

---

---

УДК 621.3.019.3:330.133.7:697.331:697.341

**МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ  
ТЕПЛОСНАБЖАЮЩЕЙ СИСТЕМОЙ С УЧЕТОМ НАДЕЖНОСТИ  
НА ОСНОВЕ МЕТОДА МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА  
И МАРКОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА**

© 2023 г. В. А. Стенников<sup>1</sup>, \*, И. В. Постников<sup>1</sup>, \*\*, А. В. Пеньковский<sup>1</sup>, \*\*\*

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт систем энергетики  
им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия

\*e-mail: sva@isem.irk.ru

\*\*e-mail: postnikov@isem.irk.ru

\*\*\*e-mail: penkoffsky@isem.irk.ru

Поступила в редакцию 20.08.2023 г.

После доработки 22.08.2023 г.

Принята к публикации 25.08.2023 г.

Основная цель исследования заключается в определении оптимального режима функционирования теплоснабжающей системы при минимизации эксплуатационных затрат на производство и распределение тепловой энергии с учетом ожидаемых экономических потерь от возможных недоотпусков тепловой энергии при отказах элементов системы. Для получения параметров, соответствующих такому режиму, предложен методический подход, заключающийся в совместном расчете узловых цен на тепловую энергию и показателей надежности в исследуемой системе при реализации различных аварийных состояний (отказов элементов). Определение узловых цен на тепловую энергию осуществляется с помощью метода множителей Лагранжа, при этом расчет проводится с учетом различной стоимости производства на источниках тепловой энергии и распределения теплоносителя по тепловой сети. В рамках решаемой задачи в качестве узловых показателей надежности используются недоотпуски тепловой энергии потребителям в аварийных состояниях системы и соответствующие им экономические эквиваленты (ущербы). Оценка вероятностей реализации аварийных состояний осуществляется с помощью моделей марковского случайного процесса. Общей методической основой для моделирования теплогидравлических режимов в системе, в том числе аварийных, являются закономерности теории гидравлических цепей. Разработанные методы и модели, наряду с основной сформулированной задачей оптимального управления, позволяют на основе получаемых показателей идентифицировать наиболее “узкие” места в системе, соответствующие максимальным экономическим потерям от нарушения теплоснабжения потребителей. Проведен вычислительный эксперимент на основе тестовой схемы теплоснабжающей системы с применением предложенного методического и вычислительного аппарата. Полученные результаты проанализированы, представлены их графические интерпретации, сформулированы направления дальнейших исследований.

*Ключевые слова:* теплоснабжающая система, узловые цены на тепловую энергию, эксплуатационные затраты, надежность теплоснабжения потребителей, недоотпуск тепловой энергии, экономический ущерб, метод множителей Лагранжа, теория гидравлических цепей, марковский случайный процесс

DOI: 10.31857/S0002331023060055, EDN: QDPTXR

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Методология оптимального управления теплоснабжающими системами (ТСС) предполагает постановку и решение целого комплекса научно-методических и инженерных задач: определения оптимальной структуры и параметров этих систем, оптимальных режимов их функционирования, эффективного соотношения и загрузки централизованных и распределенных источников при эксплуатации, выбора оптимальных организационных форм взаимодействия субъектов теплового рынка, определения наиболее эффективных (технически и экономически) режимов функционирования, анализа и обеспечения надежности функционирования системы и многих других задач. В фундаментальных работах [1–3] приведены методические положения для решения многих из перечисленных проблем применительно к современным ТСС любой структуры и масштаба.

В данном исследовании выделяются два научно-методических направления в рамках оптимального управления ТСС: 1) определение экономически эффективных режимов функционирования системы и 2) анализ надежности системы в этих режимах. Постановка и решение этих задач рассматривается при условии объединения функций генерации, транспортировки и сбыта тепловой энергии в рамках так называемой “единой теплоснабжающей организации” (ЕТО) [4, 5]. Такая форма организации ТСС обеспечивает минимизацию экономических и технических рисков, стабилизирует системную надежность за счет комплексного контроля над источниками тепловой энергии (ИТ) и тепловыми сетями (ТС), обеспечивая согласование режимов их функционирования и планирования технического обслуживания. В рамках ЕТО финансовая рентабельность функционирования системы достигается путем минимизации стоимости производства и распределения тепловой энергии для покрытия спроса потребителей. Критерием экономической эффективности при этом выступает *узловая цена* – стоимость тепловой энергии в конкретной точке системы с учетом конфигурации сети и ограничений, возникающих при генерации и передаче тепловой энергии.

Известны несколько подходов к определению узловых цен в различных сферах приложения [6–8]. Так, для определения узловых цен в электроэнергетических системах получил распространение *метод множителей Лагранжа* [9–14], который применяется как инструмент определения узловых цен, обеспечивающих выполнение и устойчивость оптимального режима функционирования исследуемых систем. С учетом положительного опыта применения в электроэнергетике данный метод предлагается использовать и для оценки узловых цен на тепловую энергию при определении экономически эффективных режимов функционирования ТСС. Эффективность в данном случае определяется эксплуатационными затратами с учетом технологической специфики, свойств и ограничений системы. При этом важно, чтобы каждый из этих режимов соответствовал не только требованиям технико-экономической эффективности, но и надежности теплоснабжения потребителей. Для учета этого фактора решается вторая задача исследования – оценка (анализ) надежности функционирования ТСС, которая осуществляется на основе узлового подхода, предложенного в [15] и получившего развитие в работах [16–22]. В рамках решаемой проблемы в качестве *узловых показателей надежности* используются недоотпуски тепловой энергии потребителям в аварийных состояниях системы и соответствующие им экономические эквиваленты или ущербы [23]. Обоснование выбранной системы критериев приводится в методической части. Оценка вероятностей реализации аварийных состояний, связанных с отказами элементов системы, осуществляется с помощью моделей *марковского случайного процесса*, широко и эффективно применяемого при исследовании надежности различных технических систем, в том числе энергетических [15, 17–20, 24–27]. Общей методической основой в решении сформулированных выше задач являются модели *теории гидравлических цепей* (ТГЦ), используемые для описания потокорас-

пределения в системе в различных режимах функционирования, в том числе аварийных. Основы ТГЦ и ее приложения изложены в [1, 28, 29].

