан:

$$\mathcal{H}_0 = \overline{H}_\sigma \sigma_n^z + \overline{H}_S S_n^z - B_2^0 O_{2n}^0 - B_2^2 O_{2n}^2 + \Delta; \quad (3)$$

$$\overline{H}_S = \frac{1}{2}A(0)\langle\sigma^z\rangle - \left(J_2(0) - \frac{K(0)}{2}\right)\langle S^z\rangle,$$

$$\overline{H}_\sigma = \frac{1}{2}A(0)\langle S^z\rangle - J_1(0)\langle\sigma^z\rangle, \quad B_2^0 = \frac{K(0)}{6}\,q_2^0,$$

$$B_2^2 = \frac{K(0)}{2}\,q_2^2,$$

$$\Delta = \frac{1}{2}J_1(0)\langle\sigma^z\rangle^2 + \frac{1}{2}\left(J_2(0) - \frac{K(0)}{2}\right)\langle S^z\rangle^2 + \\ + \frac{K(0)}{4}\left(\frac{(q_2^0)^2}{3} + (q_2^2)^2\right) - \frac{1}{2}A(0)\langle S^z\rangle\langle\sigma^z\rangle,$$

где $J_1(0)$, $J_2(0)$, $K(0)$, $A(0)$ — нулевые фурье-компоненты обменных интегралов.

На базисах собственных функций операторов S^z ($|M\rangle, M=-1,0,1$) и σ^z ($|m\rangle, m=-1/2,1/2$) построим операторы Хаббарда [56–59] соответственно для первой $X^{M'M}=|M'\rangle\langle M|$ и второй $Y^{m'm}=|m'\rangle\langle m|$ подрешеток. Связь спиновых операторов и операторов Стивенса с операторами Хаббарда имеет вид

$$S^z = X^{11}-X^{-1-1},\quad O_2^2 = X^{1-1}+X^{-11},$$
$$O_2^0 = X^{11}-2X^{00}+X^{-1-1},$$
$$\sigma^z = \frac{1}{2}\left(Y^{1/2\,1/2}-Y^{-1/2\,-1/2}\right),$$
$$\sigma^+ = Y^{1/2\,-1/2},\quad \sigma^- = (\sigma^+)^+.$$

Тогда в терминах операторов Хаббарда одноузельный гамильтониан (3) можно представить в виде

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\overline{H}_\sigma\left(Y^{1/2\,1/2}-Y^{-1/2\,-1/2}\right) + \\ + \overline{H}_S\left(X^{11}-X^{-1-1}\right) - B_2^2\left(X^{1-1}+X^{-11}\right) - \\ - B_2^0\left(X^{11}-2X^{00}+X^{-1-1}\right). \quad (4)$$

Как видно, гамильтониан (4) является недиагональным и для его диагонализации используем унитарное u–v-преобразование,

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 = U(\alpha)\mathcal{H}_0U^+(\alpha),$$

в результате чего получим гамильтониан (4) в виде

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 = \varepsilon_1X^{11}+\varepsilon_0X^{00}+\varepsilon_{-1}X^{-1-1} + \\ + \varepsilon_{1/2}Y^{1/2\,1/2}+\varepsilon_{-1/2}Y^{-1/2\,-1/2}, \quad (5)$$

где

$$\begin{gathered} \varepsilon_1 = -B_2^0+\overline{H}_S\cos2\alpha - B_2^2\sin2\alpha+\Delta, \\ \varepsilon_0 = B_2^0+\Delta, \\ \varepsilon_{-1} = -B_2^0-\overline{H}_S\cos2\alpha + B_2^2\sin2\alpha+\Delta, \\ \varepsilon_{1/2} = \frac{1}{2}\,\overline{H}_\sigma,\quad \varepsilon_{-1/2} = -\frac{1}{2}\,\overline{H}_\sigma, \end{gathered} \quad (6)$$

энергетические уровни магнитных ионов соответственно первой и второй подрешеток, а волновые функции подрешеток имеют вид

$$\Psi(1) = \cos\alpha|1\rangle+\sin\alpha|-1\rangle;$$
$$\Psi(0)=|0\rangle \quad \text{и} \quad \Psi(-1) = -\sin\alpha|1\rangle+\cos\alpha|-1\rangle;$$
$$\Phi\left(\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{2}\right\rangle \quad \text{и} \quad \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = \left|-\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Из явного вида энергетических уровней следует, что низшими энергетическими уровнями являются ε_1 для подрешетки с $S=1$ и $\varepsilon_{1/2}$ для подрешетки, соответствующей $\sigma=1/2$.

