

# ПОЧТИ ПОЛНОСТЬЮ ЭМПИРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХИМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

*А. Н. Тавфик*<sup>a\*</sup>, *М. А. Вахаб*<sup>b</sup>, *Х. Яссин*<sup>b</sup>, *Х. М. Н. Эль Дин*<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Nile University, Egyptian Center for Theoretical Physics  
12588, Giza, Egypt

Institute for Theoretical Physics, Goethe University  
D-60438, Frankfurt am Main, Germany

<sup>b</sup> Physics Department, Faculty of Women for Arts, Science and Education, Ain Shams University  
11577, Cairo, Egypt

<sup>c</sup> Basic Science Department, Modern Academy for Engineering  
11571, Cairo, Egypt

Поступила в редакцию 31 мая 2019 г.,  
после переработки 8 ноября 2019 г.  
Принята к публикации 8 ноября 2019 г.

(Перевод с английского)

## ALMOST-ENTIRELY EMPIRICAL ESTIMATION FOR CHEMICAL POTENTIAL

A. N. Tawfik, M. Abdel Wahab, H. Yassin, H. M. Nasr El Din

На основании термо-статистических моделей исследовалось распределение по поперечным импульсам родившихся в столкновениях хорошо идентифицируемых частиц, таких как  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $K^+$ ,  $K^-$ ,  $p$  и  $\bar{p}$ . Предложен новый подход для почти полностью эмпирического определения химического потенциала  $\mu$ . На основании функции распределения для большого канонического ансамбля предложено выражение в общем виде для зависимости  $\mu$  от быстроты  $y$ . После подгонки к имеющимся экспериментальным данным для  $p_{\perp}$  и  $d^2N/2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy$  для наиболее центральных столкновений при энергиях 7.7, 11.5, 19.6, 27, 39, 130 и 200 ГэВ получено выражение в общем виде для зависимости  $\mu$  от быстроты для выходов всех частиц при различных энергиях:  $\mu = a + by^2$ . Полученная зависимость энергии в системе центра масс имеет вид  $\sqrt{s_{NN}} = c[(\mu - a)/b]^{d/2}$ . Проверка показала, что результаты, полученные в рамках предложенного подхода, очень хорошо согласуются с экспериментально измеренными распределениями по быстротам для выходов различных частиц при различных энергиях.

DOI: 10.31857/S0044451020040033

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Считается, что с помощью экспериментов с релятивистскими тяжелыми ионами, помимо прочего, можно изучать различные этапы максимально центральных столкновений тяжелых ионов с целью

лучшего понимания динамики столкновений и дальнейшей эволюции системы, в которой происходят сильные столкновения [1]. Деконфайнмент сталкивающихся адронов, которые быстро разлетаются, а затем охлаждаются, при высоких температурах приводит к формированию цветной кварк-глюонной плазмы (КГП) [2]. Кроме того, «адронизацию» или фазовый переход от КГП в состоянии деконфайнмента к бесцветным адронам в состоянии конфайнмента можно объяснить просто как рекомбинацию

\* E-mail: atawfik@nu.edu.eg

кварков и глюонов, которая имеет место при некоторой критической температуре. После охлаждения наступает этап, для которого характерно фиксированное число родившихся в столкновениях некоррелированных частиц, т. е. имеет место химическое вымораживание [3–9]. В подобной расширяющейся системе следует выделить еще одно состояние вымораживания, известное как кинетическое вымораживание, которое обусловлено конкуренцией между локальным рассеянием и скоростью расширения [10].

Различные особенности формирования КГП и фазового перехода были рассмотрены в работе [11]. Одна из этих особенностей — необычное усиление странности, при котором глюон-глюонные взаимодействия в КГП-среде приводят к рождению пар  $s\bar{s}$ , что ведет к быстрому насыщению среды странными кварками при формировании КГП-фазы, в результате чего увеличивается число рождений странных адронов, а потому и странных барионов и странных антибарионов [12, 13]. Другой особенностью является то, что различные термодинамические величины, такие как давление, плотность энергии и плотность энтропии системы можно оценить статистически как функции температуры  $T$  и барионного химического потенциала  $\mu_B$ . Еще одна характерная особенность, которая непрямым образом влияет на основные свойства КГП, определяется распределением по поперечным импульсам  $p_T$  [14, 15]. Точные измерения распределений по поперечным импульсам  $p_T$  для различных значений быстрот [16] можно использовать для изучения динамики и свойств рождающихся частиц от стадии начальных столкновений до финальной стадии вымораживания. В настоящей работе мы будем рассматривать особенности второго и третьего типа. В работе предложен новый подход для почти полностью эмпирического определения химического потенциала  $\mu$  на основании распределений по быстротам родившихся в столкновениях хорошо распознаваемых частиц, таких как  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $K^+$ ,  $K^-$ ,  $p$ ,  $\bar{p}$ .

Зависимость температуры вымораживания  $T_{ch}$  от быстроты файрболла обсуждалась в работах [17–20]. Еще одна концепция зависимости барионного химического потенциала  $\mu_B$  от быстроты  $y$  была предложена в работе [21]. Оказалось, что некоторое значение температуры, по-видимому, является достаточным для описания результатов, полученных для различных интервалов быстрот. В принципе, химический потенциал  $\mu$  играет основную роль в статистическом описании рождения частиц.

Распределение протонов и антипротонов по быстротам, полученное в коллаидере RHIC при

нуклон-нуклонных столкновениях с энергиями в системе центра масс  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ, было описано с помощью статистической модели в работе [18], где предполагалось, что формирование горячих и плотных областей сдвигается вдоль оси пучка в сторону возрастающих быстрот. Расширенный вариант этой модели использовался для описания распределения по быстротам протонов, антипротонов, каонов, антикаонов, пионов, а также отношений  $\bar{\Lambda}/\Lambda$  и  $\bar{\Xi}/\Xi$ , полученных для энергий RHIC [22, 23]. На основании всех перечисленных выше моделей была построена обобщающая модель [16].

В настоящей работе предложен альтернативный — почти прямой — метод определения химического потенциала  $\mu$ , основанный на распределении по быстротам родившихся в столкновениях хорошо идентифицируемых частиц  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $K^+$ ,  $K^-$ ,  $p$ ,  $\bar{p}$ . Почти во всех экспериментах, которые проводятся при высоких энергиях, распределение частиц по быстротам можно точно измерить. Это означает, что используя эти распределения, мы можем практически непосредственно получить химические потенциалы различных частиц, рожденных в определенном диапазоне быстрот, независимо от энергии столкновений, объема столкновений и/или типа столкновений. Другими словами, мы предлагаем универсальный, почти полностью эмпирический подход, позволяющий найти химический потенциал. Окончательное подтверждение полученных результатов, т. е. предложенной нами универсальной зависимости полного химического потенциала  $\mu$  от быстроты для каждой родившейся частицы, можно получить, показав, что можно воспроизвести экспериментально измеренное распределение частиц по быстротам. Другими словами, коль скоро наше утверждение относительно зависимости  $\mu$  от  $y$  справедливо, зависимость экспериментально измеренного распределения  $dN/dy$  от  $y$  в наиболее центральных столкновениях может быть хорошо описана для различных энергий столкновений.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 описаны теоретические подходы. В разд. 2.1 обсуждаются температурные подходы. В разд. 3 приведены результаты. Полученные зависимости химического потенциала от быстроты обсуждаются в разд. 3.1. Применение предложенного подхода для воспроизведения различных экспериментально измеренных распределений частиц по быстротам (т. е. зависимости  $dN/dy$  от  $y$ , полученные с использованием предложенного подхода) обсуждаются в разд. 3.3. Раздел 4 представляет собой Заключение.