Таким образом, основная цель исследования состоит в определении оптимального режима функционирования ТСС при минимизации эксплуатационных затрат на производство и распределение тепловой энергии с учетом ожидаемых экономических потерь от возможных недоотпусков тепловой энергии при отказах элементов системы. Для получения соответствующих такому режиму параметров предложен методический подход, заключающийся в совместном расчете узловых цен на тепловую энергию и показателей надежности в исследуемой системе при реализации различных аварийных состояний, связанных с отказами элементов системы. Проведен вычислительный эксперимент на основе тестовой схемы ТСС с применением предложенного методического и вычислительного аппарата. Полученные результаты проанализированы, представлены их графические интерпретации, сформулированы направления дальнейших исследований.

## 2. МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

### 2.1. Определение узловых показателей стоимости для расчетного безаварийного режима

Исходная задача формулируется как поиск оптимальных режимов функционирования ТСС по экономическому критерию, которому соответствуют минимальные затраты на производство и транспортировку тепловой энергии, определяемые в единицу времени. Целевая функция такой задачи может быть записана следующим образом:

$$z = \sum_{j \in J'} z_j(q_j) + z_{\text{net}}, \quad (1)$$

где  $j$  – номер узла ТСС;  $J'$  – подмножество узлов-источников, функционирующих в исследуемой системе ( $J$  – полное множество узлов, состоящее из источников и потребителей);  $z_j(q_j)$  – затраты на производство тепловой энергии на  $j$ -м ИТ, руб./ч;  $q_j$  – производительность  $j$ -го ИТ (в случае, если  $j \in J'$ ), ГДж/ч;  $z_{\text{net}}$  – затраты на транспортировку тепловой энергии или эксплуатационные затраты ТС, руб./ч.

Имеющийся опыт обработки фактических технико-экономических показателей функционирования ИТ различного типа показал, что в качестве аналитической функции эксплуатационных затрат с высокой точностью могут быть использованы аппроксимации этих данных в виде полинома второго порядка [30, 31]:

$$z_j(q_j) = \alpha_j q_j^2 + \beta_j q_j + \gamma_j, \quad j \in J', \quad (2)$$

где  $\alpha_j$  [руб. ч/(ГДж)<sup>2</sup>],  $\beta_j$  (руб./ГДж),  $\gamma_j$  (руб./ч) – коэффициенты аппроксимации функции затрат  $j$ -го ИТ. Полученная таким образом функция затрат является выпуклой, монотонно возрастающей и принимающей положительные значения при  $q_j \geq 0$ .

Эксплуатационные затраты ТС связаны, главным образом, с расходом электроэнергии на перекачку теплоносителя и определяются по следующей зависимости [1]:

$$z_{\text{net}} = \sum_{i \in I} z_i = (c_e / 362.7 \eta_p) \sum_{i \in I} x_i h_i, \quad (3)$$

где  $i$  – номер участка сети;  $I$  – множество участков сети;  $z_i$  – затраты для участка  $i$ , руб./ч;  $c_e$  – цена электроэнергии, руб./кВтч;  $x_i$  – расход теплоносителя на  $i$ -м участке сети, т/ч;  $h_i$  – величина потерь давления на  $i$ -м участке сети, м в.ст.;  $\eta_p$  – коэффициент полезного действия насосной установки, %.

Величины  $x_i$  и  $h_i$  определяются из решения системы уравнений, описывающей оптимальное потокораспределение в ТС [1, 28]:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{g}, \quad (4)$$

$$\mathbf{SXx} = \mathbf{h}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица инцидентий линейно независимых узлов и участков сети;  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_i)$  – вектор расходов теплоносителя на участках сети, т/ч;  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_j)$  – вектор расходов теплоносителя в узлах сети, т/ч;  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_i)$  – вектор потерь напоров на участках, м в.ст.;  $\mathbf{S} = \text{diag}(s_1, \dots, s_i)$  – диагональная матрица гидравлических сопротивлений, м<sup>2</sup>/Г<sup>2</sup>;  $\mathbf{X} = \text{diag}(|x_1|, \dots, |x_i|)$  – диагональная матрица модулей расходов теплоносителя, т/ч.

При использовании выражений (2), (3) и (5) в целевой функции (1), с учетом перехода уравнений (4) к потокам тепловой энергии, получим следующую формализацию задачи оптимизации режимов в ТСС:

$$z = \sum_{j \in J'} (\alpha_j q_j^2 + \beta_j q_j + \gamma_j) + (c_e / 362.7 \eta_p) \sum_{i \in I} x_i^2 |x_i| s_i \rightarrow \min, \quad (6)$$

$$\mathbf{Ax} = w\mathbf{q}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_j)$  – вектор расходов тепловой энергии в узлах сети, ГДж/ч;  $w = (c_w \Delta t)^{-1}$  – коэффициент перехода от массового потока теплоносителя к потокам тепловой энергии, где  $c_w$  – теплоемкость теплоносителя, ГДж/(т<sup>0</sup>С);  $\Delta t$  – температурный напор в сети (разность температур теплоносителя в подающем и обратном трубопроводе), °С.

Для решения задачи (6)–(7) предлагается использовать метод множителей Лагранжа, широко применяемый для решения оптимизационных задач в различных сферах приложения. Например, в работах [11, 12] на основе данного метода производится оптимизация установившихся режимов в электроэнергетических системах при заданной зависимости узловых цен на энергию от ценовых заявок и технических параметров системы. В настоящем исследовании используется аналогичный подход к расчету узловых (маржинальных) цен на тепловую энергию, основанный на оптимизации режимов ТСС по условиям оптимальности функции Лагранжа. Поскольку ограничения (7) линейны, то задача (6)–(7) является регулярной, а соответствующая функция Лагранжа имеет вид:

$$L(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{\Lambda}) = \sum_{j \in J'} (\alpha_j q_j^2 + \beta_j q_j + \gamma_j) + (c_e / 362.7 \eta_p) \sum_{i \in I} x_i^2 |x_i| s_i + \mathbf{\Lambda}(\mathbf{Ax} - w\mathbf{q}). \quad (8)$$