Связь спиновых операторов с операторами Хаббарда, построенных на базисе собственных функций гамильтониана (5), теперь имеет вид

$$S_n^z = \cos2\alpha\left(X_n^{11}-X_n^{-1-1}\right)-\sin2\alpha\left(X_n^{1-1}+X_n^{-11}\right),$$
$$S_n^+ = \sqrt{2}\left[\sin\alpha\left(X_n^{01}-X_n^{-10}\right)+\cos\alpha\left(X_n^{0-1}+X_n^{10}\right)\right],$$
$$S_n^- = (S_n^+)^\dagger,$$

где α — параметр унитарного u–v-преобразования, определяемый соотношением

$$\overline{H}_S\sin2\alpha = -B_2^2\cos2\alpha.$$

Из этой связи спиновых операторов с операторами Хаббарда можно определить параметры порядка как функцию α:

$$\langle S^z\rangle = \cos2\alpha,\quad q_2^2 = \langle O_2^2\rangle = \sin2\alpha,\quad q_1^0 = \langle O_2^0\rangle = 1.$$

Поскольку мы рассматриваем случай низких температур, свободная энергия системы (в расчете на один спин) в приближении среднего поля совпадает с энергией основного состояния, т. е. с энергией низших энергетических уровней. Таким образом, для плотности свободной энергии получаем

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_S+\mathcal{F}_\sigma,\quad \mathcal{F}_S = \varepsilon_1,\quad \mathcal{F}_\sigma = \varepsilon_{1/2}.$$

Учитывая явный вид энергетических уровней подрешеток и параметров порядка, свободную энергию как функцию параметра α представим в виде

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2}J_1(0)\langle\sigma^z\rangle+\frac{1}{2}J_1(0)\langle\sigma^z\rangle^2-\frac{K(0)}{12} - \\ - \frac{|A(0)|}{4}\cos2\alpha - \frac{1}{2}\left(J_2(0)-K(0)\right)\cos^2 2\alpha. \quad (7)$$

Здесь мы учли, что константа анизотропного межподрешеточного обмена $A<0$. Выражение (7) зависит как от материальных параметров магнетика, так и от параметра α. Минимизируя плотность свободной энергии по параметру α, получим следующее уравнение:

$$\frac{|A(0)|}{4}\sin2\alpha+\left(J_2(0)-K(0)\right)\sin2\alpha\cos2\alpha = 0, \quad (8)$$

решения которого имеют вид

$$\sin2\alpha = 0,\quad \cos2\alpha = \frac{|A(0)|/4}{K(0)-J(0)}.$$

Проанализируем подробно эти решения.

Как легко видеть, решением уравнения $\sin 2\alpha = 0$ являются следующие значения параметра $\alpha = 0, \pi$. Поскольку мы предполагаем, что константа межподрешеточного обменного взаимодействия $A < 0$, единственным решением для параметра α является $\alpha = \pi$. Это означает, что в системе реализуется ферримагнитное упорядочение (FiM) с векторами состояния подрешеток

$$|\Psi(1)\rangle = |1\rangle \quad \text{и} \quad \left|\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right\rangle = -\left|\frac{1}{2}\right\rangle,$$

и параметрами порядка

$$|\langle\sigma^z\rangle| = \frac{1}{2}, \quad \langle S^z\rangle = \cos 2\alpha = 1, \quad q_2^0 = 1, \quad q_2^2 = 0.$$

Как видно, в этом состоянии первая и вторая подрешетки достигают насыщения, но векторы намагниченности подрешеток антиколлинеарны.

Необходимо отметить, что это состояние является устойчивым, если материальные параметры системы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$J_2(0) > 0, \quad J_2(0) > K(0) - \frac{|A(0)|}{4}.$$

Из последнего соотношения следует, что FiM-фаза устойчива при значениях константы билинейного обменного взаимодействия существенно меньших, чем в случае изотропного одноподрешеточного негейзенберговского ферромагнетика в FM-фазе [49]. При этом анизотропное межподрешеточное обменное взаимодействие эффективно «усиливает» гейзенберговский обмен, т. е. вторая подрешетка создает постоянное подмагничивающее поле, стабилизирующее средний магнитный момент первой подрешетки.

Суммарное значение магнитного момента системы в FiM-фазе равно

$$\langle\sigma^z + S^z\rangle = \frac{1}{2}.$$

Более интересно второе решение уравнения (8). Поскольку $\cos 2\alpha$ определяет средний магнитный момент (на узле) первой подрешетки, эта величина должна быть положительной, т. е.

$$\frac{|A(0)|/4}{K(0) - J(0)} > 0.$$

Поскольку $|A(0)| > 0$, $K(0) - J(0) > 0$. Кроме того, функция $\cos 2\alpha$ ограничена, следовательно,

$$\cos 2\alpha = \frac{|A(0)|/4}{K(0) - J(0)} < 1.$$

Таким образом, при $K(0) > J(0)$ в системе реализуется состояние с намагниченностью первой подрешетки меньше максимально возможного, а вторая подрешетка сохраняет насыщенное значение намагниченности ($|\langle\sigma^z\rangle| = 1/2$). Квадрупольные параметры порядка первой подрешетки в этом случае имеют вид

$$q_2^2 = \langle O_2^2\rangle = \sin 2\alpha < 1, \quad q_2^0 = \langle O_2^0\rangle = 1.$$