## 2. МОДЕЛЬ

Распределение по импульсам частиц, вылетающих из фэйрболла, можно выразить как [17, 22, 24]

$$E \frac{d^3 N}{d^3 p} \equiv f(E, p_L), \quad (1)$$

где  $E$  и  $p_L$  — энергия и продольный импульс частицы, соответственно. Элемент объема импульсного пространства имеет вид

$$\frac{d^3 p}{E} = m_{\perp} dm_{\perp} dy d\varphi. \quad (2)$$

Тогда, в терминах поперечной массы, распределение будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d^3 N}{dy m_{\perp} dm_{\perp} d\varphi} &\equiv f(E, p_L), \\ \frac{d^2 N}{2\pi m_{\perp} dm_{\perp} dy} &\equiv f(E, p_L). \end{aligned} \quad (3)$$

При средних быстротах, т. е. при  $y = 0$ , распределение по поперечным импульсам, определяемое уравнением (1), имеет вид

$$\frac{d^2 N}{2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy} \equiv f(E, p_L). \quad (4)$$

В следующем разделе будет предложен подход, позволяющий почти полностью эмпирически получить химический потенциал  $\mu$ , используя экспериментально измеренные распределения частиц по быстротам.

### 2.1. Подход

Для описания количества частиц, рождающихся на заключительном этапе столкновений, когда практически достигнуто химическое вымораживание, при котором число родившихся частиц фиксировано, используются различные термо-статистические подходы. Обзор недавних исследований по этой теме заинтересованный читатель может найти в работе [11]. Теперь выражения, приведенные в предыдущем разделе, можно сформулировать в рамках термо-статистической модели, такой как модель адронного резонансного газа (МАРГ) [11]. Будем полагать для простоты, что в рамках МАРГ имеется только одна компонента, а именно,

$$Z(T, \mu, V) = \text{Tr} \left[ \exp \left( \frac{\mu N - H}{T} \right) \right], \quad (5)$$

где  $H$  — гамильтониан системы, который задается суммированием кинетических энергий релятивистских ферми- и бозе-компонент, соответствующих эффективным степеням свободы удерживаемых адронов [25].

В химический потенциал  $\mu$  входят компоненты, связанные с различными квантовыми числами:

$$\mu = B\mu_B + S\mu_S + Q\mu_Q + I_3\mu_{I_3} + \dots,$$

где  $B$ ,  $S$ ,  $Q$  и  $I_3$  соответствуют барионному квантовому числу, странности, электрическому заряду и изоспину, соответственно.

Температура вымораживания  $T_{ch}$  и химический потенциал  $\mu$  являются хорошо известными термодинамическими параметрами, которые можно определить в рамках предложенных подходов [26]. В статистиках Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна полное число частиц  $N$  равно

$$N = \frac{gV}{(2\pi)^3} \int \left( \exp \left[ \frac{E - \mu}{T} \right] \pm 1 \right)^{-1} d^3 p, \quad (6)$$

где  $g$  — множитель, определяющий вырождение, а  $V$  — объем рассматриваемой системы; « $\pm$ » относятся к фермионам и бозонам, соответственно. Из уравнения (6) можно получить распределение по импульсам (уравнения (2)–(4))

$$E \frac{d^3 N}{d^3 p} = \pm E \frac{gV}{(2\pi)^3} \left( \exp \left[ \frac{E - \mu}{T} \right] \pm 1 \right)^{-1}. \quad (7)$$

Из уравнений (4) и (7) получаем

$$\frac{d^2 N}{2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy} = \pm E \frac{gV}{(2\pi)^3} \left( \exp \left[ \frac{E - \mu}{T} \right] \pm 1 \right)^{-1}. \quad (8)$$

Тогда энергию можно выразить как функцию быстроты [24],

$$E = m_{\perp} \text{ch}(y),$$

а поперечную массу частицы  $m_{\perp}$  можно получить в зависимости от поперечного импульса этой частицы  $p_{\perp}$  и ее массы:

$$m_{\perp} = (m^2 + p_{\perp}^2)^{1/2},$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy} &= \pm m_{\perp} \text{ch}(y) \frac{gV}{(2\pi)^3} \times \\ &\times \left( \exp \left[ \frac{m_{\perp} \text{ch}(y) - \mu}{T} \right] \pm 1 \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из уравнения (9) можно получить выражение для зависимости полного химического потенциала  $\mu$  рассматриваемой частицы от ее измеряемой быстроты  $y$ :

$$\mu = m_{\perp} \operatorname{ch}(y) - T \ln \left[ \frac{\pm \frac{gV}{(2\pi)^3} m_{\perp} \operatorname{ch}(y)}{\frac{d^2 N}{2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy}} \mp 1 \right]. \quad (10)$$

Другими словами, предлагается выразить  $\mu$  через  $y$ , а также через  $m_{\perp}$  и  $d^2 N/(2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy)$  [ГэВ<sup>-2</sup>]. Последняя из двух величин — это величина, которую можно точно измерить в наиболее центральных столкновениях, см. табл. 1–6. Зависимость  $\mu$  от энергии скрыта в  $y$  и, по-видимому, также в  $p_{\perp}$  и  $d^2 N/(2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy)$ . Это однозначно следует из уравнения (12).

Кроме того, интегрируя уравнение (9) по  $p_{\perp}$ , можно получить распределение частиц по быстротам  $dN/dy$  как функцию быстроты  $y$ :

$$\frac{dN}{dy} = \pm \frac{gV}{(2\pi)^3} \times \int \frac{\pm \sqrt{m^2 + p_{\perp}^2} \operatorname{ch}(y)}{\exp \left[ \frac{m_{\perp} \operatorname{ch}(y) - \mu}{T} \right] \pm 1} p_{\perp} dp_{\perp}. \quad (11)$$

Это еще одно выражение, по которому можно судить о применимости предложенного подхода, причем здесь  $\mu$ , определяемый уравнением (10), играет основную роль. Так же очевидно, что кроме  $\mu$ , как  $p_{\perp}$ , так и  $m_{\perp}$  являются характеристиками рассматриваемой частицы. Поэтому мы полагаем, что физическую сущность зависимости  $dN/dy$  от  $y$  можно получить из уравнения (11), которое соответствует точным экспериментальным измерениям. Если наш подход для нахождения  $\mu$  является правильным, то уравнение (11) можно использовать для воспроизведения экспериментальных результатов. Зависимость  $dN/dy$  от энергии также определяется зависимостью от  $y$ .

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Напомним, что зависимости барионного химического потенциала от энергии пучка изучались в работах [27, 28]. В настоящей работе предложен подход для почти полностью эмпирического определения зависимости химического потенциала в общем виде от быстроты для родившихся в столкновениях хорошо идентифицируемых частиц. Говоря об общем виде, мы имеем в виду все квантовые числа, особенно

барионное квантовое число и странность. Поскольку, как было показано в работах [27, 28], зависимости от энергии, полученные на основании термических моделей, противоречат результатам, полученным в экспериментах с наиболее центральными столкновениями, ни одну из этих моделей мы не можем использовать при рассмотрении зависимости от быстроты. Другое отличие заключается в том, что зависимость от энергии, рассматриваемая в рамках термической модели [27, 28], подразумевает использование только барионного химического потенциала. Зависимость введенного в настоящей работе химического потенциала в общем виде от быстроты анализируется только для родившихся в столкновениях хорошо идентифицируемых частиц. Третье отличие связано с термодинамической природой обеих величин. В то время как  $\mu$  является интенсивной величиной, энергия является экстенсивной термодинамической величиной.