где  $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_j)$  – вектор множителей Лагранжа, элементы которого интерпретируются как узловые цены на тепловую энергию, руб./ГДж. Обоснование этого утверждения и предлагаемого метода применительно к ТСС рассматривается в [32]. Согласно этому методу, вектор множителей Лагранжа (8) соответствует ограничениям оптимизационной задачи (6)–(7), а условия оптимальности ее решения соответствуют стационарности по каждой группе переменных  $q_j$ ,  $x_i$  и  $\Lambda_j$  и записываются следующим образом:

$$\frac{L(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{\Lambda})}{\partial \mathbf{q}} = 2\alpha_j q_j + \beta_j - \Lambda_j = 0, \quad j \in J', \quad (9)$$

$$\frac{L(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{\Lambda})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{c_e}{362.7 \eta_p} [x_i^2 \text{sign}(x_i) s_i + 2x_i \text{sign}(x_i) s_i] + \sum_{j \in J} a_j \Lambda_j = 0, \quad i \in I, \quad (10)$$

$$\frac{L(\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{\Lambda})}{\partial \mathbf{\Lambda}} = \mathbf{Ax} - w\mathbf{q} = 0. \quad (11)$$

Чтобы определить переменные суммарных затрат на производство и транспортировку тепловой энергии, необходимо решить систему уравнений (9)–(11). При решении системы уравнений определяются и двойственные переменные к соответствующим ограничениям. В результате определяются элементы вектора неопределенных множителей Лагранжа, являющиеся равновесными ценами на тепловую энергию для всех узлов системы, в том числе потребителей.

2.2. *Определение узловых показателей стоимости и надежности для аварийного режима*

Под *аварийным* (или *послеаварийным*) понимается такой режим, при котором ТСС функционирует при условии отказа некоторого ее элемента или одновременно нескольких элементов. В случае отказов элементов ИТ изменяются их производительности, что приводит к недоотпуску тепловой энергии в сеть. При отказах участков ТС снижается их пропускная способность или происходит полное их отключение – в итоге изменяется потокораспределение в системе. И то и другое приводит к снижению уровней подачи и в итоге недоотпуску тепловой энергии потребителям (обычно, некоторой группе потребителей). Для экономической интерпретации недоотпуска используется его эквивалент, который обычно называют *экономическим ущербом* [23] и определяют как количественную оценку последствий отказа в денежном выражении. Отметим, что последствия от недоотпуска тепловой энергии не могут быть полностью формализованы и выражены в виде финансовых потерь от ее реализации, с чем связана некоторая критика показателя экономического ущерба (далее – ущерба) среди специалистов по вопросам надежности теплоснабжения [15]. Тем не менее его величина имеет вполне достоверную корреляцию с потенциальными последствиями соответствующего отказа, включая не формализуемые, а вопрос с определением “реального” ущерба может быть частично решен введением коэффициентов, учитывающих категории потребителей по требованиям к надежности теплоснабжения, установленным в нормативах [33].

Обозначим через  $d_n$  суммарный ущерб от недоотпуска тепловой энергии потребителям системы в ее некотором аварийном состоянии  $n$  (далее – состоянии), руб./ч, который можно выразить следующим образом:

$$d_n = \sum_{j \in J''} d_{jn} = \sum_{j \in J''} c_{jn}(q_j - q_{jn}), \tag{12}$$

где  $J''$  – подмножество узлов-потребителей;  $d_{jn}$  – ущерб для некоторого потребителя  $j$  в состоянии  $n$ , руб./ч;  $c_{jn}$  – цена тепловой энергии в  $j$ -м узле в состоянии  $n$ , руб./ГДж;  $q_{jn}$  (для  $j \in J''$ ) – подача тепловой энергии потребителю  $j$  в состоянии  $n$ , ГДж/ч. Разница  $q_j - q_{jn}$  представляет собой уровень подачи тепловой энергии потребителю, соответствующее моделируемому состоянию  $n$ ; также применяется интерпретация данного показателя в относительном выражении –  $q_{jn}/q_j$  [15]. Определение интегрального или суммарного ожидаемого ущерба для потребителей с учетом возможности реализации каждого из рассматриваемых аварийных состояний требует привлечения вероятностных параметров этих состояний – этот вопрос подробно рассматривается в п. 2.3.

Итак, задача (6)–(7) для состояния  $n$ , характеризуемого узловыми показателями недоотпуска и соответствующего ущерба, с использованием выражения (12) может быть формализована следующим образом:

$$z_n = \sum_{j \in J'} (\alpha_j q_{jn}^2 + \beta_j q_{jn} + \gamma_j) + \frac{c_e}{362.7\eta_p} \sum_{i \in I} x_{in}^2 |x_{in}| s_i + \sum_{j \in J''} c_{jn}(q_j - q_{jn}) \rightarrow \min, \tag{13}$$

$$\mathbf{Ax}_n = w\mathbf{q}_n, \quad (14)$$

где  $z_n$  – эксплуатационные затраты с учетом ущерба от недоотпуска в некотором аварийном состоянии  $n$  системы, руб./ч;  $q_{jn}$  (для  $j \in J'$ ) – производительность  $j$ -го источника в состоянии  $n$ , ГДж/ч;  $\mathbf{x}_n = (x_{1n}, \dots, x_{in})$  – вектор расходов теплоносителя на участках сети в состоянии  $n$ , т/ч;  $\mathbf{q}_n = (q_{1n}, \dots, q_{jn})$  – вектор расходов тепловой энергии в узлах сети в состоянии  $n$ , ГДж/ч. Для решения задачи (13)–(14) применяется методический подход, аналогичный описанному в разделе 2.1. В результате определяются узловые показатели стоимости (цены) и надежности (уровни подачи тепловой энергии потребителям, соответствующие недоотпускам и ущербы) для некоторого аварийного режима, соответствующего состоянию  $n$ . Далее рассмотрим некоторые факторы, относящиеся к оценке надежности, а также методические положения, позволяющие их учитывать в рамках решаемой проблемы.

Величины  $x_{in}$  и  $q_{jn}$  в различных состояниях системы определяются путем моделирования потокораспределения, устанавливающегося при отключении отказавшего элемента системы: в пределах ТС рассматриваются, главным образом, отказы участков сети, для ИТ – отказы оборудования или технологических агрегированных узлов, в зависимости от детализации схемы. В общем случае каждому состоянию  $n$  соответствует отказ некоторого элемента или группы элементов системы. В расчетах обычно ограничиваются рассмотрением состояний одновременного отказа не более одного элемента, что вполне соответствует условиям функционирования реальных ТСС [15].