Таким образом, при

$$K(0) > J(0), \quad K(0) - J(0) > |A(0)|/4$$

в системе реализуется фаза, в которой как векторный параметр порядка первой подрешетки ($\langle S^z\rangle$), так и компоненты тензора квадрупольных моментов (q_2^0) первой подрешетки принимают промежуточные значения, лежащие в интервале между нулем и единицей, а вторая подрешетка играет роль постоянного «подмагничивающего поля». Таким образом, при больших значениях константы биквадратичного обменного взаимодействия в первой подрешетке возникает эффект квантового сокращения спина [27, 33, 34]. Такое состояние назовем квадрупольно-ферримагнитным (QFiM). Эта фаза будет устойчива при

$$\frac{(K(0) - J_2(0))^2 - A^2(0)/16}{K(0) - J_2(0)} > 0.$$

Векторы основного состояния подрешеток в QFiM-фазе имеют вид

$$|\Psi(1)\rangle = \cos\alpha|1\rangle + \sin\alpha|-1\rangle, \quad \left|\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right\rangle = -\left|\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Векторы намагниченности первой и второй подрешеток антиколлинеарны, и, следовательно, в этой фазе с учетом квантового сокращения спина первой подрешетки [27, 33, 34] возможна точка компенсации магнитных моментов подрешеток (скорее, линия компенсации). Из условия $\langle S^z\rangle = -\langle\sigma^z\rangle$ и учитывая, что $\langle\sigma^z\rangle = 1/2$, получим

$$\frac{|A(0)|/4}{K(0) - J(0)} = -\frac{1}{2}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$|A(0)| = 2\,(J(0) - K(0)). \tag{9}$$

Таким образом, уравнение (9) описывает линию в переменных (J, K, A), на которой суммарный средний магнитный момент подрешеток равен нулю ($\langle S^z + \sigma^z\rangle = 0$). Удобнее переписать уравнение (9)

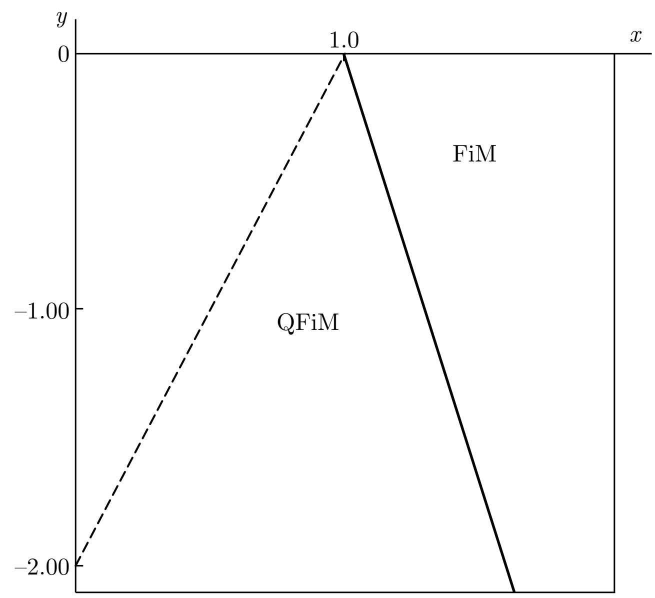

Рис. 1. Фазовая диаграмма анизотропного не гейзенберговского ферримагнетика с подрешетками $S = 1$ и $\sigma = 1/2$. Сплошная жирная линия — линия фазового перехода FiM–QFiM, штриховая линия — линия компенсации

в приведенных переменных $y = |A|/K$, $x = J/K$. Тогда уравнение (9) примет вид

$$y = 2x - 2. \tag{10}$$

Необходимо отметить, что в отсутствие межподрешеточного обменного взаимодействия ($A(0) = 0$) $\langle S^z \rangle = \cos 2\alpha = 0$, т. е. параметр $\alpha = \pi/4$. Это означает, что при $A(0) = 0$ в первой подрешетке реализуется нематическое состояние [49–54], параметры порядка которого имеют вид

$$\langle S^z \rangle = 0, \quad q_2^2 = \langle O_2^2 \rangle = 1, \quad q_2^0 = \langle O_2^0 \rangle = 1.$$

При этом «подмагничивающее поле», т. е. вторая подрешетка не оказывает никакого влияния на первую.

Из равенства плотности свободной энергии в FiM- и QFiM-фазах получим линию фазового перехода между этими фазами:

$$|A(0)| = 4\left(J(0) - K(0)\right),$$

или в приведенных переменных (x, y)

$$y = 4 - 4x. \tag{11}$$

Полученные результаты позволяют построить фазовую диаграмму исследуемой системы, причем ее удобнее изобразить в приведенных переменных (x, y). Схематично эта диаграмма приведена на рис. 1.