#### 3.1. Зависимость химического потенциала от быстроты

Зависимость химического потенциала  $\mu$  от быстроты  $y$  можно получить, используя функцию распределения для большого канонического ансамбля [11]. Как отмечалось выше, предложенное выражение (10) получается путем интегрирования уравнения (8). Для различных заряженных частиц при различных значениях энергии величины, полученные из этого выражения, используются во всех последующих уравнениях вплоть до уравнения (10). Как было показано в предыдущем разделе, уравнение (10) можно получить, используя экспериментальные значения для  $p_{\perp}$  [ГэВ] и для  $d^2 N/(2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy)$  [ГэВ<sup>-2</sup>]. Мы предполагаем, что температура вымораживания равна  $T = 0.165$  ГэВ для различных энергий столкновений, как видно на рис. 1. В связи с этим следует подчеркнуть, что, насколько известно авторам, не имеется доступных экспериментальных результатов для распределения по быстротам при 64 ГэВ, с которыми можно было бы провести сравнение.

С другой стороны, из уравнения (10) можно получить прямое соотношение между  $\mu$  и  $y$ , что является основной целью настоящей работы. Для этого мы сначала проведем подгонку данного выражения к имеющимся экспериментальным данным для наиболее центральных столкновений с  $p_{\perp}$  [ГэВ] и  $d^2 N/(2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy)$  [ГэВ<sup>-2</sup>] для  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $p$ ,  $K^+$ ,  $K^-$ ,  $\bar{p}$  при  $\sqrt{s_{NN}} = 7.7, 11.5, 19.6, 27, 39, 130$  и  $200$  ГэВ [29], см. рис. 1. На рис. 1 приведены зависимости

**Таблица 1.** Экспериментальные значения  $p_{\perp}$  [ГэВ] и  $d^2N/(2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy)$  [ГэВ<sup>-2</sup>] для различных энергий, используемые в уравнении (10) для получения зависимостей, показанных на рис. 1. В самой правой колонке приведены результаты статистической подгонки зависимости химического потенциала  $\mu$  от быстроты  $y$  и подгоночных параметров  $a$  и  $b$  для  $m_{\pi^+} = 0.140$  ГэВ и  $g_{\pi^+} = 1$

$\sqrt{s_{NN}}$ , ГэВ	$p_{\perp}$ , ГэВ	$\frac{d^2N}{2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy}$ , ГэВ <sup>-2</sup>	$\mu = a + by^2$ , ГэВ
7.7	0.6796	12.023	$(0.062 \pm 0.014) + (0.109 \pm 0.003)y^2$
11.5	0.6573	15.811	$(0.06 \pm 0.014) + (0.106 \pm 0.003)y^2$
19.6	0.68	21.796	$(0.062 \pm 0.019) + (0.109 \pm 0.003)y^2$
27	0.663	24.669	$(0.061 \pm 0.014) + (0.107 \pm 0.003)y^2$
39	0.685	25.724	$(0.062 \pm 0.014) + (0.110 \pm 0.003)y^2$

**Таблица 2.** То же, что и в табл. 1, но для  $m_{\pi^-} = 0.140$  ГэВ и  $g_{\pi^-} = 1$

$\sqrt{s_{NN}}$ , ГэВ	$p_{\perp}$ , ГэВ	$\frac{d^2N}{2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy}$ , ГэВ <sup>-2</sup>	$\mu = a + by^2$ , ГэВ
7.7	0.67	11.402	$(0.061 \pm 0.014) + (0.108 \pm 0.003)y^2$
11.5	0.673	16.668	$(0.061 \pm 0.014) + (0.108 \pm 0.003)y^2$
19.6	0.663	21.236	$(0.061 \pm 0.014) + (0.107 \pm 0.003)y^2$
27	0.678	23.792	$(0.062 \pm 0.014) + (0.109 \pm 0.003)y^2$
39	0.686	25.292	$(0.063 \pm 0.014) + (0.110 \pm 0.003)y^2$

**Таблица 3.** То же, что и в табл. 1, но для  $m_{K^+} = 0.490$  ГэВ и  $g_{K^+} = 1$

$\sqrt{s_{NN}}$ , ГэВ	$p_{\perp}$ , ГэВ	$\frac{d^2N}{2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy}$ , ГэВ <sup>-2</sup>	$\mu = a + by^2$ , ГэВ
7.7	0.658	5.014	$(0.073 \pm 0.017) + (0.129 \pm 0.004)y^2$
11.5	0.653	5.464	$(0.073 \pm 0.017) + (0.128 \pm 0.004)y^2$
19.6	0.658	6.552	$(0.073 \pm 0.017) + (0.129 \pm 0.004)y^2$
27	0.662	7.536	$(0.074 \pm 0.017) + (0.130 \pm 0.004)y^2$
39	0.663	6.888	$(0.074 \pm 0.017) + (0.130 \pm 0.004)y^2$
200	0.586	11.911	$(0.074 \pm 0.016) + (0.131 \pm 0.004)y^2$

**Таблица 4.** То же, что и в табл. 1, но для  $m_{K^-} = 0.490$  ГэВ и  $g_{K^-} = 1$

$\sqrt{s_{NN}}$ , ГэВ	$p_{\perp}$ , ГэВ	$\frac{d^2N}{2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy}$ , ГэВ <sup>-2</sup>	$\mu = a + by^2$ , ГэВ
7.7	0.658	5.014	$(0.073 \pm 0.017) + (0.129 \pm 0.0039)y^2$
11.5	0.653	5.464	$(0.073 \pm 0.016) + (0.128 \pm 0.0034)y^2$
19.6	0.658	6.552	$(0.073 \pm 0.017) + (0.129 \pm 0.004)y^2$
27	0.662	7.536	$(0.073 \pm 0.017) + (0.129 \pm 0.0039)y^2$
39	0.663	6.888	$(0.073 \pm 0.017) + (0.130 \pm 0.004)y^2$
200	0.586	11.911	$(0.074 \pm 0.015) + (0.131 \pm 0.0035)y^2$

Таблица 5. То же, что и в табл. 1, но для  $m_p = 0.938$  ГэВ и  $g_p = 2$

$\sqrt{s_{NN}}$ , ГэВ	$p_{\perp}$ , ГэВ	$\frac{d^2N}{2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy}$ , ГэВ <sup>-2</sup>	$\mu = a + by^2$ , ГэВ
7.7	0.668	11.926	$(0.295 \pm 0.024) + (0.174 \pm 0.005)y^2$
11.5	0.622	10.778	$(0.295 \pm 0.024) + (0.170 \pm 0.005)y^2$
19.6	0.687	6.983	$(0.282 \pm 0.024) + (0.176 \pm 0.005)y^2$
27	0.634	7.679	$(0.282 \pm 0.024) + (0.171 \pm 0.005)y^2$
39	0.626	5.835	$(0.274 \pm 0.024) + (0.170 \pm 0.005)y^2$
130	0.625	5.39	$(0.272 \pm 0.024) + (0.170 \pm 0.005)y^2$
200	0.667	2.038	$(0.247 \pm 0.024) + (0.174 \pm 0.005)y^2$

