

ЗАДЕРЖКА КВАНТОВЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ В МАГНИТНЫХ НАНОСТРУКТУРАХ

М. Ю. Барабаненков^{a}, Д. В. Калябин^{b,c}, С. А. Никитов^{b,c,d**}*

^a *Институт проблем технологии микроэлектроники и особочистых материалов Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

^b *Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова Российской академии наук
125009, Москва, Россия*

^c *Московский физико-технический институт (исследовательский университет)
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

^d *Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
410012, Саратов, Россия*

Поступила в редакцию 14 августа 2019 г.,
после переработки 14 августа 2019 г.
Принята к публикации 26 сентября 2019 г.

Квантовые одновременные корреляции между двумя спинами в магнитных наноструктурах рассматриваются в модели линейной цепочки из конечного числа атомов с обменным взаимодействием между спинами электронов соседних атомов согласно теории ферромагнетизма Гейзенберга. Предполагается, что в начальном состоянии спины всех атомов цепочки, кроме первого, ориентированы вдоль одного направления. Спин первого атома опрокинут. Вследствие обменного взаимодействия, это начальное состояние порождает волну опрокидывания спинов вдоль цепочки. Найденные выражения для нестационарных квантовых амплитуд волн вероятности опрокидывания спинов применяются к вычислению квантовых корреляций между двумя спинами, пространственно удаленными друг от друга в цепочке. Численные расчеты коррелятора спинов показали, что корреляция двух спинов цепочки наступает с задержкой порядка времени распространения обменного взаимодействия вдоль цепочки спинов. После задержки амплитуда корреляции спинов резко возрастает с последующим осцилляторным временным поведением.

DOI: 10.31857/S0044451020040082

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы интерес многих научных групп направлен на интенсивные исследования магнитных микро- и наноструктур [1–3]. Это связано как с тем, что в таких структурах, особенно на наноуровне, возникают новые, ранее не изученные эффекты, так и с попытками применения этих эффектов для создания новой компонентной базы нанoeлектроники. В частности, динамические эффекты, связанные с переносом магнитного момента в магнитных наноструктурах, могут приводить к генерации электромагнитного излучения в микроволновой и, особенно,

в терагерцевой области спектра [4, 5]. Технология создания магнитных наноструктур позволяет выращивать ферро- и антиферромагнитные пленки с толщиной порядка десятков и единиц нанометров, а электронная литография — создавать двумерные и даже одномерные ансамбли наноэлементов на основе таких пленок. За счет анизотропии формы каждый из элементов наноструктур может иметь выделенный магнитный момент. Это позволяет создавать и исследовать распределенные структуры при импульсном воздействии магнитного поля [6], либо даже в отсутствие внешнего магнитного поля. Другой важный момент при описании моделей и свойств подобных структур заключается в том, что динамика намагниченности основывается на решении уравнения Ландау–Лифшица [7] для макроспина, т. е. вместо анализа индивидуальных магнитных момен-

* E-mail: barab@iptm.ru

** E-mail: nikitov@cplire.ru

тов используется непрерывная функция магнитного момента, которая представляет собой локально усредненную плотность магнитных моментов по физически бесконечно малому объему [8]. Как было показано недавно в нашей работе [9], для магнитных структур с размером порядка 10 нм, особенно 1 нм, использованные ранее методы и полученные результаты могут быть некорректны. В [9] мы рассматривали проблему квантовых флуктуаций в магнитных наноструктурах в виде конечной линейной цепочки атомов с обменным взаимодействием между спинами электронов соседних атомов согласно теории ферромагнетизма Гейзенберга. Для простоты учитывался только один электрон в каждом атоме, участвующий в обменном взаимодействии. Предполагалось, что в начальном состоянии спины всех атомов цепочки, кроме первого, ориентированы в одном направлении. Спин первого атома опрокинут. Это начальное состояние порождало вследствие обменного взаимодействия волну опрокидывания спинов вдоль цепочки. Аналитические выражения для нестационарных квантовых амплитуд вероятностей опрокидывания спинов использовались в [9] для исследования электромагнитного излучения, порожденного волной опрокидывания спинов. При этом были вычислены среднее по квантовому ансамблю электромагнитное излучение и его квантовые флуктуации.