Для определения типа фазового перехода QFiM–FiM используем термодинамическую теорию фазовых переходов Ландау [60]. Для этого рассмотрим плотность свободной энергии (7) в окрестности фазового перехода QFiM–FiM, т. е. в окрестности линии $y = 4 - 4x$. Поскольку вторая подрешетка выполняет роль «подмагничивающего поля» и намагниченность ее в обеих фазах одинакова и постоянна ($|\langle \sigma^z \rangle| = 1/2$), сосредоточим свое внимание на первой подрешетке. Как было показано ранее, средний магнитный момент первой подрешетки равен $\cos 2\alpha$ и параметр α фактически определяет параметр порядка системы. Раскладывая плотность свободной энергии (7) в ряд по этому параметру в QFiM-фазе в окрестности линии фазового перехода ($\alpha \to 0$), получим

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \Lambda\alpha^2 + \Theta\alpha^4 + \ldots, \tag{12}$$

где

$$\Lambda = 2J_2(0) - 2K(0) + \frac{1}{2}|A(0)|,$$
$$\Theta = -\frac{1}{6}|A(0)| - \frac{8}{3}J_2(0) + \frac{8}{3}K(0).$$

Для упрощения анализа выражения (12) представим коэффициенты Λ и Θ как функции относительных переменных x, y:

$$\Lambda = \frac{K(0)}{2}(4x - 4 + y), \quad \Theta = \frac{K(0)}{6}(-y - 16x + 16).$$

Анализ коэффициентов Λ и Θ вблизи линии $y = 4 - 4x$ показывает, что коэффициент Λ с точностью до множителя $K_0/2$ совпадает с линией фазового перехода, и в QFiM-фазе $\Lambda < 0$, а коэффициент $\Theta > 0$. Такое поведение коэффициентов разложения термодинамического потенциала (12) свидетельствует о том, что фазовый переход QFiM–FiM является переходом второго рода.

3. СПЕКТРЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ

3.1. FiM-фаза

Для более полного анализа исследуемой системы исследуем спектры элементарных возбуждений в FiM-фазе. Для этого воспользуемся методом бозонизации хаббардовских операторов [61]. Операторам X_n^α ставятся в соответствие псевдохаббардовские операторы $\tilde{X}_n^\alpha$, которые связаны с бозевскими операторами рождения и уничтожения магнонов следующими соотношениями:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{X}_n^{-1-1} = b_n^+ b_n, \\
&\tilde{X}_n^{00} = a_n^+ a_n, \\
&\tilde{X}_n^{11} = 1 - a_n^+ a_n - b_n^+ b_n, && \tilde{Y}_m^{1/2\,1/2} = \frac{1}{2} - c_m^+ c_m, \\
&\tilde{X}_n^{10} = a_n, && \tilde{Y}_m^{-1/2\,-1/2} = c_m^+ c_m, \\
&\tilde{X}_n^{1-1} = b_n, && \tilde{Y}_m^{-1/2\,-1/2} = \\
&\tilde{X}_n^{0-1} = a_n^+ b_n, && \quad = (1 - c_m^+ c_m) c_m, \\
&\tilde{X}_n^{01} = a_n^+, && \tilde{Y}_m^{-1/2\,1/2} = c_m^+, \\
&\tilde{X}_n^{-11} = b_n^+, . \\
&\tilde{X}_n^{-10} = b_n^+ a_n
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

Здесь a — бозе-операторы, соответствующие переходу иона первой подрешетки из состояния E_1 в состояние E_0, b — соответствуют переходу из состояния E_1 в состояние E_{-1}, а операторы c — бозевские операторы, соответствующие переходу иона второй подрешетки из состояния $E_{1/2}$ в состояние $E_{-1/2}$.

Вообще говоря, операторы Хаббарда, а следовательно, и гамильтониан (1) не могут быть выражены ни через какие-либо комбинации бозевских операторов. В то же время, можно построить бозевский аналог гамильтониана (1), т. е. оператор, действующий в бесконечномерном гильбертовом пространстве, причем определенная часть его матричных элементов оказывается равной матричным элементам исходного гамильтониана.

Легко убедиться, что алгебра Ли, построенная на операторах $\tilde{X}$, совпадает с алгеброй Ли операторов X.

Применяя представление (13), перепишем гамильтониан исследуемой системы в FiM-фазе через бозевские операторы, ограничиваясь квадратичными членами по операторам рождения и уничтожения квазичастиц. Как показали проведенные преобразования, гамильтониан исследуемой системы диагонален в терминах операторов рождения и уничтожения:

$$\mathcal{H} = \sum \left\{ \Omega_a(k) a_k^+ a_k + \Omega_b(k) b_k^+ b_k + \Omega_c(k) c_k^+ c_k \right\}, \quad (14)$$

где $\Omega_i(k)$ определяют спектры элементарных возбуждений изотропного негейзенберговского магнетика:

$$\Omega_a = J_2(0) - J_2(k) + \frac{1}{4}|A(0)|, \quad (15)$$

$$\Omega_c = \frac{1}{2}\left(J_1(0) - J_1(k) + |A(0)|\right), \quad (16)$$

$$\Omega_b = 2J_2(0) - K(0) + \frac{1}{2}|A(0)|. \quad (17)$$

Очевидно, что ветви возбуждений (15) и (16) являются «поперечными» возбуждениями первой и

