

# СУПЕРДИФфуЗИОННЫЙ ПЕРЕНОС «ПРОГУЛКАМИ ЛЕВИ» В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ: ОБЩЕЕ И ПРИБЛИЖЕННОЕ АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

А. А. Куличенко<sup>a\*</sup>, А. Б. Кукущкин<sup>a,b,c\*\*</sup>

<sup>a</sup> Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»  
123182, Москва, Россия

<sup>b</sup> Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
115409, Москва, Россия

<sup>c</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)  
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 13 января 2020 г.,  
после переработки 13 января 2020 г.  
Принята к публикации 21 января 2020 г.

Получено общее и приближенное автомодельное решения для функции Грина широкого класса интегродифференциальных уравнений двумерного и трехмерного (по пространственным координатам) нестационарного супердиффузионного переноса возмущения однородной среды для конечной фиксированной скорости переносчиков. Данная проблема охватывает такие задачи, как перенос резонансного излучения в астрофизических газах и плазме, миграцию животных, перенос энергии электромагнитными волнами в плазме. Рассмотрен случай модельной функции распределения по длине свободного пробега (ФРСП), имеющей степенной спад с ростом расстояния. Численные расчеты проведены для двух конкретных видов ФРСП, включая случай, соответствующий лоренцевской форме крыльев контура спектральной линии для излучения фотонов атомами или ионами. Для построения приближенного автомодельного решения использован метод, разработанный нами для бесконечной скорости переносчиков [23]. Учет их конечной скорости соответствует обобщению переноса «полетами Леви» на перенос «прогулками Леви с остановками». Полученное нами автомодельное решение для произвольного супердиффузионного одномерного переноса [29] распространено на случай двумерного и трехмерного переноса. Проверена точность автомодельного решения путем его сравнения с рассчитанным численно общим решением.

DOI: 10.31857/S0044451020060061

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к явлениям супердиффузионного переноса (см., например, [1–4]) и связанной с ними концепцией «полетов Леви», введенной в работе [5] (см. с. IX в [1]), в последнее время акцентировался на учете конечной скорости переносчиков. В этом случае явление супердиффузионного переноса получило название «прогулок Леви» [6] (см. обзор [7]). Точнее говоря, учет конечной скорости переносчиков соответствует обобщению переноса «полетами Леви»

на перенос «прогулками Леви с остановками» (см. рис. 1 в работе [7]) для учета эффектов запаздывания в полетах Леви.

Напомним, что в случае нормальной (или обыкновенной) диффузии, определяемой как броуновское движение, описываемое дифференциальным уравнением фоккер-планковского типа, функция Грина является гауссианом, чей аргумент определяет закон распространения фронта  $r_{fr}(t) \propto (Dt)^\beta$ , где  $\beta = 1/2$ ,  $D$  — коэффициент диффузии. Этот закон нарушается в широком классе явлений, где длина свободного пробега (длина шага) описывается медленно, по степенному закону, убывающей функцией распределения переносчиков (ФРСП). Это приводит к расходимости коэффициента диффузии, формально определяемого из дисперсии ФРСП, и к показа-

\* E-mail: andreikulichenko2@mail.ru

\*\* E-mail: kukushkin\_ab@nrcki.ru

телю степени  $\beta > 1/2$  в законе подобия  $r_{fr}(t) \propto t^\beta$ , что и называется супердиффузионным переносом.

В ряде физических задач явление супердиффузии обычно называют нелокальным переносом, который описывается интегральным по пространственным переменным уравнением, не сводимым к дифференциальному: например, уравнение Бибермана–Холстейна [8, 9], которое описывает пространственно-временную эволюцию плотности возбужденных атомов/ионов, вызванную переносом излучения в спектральных линиях в плазме и газах [10, 11]; перенос возбуждения неравновесными резонансными фононами в конденсированных средах, например, в рубине [12], (нестационарный) перенос тепла продольными (электронными бернштейновскими) плазменными волнами [13], фотоиндуцированный перенос минорных переносчиков в полупроводниках (а именно, связанный с поглощением фотонов перенос дырок в полупроводниках  $n$ -типа) [14]. На примере модели Бибермана–Холстейна, в которой резонансное рассеяние фотонов на атоме или ионе происходит с полным перераспределением по частоте в акте поглощения и переизлучения фотона, хорошо прослеживается основное свойство супердиффузионного переноса: редкие дальние полеты фотонов («скачки»), которые соответствуют излучению/поглощению в «крыльях» спектральной линии, преобладают над вкладом частых близких перемещений, которые вызывают диффузионное (броуновское) движение возбуждения среды и соответствуют излучению/поглощению в центре спектральной линии. В работе [15] было показано, что далекие полеты, вызванные медленно убывающими (например, степенными) крыльями интегрального оператора (т. е. ФРСП) в уравнении переноса, являются полетами Леви. Доминирующий вклад фотонов с большой длиной свободного пробега в радиационный перенос в спектральных линиях был показан уже в работах [16, 17]. Простые модели, основанные на таком доминировании, были разработаны для квазистационарного переноса и сегодня известны как методы «escape probability» [18, 19] или прострельного выхода, или «тау-эффективного» [10, 11, 20–22].

Для супердиффузионного переноса полетами Леви, зависящего от времени, недавно было показано, что широкий класс явлений переноса на однородном фоне обладает приближенным автомодельным решением [23–28]. Решения для функции Грина были построены с использованием законов скейлинга для фронта распространения возмущения (т. е. временной зависимости среднего

расстояния супердиффузионного переносчика от точки источника) и асимптотических выражений для функции Грина далеко позади и далеко впереди фронта. Справедливость предложенных автомодельных решений была показана путем их сравнения с точными численными решениями. В одномерном случае — решениями уравнений переноса для простой медленно затухающей ФРСП с различными степенными показателями, в трехмерном случае — решениями уравнений Бибермана–Холстейна резонансного радиационного переноса для различных спектральных линий (доплеровской, лоренцевской, фойгтовской и хольцмарковской).

Метод [23] приближенных автомодельных решений для функции Грина, зависящих от времени супердиффузионных (нелокальных) уравнений переноса, был обобщен на случай конечной фиксированной скорости переносчиков в [29] для задач одномерного переноса возмущения в однородной среде для простой ФРСП со степенным спадом на больших расстояниях. Было предложено решение для произвольной супердиффузионной ФРСП, и с помощью численного расчета общего решения [29, 30] проверена точность автомодельного решения для конкретных степенных законов ФРСП, включая случай, соответствующий лоренцевской форме крыльев контура атомной спектральной линии для излучения фотонов.

В данной работе получены результаты, являющиеся двумерным и трехмерным аналогом результатов [29]: получены общее и приближенное автомодельное решения для функции Грина широкого класса интегродифференциальных уравнений двумерного и трехмерного (по пространственным координатам) нестационарного супердиффузионного переноса возмущения однородной среды для конечной фиксированной скорости переносчиков. В разд. 2 получено общее решение задачи супердиффузионного переноса «прогулками Леви с остановками» на однородной плоскости для случая модельной ФРСП, имеющей степенной спад с ростом расстояния. Далее представлены результаты численного расчета общего решения для двух конкретных видов ядра, включая случай, соответствующий лоренцевской форме крыльев контура спектральной линии для излучения фотонов. В разд. 3 дан аналитический вывод асимптотического выражения для интегральной по пространству характеристики функции Грина при больших временах эволюции системы. Данная характеристика соответствует количеству возбужденных частиц в среде (стоящих переносчиков возбуждения). Также в разд. 3 проведе-

но сравнение с результатами численного интегрирования общего решения, рассчитанного в разд. 2. В разд. 4 предложено приближенное автомодельное решение для двумерного и трехмерного нелокального переноса в однородной среде, проверена точность такого решения путем сравнения с численно рассчитанными общими решениями задачи, а также проведен анализ полученных приближенных решений.