В настоящей статье описанная выше физическая модель применяется к актуальной проблеме перепутанных состояний атомных систем и квантовых корреляций (см., например, обзор [10] и список литературы в нем). Фактически, рассматривается проблема одновременных квантовых корреляций между двумя спинами в магнитной наноструктуре. Особое внимание уделяется случаю квантовых корреляций пространственно-удаленных спинов.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПО ВРЕМЕНИ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КВАНТОВЫХ АМПЛИТУД ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОПРОКИДЫВАНИЯ СПИНОВ

Мы исходим из нестационарного уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi \quad (1)$$

для ансамбля N атомов, расположенных в виде линейной цепочки вдоль оси x прямоугольной системы координат x, y, z , с обменным взаимодействием между спинами электронов соседних атомов, согласно теории ферромагнетизма Гейзенберга [11].

Для простоты учитывается только один электрон в каждом атоме, участвующий в обменном взаимодействии. Гамильтониан H заменяется гамильтонианом Гейзенберга обменного взаимодействия

$$H_W = -I \sum_{i=1}^N \sum_{\delta_i} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+\delta_i}. \quad (2)$$

Здесь I — интеграл обменного взаимодействия и \mathbf{S}_i — оператор вектора спина электрона i -го атома в единицах постоянной Планка — Дирака \hbar . Первая сумма в правой части (2) берется по всем атомам цепочки, вторая — по ближайшим соседям с индексами $\delta_1 = 1, \delta_N = -1$ и $\delta_i = \pm 1$ для $1 < i < N$. Решение $\Psi_W(t)$ уравнения (1) с гамильтонианом (2) ищется в виде разложения

$$\Psi_W(t) = \sum_{\ell=1}^N a_{\ell}(t) \Psi_{\ell}. \quad (3)$$

Здесь Ψ_{ℓ} — стационарная волновая функция ансамбля атомов, в котором все атомы цепочки, кроме ℓ -го, имеют спины, ориентированные вдоль положительного направления оси z , а спин ℓ -го атома опрокинут. Нестационарные амплитуды вероятностей $a_{\ell}(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$i\hbar \frac{da_1(t)}{dt} = E_0 a_1(t) + I [a_1(t) - a_2(t)], \quad (4a)$$

$$i\hbar \frac{da_{\ell}(t)}{dt} = E_0 a_{\ell}(t) + I [2a_{\ell}(t) - a_{\ell-1}(t) - a_{\ell+1}(t)], \quad 1 < \ell < N, \quad (4b)$$

$$i\hbar \frac{da_N(t)}{dt} = E_0 a_N(t) + I [a_N(t) - a_{N-1}(t)], \quad (4c)$$

где $E_0 = -(1/2)I(N-1)$ является собственной энергией основного состояния системы с гамильтонианом (2), когда все спины ориентированы вдоль положительного направления оси z . Вывод системы уравнений (4) дан в работе [9].

2.1. Собственные моды и частоты квантовых амплитуд

Решение системы уравнений (4) получено в [9] в виде монохроматических волн

$$a_{\ell}(t) = \sum_{\nu=1}^{N/2} f_{\nu\ell} \exp(-i\omega_{\nu}t) \quad (5)$$

с амплитудами $f_{\nu\ell}$ вероятностей опрокидывания спинов

$$f_{\nu\ell} = (-1)^{\ell-1} \left[\tilde{C}_\nu \exp(i\ell\theta_\nu) + \tilde{C}_{-\nu} \exp(-i\ell\theta_\nu) \right], \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\pm\nu} &= C_{\pm\nu}, \quad \nu = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \\ \tilde{C}_{\pm N/2} &= \frac{1}{2} C_{N/2}. \end{aligned} \quad (\text{nampla})$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_\nu &= \frac{a_1(0)}{N} \exp(-i\theta_\nu) (1 - \exp(-i\theta_\nu)), \\ C_{N/2} &= -\frac{2a_1(0)}{N}. \end{aligned} \quad (7)$$