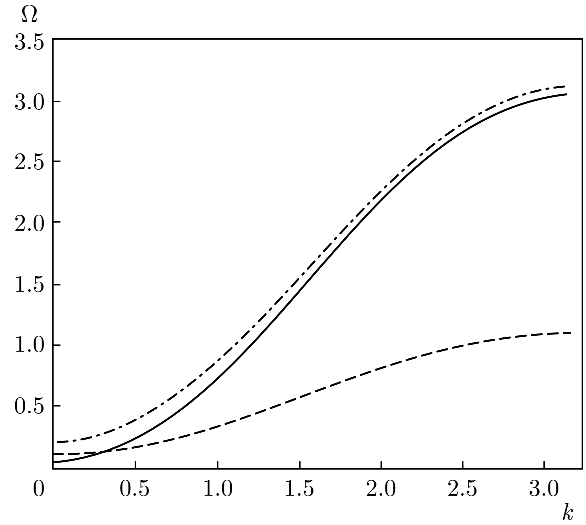

Рис. 2. Спектры элементарных возбуждений негейзенберговского анизотропного ферримагнетика в FiM-фазе при $J_1 = 1$, $J_2 = 1.5$, $K = 1.45$, $|A| = 0.2$. Сплошная линия — ветвь $\Omega_a(k)$, штриховая линия — ветвь $\Omega_c(k)$ штрихпунктирная линия — ветвь $\Omega_b(k)$

второй подрешеток, соответственно, и в отсутствие межподрешеточного анизотропного обменного взаимодействия ($A = 0$) принимают стандартный вид [49]. Более интересным является поведение спектра (17), который представляет собой «продольную» ветвь возбуждений первой подрешетки, т. е. связан с колебанием длины вектора магнитного момента первой подрешетки. В отсутствие межподрешеточного обменного взаимодействия ($A = 0$) ветвь (17) описывает продольную ветвь возбуждений спинового нематика с $S = 1$ [49]. Кроме того, из обращения в нуль энергетической щели в спектре (17), при $k \to 0$, получим линию потери устойчивости FiM-фазы:

$$2J_2(0) - 2K(0) + \frac{1}{2}|A(0)| = 0, \quad (18)$$

которую в переменных (x, y) можно представить в виде

$$y = 4 - 4x. \quad (19)$$

Линия потери устойчивости (19) FiM-фазы в точности совпадает с линией фазового перехода FiM–QFiM, определяемой выражением (11), что подтверждает сделанное нами утверждение о том, что данный фазовый переход является переходом второго рода.

На рис. 2 изображены спектры возбуждений анизотропного ферримагнетика в ферримагнитной фазе. Как следует из графиков и выражений (15)–(17), все три ветви возбуждений имеют энергетические щели при $k \to 0$. При этом щель в спетре «продольных» возбуждений (17) максимальна, и именно эта ветвь теряет устойчивость при фазовом переходе второго рода FiM–QFiM.

Необходимо отметить, спектры Ω_a и Ω_c при $k \to \to 0$ имеют энергетические щели, пропорциональные $A(0)$. Легко понять, что при $A(0) = 0$, т. е. на линии $y = 0$ константа межподрешеточного обменного взаимодействия меняет знак, следовательно, это линия фазового перехода из ферримагнитного состояния в ферромагнитное. Однако, поскольку константа билинейного обменного взаимодействия первой подрешетки J_2 больше константы обменного взаимодействия второй подрешетки J_1, ветка Ω_a более «жесткая», и фазовый перход из ферримагнитного состояния в ферромагнитное протекает по более «мягкой» моде Ω_c.

3.2. QFiM-фаза

Исследуем спектры элементарных возбуждений в QFiM-фазе, поскольку наибольший интерес представляет динамика системы в окрестности линии компенсации. Как уже отмечалось ранее, параметры порядка в этой фазе имеют вид

$$\langle \sigma^z \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle S^z \rangle = \cos 2\alpha = \frac{|A(0)|}{4[K(0) - J(0)]},$$

$$q_2^0 = 1, \quad q_2^2 = \sin 2\alpha,$$

а векторы основного состояния подрешеток в QFiM-фазе равны

$$|\Psi(1)\rangle = \cos\alpha|1\rangle + \sin\alpha|-1\rangle, \quad \left|\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right\rangle = -\left|\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Используя явный вид параметров порядка и связь (13) операторов Хаббарда с операторами рождения и уничтожения магнонов, для гамильтониана системы в QFiM-фазе получим

$$\mathcal{H}(k) = \sum \left[B(k)a_k^+ a_k + C(k)\left(a_k a_{-k} + a_k^+ a_{-k}^+\right)\right] + \\ + \sum \left[\tilde{B}(k) b_k^+ b_k + \tilde{C}(k)\left(b_k b_{-k} + b_k^+ b_{-k}^+\right)\right] + \\ + \sum \tilde{\tilde{B}}(k) c_k^+ c_k, \quad (20)$$