Снижение подачи тепловой энергии потребителю, в зависимости от своего уровня и длительности, вплоть полного прекращения, может привести к недоотпуску тепловой энергии, который определяется по критерию снижения температуры внутреннего воздуха ниже некоторого минимально допустимого уровня  $t_{j\min}$ , °С [33]. При моделировании нарушений теплоснабжения потребителей в ТСС одним из важных факторов является наличие теплоаккумулирующего эффекта или тепловой инерции, который интерпретируется как *пассивный временной резерв* потребителя [15]. Для оценки суммарного по потребителям ущерба с учетом временного резерва запишем следующую формулу:

$$d_n = \sum_{j \in J''} c_{jn} [1 - (\Delta\tau_{jn}/\tau_{jn})] (q_j - q_{jn}), \quad (15)$$

где  $\Delta\tau_{jn}$  – величина временного резерва для потребителя  $j$ , ч, т.е. время, в течение которого при нарушении теплоснабжения температура внутреннего воздуха снижается до уровня  $t_{j\min}$ ;  $\tau_{jn}$  – время восстановления расчетного теплоснабжения в некотором аварийном состоянии  $n$ , ч.

Для большинства практических расчетов с приемлемой точностью допустимо принимать временной резерв одинаковым (усредненным) для всех потребителей –  $\Delta\bar{\tau}$ , ч. В таком случае выражение (15) можно представить следующим образом:

$$d_n = [1 - (\Delta\bar{\tau}/\tau_n)] \sum_{j \in J''} c_{jn} (q_j - q_{jn}). \quad (16)$$

Количественная оценка временного резерва потребителей ( $\Delta\tau_{jn}$  или  $\Delta\bar{\tau}$ ), связанного с тепловой инерцией, осуществляется на основе аналитических зависимостей, описывающих теплофизический процесс остывания с использованием коэффициента тепловой аккумуляции, определяемого на основе геометрических и теплопроводных характеристик зданий. Эти вопросы подробно рассмотрены в работах [15] и [34].

### 2.3. Определение узловых показателей стоимости и надежности за период времени

В предыдущих разделах рассматривались экономические и надежностные показатели, определяемые для некоторого расчетного интервала времени, а именно за час соответственно тепловой нагрузке. Предложенные зависимости позволяют определить их значения для любого потребителя и состояния системы, соответствующего отказу некоторого элемента. В то же время для практических расчетов важно располагать *интегральными* значениями этих показателей, определяемых за некоторый расчетный период времени (для ТСС обычно отопительный сезон).

Так, интегральные эксплуатационные затраты за расчетный период времени с учетом ущерба для некоторого состояния  $n$  можно определить следующим образом:

$$Z_n = \sum_{k \in K} z_{kn} + D_n, \quad (17)$$

где  $z_{kn}$  – затраты, соответствующие расчетному интервалу времени  $k$ , руб./ч;  $K$  – множество расчетных интервалов, формирующих расчетный период;  $D_n$  – интегральное (суммарное) значение ожидаемого ущерба, соответствующее состоянию  $n$ , руб.

Аддитивность величин  $z_{kn}$  по интервалам обусловлена непрерывностью процесса теплоснабжения потребителей, когда объем потребления за расчетный период (соответственно, эксплуатационных затрат) соответствует сумме потреблений, определенных согласно графику нагрузок для рассматриваемых интервалов времени в рамках этого периода, что справедливо для любого моделируемого состояния системы.

Показатель  $D_n$  как показатель надежности не может быть определен прямым сложением по временным интервалам, поскольку имеет вероятностную компоненту, связанную с отказами элементов. Получение ожидаемого суммарного ущерба в некотором состоянии системы имеет вероятность, соответствующую вероятности реализации этого состояния, или, в частном случае, вероятности отказа элемента. С учетом этого положения предлагается следующее выражение для определения величины  $D_n$ :

$$D_n = p_n \tau_0 d_n = p_n \tau_0 [1 - (\Delta \bar{\tau} / \tau_n)] \sum_{j \in J''} c_{jn} (q_j - q_{jn}), \quad (18)$$

где  $p_n$  – вероятность состояния  $n$ ;  $\tau_0$  – длительность расчетного периода, ч.

Величина интегрального ущерба для некоторого потребителя может быть определена по следующей формуле, учитывающей вероятности реализации всех моделируемых состояний:

$$D_j = \tau_0 \sum_{n \in N} p_n [1 - (\Delta \bar{\tau} / \tau_n)] c_{jn} (q_j - q_{jn}). \quad (19)$$

Суммарный ущерб по системе (по всем состояниям и потребителям) может быть определен по следующей формуле:

$$D_{\Sigma} = \sum_{n \in N} D_n = \sum_{j \in J''} D_j = \tau_0 \sum_{n \in N} \sum_{j \in J''} p_n [1 - (\Delta \bar{\tau} / \tau_n)] c_{jn} (q_j - q_{jn}). \quad (20)$$

Если из выражений (18)–(20) исключить показатели стоимости  $c_{jn}$ , то получим аналогичные выражения для вычисления интегральных величин недоотпусков тепловой энергии за расчетный период, соответственно, для некоторого состояния, потребителя и суммарного по системе.

Вероятности состояний  $p_n$  определяются на основе модели *марковского случайного процесса*, описывающего эволюцию событий в системе. Обоснования применения данной модели для решения задач надежности теплоснабжения рассматриваются в [15–19]. Существуют различные формализации и виды марковских моделей. Используем для определения величин  $p_n$  следующую систему уравнений, описывающих ста-

ционарный марковский случайный процесс для условий *простейшего потока событий* [15, 35]:

$$p_n = \left[ \sum_{i \in I_n} (\lambda_i + \mu_i) \right]^{-1} \left[ \sum_{m \in N_n} p_m \sum_{i \in I_m} (\lambda_i + \mu_i) \right], \quad n \in N, \quad (21)$$

где  $i$  – номер элемента системы (в частном случае, участков ТС – см. п. 2.1);  $m$  – номер некоторого состояния системы, вводится вместе с индексом  $n$  в рамках модели случайного процесса;  $p_m$  – вероятность состояния  $m$ ;  $\lambda_i$  и  $\mu_i$  – интенсивности отказов и восстановления элемента  $i$  соответственно,  $1/\tau$ ;  $I_n$  – подмножество элементов системы, отказ или восстановление которых соответствует переходу из состояния  $n$  в состояние  $m$ ;  $I_m$  – подмножество элементов, отказ или восстановление которых соответствует переходу из состояния  $m$  в состояние  $n$ ;  $N_n$  – подмножество состояний, из которых возможен прямой переход в состояние  $n$ .