## 2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВУМЕРНОГО СУПЕРДИФФУЗИОННОГО ПЕРЕНОСА

Рассмотрим процессы супердиффузионного переноса, которые являются либо переносом возбуждения неподвижной однородной среды не принадлежащими среде объектами (например, процессы, описываемые уравнением для плотности возбужденных атомов или ионов в плазме при переносе атомного возбуждения резонансными фотонами), либо динамикой объектов или субъектов, которые движутся (мигрируют) на однородной плоскости с одной и той же скоростью между точками остановки при заданном среднем времени пребывания в точках остановки. Тогда уравнение для функции Грина плотности возбуждения среды или плотности стоящих переносчиков возбуждения,  $f(\mathbf{r}, t)$ , в точке  $\mathbf{r} = \{x, y\}$  в момент времени  $t$  имеет вид (это уравнение является двумерным аналогом уравнения (1) в [29])

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = & - \left( \frac{1}{\tau} + \sigma \right) f(\mathbf{r}, t) + \\ & + \frac{1}{\tau} \int_S d^2 r_1 W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) \theta \left( t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}{c} \right) \times \\ & \times f \left( \mathbf{r}_1, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}{c} \right) + \delta(\mathbf{r})\delta(t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $W(\rho)$  — вероятность поглощения переносчика (или вероятность остановки переносчика на расстоянии  $\rho$  от точки его последнего старта,

$$\int_0^\infty W(\rho') 2\pi \rho' d\rho' = 1 \quad (2.2)$$

(в соответствии с указанной нормировкой функция  $W(\rho)2\pi\rho$  является функцией распределения по длине свободного пробега переносчиков (ФРСП)),  $\tau$  — среднее время нахождения переносчика в точке остановки (например, среднее время между поглощением и последующим испусканием резонансного фотона атомом или ионом),  $c$  — постоянная скорость

движения переносчиков между точками остановки,  $\sigma$  — среднее обратное время исчезновения переносчиков (для переноса резонансного излучения это относится к нерадиационному девозбуждению среды),  $\theta(x)$  — ступенчатая функция Хевисайда,  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака. В случае, когда переносчиками возбуждения являются фотоны в плазме,  $W$  имеет вид (ср. например, разд. 1 в работе [11])

$$\begin{aligned} W(\rho) = & - \frac{1}{2\pi\rho} \frac{dT(\rho)}{d\rho}, \\ T(\rho) = & \int d\omega e_\omega \exp[-\kappa_\omega \rho], \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $e_\omega$  — спектральное распределение вероятности испускания фотона с частотой  $\omega$ ;  $\kappa_\omega$  — коэффициент поглощения средой фотона с частотой  $\omega$  (т.е. обратная длина свободного пробега такого фотона).

Для получения общего решения уравнения (2.1) следует обратиться к системе исходных уравнений в случае переноса возбуждения резонансными фотонами, а именно, уравнениям для плотности возбужденных частиц  $f(\mathbf{r}, t)$  в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  и спектральной интенсивности излучения  $I_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$  в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  вдоль направления  $\mathbf{n}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = & - \left( \frac{1}{\tau} + \sigma \right) f(\mathbf{r}, t) + \int d\omega \frac{\kappa_\omega}{\hbar\omega} \times \\ & \times \int_0^{2\pi} d\varphi(\mathbf{n}) I_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) + \delta(\mathbf{r})\delta(t), \\ \frac{1}{c} \frac{\partial I_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)}{\partial t} + (\mathbf{n}\nabla) I_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) = & \\ = & \frac{\hbar\omega}{\tau} \frac{1}{2\pi} e_\omega f(\mathbf{r}, t) - \kappa_\omega I_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

В первом уравнении в (2.4) внутреннее интегрирование ведется по  $\varphi(\mathbf{n})$  — углу на плоскости, задаваемому направлением единичного вектора  $\mathbf{n}$ .

При решении системы уравнений (2.4) будем следовать методу [31]. Вначале применим к указанным уравнениям двумерное преобразование Фурье в виде

$$\begin{aligned} I_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) = & \frac{1}{2\pi} \int d^2 p \widehat{I}_\omega(\mathbf{p}, \mathbf{n}, t) \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}), \\ f(\mathbf{r}, t) = & \frac{1}{2\pi} \int d^2 p \widehat{f}(\mathbf{p}, t) \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}), \\ \widehat{I}_\omega(\mathbf{p}, \mathbf{n}, t) = & \frac{1}{2\pi} \int d^2 r I_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}), \\ \widehat{f}(\mathbf{p}, t) = & \frac{1}{2\pi} \int d^2 r f(\mathbf{r}, t) \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Тогда система примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{f}(\mathbf{p}, t)}{\partial t} &= -\left(\frac{1}{\tau} + \sigma\right) \widehat{f}(\mathbf{p}, t) + \int d\omega \frac{\kappa_\omega}{\hbar\omega} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi(\mathbf{n}) \widehat{I}_\omega(\mathbf{p}, \mathbf{n}, t) + \frac{\delta(t)}{2\pi}, \quad (2.6) \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \widehat{I}_\omega(\mathbf{p}, \mathbf{n}, t)}{\partial t} + i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) \widehat{I}_\omega(\mathbf{p}, \mathbf{n}, t) &= \\ &= \frac{\hbar\omega}{\tau} \frac{1}{2\pi} e_\omega \widehat{f}(\mathbf{p}, t) - \kappa_\omega \widehat{I}_\omega(\mathbf{p}, \mathbf{n}, t). \end{aligned}$$

Решение второго уравнения в (2.6) с начальным условием  $\widehat{I}_\omega(\mathbf{p}, \mathbf{n}, 0) = 0$  имеет вид (ср. с (17) в [31])

$$\begin{aligned} \widehat{I}_\omega(\mathbf{p}, \mathbf{n}, t) &= \frac{\hbar\omega}{\tau} \frac{c}{2\pi} e_\omega \times \\ &\times \int_0^t dt' \exp[-c(t-t')\{i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) + \kappa_\omega\}] \widehat{f}(\mathbf{p}, t'). \quad (2.7) \end{aligned}$$

После подстановки (2.7) в первое уравнение в системе (2.6) с учетом (2.3) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{f}(\mathbf{p}, t)}{\partial t} &= -\left(\frac{1}{\tau} + \sigma\right) \widehat{f}(\mathbf{p}, t) + \\ &+ \frac{c}{\tau} \int_0^t dt' \widehat{f}(\mathbf{p}, t') c(t-t') W(c(t-t')) \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi(\mathbf{n}) \exp[-ic(t-t')(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})] + \frac{\delta(t)}{2\pi}. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Внутренний интеграл по углам можно рассчитать:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi(\mathbf{n}) \exp[-ic(t-t')(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})] &= \\ &= 2\pi J_0(cp(t-t')), \quad (2.9) \end{aligned}$$

где  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка. Тогда (2.8) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{f}(\mathbf{p}, t)}{\partial t} &= -\left(\frac{1}{\tau} + \sigma\right) \widehat{f}(\mathbf{p}, t) + \\ &+ \int_0^t dt' \widehat{f}(\mathbf{p}, t') k(p, t-t') + \frac{\delta(t)}{2\pi}. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Здесь введена функция

$$k(p, t) = \frac{2\pi c^2}{\tau} t W(ct) J_0(cpt). \quad (2.11)$$

Следуя [31], применим к (2.10) преобразование Лапласа (ср. (2.10) с (23) из работы [31]) в виде

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\mathbf{p}, t) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st} F(\mathbf{p}, s) ds, \\ k(p, t) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st} K(p, s) ds, \quad (2.12) \\ F(\mathbf{p}, s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \widehat{f}(\mathbf{p}, t) dt, \\ K(p, s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} k(p, t) dt. \end{aligned}$$

После указанного преобразования уравнение (2.10) примет вид

$$\begin{aligned} sF(\mathbf{p}, s) &= -\left(\frac{1}{\tau} + \sigma\right) F(\mathbf{p}, s) + \\ &+ F(\mathbf{p}, s) K(p, s) + \frac{1}{2\pi}. \quad (2.13) \end{aligned}$$

Для супердиффузионного переноса ФРСП, задаваемая ядром  $W(\rho)$  в интегральном операторе в (2.1), должна быть функцией, убывающей медленно, степенным образом, с увеличением длины свободного пробега  $\rho$ . Выберем ядро (и, соответственно, ФРСП) в следующем модельном виде:

$$W(\rho) = \frac{\gamma \kappa_0}{2\pi \rho (1 + \kappa_0 \rho)^{\gamma+1}}, \quad (2.14)$$

где  $\kappa_0$  является характерной длиной и соответствует значению коэффициента поглощения в центре спектральной линии.

Тогда из (2.11) и (2.12) можно получить следующее выражение для  $K(p, s)$ :

$$K(p, s) = \frac{\gamma c \kappa_0}{\tau} \int_0^{+\infty} \frac{dt' e^{-st'}}{(1 + c\kappa_0 t')^{\gamma+1}} J_0(cpt'). \quad (2.15)$$

В итоге из (2.13) после интегрирования по углу  $\varphi$  с учетом (2.15), (2.12) и (2.5) окончательно получим общее решение уравнения (2.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(r, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2 i} \int_0^{+\infty} dp p J_0(pr) \times \\ &\times \int_{+0-i\infty}^{+0+i\infty} e^{st} ds \left/ \left\{ s + \frac{1}{\tau} + \sigma - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\gamma c \kappa_0}{\tau} \int_0^{+\infty} \frac{dt' e^{-st'}}{(1 + c\kappa_0 t')^{\gamma+1}} J_0(cpt') \right\}. \quad (2.16) \end{aligned}$$

Далее перейдем к безразмерным переменным: длину будем измерять в единицах  $1/\kappa_0$ , время — в единицах  $\tau$ . Тогда из (2.16) получим общее решение приведенного к безразмерному виду уравнения (2.1) двумерного нелокального переноса:

$$f_{2D}(r, t, R_c, \gamma) = \frac{1}{(2\pi)^2 i} \int_0^{+\infty} dp p J_0(pr) \times \int_{+0-i\infty}^{+0+i\infty} e^{st} ds \left/ \left\{ s + 1 + \sigma\tau - \gamma \int_0^{+\infty} \frac{du e^{-su/R_c}}{(1+u)^{\gamma+1}} J_0(pu) \right\} \right., \quad (2.17)$$

где

$$R_c = c\tau\kappa_0 \quad (2.18)$$

— отношение среднего времени жизни возбужденного состояния к среднему времени свободного пролета переносчика (фотона) или отношение средних времен в состояниях покоя и движения переносчика.