где

$$B(k) = \left(2B_2^0 - \overline{H}_s \cos 2\alpha + B_2^2 \sin 2\alpha\right) - J_2(k),$$

$$C(k) = -\frac{1}{2}\left(J_2(k) - K(k)\right)\sin 2\alpha,$$

$$\tilde{B}(k) = 2\left(B_2^2 \sin 2\alpha - \overline{H}_s \cos 2\alpha\right) + \\ + \left(J_2(k) - K(k)\right)\cos^2 2\alpha - J_2(k),$$

$$\tilde{C}(k) = -\frac{1}{2}\left(J_2(k) - K(k)\right)\sin^2 2\alpha,$$

$$\tilde{\tilde{B}}(k) = \overline{H}_\sigma - \frac{1}{2}J_1(k),$$

$$\overline{H}_S = \frac{1}{4}A(0) - \left(J_2(0) - \frac{K(0)}{2}\right)\cos 2\alpha,$$

$$\overline{H}_\sigma = \frac{1}{2}A(0)\cos 2\alpha - \frac{J_1(0)}{2},$$

$$B_2^0 = \frac{K(0)}{6}, \quad B_2^0 = \frac{K(0)}{6}\sin 2\alpha.$$

Применяя u–v-преобразование Боголюбова к гамильтониану (20), получим спектры элементарных возбуждений:

$$\Omega_a^2(k) = \left(K(0) - J_2(k) + \frac{1}{4}|A(0|\cos 2\alpha + \right. \\ \left. + \left(J_2(0) - K(0)\right)\cos^2 2\alpha\right)^2 - \\ - \left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha\left(J_2(k) - K(k)\right)\right)^2, \quad (21)$$

$$\Omega_b^2(k) = \left(K(0) - J_2(k) + \frac{1}{2}|A(0|\cos 2\alpha + \right. \\ \left. + \left(2J_2(0) - 2K(0) - K(k) + J_2(k)\right)\cos^2 2\alpha\right)^2 - \\ - \left(\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\left(J_2(k) - K(k)\right)\right)^2, \quad (22)$$

$$\Omega_c(k) = -\frac{1}{2}\left(J_1(k) - J_1(0) - |A(0)|\cos 2\alpha\right). \quad (23)$$

Ветви (21) и (23), как и в FiM-фазе, определяют спектры «поперечных» возбуждений соответственно первой и второй подрешеток, а ветвь (22) описывает «продольные» возбуждения магнитного момента, связанные как с векторным параметром порядка, так и компонентами квадрупольного момента, причем ветви (21)–(23) при $\alpha \to 0$, т. е. при $\langle S^z \rangle = = \cos 2\alpha \to 1$ в точности совпадают со спектрами возбуждений в FiM-фазе. Кроме того, из обращения в нуль энергетической щели в спектре Ω_b при $k \to 0$ и $\alpha \to 0$ получаем линию

$$|A(0)| = 4\left(K(0) - J(0)\right),$$

которая совпадает с полученной ранее линией фазового перехода между FiM- и QFiM-фазами. Таким

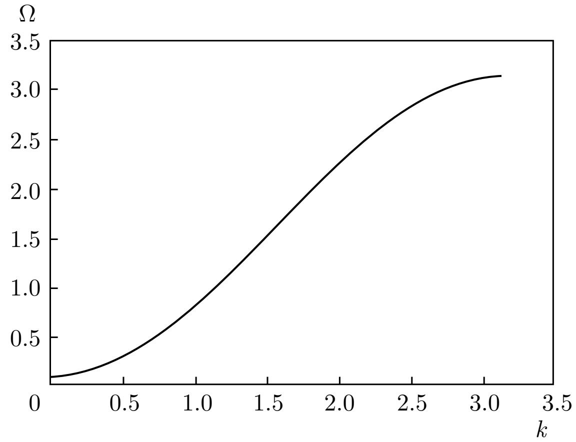

Рис. 3. Спектр «продольной» ветви возбуждений $\Omega_b(k)$ негейзенберговского анизотропного (изинговского) ферримагнетика в QFiM-фазе при $J_1 = 1$, $J_2 = 1.5$, $K = 1.625$, $|A| = 0.2$