Таблица 6. То же, что и в табл. 5, но для  $m_{\bar{p}} = 0.938$  ГэВ и  $g_{\bar{p}} = 2$

$\sqrt{s_{NN}}$ , ГэВ	$p_{\perp}$ , ГэВ	$\frac{d^2N}{2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy}$ , ГэВ <sup>-2</sup>	$\mu = a + by^2$ , ГэВ
7.7	0.63	0.098	$(0.162 \pm 0.024) + (0.171 \pm 0.0055)y^2$
11.5	0.641	0.362	$(0.198 \pm 0.024) + (0.172 \pm 0.0056)y^2$
19.6	0.687	0.944	$(0.227 \pm 0.024) + (0.176 \pm 0.0057)y^2$
27	0.621	1.362	$(0.234 \pm 0.024) + (0.170 \pm 0.0056)y^2$
39	0.662	1.803	$(0.243 \pm 0.024) + (0.174 \pm 0.0057)y^2$
130	0.625	3.840	$(0.263 \pm 0.024) + (0.171 \pm 0.005)y^2$
200	0.625	0.193	$(0.180 \pm 0.024) + (0.171 \pm 0.005)y^2$

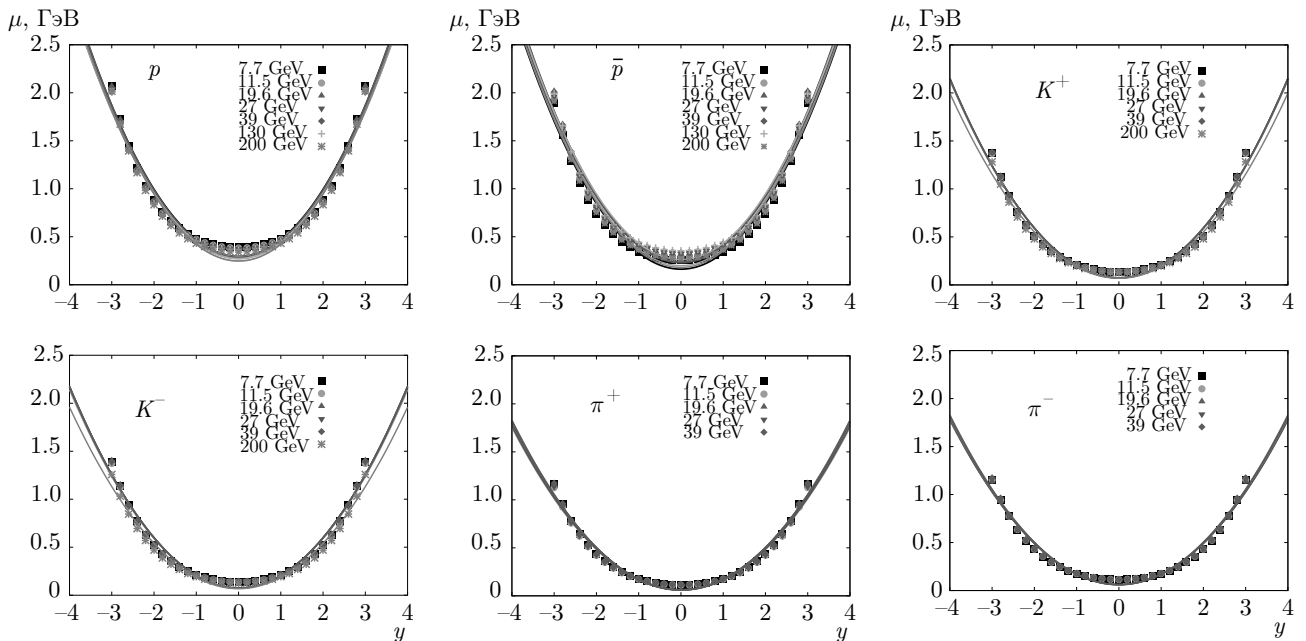


Рис. 1. Зависимости химического потенциала  $\mu$  от быстроты  $y$  для  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $K^+$ ,  $K^-$ ,  $p$ ,  $\bar{p}$ . Символы соответствуют результатам, полученным с помощью уравнения (10). Использованы экспериментальные результаты коллаборации STAR [29],  $p_{\perp}$  [ГэВ] и  $d^2N/(2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy)$  [ГэВ<sup>-2</sup>] при  $\sqrt{s_{NN}} = 7.7, 11.5, 19.6, 27, 39, 130, 200$  ГэВ, кривые представляют результаты статистической подгонки, см. уравнения (12)–(17) и табл. 1–6

химического потенциала  $\mu$  от быстроты  $y$ . Символы соответствуют результатам, полученным с помощью уравнения (10). Используются экспериментальные результаты коллаборации STAR [29],  $p_{\perp}$  [ГэВ] и  $d^2N/(2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy)$  [ГэВ<sup>-2</sup>] для  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $K^+$ ,  $K^-$ ,  $p$ ,  $\bar{p}$  при  $\sqrt{s_{NN}} = 7.7, 11.5, 19.6, 27, 39, 130, 200$  ГэВ, кривые представляют результаты статистической подгонки, см. уравнения (12)–(17) и табл. 1–6.

Необходимо подчеркнуть, что в работе [29] явно не учитывались экспериментальные результаты для быстрот. Действительно, там используются только результаты для распределений по поперечному импульсу,  $p_{\perp}$  [ГэВ] и  $d^2N/(2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy)$  [ГэВ<sup>-2</sup>]. Именно они входят в наши вычисления, которые мы проводим на основании уравнения (10). Другими словами, говоря об экспериментальных результатах для различных родившихся частиц, мы имеем в виду вычисления, основанные на экспериментально измеренных поперечных импульсах этих частиц, родившихся в наиболее центральных столкновениях. Отметим еще раз, что сначала, чтобы получить точки, изображенные на рис. 1, мы используем уравнение (10). А затем, чтобы получить зависимости  $\mu$  от  $y$  для различных частиц при различных энергиях, подгоняем полученные результаты, используя выражения (12)–(17), см. табл. 1–6.

Для статистической подгонки используются значения  $p_{\perp}$  [ГэВ] и  $d^2N/(2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy)$  [ГэВ<sup>-2</sup>] при различных энергиях, см. табл. 1–6. Полученные в результате этого зависимости химического потенциала  $\mu$  от быстроты  $y$  для отдельных частиц приведены на рис. 1. Подчеркнем еще раз, что, используя экспериментальные результаты для наиболее центральных столкновений для  $p_{\perp}$  [ГэВ] и  $d^2N/(2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy)$  [ГэВ<sup>-2</sup>], можно найти зависимость  $\mu(y)$  с помощью уравнения (10).

Процедура установления зависимости между химическим потенциалом  $\mu$  и быстротой  $y$  следующая.

- Подставляем экспериментальные значения  $p_{\perp}$  [ГэВ] и  $d^2N/(2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy)$  [ГэВ<sup>-2</sup>] для наиболее центральных столкновений [29, 30], см. табл. 1–6, в уравнение (10).
- Затем строим зависимости  $\mu$  от  $y$ , как показано на рис. 1.
- И наконец, получаем выражения для каждой родившейся частицы, см. табл. 1–6.

Эта процедура представляет собой процесс подгонки, используемый для получения зависимостей  $\mu(y)$  в общем виде.