Для сравнения представим общее решение в одномерном случае (см. (4) из работы [29]) при  $r = |x|$ :

$$f_{1D}(r, t, R_c, \gamma) = \frac{1}{2\pi^2 i} \int_0^{+\infty} dp \cos(pr) \times \int_{+0-i\infty}^{+0+i\infty} e^{st} ds \left/ \left\{ s + 1 + \sigma\tau - \gamma \int_0^{+\infty} \frac{du e^{-su/R_c}}{(1+u)^{\gamma+1}} \cos(pu) \right\} \right.. \quad (2.19)$$

Вывод общего решения в трехмерном случае аналогичен получению двумерного решения (2.17):

$$f_{3D}(r, t, R_c, \gamma) = \frac{1}{4\pi^3 r i} \int_0^{+\infty} dp p \sin(pr) \times \int_{+0-i\infty}^{+0+i\infty} e^{st} ds \left/ \left\{ s + 1 + \sigma\tau - \frac{\gamma}{p} \int_0^{+\infty} \frac{du e^{-su/R_c}}{(1+u)^{\gamma+1}} \frac{\sin(pu)}{u} \right\} \right.. \quad (2.20)$$

Далее рассмотрим только случай без исчезновения переносчиков возбуждения:  $\sigma = 0$ . Выражение

для асимптотики общего решения вблизи баллистического конуса в безразмерных переменных имеет вид (аналогично (5) из работы [29])

$$f_{asymp}(r, t, R_c) = f(r \rightarrow R_c t - 0, t, R_c) = \left( t - \frac{r}{R_c} \right) W(r) \theta \left( t - \frac{r}{R_c} \right). \quad (2.21)$$

Результаты численного расчета общих решений (2.19), (2.17) и (2.20) для моментов времени  $t = 30-3000$ ;  $R_c = 1, 10$ ;  $\gamma = 0.5, 1.5$  приведены на рис. 1 соответственно для одномерного (а, б), двумерного (в, г) и трехмерного (д) переносов. Графики представлены в переменных  $r/(R_c t)$  и  $f(r, t, R_c, \gamma)/f(r = 0, t, R_c, \gamma)$ .

Отметим, что для трехмерного переноса результаты представлены только для случая  $\gamma = 1.5$ .

Ниже, на рис. 2 показана зависимость  $f(r = 0, t, R_c, \gamma)$  от переменной  $t$  для различных значений  $R_c$  и  $\gamma$  и разных мерностей координатного пространства.

### 3. ДИНАМИКА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПО ПРОСТРАНСТВУ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИИ ГРИНА

Обратимся к системе исходных уравнений двумерного нелокального переноса (2.4) в случае отсутствия исчезновения переносчиков ( $\sigma = 0$ ). Определим количество возбужденных частиц в среде (стоящих переносчиков) в момент времени  $t$  как  $N(t)$ :

$$N(t) = \int f(\mathbf{r}, t) d^2 r. \quad (3.1)$$

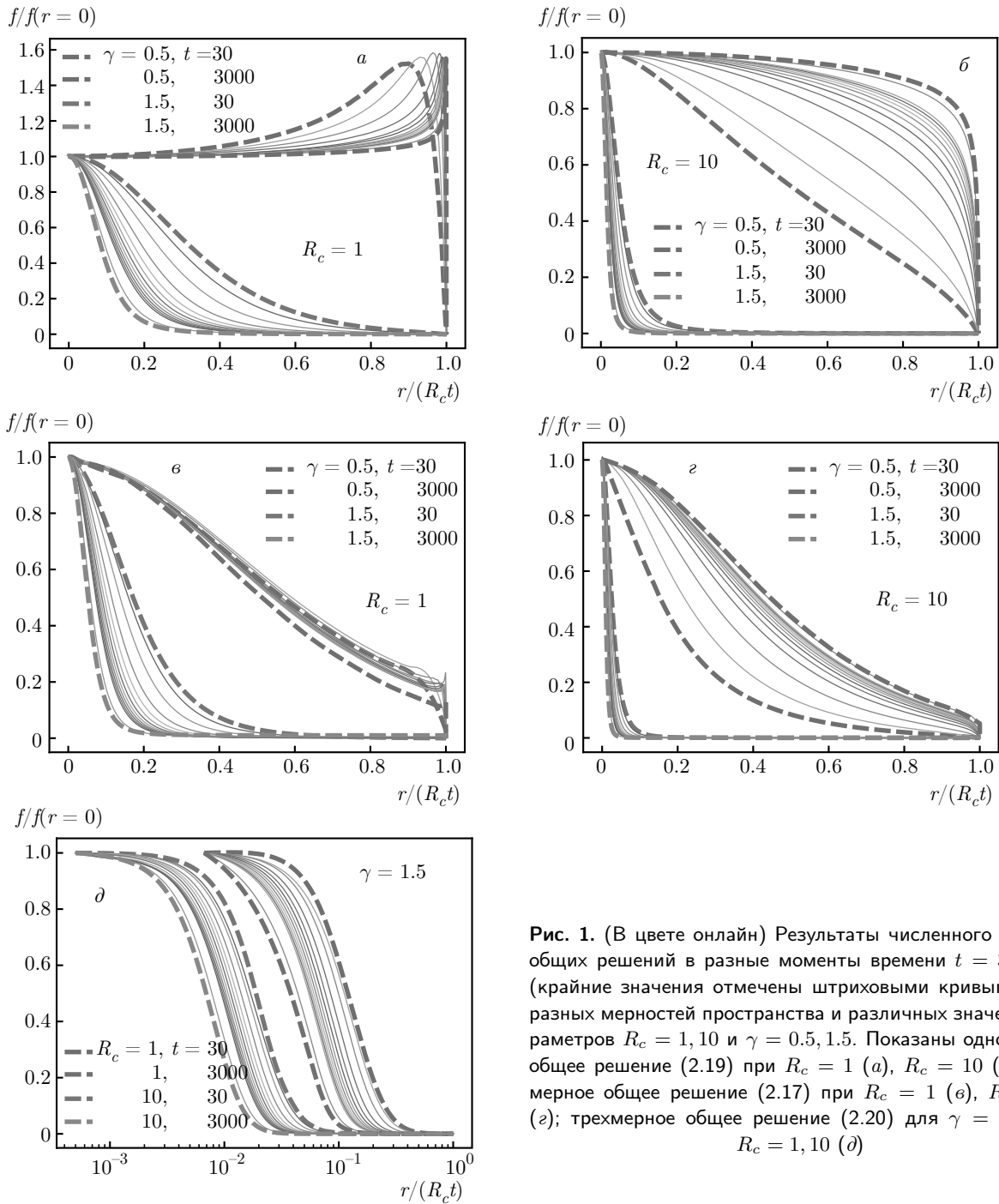
Обратим внимание на то, что  $N(t)$  не зависит от мерности координатного пространства. Также введем интегральную по пространству спектральную интенсивность излучения в момент времени  $t$  вдоль направления  $\mathbf{n}$ :

$$\bar{I}_\omega(\mathbf{n}, t) = \int I_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) d^2 r. \quad (3.2)$$

Проинтегрировав систему уравнений (2.4) по элементу плоскости  $d^2 r$ , получим

$$\frac{\partial N(t)}{\partial t} = -\frac{N(t)}{\tau} + \int d\omega \frac{\kappa_\omega}{\hbar\omega} \int_0^{2\pi} d\varphi(\mathbf{n}) \bar{I}_\omega(\mathbf{n}, t) + \delta(t), \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{I}_\omega(\mathbf{n}, t)}{\partial t} = \frac{\hbar\omega}{\tau} \frac{1}{2\pi} e_\omega N(t) - \kappa_\omega \bar{I}_\omega(\mathbf{n}, t).$$



**Рис. 1.** (В цвете онлайн) Результаты численного расчета общих решений в разные моменты времени  $t = 30-3000$  (крайние значения отмечены штриховыми кривыми) для разных мерностей пространства и различных значений параметров  $R_c = 1, 10$  и  $\gamma = 0.5, 1.5$ . Показаны одномерное общее решение (2.19) при  $R_c = 1$  (а),  $R_c = 10$  (б); двумерное общее решение (2.17) при  $R_c = 1$  (в),  $R_c = 10$  (г); трехмерное общее решение (2.20) для  $\gamma = 1.5$  при  $R_c = 1, 10$  (д)