Дискретный спектр волновых чисел и собственных частот дается соотношениями

$$\begin{aligned} \omega_\nu &= \omega_0 + \omega_W \cos \theta_\nu, \quad \theta_\nu = \frac{2\pi\nu}{N}, \\ \nu &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left(\frac{N}{2} - 1 \right), \frac{N}{2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\omega_0 = (E_0 + 2I)/\hbar$; характерная частота ω_W имеет величину порядка частоты, с которой два электрона в молекуле обмениваются своими местами, $\omega_W = 2I/\hbar$ [12]. Заметим, что решение (5) системы уравнений (4) получено без использования периодических граничных условий. Тем не менее, полученный дискретный спектр (8) волновых чисел такой же, как и при периодических граничных условиях. Фактически это означает представление решения системы уравнений (4) в виде разложения по используемой в квантовой теории твердых тел [13] системе собственных функций $\exp(i\ell\theta_\nu)$, где $\ell = 1, 2, \dots, N$, при предположении, что число атомов N цепочки — четное. Фактически, коэффициенты (7) получены при начальном условии

$$a_1(0) = a_2(0), \quad a_3(0) = a_4(0) = \dots = a_N(0) = 0. \quad (9)$$

2.2. Собственные моды и собственные частоты гамильтониана Гейзенберга

Амплитуды (6) удовлетворяют условию ортогональности

$$\sum_{\ell=1}^N f_{\nu\ell} f_{\nu'\ell}^* = g_\nu \delta_{\nu\nu'}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} g_\nu &= \frac{4}{N} |a_1(0)|^2 (1 - \cos \theta_\nu), \quad \nu = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \\ g_{N/2} &= \frac{4}{N} |a_1(0)|^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Индекс «*» в (10) означает комплексно-сопряженную величину. Подстановка амплитуд вероятностей опрокидывания спинов (5) в исходное разложение (3) решения уравнения Шредингера (1) с гамильтонианом Гейзенберга (2) дает

$$\Psi_W(t) = \sum_{\nu=1}^{N/2} F_\nu \exp \frac{E_\nu t}{i\hbar}, \quad (12)$$

$$F_\nu = \sum_{\ell=1}^N f_{\nu\ell} \Psi_\ell, \quad E_\nu = \hbar\omega_\nu, \quad (12a)$$

$$H_W F_\nu = E_\nu F_\nu.$$

Согласно последнему равенству, функции F_ν являются собственными функциями гамильтониана Гейзенберга с собственными энергиями E_ν , что является некоторой альтернативой методу, известному как подстановка Бете (Bethe ansatz) [14, 15].

Отметим, что стационарные волновые функции Ψ_ℓ состояния цепочки спинов с одним опрокинутым спином удовлетворяют условию ортогональности

$$(\Psi_\ell, \Psi_{\ell'}) = \delta_{\ell\ell'}, \quad (13)$$

где (\dots, \dots) означает скалярное произведение в функциональном пространстве Гильберта. Из двух условий ортогональности (10) и (13) следует условие ортогональности для собственных функций гамильтониана Гейзенберга

$$(F_\nu, F_{\nu'}) = g_\nu \delta_{\nu\nu'}. \quad (14)$$

Это условие ортогональности позволяет вычислить норму нестационарной волновой функции (12) из волн опрокидывающихся спинов с физически очевидным результатом

$$(\Psi_W(t), \Psi_W(t)) = (\Psi_W(0), \Psi_W(0)) = 2|a_1(0)|^2. \quad (15)$$

Норма (15) означает также, что

$$\sum_{\ell=1}^N |a_\ell(t)|^2 = 2|a_1(0)|^2. \quad (16)$$

В дальнейшем мы полагаем $2|a_1(0)|^2 = 1$.