Очевидно, что для каждой частицы и соответствующей ей античастицы используется одно выражение. Также очевидно, что это универсальное выражение не зависит от энергии столкновений. Это мы уже отмечали ранее. Однако, как говорилось выше в предыдущих разделах, зависимость от энергии скрыта в  $y$  среди других величин. При переходе к другому значению энергии процедура повторяется. Соответственно, результирующие зависимости химического потенциала  $\mu$  от быстроты  $y$  для каждой частицы можно записать следующим образом.

- Для  $\pi^+$

$$\mu = (0.06 \pm 0.001) + (0.109 \pm 0.01) y^2. \quad (12)$$

- Для  $\pi^-$

$$\mu = (0.06 \pm 0.001) + (0.109 \pm 0.01) y^2. \quad (13)$$

- Для  $K^+$

$$\mu = (0.07 \pm 0.001) + (0.13 \pm 0.001) y^2. \quad (14)$$

- Для  $K^-$

$$\mu = (0.07 \pm 0.001) + (0.13 \pm 0.001) y^2. \quad (15)$$

- Для  $p$

$$\mu = (0.28 \pm 0.001) + (0.17 \pm 0.001) y^2. \quad (16)$$

- Для  $\bar{p}$

$$\mu = (0.28 \pm 0.001) + (0.17 \pm 0.001) y^2. \quad (17)$$

Очевидно, что в соответствии с этими результатами мы должны считать, что каждая частица должна иметь определенное значение химического потенциала  $\mu$  при определенном значении быстроты  $y$  [17, 22]. С учетом этого важно отметить, что каждое из этих выражений, по-видимому, не зависит от энергии столкновений и одинаково для частиц и соответствующих им античастиц.

Основываясь на этом результате, продолжим наши рассуждения. Мы предлагаем более универсальное выражение, объединяющее предыдущие, т.е. определяющее универсальную зависимость химического потенциала  $\mu$  от быстроты  $y$  для всех частиц при любых энергиях:

$$\mu = a + b y^2, \quad (18)$$

где  $a$  и  $b$  — параметры, измеряемые в МэВ, слегка отличающиеся от приведенных в табл. 1–6 и входящих в уравнение (10). Этот результат является основным результатом настоящей работы. В разд. 3.3 мы рассмотрим, почему это выражение справедливо при любых энергиях и хорошо воспроизводит все экспериментальные результаты распределений по быстротам, а именно, зависимости  $dN/dy$  от  $y$ . Из уравнения (18) следует, что при обращении быстроты в нуль химический потенциал может принимать конечное значение,  $\mu = a$ .

### 3.2. Зависимость результирующего химического потенциала от энергии

Связь энергии пучка с быстротой можно параметризовать следующим образом:

$$\sqrt{s_{NN}} = cy^d, \quad (19)$$

где  $c$  и  $d$  — параметры, зависящие от типа частиц. Приведем значения параметров  $c$  и  $d$  для различных типов частиц.

- Для  $\pi^+$   
 $c = 22.1489 \pm 0.9584$  ГэВ,  $d = -1.4167 \pm 0.1232$ .
- Для  $\pi^-$   
 $c = 22.0629 \pm 0.9154$  ГэВ,  $d = -1.4141 \pm 0.1175$ .
- Для  $K^+$   
 $c = 18.075 \pm 1.08$  ГэВ,  $d = -1.2561 \pm 0.1179$ .
- Для  $K^-$   
 $c = 18.0749 \pm 1.081$  ГэВ,  $d = -1.256 \pm 0.118$ .
- Для  $p$   
 $c = 7.1244 \pm 0.001$  ГэВ,  $d = -0.3707 \pm 0.0001$ .
- Для  $\bar{p}$   
 $c = 9.2277 \pm 0.001$  ГэВ,  $d = -0.9719 \pm 0.0001$ .

Подставляя уравнение (18) в уравнение (19), получаем

$$\sqrt{s_{NN}} [\text{ГэВ}] = c \left( \frac{\mu [\text{МэВ}] - a}{b} \right)^{d/2}, \quad (20)$$

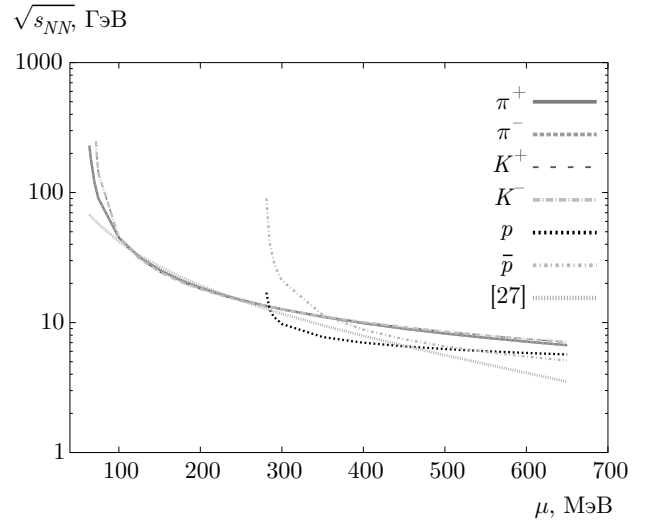


Рис. 2. Зависимости (в полулогарифмическом масштабе)  $\sqrt{s_{NN}}$  от  $\mu$  для  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $K^+$ ,  $K^-$ ,  $p$ ,  $\bar{p}$  в сравнении с результатом, полученным с помощью термической модели [27, 31]

где показатель  $d/2$ , который зависит от типа частиц, можно аппроксимировать как  $-1.165$ .

На рис. 2 приведены зависимости для  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $K^+$ ,  $K^-$ ,  $p$ ,  $\bar{p}$ , см. уравнение (18), в сравнении с результатом, полученным с помощью термической модели [27]. На рисунке видно, что зависимости для пиона и каона практически одинаковые, тогда как для протона и антипротона зависимости от энергии несколько более быстрые. Однако различиями в результатах, полученных с помощью разных вычислений, можно пренебречь. Во-первых, в настоящей работе рассматривается химический потенциал в общем виде, в то время как выражение, основанное на термической модели [11, 27, 31], получено только для барионов. Во-вторых, в настоящей работе рассматриваются отдельные частицы и их быстроты, а также поперечные компоненты массы и импульса, в то время как работы [27, 31] основаны на термодинамике ансамбля в объеме — идеального газа с различными компонентами, а в работе [11] рассматривается резонансный адронный газ. Сравнивая оба выражения, мы видим, что в результате получают практически одинаковые зависимости от энергии, во всяком случае качественно. Небольшое различие можно отнести на счет источника и природы химического потенциала.