Решение второго уравнения в (3.3) при начальном условии  $\bar{I}_\omega(\mathbf{n}, t = 0) = 0$  имеет вид

$$\bar{I}_\omega(\mathbf{n}, t) = \frac{\hbar\omega}{\tau} \frac{ce_\omega}{2\pi} \int_0^t dt' N(t') \exp[-\kappa_\omega c(t-t')]. \quad (3.4)$$

Выполнив подстановку (3.4) в первое уравнение в (3.3) с учетом (2.3), получим

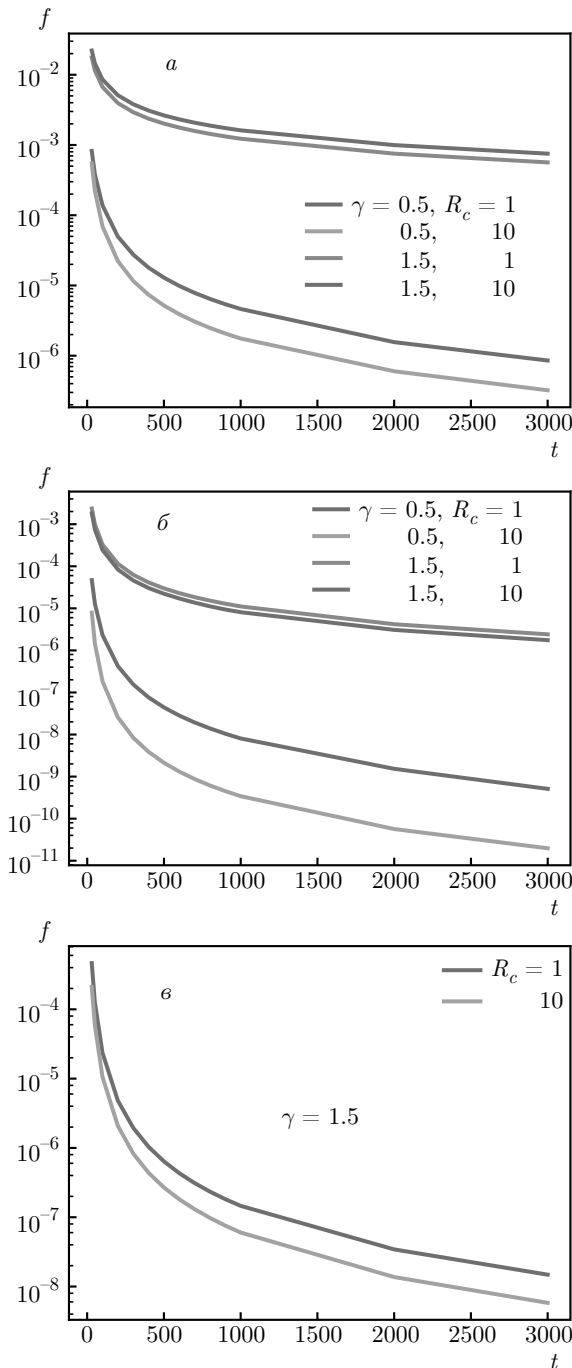
$$\frac{\partial N(t)}{\partial t} = -\frac{N(t)}{\tau} + \int_0^t dt' N(t') p(t-t') + \delta(t), \quad (3.5)$$

где введена функция

$$p(t) = \frac{2\pi c^2 t}{\tau} W(ct). \quad (3.6)$$

Применим к (3.5) преобразование Лапласа:

$$N(t) := \hat{N}(s), \quad p(t) := \hat{P}(s). \quad (3.7)$$



**Рис. 2.** (В цвете онлайн) Зависимость  $f(r = 0, t, R_c, \gamma)$  от переменной  $t$  для различных значений  $R_c = 1, 10$  и  $\gamma = 0.5, 1.5$  и разных мерностей координатного пространства: одномерного (а), двумерного (б), трехмерного (в)

Тогда получим, что

$$\hat{N}(s) = \frac{1}{s + 1/\tau - \hat{P}(s)}, \quad (3.8)$$

где с учетом (3.7) и (3.6) в случае степенного ядра  $W$  (2.14) получаем

$$\hat{P}(s) = \frac{\gamma}{\tau} \exp\left[\frac{s}{c\kappa_0}\right] \left(\frac{s}{c\kappa_0}\right)^\gamma \Gamma\left(-\gamma, \frac{s}{c\kappa_0}\right), \quad (3.9)$$

где

$$\Gamma(a, z) = \int_z^\infty x^{a-1} \exp(-x) dx$$

— неполная гамма-функция.

Отсюда имеем предельные случаи зависимости  $\hat{N}(s)$  при  $s \rightarrow 0$  для различных  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \hat{N}(s \rightarrow 0) &= \frac{\tau}{\Gamma(1-\gamma)} \left(\frac{c\kappa_0}{s}\right)^\gamma, & 0 < \gamma < 1, \\ \hat{N}(s \rightarrow 0) &= \frac{c\tau\kappa_0}{s \text{Ln}\left(\frac{c\kappa_0}{s}\right)}, & \gamma = 1, \\ \hat{N}(s \rightarrow 0) &= \frac{(\gamma-1)c\tau\kappa_0}{s[1+(\gamma-1)c\tau\kappa_0]}, & 1 < \gamma < 2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

При  $s \rightarrow \infty$  результат не зависит от  $\gamma$ :

$$\hat{N}(s \rightarrow \infty) = 1/s. \quad (3.11)$$

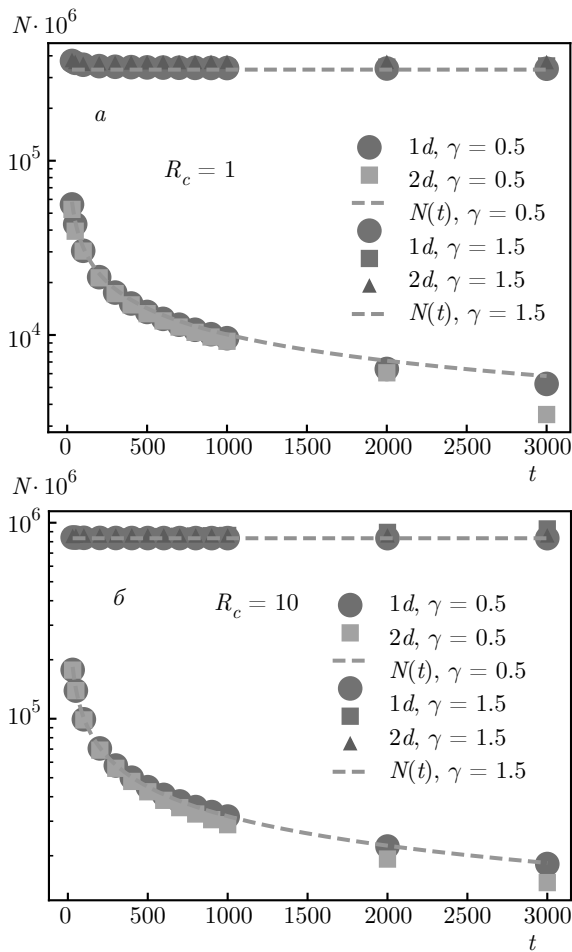
Таким образом, из (3.10) и (3.7) с учетом (2.18) можно получить аналитическое выражение для асимптотики интегральной характеристики функции Грина — количества возбужденных частиц в среде (стоящих переносчиков) при больших временах в безразмерных переменных:

$$N(t \rightarrow \infty) = \begin{cases} \frac{R_c^\gamma \sin(\pi\gamma)}{t^{1-\gamma} \pi}, & 0 < \gamma \leq 1, \\ \frac{\gamma-1}{1/R_c + \gamma-1}, & 1 < \gamma < 2, \end{cases} \quad (3.12)$$

длина — в единицах  $1/\kappa_0$ , время — в единицах  $\tau$ . Предельный случай (3.11) означает, что в начальный момент времени находилась лишь одна частица:

$$N(t \rightarrow 0) = 1. \quad (3.13)$$

Полученный результат (3.12) означает, что в зависимости от степени убывания  $\gamma$  модельной ФРСП количество стоящих переносчиков возбуждения при больших временах может стремиться либо к нулю, либо к постоянной величине. Формула (3.12), соответствующая при  $\gamma = 0.5$  лоренцевской форме крыльев контура атомной спектральной линии излучения фотонов, с точностью до константы согласуется с законом переключения режимов сохранения полного числа частиц на его убывание, см. (18) в работе [32] при  $\beta = 1/4$ .