Ранее, в п. 2.1, введенные индексы  $i$  и множество  $I$  соответствуют участкам сети и их множеству. В общем случае в рамках модели (21) могут рассматриваться не только элементы ТС (участки трубопроводов), но и элементы ИТ, функционирующих в составе исследуемой ТСС. В таком случае множество элементов  $I$  и множество рассматриваемых состояний системы  $N$  дополняются соответствующими компонентами, при этом отказы дополнительных элементов должны быть учтены на уровне физического моделирования последствий реализации аварийных состояний. Вместе с тем при анализе надежности большинства действующих ТСС вполне приемлемо ограничиваться моделированием элементов ТС, которые являются наиболее ненадежными как с точки зрения интенсивностей их отказов, значения которых в разы превышают соответствующие параметры элементов ИТ [15], что особенно проявляется на фоне высокой доли износа трубопроводов [36], так и последствий этих отказов, зачастую приводящих к длительным нарушениям теплоснабжения с большими потерями тепловой энергии [15, 36].

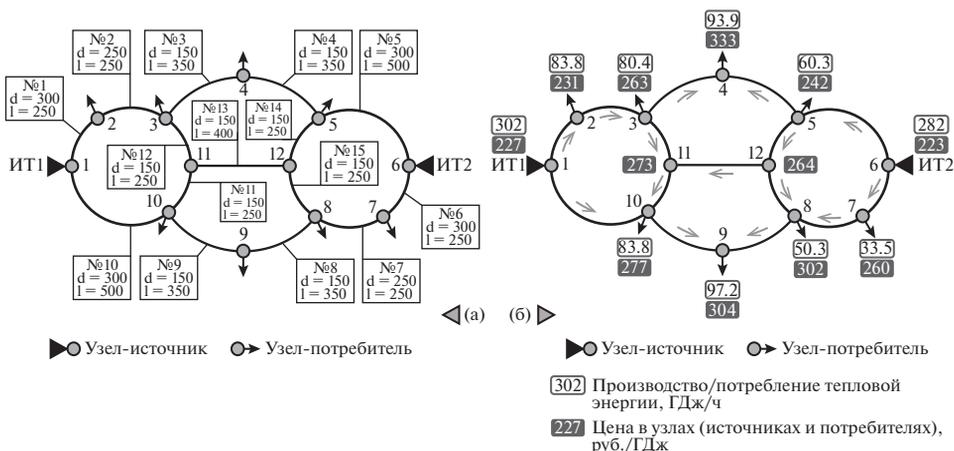
Уравнение (21) представлено в общей формулировке при условии, что количество аварийных состояний может не соответствовать количеству единичных отказов. Иначе говоря, такое условие допускает сложные состояния, соответствующие одновременному отказу нескольких элементов, при этом множество состояний  $N$  поглощает как число элементов, так и группу сложных состояний. Если множество состояний ограничивается единичными отказами, то каждая вероятность  $p_n$  соответствует вероятности отказа некоторого элемента –  $p_i$ , и модель (21) значительно упрощается [36]:

$$p_i = p_0 \lambda_i / \mu_i, \quad i \in I, \quad (22)$$

$$p_0 = \left( 1 + \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^{-1}, \quad (23)$$

где  $p_0$  – вероятность полностью работоспособного состояния системы.

Допущение о возможности состояний только с одним отказавшим элементом вполне достоверно соответствует условиям функционирования исследуемых систем, что подтверждается статистическими данными по их аварийности [15]. Однако при анализе надежности ТСС с большим количеством источников, функционирующих на единые сети, а также услужением структуры действующих систем вследствие появления новых объектов, например, при их переходе к централизованно-распределенным системам с активными потребителями [22], вероятность сложных состояний повышается и этот фактор необходимо учитывать при моделировании случайного процесса.



**Рис. 1.** Тестовая схема ТСС: (а) основные параметры системы:  $d$  – диаметр участка ТС (м),  $l$  – протяженность участка ТС (м); (б) – распределение тепловой энергии и узловых цен в расчетном безаварийном режиме функционирования исследуемой ТСС.

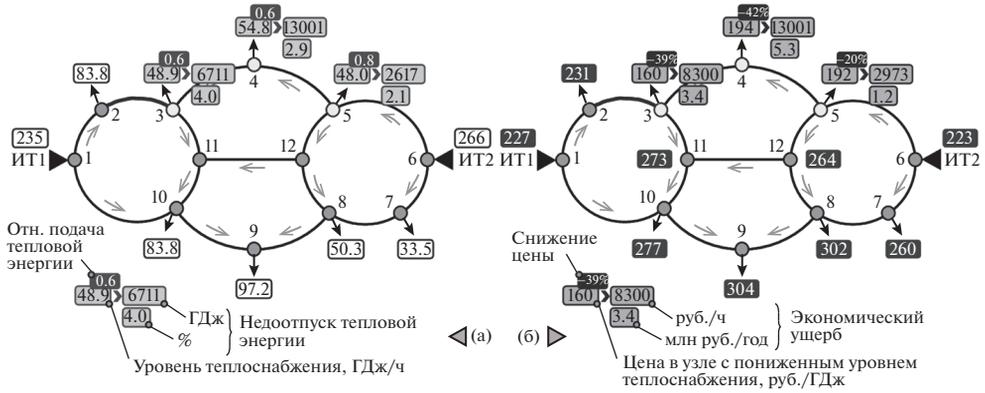
### 3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Рассматривается тестовая схема ТСС, представленная на рис. 1а. Схема состоит из 12-ти узлов, из которых два являются источниками (ИТ1 и ИТ2), 8 узлов – потребителями (узлы 2–5, 7–10). Расчетная нагрузка потребителей составляет 583 ГДж/ч, мощность ИТ1 – 302 ГДж/ч, ИТ2 – 282 ГДж/ч. Суммарная протяженность сетевой части системы равна 4800 м. Для всех участков ТС заданы необходимые для расчетов параметры: диаметры, длины, гидравлические сопротивления, параметры надежности (интенсивности отказов и восстановлений).