образом, фазовый переход FiM–QFiM протекает по «продольной» ветви возбуждений и является переходом второго рода. На рис. 3 приведен спектр «продольных» возбуждений в QFiM-фазе.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведенные исследования показали, что в анизотропном негейзенберговском ферримагнетике с подрешетками $S = 1$ и $\sigma = 1/2$ возможна реализация как ферримагнитного состояния с интегральным магнитным моментом $\langle S^z + \sigma^z \rangle = 1/2$, так и фазы, в которой одновременно присутствуют как векторные параметры порядка первой и второй подрешеток $(\langle S^z \rangle, \langle \sigma^z \rangle)$, так и тензорный параметр порядка для первой подрешетки, наличие которого обусловлено влиянием биквадратичного обменного взаимодействия первой подрешетки. Учет этого взаимодействия приводит к квантовому сокращению спина первой подрешетки, но не влияет на величину магнитного момента второй подрешетки. При этом вторая подрешетка играет роль «подмагничивающего» поля и не позволяет ни при каких значениях биквадратичного обменного взаимодействия перевести первую подрешетку в состояние спинового нематика [49]. Эту фазу мы назвали квадрупольно-ферримагнитной. Поскольку в этой фазе среднее значение магнитного момента первой подрешетки изменяется в зависимости от соотношения обменных интегралов первой подрешетки и межподрешеточного взаимодействия, в этом состоянии возможна компенсация магнитных моментов подрешеток. Мы получили уравнение линии компенсации в пространстве материальных параметров, а также линии фазового перехода «ферримагнитная–квадрупольно-ферримагнитная фаза». Необходимо отметить, что, как показал анализ плотности свободной энергии и спектров элементарных возбуждений, данный фазовый переход является переходом второго рода, причем анализ спектров элементарных возбуждений показал, что данный фазовый переход идет по «продольной» ветви возбуждений, т. е. по ветви, связанной с продольными колебаниями магнитного момента первой подрешетки.

Отметим также, что рассмотренная нами задача может служить достаточно адекватной моделью магнитной пленки, состоящей из двух неэквивалентных монослоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.-Y. Bigot, M. Vomir, and E. Beaurepaire, Nature Phys. **5**, 515 (2009).
2. A. Kirilyuk, A. V. Kimel, and Th. Rasing, Rev. Mod. Phys. **82**, 2731 (2010).
3. B. A. Ivanov, Low Temp. Phys. **40**, 91 (2014).
4. P.-C. Huang, C. Hernandez-Garcia, and M.-C. Chen. Nature Photon. **12**, 349 (2018).
5. I. Radu, K. Vahaplar, C. Stamm, T. Kachel, N. Pontius, H. A. Dürr, T. A. Ostler, J. Barker, R. F. L. Evans, R. W. Chantrell, A. Tsukamoto, A. Itoh, A. Kirilyuk, Th. Rasing, and A. V. Kimel, Nature London **472**, 205 (2011).
6. T. A. Ostler, J. Barker, R. F. L. Evans, R. Chantrell, U. Atxitia, O. Chubykalo-Fesenko, S. El Moussaoui, L. Le Guyader, E. Mengotti, L. J. Heyderman, F. Nolting, A. Tsukamoto, A. Itoh, D. V. Afanasiev, B. A. Ivanov, A. M. Kalashnikova, K. Vahaplar, J. Mentink, A. Kirilyuk, Th. Rasing, and A. V. Kimel, Nature Commun. **3**, 666 (2012).
7. J. H. Mentink, J. Hellsvik, D. V. Afanasiev, B. A. Ivanov, A. Kirilyuk, A. V. Kimel, O. Eriksson, M. I. Katsnelson, and Th. Rasing, Phys. Rev. Lett. **108**, 057202 (2012).
8. В. Г. Барьяхтар, В. И. Бутрим, Б. А. Иванов, Письма в ЖЭТФ **98**, 327 (2013).
9. H. V. Gomonay and V. M. Loktev, Low Temp. Phys. **40**, 17 (2014).
10. V. Baltz, A. Manchon, M. Tsoi, T. Moriyama, T. Ono, and Y. Tserkovnyak, Rev. Mod. Phys. **90**, 015005 (2018).

11. M. B. Jungfleisch, W. Zhang, and A. Hoffmann, Phys. Lett. A **382**, 865 (2018).

12. H. V. Gomonay and V. M. Loktev, Phys. Rev. B **81**, 144427 (2010).

13. O. A. Tretiakov, D. Clarke, G.-W. Chern, Y. B. Bazaliy, and O. Tchernyshyov, Phys. Rev. Lett. **100**, 127204 (2008).

14. E. G. Galkina, B. A. Ivanov, S. Savel'ev, and F. Nori, Phys. Rev. B **77**, 134425 (2008).

15. O. Gomonay, T. Jungwirth, and J. Sinova, Phys. Rev. Lett. **117**, 017202 (2016).

16. E. G. Galkina and B. A. Ivanov, Low Temp. Phys. **44**, 618 (2018).

17. R. Cheng, D. Xiao, and A. Brataas, Phys. Rev. Lett. **116**, 207603 (2016).

18. R. Khymyn, I. Lisenkov, V. Tyberkevych, B. A. Ivanov, and A. Slavin, Sci. Rep. **7**, 43705 (2017).

19. O. R. Sulymenko, O. V. Prokopenko, V. S. Tiberkevich, A. N. Slavin, B. A. Ivanov, and R. Khymyn, Phys. Rev. Appl. **8**, 064007 (2017).

20. Б. А. Иванов,, А. Л. Сукстанский, ЖЭТФ **84**, 370 (1983).