**Рис. 3.** (В цвете онлайн) Сравнение результатов расчета количества возбужденных частиц в среде (стоящих переносчиков) по аналитическому закону (3.12) (штриховые кривые) с результатом интегрирования по координате численно рассчитанных общих решений для одномерного переноса (2.19) (кружки), двумерного (2.17) (квадраты) и трехмерного (2.20) (треугольники) в различные моменты времени при  $R_c = 1$  (а),  $R_c = 10$  (б);  $\gamma = 0.5, 1.5$  для  $10^6$  частиц в начальный момент времени

На рис. 3 представлено сравнение результатов расчета количества возбужденных частиц в среде (стоящих переносчиков) по аналитическому закону (3.12) с результатом интегрирования по координате численно рассчитанных общих решений (2.19), (2.17) и (2.20) соответственно для одномерного, двумерного и трехмерного случаев в различные моменты времени при  $R_c = 1$  (а),  $R_c = 10$  (б);  $\gamma = 0.5, 1.5$  для  $10^6$  частиц в начальный момент времени.

**4. ПРИБЛИЖЕННОЕ АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ И ПРОВЕРКА ЕГО ТОЧНОСТИ**

Следуя методу, изложенному в работе [23] и для конечной скорости переносчиков обобщенному

в [29], построим приближенное автомодельное решение в виде

$$f_{auto}(r, t, R_c, \gamma) = \left( t - \frac{r}{R_c} g \left( \frac{\rho_{fr}(t, R_c, \gamma)}{r} \right) \right) \times W \left( r g \left( \frac{\rho_{fr}(t, R_c, \gamma)}{r} \right) \right) \times \theta \left( t - \frac{r}{R_c} g \left( \frac{\rho_{fr}(t, R_c, \gamma)}{r} \right) \right), \quad (4.1)$$

где функция автомодельности  $g$  имеет следующие асимптотические пределы:

$$g(s) = \begin{cases} 1, & s = s_{min} = \rho_{fr}(t, R_c, \gamma)/(R_c, t), \\ s, & s \gg s_{min}, \end{cases} \quad (4.2)$$

а закон фронта  $\rho_{fr}(t, R_c, \gamma)$  определяется аналогично выражению (8) из работы [29], т.е. как результат приравнивания асимптотики точного решения вблизи баллистического конуса (2.21) к точному решению в начале координат:

$$\left( t - \frac{\rho_{fr}}{R_c} \right) W(\rho_{fr}) \theta \left( t - \frac{\rho_{fr}}{R_c} \right) = f(0, t, R_c, \gamma). \quad (4.3)$$

Отметим, что автомодельное решение (4.1) справедливо как для одномерного [29], так и для двумерного и трехмерного случаев.

Следуя указанному в [23] и [29] методу для оценки точности предложенного автомодельного решения (3.1), введем функцию автомодельности  $Q(r, t, R_c, \gamma)$  (ср. с (9) из работы [29]):

$$\left( t - \frac{r}{R_c} Q \right) W(rQ) \theta \left( t - \frac{r}{R_c} Q \right) = f(r, t, R_c, \gamma). \quad (4.4)$$

Для проверки точности указанной автомодельности следует показать, что функция  $Q_1(s, t, R_c, \gamma)$  слабо зависит от времени:

$$Q_1(s, t, R_c, \gamma) = Q(\rho_{fr}(t, R_c)/s, t, R_c, \gamma) \approx g(s, R_c, \gamma). \quad (4.5)$$

Зависимости функции автомодельности  $Q_1(s, t, R_c, \gamma)$  от  $s$  для различных моментов времени при  $R_c = 1, 10$ ;  $\gamma = 0.5, 1.5$  для одномерного, двумерного и трехмерного случаев представлены соответственно на рис. 4а,б,в. Значения по времени лежат в интервале  $t = 30-3000$ . Крайние моменты отмечены штриховыми кривыми, между которыми изображены промежуточные времена. Из рис. 4 видна точность выполнения (4.2). Исследуем также относительное отклонение зависимости



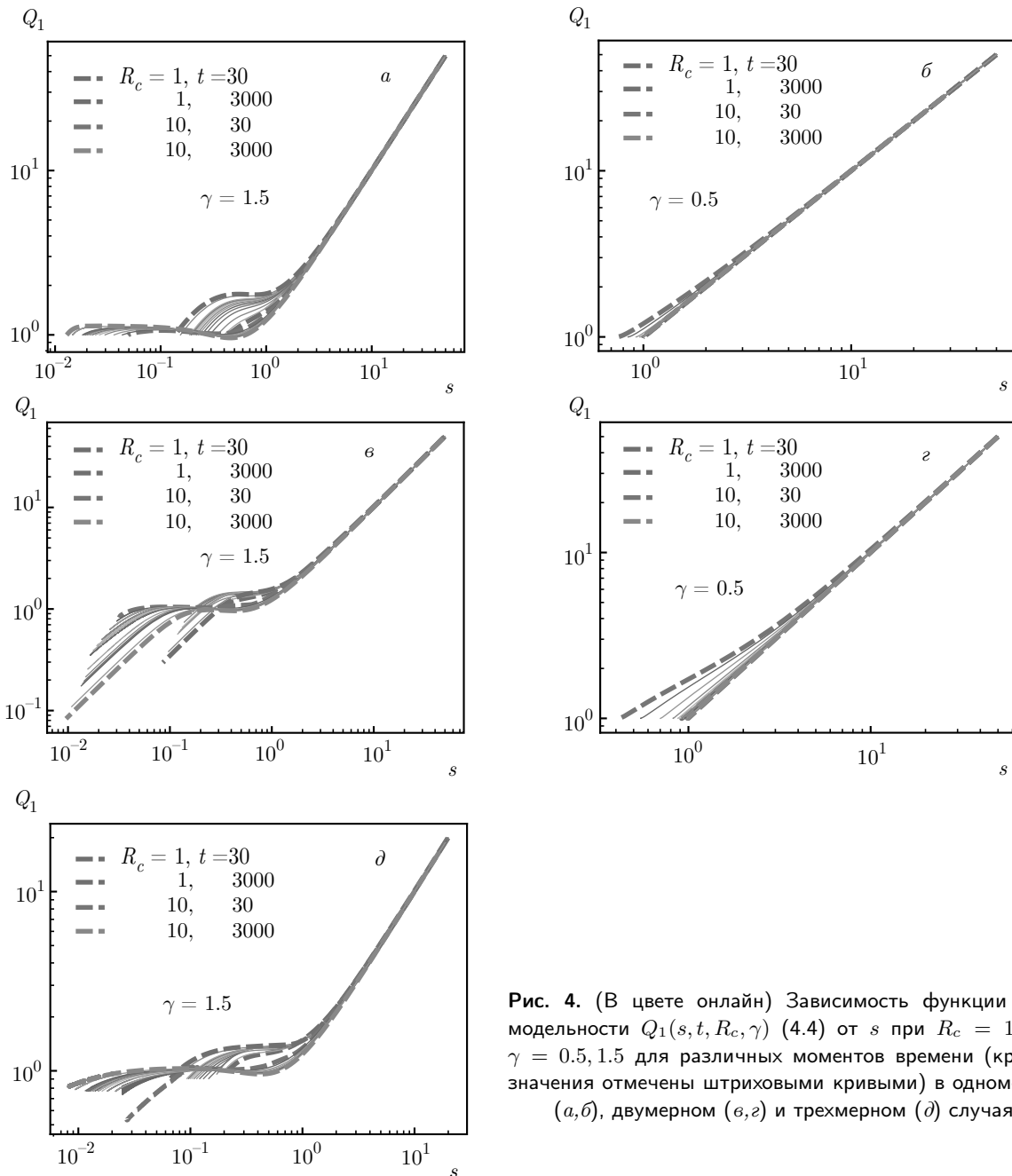


Рис. 4. (В цвете онлайн) Зависимость функции авто-модельности  $Q_1(s, t, R_c, \gamma)$  (4.4) от  $s$  при  $R_c = 1, 10$  и  $\gamma = 0.5, 1.5$  для различных моментов времени (крайние значения отмечены штриховыми кривыми) в одномерном (а, б), двумерном (в, г) и трехмерном (д) случаях

$Q_1(s, t, R_c, \gamma)$  от  $Q_1(s, t = 3000, R_c, \gamma)$  при  $R_c = 1, 10$ ,  $\gamma = 0.5, 1.5$  (рис. 5) для одномерного (а), двумерного (б, в) и трехмерного (г) переносов. Значение функции выбрано в наибольший рассматриваемый момент времени  $t = 3000$ , поскольку с ростом  $t$  зависимость функции автомодельности от времени становится более слабой. Для одномерного случая максимальное относительное отклонение функции автомодельности составляет 80 %, для двумерного и трехмерного — 70 %. Как видно на рис. 5, максимальное отклонение соответствует области малых  $s$ . С ростом  $s$  функция  $Q_1$  переходит в прямую

пропорциональность и отклонение стремится к нулю. По имеющимся функциям автомодельности  $Q_1(s, t, R_c, \gamma)$  на рис. 6, 7 построены приближенные автомодельные решения (3.1) (пунктирные кривые) для значений параметров  $R_c = 1, 10$  соответственно при  $\gamma = 1.5$  (рис. 6) и  $\gamma = 0.5$  (рис. 7) в различные моменты времени, а также общие решения (2.19), (2.17) и (2.20) (сплошные кривые), рассчитанные численно. В качестве основной функции автомодельности использовалась  $Q_1(s, t = 3000, R_c, \gamma)$ , поскольку она имеет наиболее слабую зависимость от времени. Как и на рис. 1, графики на