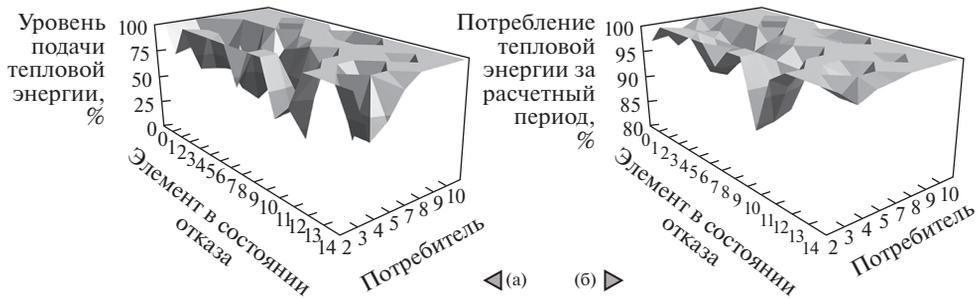
На рис. 1б представлены результаты решения задачи (6)–(7) для расчетного безаварийного режима функционирования исследуемой ТСС. На схеме представлены распределения потоков тепловой энергии и узловых цен с учетом оптимального потокораспределения в сети. Диапазон цен для потребителей соответствует значениям от 231 руб./ГДж (потребитель 2) до 333 руб./ГДж (потребитель 4). Также получены значения цен для каждого участка сети в соответствии со значениями затрат на перекачку теплоносителя (на рисунке не показаны). Суммарные эксплуатационные затраты для расчетного режима составляют 379.8 тыс. руб./ч: из них 38.5% соответствует производству тепловой энергии на ИТ1, 37.5% – на ИТ2 и 24% – транспортировке теплоносителя по сети. Решения получены в вычислительной среде GAMS, в которой написана соответствующая математическая модель исследуемой системы, позволяющая проводить расчеты для различных исходных условий и ограничений.

Проведены многовариантные расчеты аварийных режимов для исследуемой системы, соответствующих состояниям отказов ее элементов – участков ТС. Для каждого из моделируемых состояний определены узловые цены на тепловую энергию и экономические ущербы от возможного недоотпуска тепловой энергии потребителям.

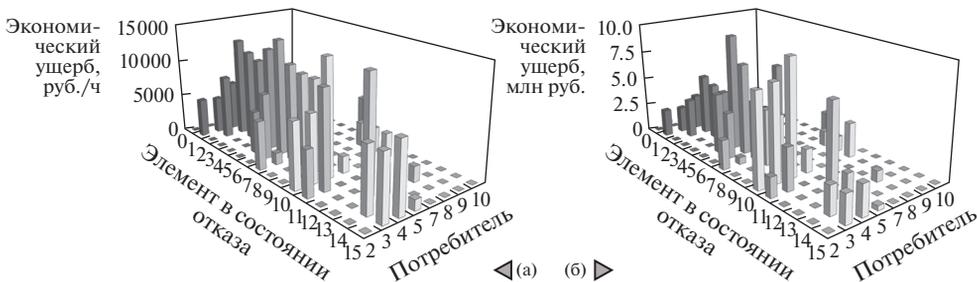
В каждом режиме при отказе некоторого участка сети, устанавливается соответствующее потокораспределение, определяющее подачу тепловой энергии потребителям. На рис. 2, для примера, приведен результат оценки аварийного режима, соответствующего отказу участка сети № 2 (см. рис. 1а). На схеме показаны изменения искомых технических (а) и экономических (б) показателей для потребителей с нарушением теплоснабжения в заданном аварийном режиме.



**Рис. 2.** Результаты моделирования одного из аварийных режимов, соответствующего отказу участка сети № 2 (см. рис. 1а): (а) уровни теплоснабжения потребителей и недоотпуск тепловой энергии; (б) распределение узловых цен и экономического ущерба.



**Рис. 3.** Уровни подачи (а) и объемы потребления (б) тепловой энергии в исследуемой ТСС в расчетном (позиция “0”) и аварийных режимах функционирования, соответствующих состоянием отказов элементов системы.



**Рис. 4.** Значения интервального (а) и интегрального (б) экономического ущерба в исследуемой ТСС в расчетном (позиция “0”) и аварийных режимах функционирования, соответствующих состоянием отказов элементов системы.

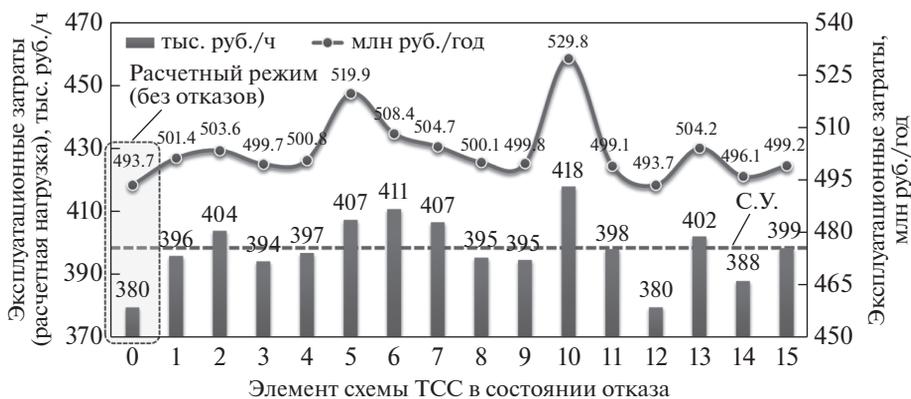


Рис. 5. Изменение эксплуатационных затрат в различных аварийных состояниях исследуемой схемы ТСС.