Подводя итог, еще раз подчеркнем, что мы рассматриваем химический потенциал в общем виде. Для родившихся частиц, которые мы учитываем, рассматриваются как барионный, так и странный



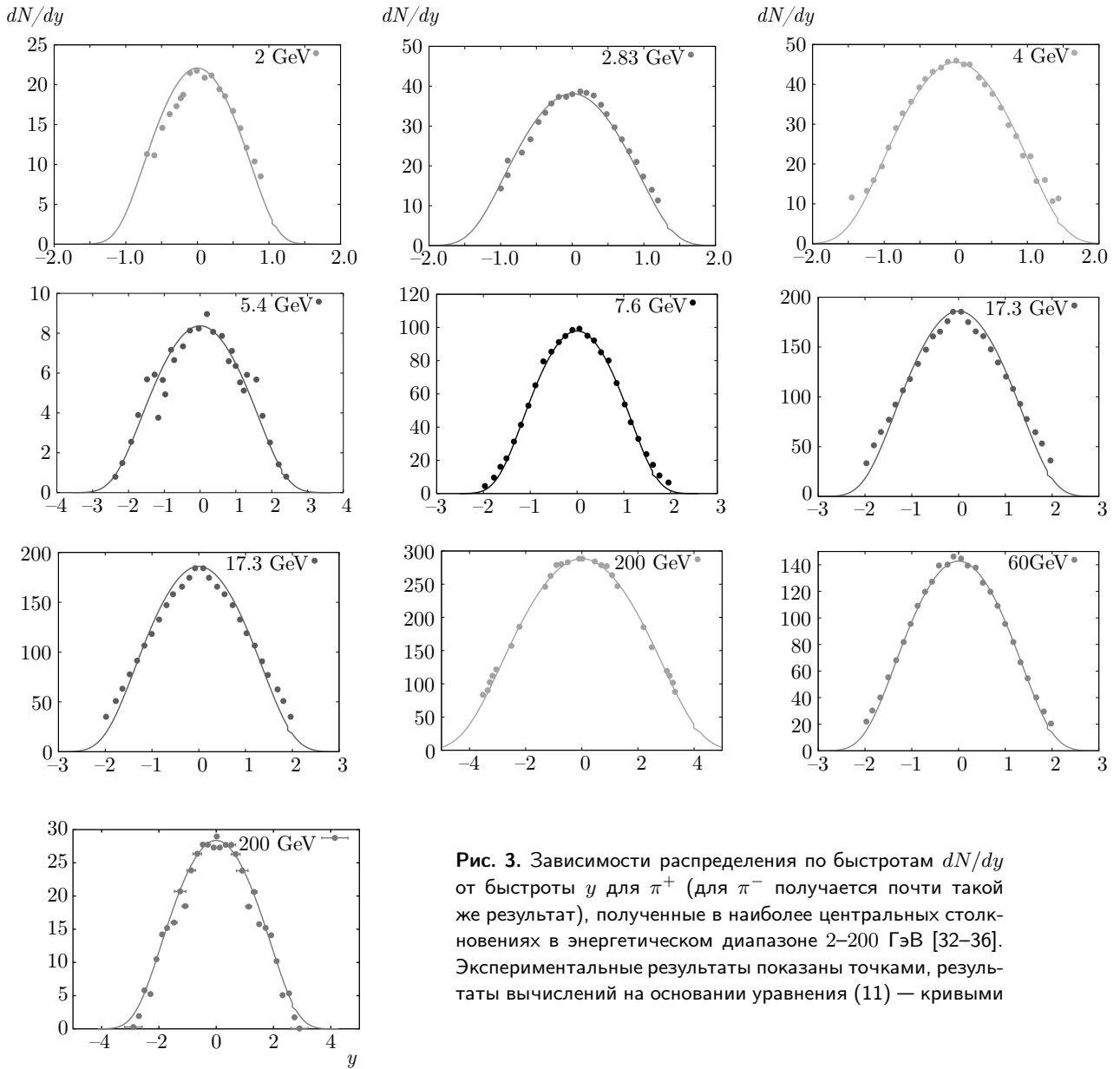


Рис. 3. Зависимости распределения по быстройтам  $dN/dy$  от быстроты  $y$  для  $\pi^+$  (для  $\pi^-$  получается почти такой же результат), полученные в наиболее центральных столкновениях в энергетическом диапазоне 2–200 ГэВ [32–36]. Экспериментальные результаты показаны точками, результаты вычислений на основании уравнения (11) — кривыми

химические потенциалы. Следствием этого может быть небольшое различие в результатах для каонов и протонов, см. рис. 2 и уравнение (20).

Подгоночные параметры, полученные из уравнения (20), практически не различаются для частиц и античастиц. Это можно объяснить небольшой разницей измеряемых величин, а именно,  $m_{\perp}$  [ГэВ],  $p_{\perp}$  [ГэВ] и  $d^2N/(2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy)$  [ГэВ<sup>-2</sup>], см. [29]. С другой стороны, этот результат хорошо согласуется с результатом, полученным с помощью термостатистической модели, где абсолютный химический потенциал тождествен для частиц и античастиц.

### 3.3. Проверка

Один из вариантов проверки был рассмотрен в предыдущем разделе. Поэтому мы начнем с уравнения (18), в которое подставим химический потенциал  $\mu$ , определяемый из уравнения (19). Параметры, входящие в уравнение (19), приведены в табл. 1–6. Очевидно, что для разных частиц они разные. Другими словами, зависимость  $\mu$  от  $y$  просто задается параметрами  $a$  и  $b$ , которые в свою очередь зависят от типа рассматриваемой частицы. Наконец, результаты, полученные с помощью уравнения (20), приведены на рис. 2. Они хорошо согласуются с результатами вычислений, полученными в рамках термической модели [27].

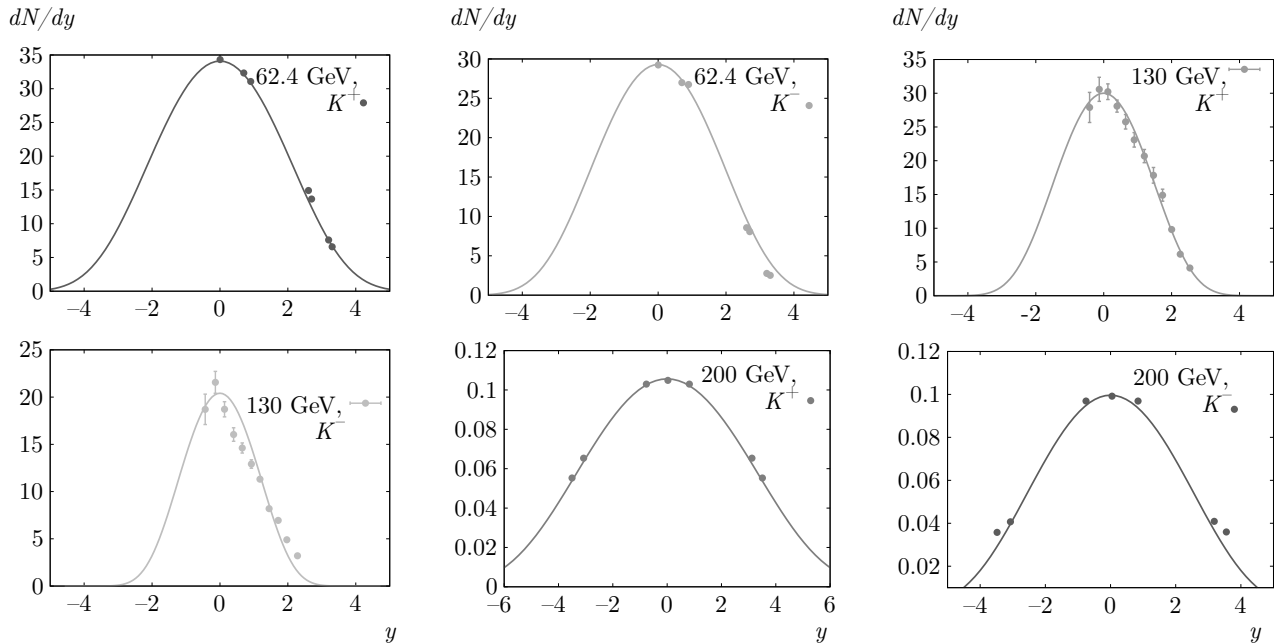


Рис. 4. Зависимости распределения по быстротам  $dN/dy$  от быстроты  $y$  для  $K^+$  и  $K^-$  при  $\sqrt{s_{NN}} = 62.4, 130$  и  $200$  ГэВ [32, 33, 37, 38]. Экспериментальные результаты показаны точками, результаты вычислений — кривыми