3. КВАНТОВОЕ УСРЕДНЕНИЕ

Среднее $\langle L \rangle$ некоторого оператора L с волновой функцией $\Psi_W(t)$ вычисляется как

$$\langle L(t) \rangle = (L\Psi_W(t), \Psi_W(t)). \quad (17)$$

Согласно этой формуле мы получаем, в частности,

$$\langle S_{mz}(t) \rangle = \sum_{\ell, \ell'=1}^N a_{\ell}(t) a_{\ell'}^*(t) \langle S_{mz} \Psi_{\ell}, \Psi_{\ell'} \rangle. \quad (18)$$

Использование соотношений

$$S_{mz} \Psi_m = -\frac{1}{2} \Psi_m, \quad S_{mz} \Psi_{\ell} |_{\ell \neq m} = \frac{1}{2} \Psi_{\ell} \quad (19)$$

дает

$$\langle S_{mz}(t) \rangle = \frac{1}{2} - |a_m(t)|^2. \quad (20)$$

Аналогично получается, что

$$\langle S_{mz}(t) S_{nz}(t) \rangle_{m \neq n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} |a_m(t)|^2 - \frac{1}{2} |a_n(t)|^2. \quad (21)$$

Одновременную корреляционную функцию двух спинов зададим коррелятором вида

$$\mathcal{F}_{m \neq n}(S_{mz}(t) S_{nz}(t)) = \langle S_{mz}(t) S_{nz}(t) \rangle - \langle S_{mz}(t) \rangle \langle S_{nz}(t) \rangle. \quad (22)$$

Этот коррелятор вычисляется на основе равенств (20), (21) как

$$\mathcal{F}_{m \neq n}(S_{mz}(t) S_{nz}(t)) = -|a_m(t)|^2 |a_n(t)|^2, \quad (23)$$

а при $m = n$ дает флуктуацию спинов

$$\mathcal{F}_m(S_{mz}(t)) = \langle S_{mz}(t) S_{mz}(t) \rangle - \langle S_{mz}(t) \rangle \langle S_{mz}(t) \rangle = |a_m(t)|^2 (1 - |a_m(t)|^2). \quad (24)$$

Из выражений (23), (24) конструируется нормированный коррелятор

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}(S_{mz}(t) S_{nz}(t)) &= \frac{\mathcal{F}_{m \neq n}(S_{mz}(t) S_{nz}(t))}{\mathcal{F}_m(S_{mz}(t))} = \\ &= -\frac{|a_n(t)|^2}{1 - |a_m(t)|^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

4. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КВАНТОВЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ В ДЛИННОЙ ЦЕПОЧКЕ

Рассмотрим нормированный коррелятор (25) в случае достаточно длинной цепочки спинов $N \gg 1$. Пусть спин с номером m находится близко к началу цепочки, а спин с номером n расположен близко к ее концу. В случае большого числа спинов в цепочке амплитуды (5) имеют асимптотику

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1(0)} a_{\ell}(t)_{N \gg 1} &\approx (-1)^{\ell-1} \exp \left[-i \frac{\pi(\ell-1)}{2} \right] \times \\ &\times \exp(-i\omega_0 t) [J_{\ell-1}(\omega_W t) - iJ_{\ell-2}(\omega_W t)]. \end{aligned} \quad (26)$$

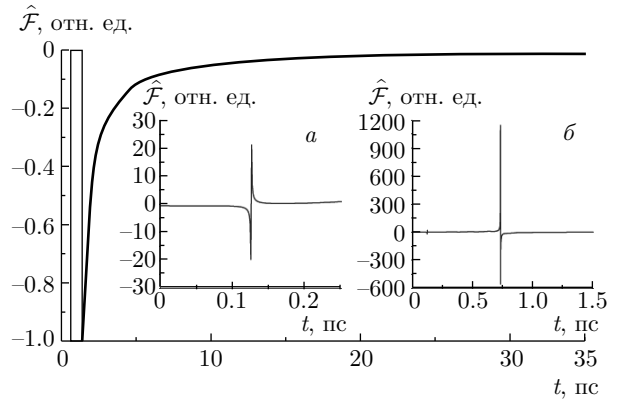


Рис. 1. Расчет временной зависимости коррелятора (25) соседних $m = 5$ и $n = 6$ спинов цепочки из $N = 1000$ спинов атомов Fe. На вставках *a* и *б* показаны два пика антипики на временах до 1.3 пс