На рис. 3 в обобщенном виде показаны полученные технические (физические) показатели для расчетного (позиция “0”) и аварийных режимах функционирования, соответствующих отказам элементов системы: на диаграмме (а) приведены уровни подачи тепловой энергии потребителям, а на диаграмме (б) – объемы потребления тепловой энергии в исследуемой системе за расчетный период. На рис. 4 в обобщенном виде показаны полученные экономические ущербы для расчетного (позиция “0”) и аварийных режимах функционирования, соответствующих отказам элементов системы: на диаграмме (а) показаны значения интервального ущерба за час, на диаграмме (б) – значения ожидаемого интегрального ущерба за расчетный период. Из представленных графиков видно, что снижение уровня теплоснабжения, как и соответствующие ущербы, распределены неравномерно как по отказам элементов, так и по потребителям системы.

Значения суммарных эксплуатационных затрат, определенных по каждому аварийному режиму, показаны на рис. 5. Гистограмма представляет собой значения часовых значений, а график – величин, определенных за год. Например, суммарные эксплуатационные затраты для рассматриваемого на рис. 2 аварийного режима (отказ участка № 2), составляют 404 тыс. руб./ч, что на 6.4% больше значения, полученного для расчетного безаварийного режима. При этом величина суммарных годовых затрат для составляет 503.6 млн руб./год против 493.7 млн руб./год в расчетном режиме, т.е. прирост составляет около 2% (см. рис. 5).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оптимальное функционирование и развитие ТСС предполагает решение широкого круга технических и экономических задач. Современные условия функционирования рынка тепловой энергии требуют выбора режима функционирования ТСС с минимальными эксплуатационными затратами, который определяется некоторым оптимальным распределением потоков и узловых цен тепловой энергии. С другой стороны, имеются требования к надежности теплоснабжения потребителей, которые могут ограничивать диапазон возможных режимов в системе, в том числе и наиболее рациональных с точки зрения экономических показателей. Описанный конфликт надежности и экономичности является распространенным свойством многих технических систем. Для разрешения данного конфликта в ТСС обычно применяется традиционный подход, когда условия по обеспечению надежности теплоснабжения используются в качестве ограничений при выборе структуры и параметров системы. В настоящем исследовании предложен другой подход, суть которого состоит в совместном моделиро-

вании экономических и надежностных показателей при реализации различных аварийных режимов функционирования системы. Сформулированы соответствующие математические постановки определения оптимального режима функционирования ТСС как для расчетного, так и аварийного режимов. В качестве целевой функции используются суммарные эксплуатационные затраты (на производство и распределение тепловой энергии), в том числе с учетом возможного экономического ущерба от недоотпуска тепловой энергии в аварийных режимах. Решение сформулированных математических задач основано на применении метода множителей Лагранжа, базовых моделей теории гидравлических цепей и моделей марковского случайного процесса. В результате для каждого моделируемого режима определяются оптимальное потоко-распределение, суммарные эксплуатационные затраты, соответствующие им узловые цены на тепловую энергию, уровни подачи тепловой энергии потребителям, недоотпуски тепловой энергии и соответствующие им величины экономического ущерба. Таким образом, по аналогии с узловыми ценами, для каждого узла определяются соответствующие показатели надежности, позволяющие идентифицировать наиболее “узкие” места в системе, соответствующие максимальным экономическим потерям от нарушения теплоснабжения потребителей. Это позволяет корректировать экономическую эффективность режима по условиям надежности, учитывая соответствующие нарушения теплоснабжения и их технические и экономические последствия. Получаемые решения могут быть полезными как при проектировании ТСС, так и обосновании их развития с учетом фактора надежности, а также при разработке оптимального резервирования исследуемых систем, в том числе с учетом различных организационных форм рынка тепловой энергии. Развитие методов и моделей для решения этих и других сопряженных задач, а также их апробация на схемах действующих ТСС, составляют предмет дальнейших работ в рамках данной тематики.

Проведен вычислительный эксперимент на основе тестовой схемы ТСС с применением предложенного методического и вычислительного аппарата. Полученные результаты проанализированы, представлены их графические интерпретации.

Работа выполнена в рамках проекта государственного задания (№ FWEU-2021-0002) программы фундаментальных исследований РФ на 2021–2030 гг.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сеннова Е.В., Сидлер В.Г.* Математическое моделирование и оптимизация развивающихся теплоснабжающих систем. Новосибирск: Наука, 1987.
2. *Попырин Л.С., Светлов К.С., Беляева Г.М. и др.* Исследование систем теплоснабжения. Москва: Наука, 1989.
3. *Хрилев Л.С.* Теплофикационные системы. Москва: Энергоатомиздат, 1988.
4. Федеральный закон от 27.07.2010 № 190-ФЗ (ред. от 01.05.2022) “О теплоснабжении”. Эл. интернет-ресурс. Ссылка (дата обращения 22.02.2023): [http://www.consultant.ru/document/cons\\_doc\\_LAW\\_102975/](http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_102975/)
5. *Стенников В.А., Пеньковский А.В.* Теплоснабжение потребителей в условиях рынка: современное состояние и тенденции развития // ЭКО. 2019. № 3. С. 8–20.
6. *Hogan W.* Contract networks for electric power transmission // J. of Regulatory Economics. 1992. V. 4. P. 211–242.
7. *Singh H., Hao S., Papalexopoulos A.* Transmission congestion management in competitive electricity markets // IEEE Trans. on PWRs. 1998. V. 13(2). P. 672–680.
8. *Замбрыцкая Е.С., Ямалетдинова А.У.* Совершенствование существующей методики расчета регулируемых цен (тарифов) в сфере теплоснабжения // Молодой ученый. 2016. № 19. С. 449–453.
9. *Stoft S.* Power Systems Economics Designing Markets for Electricity. Wiley-IEEE Press, 2002.
10. *Green R.* Electricity Transmission Pricing – An International Comparison // Utilities Policy. 1997. V. 6(3). P. 177–184.
11. *Васьковская Т.А.* Показатели разницы узловых цен на оптовом рынке электроэнергии // Электричество. 2007. № 2. С. 23–27.
12. *Васьковская Т.А.* Вопросы формирования равновесных узловых цен оптового рынка электроэнергии // Электрические станции. 2017. № 1. С. 25–32.