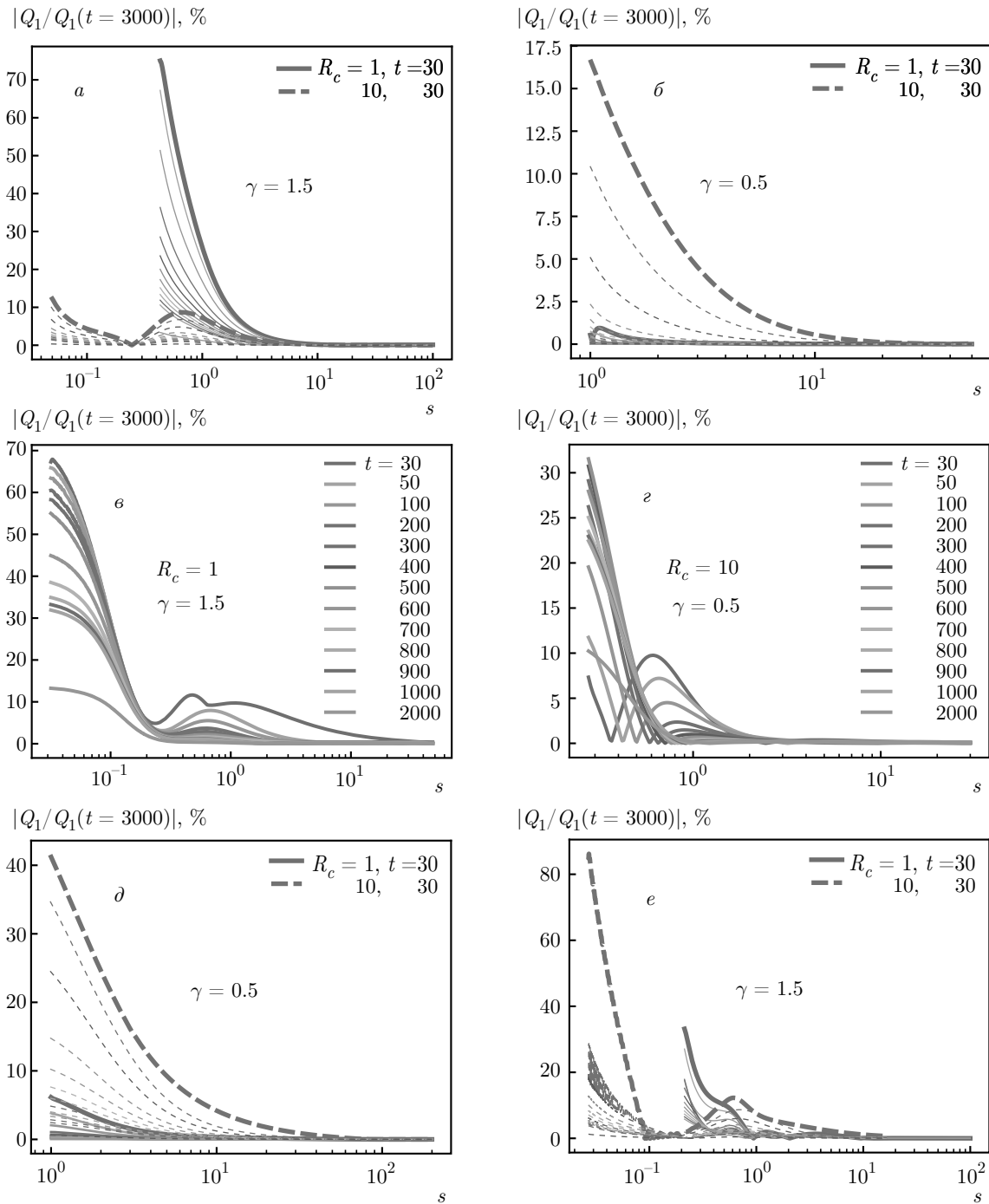
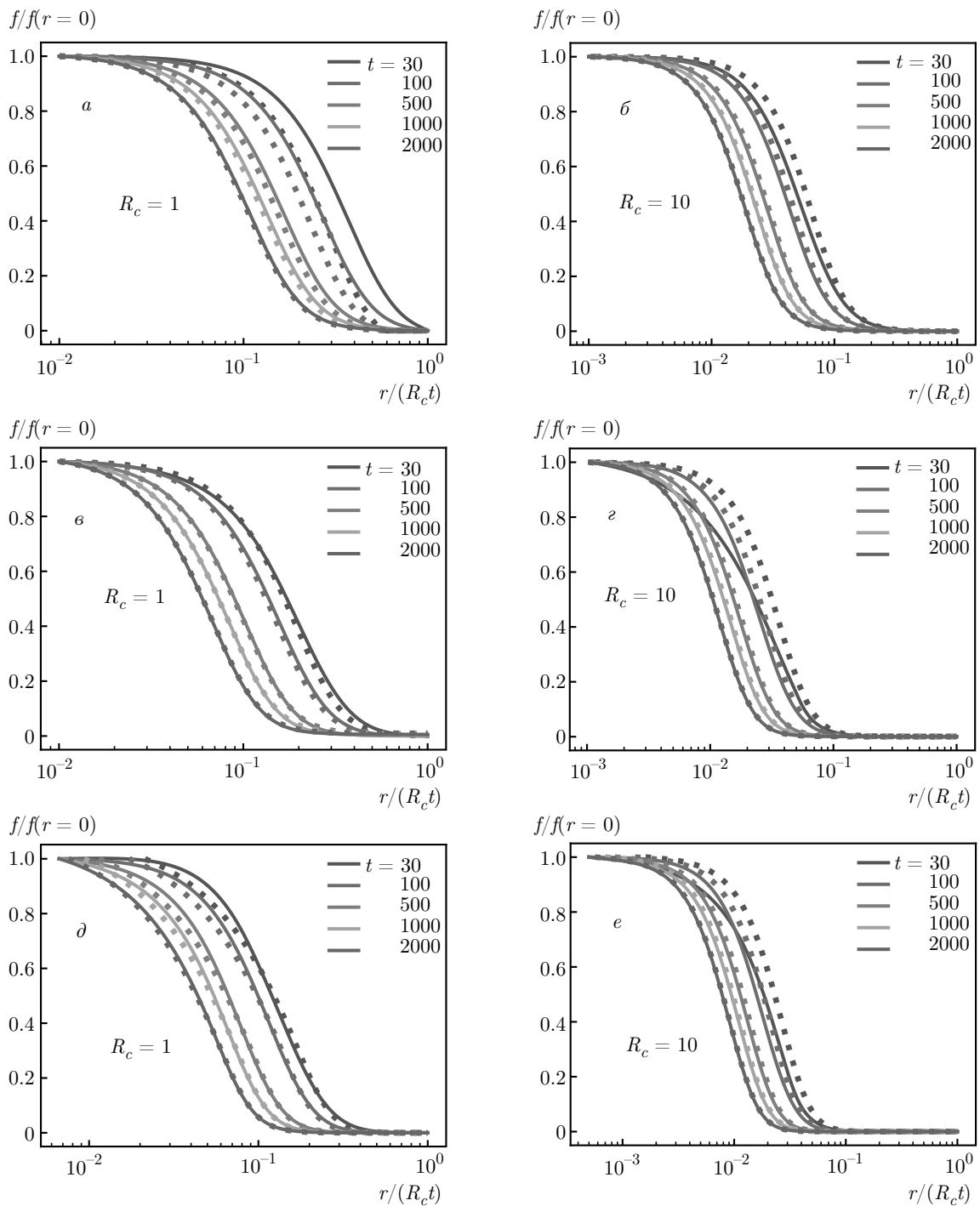


Рис. 5. (В цвете онлайн) Относительное отклонение функции автомодельности  $Q_1(s, t, R_c, \gamma)$  (4.4) в крайние моменты времени  $t = 30$  и  $t = 3000$  при  $R_c = 1, 10$  и  $\gamma = 0.5, 1.5$  в одномерном (а, б), двумерном (в, г, д) и трехмерном (е) случаях

рис. 6, 7 представлены в переменных  $r/(R_c t)$  и  $f(r, t, R_c, \gamma)/f(r = 0, t, R_c, \gamma)$ .

Сравнение результатов на рис. 6 и 7 показывает, что при  $\gamma = 1.5$  точность автомодельного решения существенно выше, чем при  $\gamma = 0.5$ . Для до-

стижения приемлемой точности при  $\gamma = 0.5$  требуется дополнительная работа по улучшению дефиниции эффективного фронта распространения возмущения для функции Грина.