В частности,

$$\begin{aligned} |a_{\ell}(t)|^2_{|N \gg 1} &\approx \\ &\approx |a_1(0)|^2 [J_{\ell-1}^2(\omega_W t) + J_{\ell-2}^2(\omega_W t)]. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь $J_{\ell}(x)$ обозначает функцию Бесселя. Подстановка асимптотики в (25) дает

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}(S_{mz}(t) S_{nz}(t))_{N \gg 1} &\approx \\ &\approx -\frac{1}{2} \frac{J_{n-1}^2(\omega_W t) + J_{n-2}^2(\omega_W t)}{1 - [J_{m-1}^2(\omega_W t) + J_{m-2}^2(\omega_W t)]/2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Учитывая, что значение индекса m мало, получаем, что знаменатель правой части (28) имеет асимптотику

$$[J_{m-1}^2(\omega_W t) + J_{m-2}^2(\omega_W t)]_{\omega_W t \gg 1} \approx \frac{2}{\pi \omega_W t}, \quad (29)$$

которая получается из асимптотики функции Бесселя при большом аргументе и фиксированном индексе. Подставляя (29) в (28), получаем

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}(S_{mz}(t) S_{nz}(t))_{\substack{N \gg 1 \\ \omega_W t \gg 1}} &\approx \\ &\approx -\frac{1}{2} [J_{n-1}^2(\omega_W t) + J_{n-2}^2(\omega_W t)]. \end{aligned} \quad (30)$$

5. ЗАДЕРЖКА НАСТУПЛЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИИ

На рис. 1, 2 представлены результаты численных расчетов зависимости величины нормированного коррелятора (25) от времени для случая цепочки атомов железа, состоящей из $N = 1000$ атомов. При величине обменного интеграла $I(\text{Fe}) = -1.21 \cdot 10^{-14}$ эрг [8] для атомов Fe

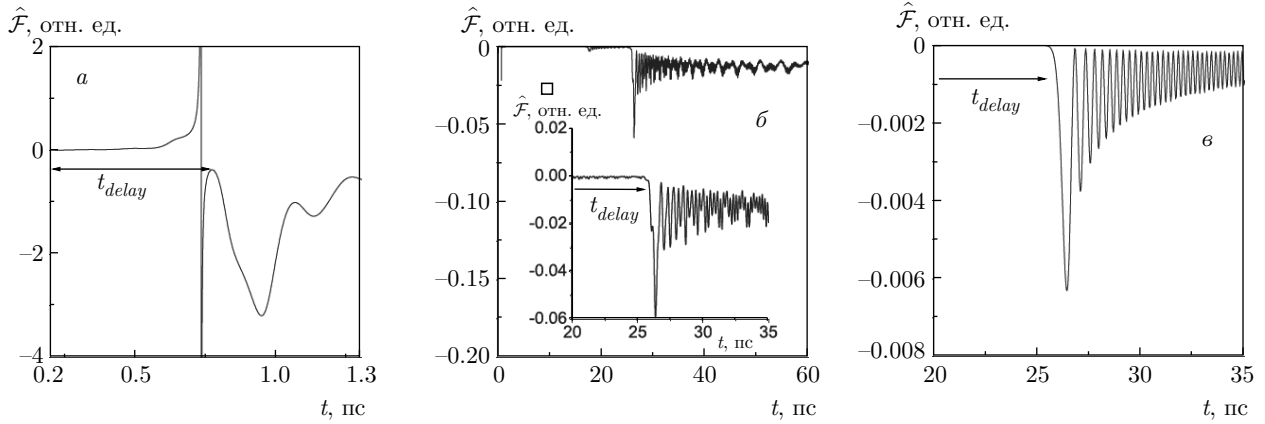


Рис. 2. Расчет временной зависимости коррелятора (25) спинов $m = 5$ и $n = 20$ (а), $n = 600$ (б) цепочки из $N = 1000$ спинов атомов Fe. На панели (в) приведен расчет асимптотической формулы (30) для 5 и 605 спинов. Время задержки наступления корреляции t_{delay} показано стрелкой