13. Паламарчук С.И. Среднесрочное планирование выработки электроэнергии в электроэнергетических системах // *Электричество*. 2013. № 7. С. 2–10.
14. Булатов Б.Г., Каркунов В.О. Упрощенная модель определения узловых цен на рынке электроэнергии // *Вестник Южно-Уральского государственного университета*. Серия: Энергетика. 2009. № 34. С. 23–31.
15. Сеннова Е.В., Смирнов А.В., Ионин А.А. и др. Надежность систем теплоснабжения. Новосибирск: Наука, 2000.
16. Стенников В.А., Постников И.В. Комплексный анализ надежности теплоснабжения потребителей // *Известия РАН. Энергетика*. 2011. № 2. С. 107–121.
17. Stennikov V.A., Postnikov I.V. Methods for the integrated reliability analysis of heat supply // *Power Technology and Engineering*. 2014. V. 47(6) P. 446–453.
18. Postnikov I., Stennikov V., Mednikova E., Penkovskii A. Methodology for optimization of component reliability of heat supply systems // *Applied Energy*. 2018. V. 227. P. 365–374.
19. Postnikov I. Application of the Methods for Comprehensive Reliability Analysis of District Heating Systems // *Environmental and Climate Technologies*. 2020. V. 24(3). P. 145–162.
20. Postnikov I., Stennikov V. Modifications of probabilistic models of states evolution for reliability analysis of district heating systems // *Energy Reports*. 2020. V. 6. P. 293–298.
21. Postnikov I. A reliability assessment of the heating from a hybrid energy source based on combined heat and power and wind power plants // *Reliability Engineering & System Safety*. 2022. V. 221. 108372.
22. Postnikov I. Methods for the reliability optimization of district-distributed heating systems with prosumers // *Energy Reports*. 2022. V. 9(1). P. 584–593.
23. Надежность систем энергетики. Сборник рекомендуемых терминов. Отв. ред. Н.И. Воропай. Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005.
24. Jiang J., Zhang L., Wang Y. et al. Markov reliability model research of monitoring process in digital main control room of nuclear power plant // *Safety Science*. 2011. V. 49(6). P. 843–851.
25. Lisnianski A., Elmakias D., Hanooh B. A multi-state Markov model for a short-term reliability analysis of a power generating unit // *Reliability Engineering and System Safety*. 2012. V. 98. P. 1–6.
26. Sabouhi H., Abbaspour A., Fotuhi-Firuzabad M., Dehghanian P. Reliability modeling and availability analysis of combined cycle power plants // *Int. J. of Electrical Power & Energy Systems*. 2016. V. 79. P. 108–119.
27. Shahhosseini A., Olamaei J. An efficient stochastic programming for optimal allocation of combined heat and power systems for commercial buildings using // *Thermal Science and Engineering Progress*. 2019. V. 11. P. 133–141.
28. Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей. М.: Наука, 1985.
29. Меренков А.П., Сеннова Е.В., Сумароков С.В. и др. Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения. Новосибирск: Наука, 1992.
30. Penkovskii A., Stennikov V., Khamisov O. Optimum load distribution between heat sources based on the Cournot model // *Thermal Engineering*. 2015. V. 62. P. 598–606.
31. Penkovskii A., Stennikov V., Mednikova E., Postnikov I. Search for a market equilibrium of Cournot-Nash in the competitive heat market // *Energy*. 2018. V. 161. P. 193–201.
32. Стенников В.А., Хамисов О.В., Пеньковский Ф.В., Кравец А.А. Расчет узловых цен на тепловую энергию на основе метода неопределенных множителей Лагранжа // *Энергетическая политика*. 2022. № 4. С. 94–106.
33. СНиП 41-02-2003 “Тепловые сети”. М.: Госкомитет РФ по строительству и жилищно-коммунальному комплексу, 2000.
34. Соколов В.Я. Теплофикация и тепловые сети. М.: Издательство МЭИ, 1999.
35. Половко А.М., Гуров С.В. Основы теории надежности. С.-Петербург: БХВ-Петербург, 2006.
36. На ошибках – учимся? Обзор аварий, произошедших на тепловых сетях в отопительные периоды 2018–2019 и 2019–2020 гг. (по материалам СМИ из открытых источников). *Новости теплоснабжения*. 2020. № 3. С. 10–19.

## Methods and Models for Optimal Managing of District Heating System Accounting Reliability Based on Lagrange Multiplier Method and Markov Random Process

V. A. Stennikov<sup>a</sup>, \*, I. V. Postnikov<sup>a</sup>, \*\*, and A. V. Penkovskii<sup>a</sup>, \*\*\*

<sup>a</sup> Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Russia

\*e-mail: sva@isem.irk.ru

\*\*e-mail: postnikov@isem.irk.ru

\*\*\*e-mail: penkovskiy@isem.irk.ru

The main purpose of the study is to determine the optimal condition of the district heating system functioning while minimizing the operating costs for the production and distribution

of thermal energy, accounting the expected economic damages from possible heating undersupplies in case of failures of system components. To identification the parameters corresponding to these conditions, a methodological approach is proposed, which consists in the comprehensive calculation of nodal prices for thermal energy and reliability indices for the studied system when different component failures. The determination of nodal prices for thermal energy is based on the Lagrange multiplier method, while the calculation is carried out accounting the different cost of production at heating sources and the distribution of thermal energy flows on the heating network. Within the framework of the studied methodological problem, heating undersupplies to consumers in emergency conditions of the system and the corresponding economic equivalents (damages) are used as reliability indices. Assessment of probabilities of emergency conditions (states) is carried out using models of the markov random process. The general methodological basis for modeling thermal-hydraulic conditions in the system, including emergency ones, are the models of the theory of hydraulic circuits. The developed methods and models, along with the main formulated problem of optimal managing, allow identifying "bottlenecks" in the studied system, corresponding to the maximum economic damages from heating undersupplies to consumers based on obtained reliability indices. A computational experiment was carried out using the proposed methodology. The results are analyzed, their graphical interpretations are presented, and directions for further research are formulated.

*Keywords:* district heating system, nodal price for thermal energy, operating cost, reliability of heating to consumers, heating undersupply, economic damage, Lagrange multiplier method, theory of hydraulic circuits, markov random process