**Рис. 6.** (В цвете онлайн) Сравнение автомодельных решений (4.1) для одномерного (*a, б*), двумерного (*в, г*) и трехмерного (*д, е*) случаев, построенных по функции автомодельности в наибольший момент времени  $Q_1(s, t = 3000, R_c, \gamma)$  (пунктирные кривые), с общими решениями для переноса  $1d$  (2.19),  $2d$  (2.17) и  $3d$  (2.20) (сплошные кривые) для значений  $R_c = 1, 10$  и  $\gamma = 1.5$

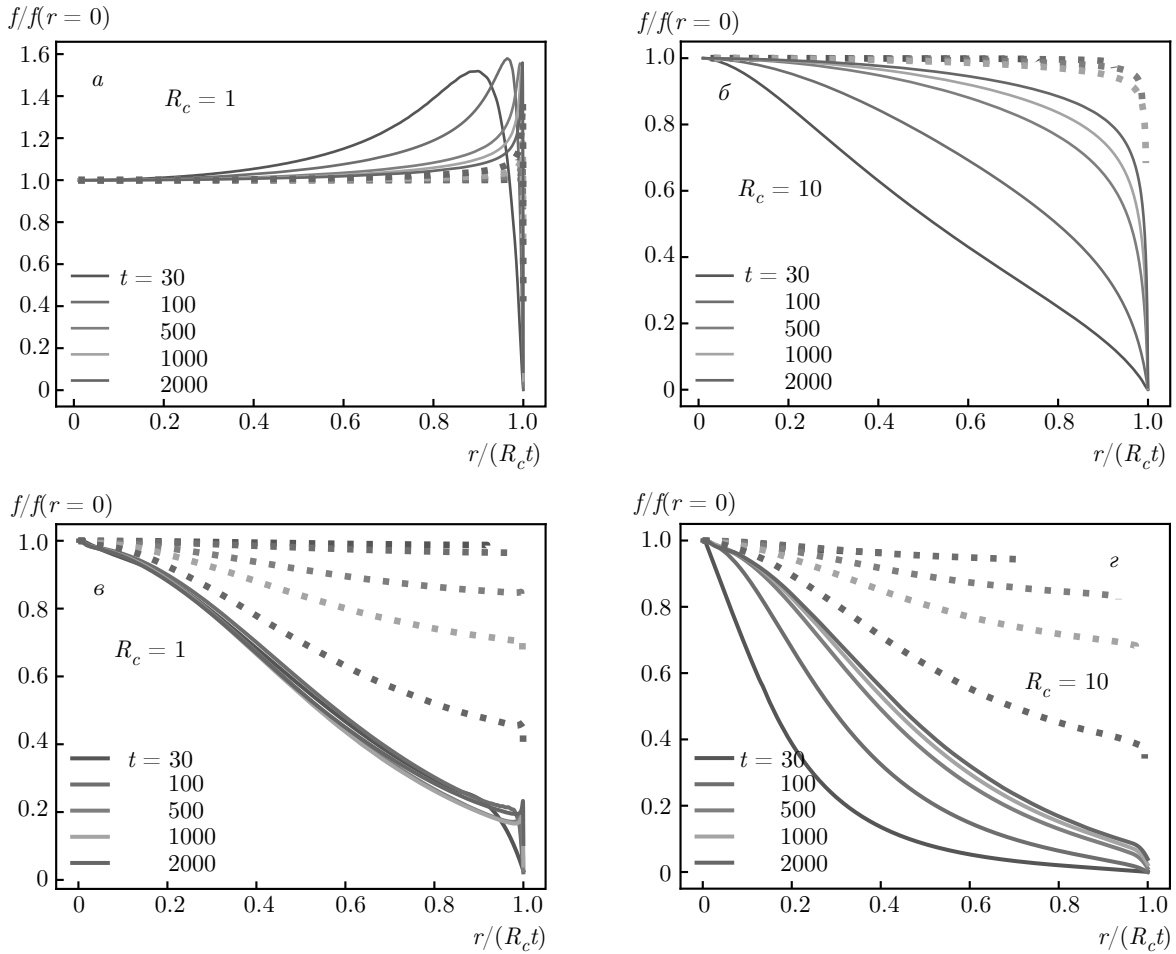


Рис. 7. (В цвете онлайн) Сравнение автомодельных решений (4.1) для одномерного (а,б) и двумерного (в,з) случаев, построенных по функции автомодельности в наибольший момент времени  $Q_1(s, t = 3000, R_c, \gamma)$  (пунктирные кривые), с общими решениями для переноса 1d (2.19), 2d (2.17) (сплошные кривые) для значений  $R_c = 1, 10$  и  $\gamma = 0.5$

Для объяснения обрыва автомодельных кривых на рис. 7 обратимся более подробно к построению автомодельного решения. Рассмотрим исходную функцию автомодельности  $Q(r, t_1, R_c, \gamma)$  (4.4) в момент времени  $t_1$ . Перейдем к автомодельной переменной  $s = \rho_{fr}(t_1, R_c, \gamma)/r$ :

$$Q(r, t_1, R_c, \gamma) = Q(\rho_{fr}(t_1, R_c, \gamma)/r, t_1, R_c, \gamma) := Q_1(s, t_1, R_c, \gamma),$$

минимальное значение  $s$ :

$$s_{min}(t_1, R_c, \gamma) = \rho_{fr}(t_1, R_c, \gamma)/(R_c t_1). \tag{4.6}$$

Далее построим автомодельное решение (4.1) в момент времени  $t_2 \ll t_1$  по функции автомодельности  $Q_1(r, t_1, R_c, \gamma)$  с переходом к переменной  $r$  в виде

$$r = \rho_{fr}(t_2, R_c, \gamma)/s. \tag{4.7}$$

Нам интересно максимальное значение переменной  $r$  в автомодельном решении для момента времени  $t_2$ , т.е. координата точки обрыва автомодельного решения. Обозначим ее как  $r_{max}(t_2, R_c, \gamma)$ . Нетрудно видеть из (4.7) и (4.6), что

$$r_{max}(t_2, R_c, \gamma) = \rho_{fr}(t_2, R_c, \gamma)/s_{min}(t_1, R_c, \gamma) = R_c t_1 \rho_{fr}(t_2, R_c, \gamma)/\rho_{fr}(t_1, R_c, \gamma). \tag{4.8}$$

Поскольку при  $\gamma = 0.5$  асимптотика общего решения вблизи баллистического конуса (2.21), входящая в определение закона фронта  $\rho_{fr}(t, R_c, \gamma)$  (4.3), справедлива лишь в небольшой области координат вблизи данного баллистического конуса и стремится к вертикальной прямой с ростом времени,  $\rho_{fr}(t, R_c, \gamma = 0.5) \rightarrow R_c t$ , при этом  $s_{min}(t, R_c, \gamma) = \rho_{fr}(t, R_c, \gamma)/(R_c t) \rightarrow 1$ , что хорошо наблюдается на рис. 4б,з. Отсюда в силу того, что  $t_2 \ll t_1$ , можем

с хорошей точностью положить  $\rho_{fr}(t_1, R_c, \gamma) \approx R_c t_1$  (в работе, например,  $t_1 = 3000$ ). Тогда из (4.8) получим

$$r_{max}(t_2, R_c, \gamma) = \rho_{fr}(t_2, R_c, \gamma). \quad (4.9)$$

Зависимость закона фронта  $\rho_{fr}(t, R_c, \gamma)$  (4.3) от  $t$  при  $R_c = 1, 10$  и  $\gamma = 0.5, 1.5$  показана на рис. 8 для одномерного (а), двумерного (б) и трехмерного (в) случаев в переменных  $t$  и  $\rho_{fr}(t, R_c, \gamma)/(R_c t)$ . Видно, что  $\rho_{fr}(t \rightarrow \infty, R_c, \gamma = 0.5) \rightarrow R_c t$ , т. е. стремится к баллистическому конусу, задаваемому конечной скоростью переносчиков.

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перенос с конечной скоростью переносчиков охватывает широкий круг задач. К таким процессам относятся перенос энергии фотонами в спектральных линиях атомов и ионов в плазме и газах в астрофизических объектах, нелокальный перенос тепла электромагнитными волнами в плазме, миграция животных (см. обзор [7] и [32, 33]). Данные явления носят супердиффузионный характер и должны описываться интегральным уравнением в пространственных координатах, не сводимым к дифференциальному уравнению диффузии, поэтому численное моделирование супердиффузионного переноса является сложной, вычислительно трудоемкой задачей.

В данной работе получено общее решение для задачи супердиффузионного переноса «прогулками Леви с остановками» на однородной плоскости и в однородном трехмерном пространстве для случая модельной функции распределения по длине свободного пробега, имеющей степенной спад с ростом расстояния. Для таких типов переноса предложено приближенное автомодельное решение. Также проведена проверка точности приближенного автомодельного решения путем сравнения с рассчитанными численно общими решениями для конкретных степенных законов ядра для переноса в одномерном, двумерном и трехмерном пространствах.