характерная частота составляет величину $|\omega_W| = 2.3 \cdot 10^{13}$ рад/с, а соответствующая ей линейная частота лежит в терагерцевом диапазоне, $\nu_W = 3.66$ ТГц. При расчетах частот (8) использовалась формула $E_0/\hbar = \omega_0 = |I|(N - 1)/2\hbar$, так как собственная энергия основного состояния системы с гамильтонианом Гейзенберга, в котором все спины ориентированы вдоль одного направления, равна $E_0 \approx -(1/2)I(N - 1)$.

В расчетах фиксировался спин в начале цепочки, в частности, спин с номером $m = 5$, другой спин с номером n менял свое положение. В частности, временная зависимость, приведенная на рис. 1, соответствует соседнему спину с номером $n = 6$. На вставках рис. 1а,б показаны два пика-антипика разной амплитуды для разных n , которые появляются на временной зависимости коррелятора независимо от удаления спина $5 < n \leq N$ от $m = 5$. Время формирования этих пиков-антипиков практически неизменно и приблизительно на три порядка больше времени распространения света в свободном пространстве на длину цепочки. Это время составляет 0.834 фс для цепочки из $N = 1000$ атомов Fe с межатомным расстоянием $a_{Fe} = 0.25$ нм. К примеру, более подвижный пик-антипик, изображенный на вставке рис. 1б, соответствует задержке наступления корреляции от 0.721 до 0.732 пс для спинов с номером n от 15 до 900 при фиксированном $m = 5$.

По мере удаления спина n от m , от второго пика-антипика отщепляется всплеск корреляции. Отщепление уже сформированного всплеска показано на рис. 2а в случае расчета корреляции между 5 и 20

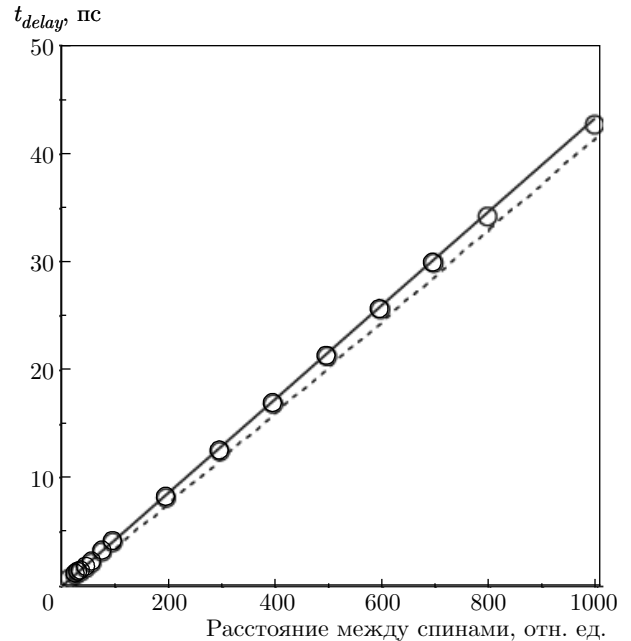


Рис. 3. Зависимость задержки наступления корреляции от расстояния между спинами в цепочке: \circ — расчет по точной формуле (25), сплошная кривая — расчет по формуле $t_{delay} = N/\omega_W$, пунктир — расчет по асимптотике (30)

спинами цепочки. По мере удаления спина n к концу цепочки всплеск корреляции наблюдается на все больших временах (сравните положения всплеска на рис. 2а и 2б). Сравнение кривых на рис. 2б и рис. 2в демонстрирует хорошее согласие расчета по точной (25) и приближенной (30) формулам.