В данном разделе мы обсудим еще один вариант проверки. Сравним экспериментальные зависимости  $dN/dy$  от  $y$  с результатами наших вычислений на основании уравнения (11). Как и в разд. 2.1, для этих вычислений химический потенциал  $\mu$ , определяемый из уравнения (10), играет важную роль. Помимо  $\mu$ , рассматриваемую частицу характеризуют соответствующие поперечные компоненты импульса и массы  $p_{\perp}$  и  $m_{\perp}$ . Сравнение результатов наших вычислений с экспериментальными зависимостями  $dN/dy$  от  $y$ , измеренными очень точно, может подтвердить или опровергнуть справедливость предложенного подхода. Если наш подход для вычисления  $\mu$  (уравнение (11)) верен, то результаты вычислений, в которых не проводится статистической подгонки, должны хорошо согласовываться с экспериментальными результатами.

На рис. 3 представлены зависимости распределения по быстротам  $dN/dy$  от быстроты  $y$  для  $\pi^+$  (для  $\pi^-$  получается почти такой же результат), полученные в наиболее центральных столкновениях в энергетическом диапазоне 2–200 ГэВ (показаны точками [32–36]). Вычисления, основанные на уравнении (11), показаны кривыми. Видно, что при любых значениях энергии результаты хорошо согласуются.

На рис. 4 представлены зависимости распределения по быстротам  $dN/dy$  от быстроты  $y$  для  $K^+$  и  $K^-$  в диапазоне энергий от 62.4 до 200 ГэВ

[32, 33, 37, 38]. Как и ранее, видно хорошее согласие результатов наших вычислений с экспериментальными.

На рис. 5 представлены зависимости распределения по быстротам  $dN/dy$  от быстроты  $y$  для протона (для антипротона получается почти такой же результат) при различных значениях энергии [32, 39, 40]. Мы снова видим, что результаты, полученные с помощью уравнения (11), прекрасно согласуются с результатами измерений для барионных частиц при различных значениях энергии.

Как видно на рис. 3–5, имеется прекрасное согласие между экспериментальными результатами и результатами наших вычислений на основании уравнения (11) для всех частиц при различных значениях энергии. Помимо экспериментальных результатов, важны значения химического потенциала  $\mu$ , полученные из уравнения (10). Таким образом, можно сделать вывод, что на основании нашего подхода (уравнения (10) и (11)) можно почти полностью эмпирически получить значение химического потенциала.

Следует отметить, что экспериментальные зависимости (точки) на последнем рис. 5 демонстрируют два максимума, в то время как расчетные кривые — только один, и это является единственным несоответствием. Аналогичная картина наблюдается на последнем рис. 3. Подчеркнем, что в соответствии

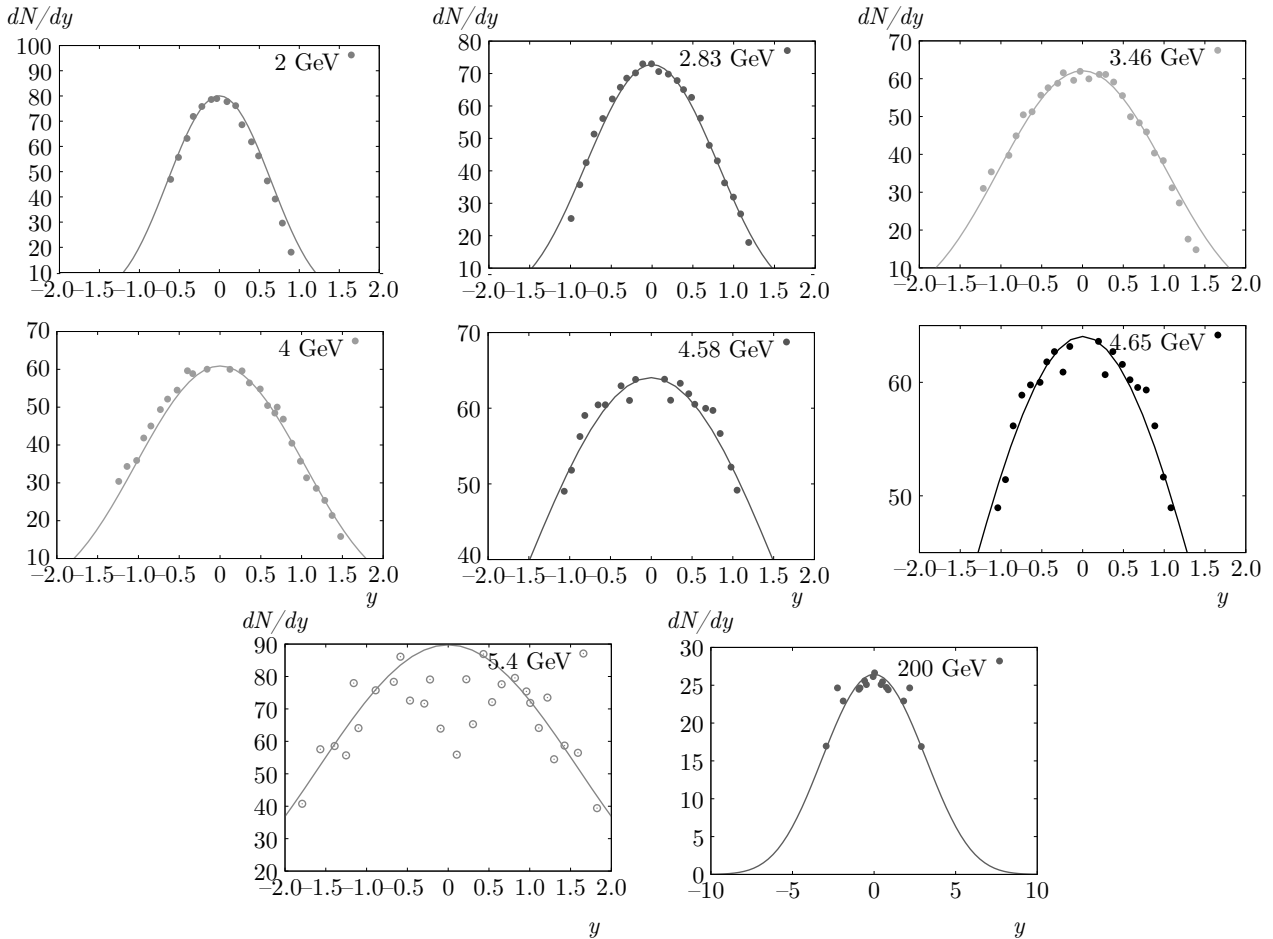


Рис. 5. То же, что на рис. 3, но для протона (для антипротона получается почти такой же результат)

с целью настоящей работы кривые получены только на основании уравнения (11), в частности, мы не проводили никаких статистических подгонок. Кроме того, отметим, что результаты, приведенные на рисунках, на которых наблюдается несоответствие, получены для самых высоких доступных энергий. Пока мы не можем этого объяснить, но изучению этого факта следует посвятить отдельное исследование.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несмотря на имеющиеся ограничения, связанные с наличием и доступностью экспериментальных данных по определению  $p_{\perp}$  и  $d^2N/(2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy)$ , мы смогли использовать результаты измерений при различных значениях энергии. Это дало возможность подтвердить справедливость предложенного нами подхода для описания подобных экспериментов, а также показать, что зависимость химического потенциала  $\mu$  от быстроты  $y$  важна и является универсальной. Мы ограничились в наших вычислениях

наиболее центральными столкновениями. Центральность при разных измерениях и в разных экспериментах может быть различной, это могут быть столкновения с центральностью 0–5% или 0–10%. Мы рассматривали наиболее центральные.