В работе представлен аналитический вывод асимптотического выражения для интегральной по пространству характеристики функции Грина при больших временах (данная характеристика соответствует количеству возбужденных частиц в среде (стоящих переносчиков)). Также показано, что в зависимости от степени убывания модельной ФРСП количество стоящих переносчиков возбуждения при больших временах может стремиться либо к нулю, либо к постоянной величине. Сравнение

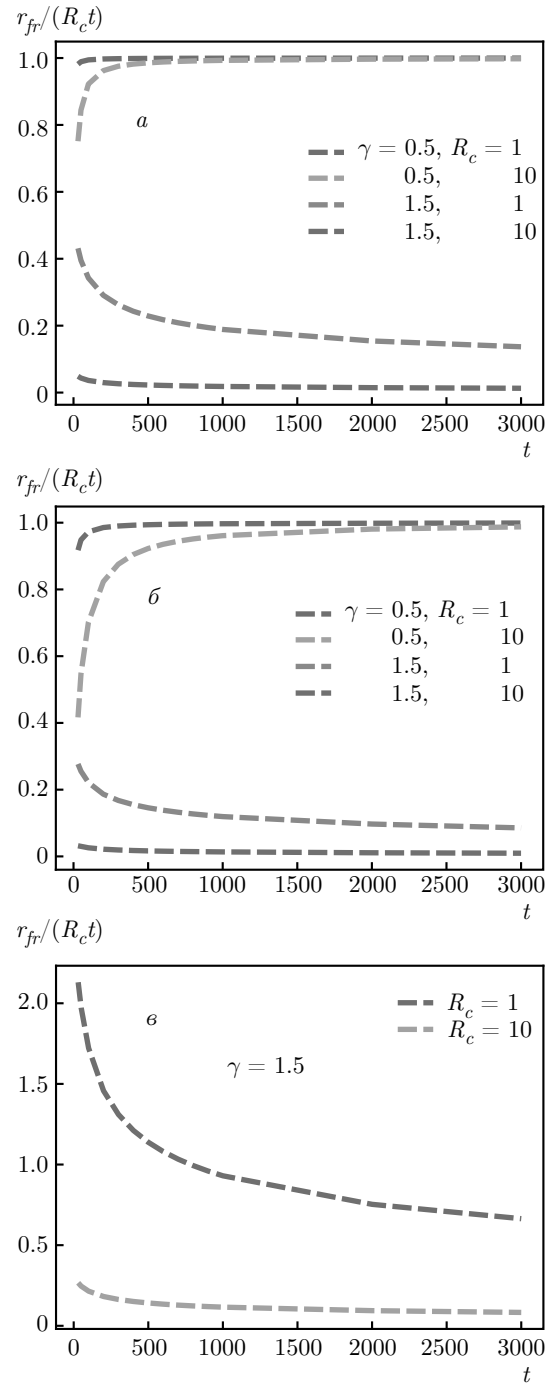


Рис. 8. Зависимость закона фронта  $\rho_{fr}(t, R_c, \gamma)$  (4.3) от  $t$  при  $R_c = 1, 10$  и  $\gamma = 0.5, 1.5$  для одномерного (а), двумерного (б) и трехмерного (в) случаев

результатов для различных показателей степенного спада функции распределения по длине свободного пробега показывает, что для  $\gamma = 1.5$  точность автомодельного решения существенно выше, чем для  $\gamma = 0.5$ . Для достижения приемлемой точности

при  $\gamma = 0.5$  требуется дополнительная работа по улучшению дефиниции эффективного фронта распространения возмущения для функции Грина.

Как показано в работах [27, 28] для случая переноса полетами Леви, включая задачи переноса резонансного излучения в спектральных линиях атомов и ионов в плазме и газах, получение автомодельных решений во всем пространстве независимых переменных требует массового численного расчета (распределенных вычислений), однако их общий объем значительно снижается за счет автомодельности решения. Разработанный здесь (как развитие [29]) метод уместно назвать методом интерполируемой автомодельности, и он представляет, на наш взгляд, значительный интерес для существенного сокращения численных расчетов в широком круге практических задач супердиффузионного переноса в физике и других областях науки.

**Благодарности.** Авторы благодарны В. С. Неверову за полезные советы по ускорению численного расчета общего решения, А. В. Соколову — за обсуждение результатов численных расчетов, К. В. Чукбару — за обсуждение работ [32, 33].

**Финансирование.** Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 18-07-01269-а, 19-32-90281), а также в рамках программы повышения конкурентоспособности НИЯУ МИФИ.

Работа выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса» НИЦ «Курчатовский институт», <http://ckp.nrcki.ru/>.

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. Shlesinger, G. M. Zaslavsky, and U. Frisch, *Lévy Flights and Related Topics in Physics*, Springer, New York (1995).
2. A. A. Dubkov, B. Spagnolo, and V. V. Uchaikin, *Int. J. Bifurcation Chaos* **18**, 2649 (2008).
3. J. Klafter and I. M. Sokolov, *Phys. World* **18**, 29 (2005).
4. I. I. Eliazar and M. F. Shlesinger, *Phys. Rep.* **527**, 101 (2013).
5. B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York (1982).
6. M. F. Shlesinger, J. Klafter, and J. Wong, *J. Stat. Phys.* **27**, 499 (1982).
7. V. Zaburdaev, S. Denisov, and J. Klafter, *Rev. Mod. Phys.* **87**, 483 (2015).
8. Л. М. Биберман, *ЖЭТФ* **17**, 416 (1947).
9. T. Holstein, *Phys. Rev.* **72**, 1212 (1947).
10. Л. М. Биберман, В. С. Воробьев, И. Т. Якубов, *Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы*, Наука, Москва (1982).
11. В. А. Абрамов, В. И. Коган, В. С. Лисица, в сб. *Вопросы теории плазмы*, под ред. М. А. Леонтовича, Б. Б. Кадомцева, Энергоатомиздат, Москва (1982), вып. 12, с. 114.
12. И. Б. Левинсон, *ЖЭТФ* **75**, 234 (1978).
13. А. Б. Кукушкин, В. С. Лисица, Ю. А. Савельев, *Письма в ЖЭТФ* **46**, 356 (1987).
14. A. V. Subashiev, O. Semyonov, Z. Chen et al., *Phys. Lett. A* **378**, 266 (2014).
15. E. Pereira, J. Martinho, and M. Berberan-Santos, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 120201 (2004).
16. Л. М. Биберман, *ДАН* **49**, 659 (1948).
17. V. I. Kogan, in *Proc. 8<sup>th</sup> ICPIG, IAEA, Vienna* (1968), p. 583.
18. *Methods in Radiative Transfer*, ed. by W. Kalkofen, Cambridge University Press, Cambridge (1984).
19. G. B. Rybicki, in *Methods in Radiative Transfer*, ed. by W. Kalkofen, Cambridge University Press, Cambridge (1984), ch. 1.
20. А. П. Напартович, *Теплофизика высоких температур* **9**, 26 (1971).
21. В. И. Коган, *Запирание излучения в плазме*, Энциклопедия низкотемпературной плазмы, под ред. В. Е. Фортова, Наука, Москва (2000), т. 1, с. 481.
22. А. Н. Старостин, *Перенос резонансного излучения*. Энциклопедия низкотемпературной плазмы, под ред. В. Е. Фортова, Наука, Москва (2000), т. 1, с. 471.
23. А. В. Kukushkin and P. A. Sdvizhenskii, *J. Phys. A: Math. Theor.* **49**, 255002 (2016).
24. А. В. Kukushkin and P. A. Sdvizhenskii, in *Proc. of 41st EPS Conference on Plasma Physics, Berlin* (2014), ECA 38F, P4.133.
25. А. В. Kukushkin, P. A. Sdvizhenskii, V. V. Voloshinov et al., *Int. Rev. Atom. Molec. Phys. (IRAMP)* **6**, 31 (2015).

26. A. B. Kukushkin and P. A. Sdvizhenskii, *J. Phys.: Conf. Series* **941**, 012050 (2017).
27. A. B. Kukushkin, V. S. Neverov, P. A. Sdvizhenskii, and V. V. Voloshinov, *Int. J. Open Inform. Technol. (INJOIT)* **6**, 38 (2018).
28. A. B. Kukushkin, V. S. Neverov, P. A. Sdvizhenskii, and V. V. Voloshinov, **6**, 43 (2018).
29. A. B. Kukushkin and A. A. Kulichenko, *Phys. Scripta* **94**, 115009 (2019).
30. A. A. Kulichenko and A. B. Kukushkin, in *Proc. of 45th EPS Conference on Plasma Physics (Prague, 2018)*, ECA 42A (2018), P1.4013.
31. A. A. Kulichenko and A. B. Kukushkin, *Int. Rev. Atom. Molec. Phys. (IRAMP)* **8**(1), 5 (2017).
32. В. Ю. Забурдаев, К. В. Чукбар, *ЖЭТФ* **121**, 299 (2002).
33. В. Ю. Забурдаев, К. В. Чукбар, *Письма в ЖЭТФ* **77**, 654 (2003).