Если исходить из временного положения любого из двух пиков-антипиков, то время наступления корреляции практически не зависит от расстояния между двумя спинами. Однако, если следить за временным положением указанного выше всплеска корреляции, то можно дать простое физическое объяснение времени задержки в наступлении корреляции. В расчетах время задержки t_{delay} определялось от нулевого времени до момента начала устойчивого изменения амплитуды всплеска корреляции, не меньшей 0.1%. Результаты расчетов времени задержки в наступлении корреляции приведены на рис. 3. Время распространения обменного взаимодействия вдоль цепочки спинов можно оценить как отношение длины цепочки $a_{Fe}N$ к скорости распространения обменного взаимодействия $a_{Fe}\omega_W$. Тогда для времени задержки распространения обменного взаимодействия получим $t_{delay} = a_{Fe}N/a_{Fe}\omega_W = N/\omega_W$. Рисунок 3 показывает хорошее совпадение времени задержки, вычисленного из расчетов по точной формуле (25), по приведенной выше оценке $t_{delay} = N/\omega_W$ и по асимптотике (30).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе исследована проблема квантовых корреляций, существующих между двумя спинами (магнитными моментами) в конечноразмерной цепочке магнитных наноструктур. Рассмотренная модель учитывала только обменное взаимодействие между спинами электронов соседних атомов при использовании теории ферромагнетизма Гейзенберга. Вычислены квантовые корреляции между двумя спинами дистанционно удаленными друг от друга вдоль цепочки атомов. Найдены условия, при которых корреляция между двумя состояниями спинов наступает с задержкой. Определены времена задержки и соответствующие частоты возможного излучения при таких корреляциях. Полученные результаты справедливы для обобщенных магнитных наноструктур и могут быть использованы при описании свойств динамики намагниченности в структурах, содержащих ферро- и антиферромагнитные материалы.

Посвящается памяти Юрия Николаевича Барабаненкова, выдающегося российского ученого, одного из основоположников современной микроскопической теории многократного рассеяния волновых полей в случайно-неоднородных средах.

Финансирование. Работа С. А. Н. выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант №19-19-00607), работа Д. В. К. — при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№18-57-76001, 18-07-00509), работа М. Ю. Б. — в рамках государственного задания №075-00475-19-00. Также работа поддержана грантом Правительства РФ (соглашение 074-02-2018-286) для лаборатории «Терагерцовая спинтроника» МФТИ.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Никитов, Д. В. Калябин, И. В. Лисенков и др., УФН **185**, 1099 (2015).
2. D. Grundler, Nat. Nanotech. **11**, 407 (2016).
3. A. V. Chumak, V. I. Vasyuchka, A. A. Serga et al., Nat. Phys. **11**, 453 (2015).
4. Е. А. Вилков, Ю. В. Гуляев, П. Е. Зильберман и др., Радиотехника и Электроника, **60**, 963 (2015).
5. T. Jungwirth, X. Marti, P. Wadley, and J. Wunderlich, Nat. Nanotech. **11**, 231 (2016).
6. А. М. Шутый, Д. И. Семенов, ЖЭТФ **156**, 299 (2019).
7. L. Landau, Phys. Z. Sovietunion **8**, 153 (1935).
8. A. Aharoni, *Introduction to the Theory of Ferromagnetism*, University Press, Oxford (2000).
9. Ю. Н. Барабаненков, С. А. Никитов, М. Ю. Барабаненков, УФН **189**, 85 (2019).
10. И. В. Баргатин, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, УФН **171**, 625 (2001).
11. W. Heisenberg, Z. Phys. **49**, 619 (1928).
12. H. Bethe, in: *Quantenmechanik der Ein- und Zwei-Electronenprobleme*, Handbuch der Physik, Zweite Auflage, XXIV, Erster Teil (1933).
13. C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, Wiley, New York (1953).
14. H. A. Bethe, Z. Phys. **71**, 205 (1931).
15. M. Gaudin, *La Fonction d'onde de Bethe*, Masson, Paris–New York (1983).