21. K.-J. Kim, S. K. Kim, Y. Hirata, Se-Hyeok Oh, T. Tono, D.-H. Kim, T. Okuno, W. S. Ham, S. Kim, G. Go, Y. Tserkovnyak, A. Tsukamoto, T. Moriyama, K.-J. Lee, and T. Ono, Nature Mater. **16**, 1187 (2017).

22. Е. Г. Галкина, К. Э. Заспел, Б. А. Иванов, Н. Е. Кулагин, Л. М. Лерман, Письма ЖЭТФ **110**, 474 (2019).

23. S. K. Kim and Y. Tserkovnyak, Appl. Phys. Lett. **111**, 032401 (2017).

24. C. E. Zaspel , E. G. Galkina, and B. A. Ivanov, Phys. Rev. Appl. **12**, 044019 (2019).

25. I. Lisenkov, R. Khymyn, J. Åkerman, N. X. Sun, and B. A. Ivanov, Phys. Rev. B **100**, 100409(R) (2019).

26. B. A. Ivanov, Low Temp. Phys. **45**, 935 (2019).

27. Yu. A. Fridman and O. A. Kosmachev, Phys. Sol. St. **51**(6), 1167 (2009).

28. Е. Л. Нагаев, УФН **136**, 61 (1982).

29. V. M. Loktev and V. S. Ostrovskii, Low Temp. Phys. **20**, 775 (1994).

30. T. Moriya, Phys. Rev. **117**, 635 (1960).

31. Yu. N. Mitsay, Yu. A. Fridman, D. V. Spirin, and M. S. Kochmanski, Acta Phys. Pol. **97**, 355 (2000).

32. Yu. A. Fridman and O. A. Kosmachev, J. Magn. Magn. Mater. **236**, 272 (2001).

33. E. G. Galkina, V. I. Butrim, Yu. A. Fridman, B. A. Ivanov, and Franco Nori, Phys. Rev. B **88**, 144420 (2013).

34. E. G. Galkina, B. A. Ivanov, and V. I. Butrim, Low Temp. Phys. **40**, 635 (2014).

35. А. Ф. Андреев, И. А. Грищук, ЖЭТФ **87**, 467 (1984).

36. С. Л. Гинзбург, ФТТ **12**, 1805 (1970).

37. Y. Y. Hsieh and M. Blume, Phys. Rev. B **8**, 2684 (1972).

38. В. М. Матвеев, ЖЭТФ **65**, 1626 (1973).

39. V. M. Loktev and V. S. Ostrovskii, Low Temp. Phys. **20**, 775 (1994).

40. Ф. П. Онуфриева, ЖЭТФ **80**, 2372 (1981).

41. Ф. П. Онуфриева, ЖЭТФ **89**, 2270 (1985).

42. A. V. Chubukov, K. I. Ivanova, P. Ch. Ivanov, and E. R. Korutcheva, J. Phys.: Condens. Matter **3**, 2665 (1991).

43. R. Barnett, A. Turner, and E. Demler, Phys. Rev. A **76**, 013605 (2007).

44. Е. Л. Нагаев, *Магнетики со сложными обменными взаимодействиями*, Наука, Москва (1988).

45. B. A. Ivanov and A. K. Kolezhuk, Phys. Rev. B **68**, 052401 (2003).

46. V. G. Bar'yakhtar, V. I. Butrim, A. K. Kolezhuk, and B. A. Ivanov, Phys. Rev. B **87**, 224407 (2013).

47. R. Barnett, A. Turner, and E. Demler, Phys. Rev. Lett. **97**, 180412 (2006).

48. K. Buchta, G. Fáth, Ö. Legeza, and J. Sólyom, Phys. Rev. B **72**, 054433 (2005).

49. Yu. A. Fridman, O. A. Kosmachev, and Ph. N. Klevets, J. Magn. Magn. Mater. **325**, 125 (2013).

50. A. Läuchli, G. Schmid, and S. Trebst, Phys. Rev. B **74**, 144426 (2006).

51. A. K. Kolezhuk, H.-J. Mikeska, and S. Yamamoto, Phys. Rev. B **55**, R3336 (1997).

52. A. K. Kolezhuk, H.-J. Mikeska, K. Maisinger, and U. Schollwöck, Phys. Rev. B **59**, 13565 (1999).

53. N. Papanikolaou, Nucl. Phys. B **305**, 367 (1988).

54. A. V. Chubukov, J. Phys. Condens. Matter **2**, 1593 (1990).

55. K. Stevens, Proc. Phys. Soc. A **65**, 209 (1952).

56. V. V. Val'kov, Sov. J. Theor. Math. Phys. **76**, 766 (1988).

57. Р. О. Зайцев, ЖЭТФ **68**, 207 (1975).

58. Yu. A. Fridman, O. A. Kosmachev, and Ph. N. Klevets, J. Magn. Magn. Mater. **320**, 435 (2008).

59. Ю. Н. Мицай, Ю. А. Фридман, ТМФ **81**, 263 (1989).

60. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, Москва (1976).

61. В. В. Вальков, Т. А. Валькова, ЖЭТФ **99**, 1881 (1991).