Основываясь на экспериментальных результатах по измерению  $p_{\perp}$  и  $d^2N/(2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dy)$  для родившихся в столкновениях хорошо распознаваемых частиц — пионов, каонов, протонов, а также их античастиц, можно найти зависимости соответствующих химических потенциалов от быстроты. В свою очередь, это дает возможность предложить универсальное выражение, связывающее эти величины друг с другом, независимо от типа родившейся частицы, ее энергии и размера столкновительной системы,  $\mu = a + by^2$ , где  $a$  и  $b$  — параметры. Результаты вычислений зависимости энергии центра масс по формуле  $\sqrt{s_{NN}} = c[(\mu - a)/b]^{d/2}$ , где  $c$  и  $d$  — параметры, также прекрасно согласуются с результатами, полученными с помощью термо-статистической модели.

В настоящей работе мы не обсуждаем сохранение. Причина этого заключается в том, что из-за строгих ограничений в рамках нашего подхода мы рассматриваем только отдельные частицы. С другой стороны, экспериментальные измерения очевидным образом ограничены чувствительностью детекторов, а также диапазонами быстрот и поперечных импульсов и т. д. Предположение об общем равновесии, по-видимому, не противоречит предложенному подходу, который ограничивается рассмотрением только химических потенциалов отдельных частиц.

Убедительное согласие между результатами наших вычислений химических потенциалов для средних быстрот и соответствующими результатами, полученными в рамках статистических моделей, см. рис. 2, является хорошей мотивацией для того, чтобы попытаться получить соответствующие температуры, в частности, температуру химического вымораживания. Эта задача требует отдельного исследования. Следует подчеркнуть, что в наших вычислениях температура (температура вымораживания) предполагается постоянной, что также ограничивает наш подход.

Основным результатом настоящей работы являются выражения (10) и (11). Очевидно, что они получены для отдельных частиц, в частности, для тех, которые можно точно детектировать. Таким образом, предложенный подход позволяет получить локальный химический потенциал. Поскольку мы считаем, что имеет место глобальное равновесие, полученные результаты, очевидно, хорошо согласуются с энергетической зависимостью химического потенциала  $\mu$ , полученной в рамках термо-статистической модели идеального газа для адронного резонансного газа [27, 28]. Более того, прекрасное согласие с экспериментальными зависимостями  $dN/dy$  от  $y$  для всех частиц при различных энергиях подтверждает справедливость уравнения (11), в котором главную роль играет химический потенциал  $\mu$ , полученный из уравнения (10).

## ЛИТЕРАТУРА

1. B. B. Back et al. (PHOBOS Collaboration), Phys. Rev. C **65**, 061901 (2002).
2. S. Ahmad, A. Ahmad, A. Chandra, M. Zafar, and M. Irfan, Adv. High Energy Phys. **2013**, 836071 (2013).
3. A. Tawfik, M. Y. El-Bakry, D. M. Habashy, M. T. Mohamed, and E. Abbas, Int. J. Mod. Phys. E **25**, 1650018 (2016).
4. A. Tawfik, Phys. Rev. C **88**, 035203 (2013).
5. A. Tawfik, Nucl. Phys. A **922**, 225 (2014).
6. A. Tawfik, Adv. High Energy Phys. **2013**, 574871 (2013).
7. A. Tawfik, Nucl. Phys. A **764**, 387 (2006).
8. A. Tawfik, Europhys. Lett. **75**, 420 (2006).
9. A. Tawfik, J. Phys. G **31**, S1105 (2005).
10. J. P. Bondorf, S. Garpman, and J. Zimanyi, Nucl. Phys. A **296**, 320 (1978).
11. A. N. Tawfik, Int. J. Mod. Phys. A **29**, 1430021 (2014).
12. J. Letessier, J. Rafelski, and A. Tounsi, Phys. Rev. C **50**, 406 (1994).
13. J. Adam et al., (ALICE Collaboration), Nature Phys. **13**, 535 (2017).
14. J. Cleymans and K. Redlich, Phys. Rev. Lett. **81**, 5284 (1998).
15. V. Magas and H. Satz, Eur. Phys. J. C **32**, 115 (2003).
16. S. Uddin, J. S. Ahmad, W. Bashir, and R. A. Bhat, J. Phys. G **39**, 015012 (2012).
17. F. Becattini, J. Cleymans, and J. Strumpfer, PoS CPOD07, 012 (2007).
18. F. Becattini and J. Cleymans, J. Phys. G **34**, S959 (2007).
19. J. Cleymans, J. Phys. G **35**, 044017 (2008).
20. J. Cleymans, J. Strumpfer, and L. Turko, Phys. Rev. C **78**, 017901 (2008).
21. S. Uddin, J. S. Ahmad, M. A. Bashir, and R. A. Bhat, Acta Physica Polon. B **41**, 2433 (2010).
22. S. Uddin, M. Ali, J. Shabir, and M. F. Mir, arXiv:0911.0246.
23. S. Uddin, M. Ali, J. Shabir, and M. Farooq Mir, arXiv:0901.1376.
24. J. Letessier and J. Rafelski, *Hadrons and Quark-Gluon Plasma*, Cambridge University Press (2004).
25. A. Tawfik, Phys. Rev. D **71**, 054502 (2005).
26. A. Tawfik, E. Gamal, and A. G. Shalaby, Int. J. Mod. Phys. A **30**, 1550131 (2015).
27. A. N. Tawfik and E. Abbas, Phys. Part. Nucl. Lett. **12**, 521 (2015).

28. A. Andronic, P. Braun-Munzinger, and J. Stachel, Nucl. Phys. A **772**, 167 (2006).
29. L. Adamczyk et al. (STAR Collaboration), Phys. Rev. C **96**, 044904 (2017).
30. B. I. Abelev et al. (STAR Collaboration), Phys. Rev. C **79**, 034909 (2009).
31. A. Andronic, P. Braun-Munzinger, and J. Stachel, Acta Phys. Polon. B **40**, 1005 (2009).
32. I. G. Bearden et al. (BRAHMS Collaboration), Phys. Rev. Lett. **90**, 102301 (2003).
33. I. G. Bearden et al. (BRAHMS Collaboration), Phys. Rev. Lett. **94**, 162301 (2005).
34. J. Baechler et al. (NA35 Collaboration), Phys. Rev. Lett. **72**, 1419 (1994).
35. J. Bartke et al. (NA35 Collaboration), Z. Phys. C **48**, 191 (1990).
36. B. B. Back et al. (PHOBOS Collaboration), Phys. Rev. Lett. **85**, 3100 (2000).
37. I. C. Arsene et al., Phys. Lett. B **687**, 36 (2010).
38. Z.-W. Lin, S. Pal, C. M. Ko, B.-A. Li, and B. Zhang, Phys. Rev. C **64**, 011902 (2001).
39. F. Sikler et al. (NA49 Collaboration), Nucl. Phys. A **661**, 45c (1999).
40. B. Biedron and W. Broniowski, Phys. Rev. C **75**, 054905 (2007).