

УДК 621.3.011.32

## ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КОАКСИАЛЬНЫХ СОЛЕНОИДОВ И СОПОСТАВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

© 2022 г. Г. Н. Цицикян<sup>1</sup>, \*, М. Ю. Антипов<sup>1</sup>, \*\*

<sup>1</sup>Филиал “Центральный научно-исследовательский институт судовой электротехники  
и технологии” ФГУП “Крыловский государственный научный центр”,  
Санкт-Петербург, Россия

\*e-mail: george.20021940@mail.ru

\*\*e-mail: posich@mail.ru

Поступила в редакцию 26.08.2021 г.

После доработки 10.12.2021 г.

Принята к публикации 16.12.2021 г.

Рассмотрены взаимные индуктивности в системах коаксиальных соленоидов при внешнем и внутреннем расположении на основе известных рекомендаций, позволившие выявить различия в оценке взаимной индуктивности, обнаруженных при сопоставлении расчетным путем. В результате представлены альтернативные выражения как для расчета индуктивностей, так и для возникающих электродинамических сил при протекании токов, которые могут быть использованы во многих практических приложениях, в том числе в устройствах управления движением на основе эффектов электромагнитного ускорения или торможения.

*Ключевые слова:* взаимная индуктивность, электродинамические силы, соосные соленоиды

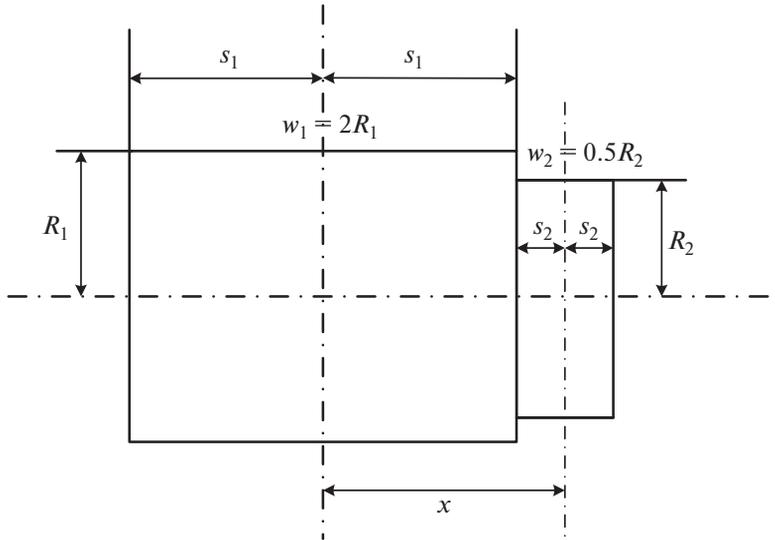
DOI: 10.31857/S0002331022020066

Определение взаимной индуктивности коаксиальных соленоидов имеет важное практическое значение и используется во многих практических приложениях, одно из которых характеризуется термином “Coilgun” [1, 2] как разновидности электромагнитного ускорителя соленоидов в управляемом магнитном поле, что, в свою очередь, обуславливает необходимость в оценках взаимных индуктивностей соленоидов и возникающих сил при протекании токов. Эти вопросы находятся в поле зрения специалистов, занимающихся проблемами электромагнитного ускорения уже достаточно давно, и в качестве примера можно привести работу [3], опубликованную в 1961 г.

В работе [2] построены графические зависимости для взаимной индуктивности коаксиальных соленоидов в функции расстояния между плоскостями симметрии  $x$  (рис. 1).

На рис. 1 показан характерный случай расположения соленоидов с примыкающими торцами и с геометрией, определенной подрисуночной подписью к рис. 1. В работе [4] были даны выражения для электродинамических сил, действующих на соосный контур с током в поле соленоида при его перемещении вдоль оси, в которой были указаны предпосылки для реализации возвратно-поступательного движения контура за счет изменения направления тока при прохождении нулевой плоскости, а затем на достаточном удалении от торцевых плоскостей. Вопросы определения взаимной индуктивности в коаксиальных соленоидах рассматривались ранее в работах [4, 5].

На этой основе в работах [5–7] рассматривались также и электродинамические силы при протекании токов, поэтому целесообразность сопоставления методов определения взаимных индуктивностей не вызывает сомнений.



**Рис. 1.** Два коаксиальных соленоида для случая с примыкающими торцами с внешней стороны соленоидов с числом витков  $N_1 = 24$  и  $N_2 = 1.0$  с геометрическими размерами  $s_1 = R_1 = 0.02$  м,  $R_2 = 0.8R_1 = 0.016$  м,  $s_2 = 0.25R_2 = 0.004$  м и  $x = s_1 + s_2 = 0.024$  м. (В оригинале  $w_1$  и  $w_2$  обозначают длину соленоидов.)

Для определения взаимной индуктивности  $M$  в [2] при  $x = \text{var}$  приведено выражение:

$$M = \frac{\mu\pi R_1^2 R_2^2 24 \times 1}{4R_1} \times \left[ \frac{2}{R_1^2} \left( \frac{l_2}{d_2} - \frac{l_1}{d_1} \right) - \frac{R_2^2}{4} \left( \frac{l_1}{d_1^5} - \frac{l_2}{d_2^5} \right) \left( 3 - \frac{0.25R_2^2}{R_2^2} \right) \right], \quad (1)$$

где  $l_1 = x - R_1$ ,  $l_2 = x + R_1$ ,  $d_1 = \sqrt{(x - R_1)^2 + R_1^2}$ ,  $d_2 = \sqrt{(x + R_1)^2 + R_1^2}$ , в которую подставляются данные из подрисуночной подписи. Тогда при  $x = 0.024$  м,  $R_1 = 0.02$  м и  $R_2 = 0.016$  м будем иметь:  $l_1 = 0.004$  м,  $l_2 = 0.044$  м,  $d_1 = 0.0204$  м и  $d_2 = 0.0483$  м, и величина  $M$  оказывается равной:

$$M = 0.00121 \times 10^{-7} \times \left[ \frac{2}{(0.02)^2} \left( \frac{0.044}{0.0483} - \frac{0.004}{0.0204} \right) - \frac{0.016^2}{4} \times \left( \frac{0.004}{0.0204^5} - \frac{0.044}{0.0204^5} \right) 2.75 \right] \cong 0.673 \times 10^{-6} \text{ Гн.}$$

Результат вычисления приводит к значению  $0.673 \times 10^{-6}$  Гн вместо  $0.2 \times 10^{-6}$  Гн, вытекающего из анализа кривой для  $M$  (Fig. 4 в [2]). Поэтому есть необходимость в сопоставлении взаимной индуктивности по имеющимся альтернативным методикам и расчетам. Оценку взаимной индуктивности в этом конкретном случае будет производить по методике, данной в [6], и по расчетным выражениям, данным в [5].

По методике, изложенной в [6], взаимная индуктивность коаксиальных соленоидов с примыкающими торцами с внешней стороны в соответствии с рис. 2 определяется по формулам:

$$M = \frac{\pi}{8} \mu_0 w W \frac{d^2}{aA} (l_1 F_1 - l_2 F_2 - l_3 F_3 + l_4 F_4), \quad (2)$$

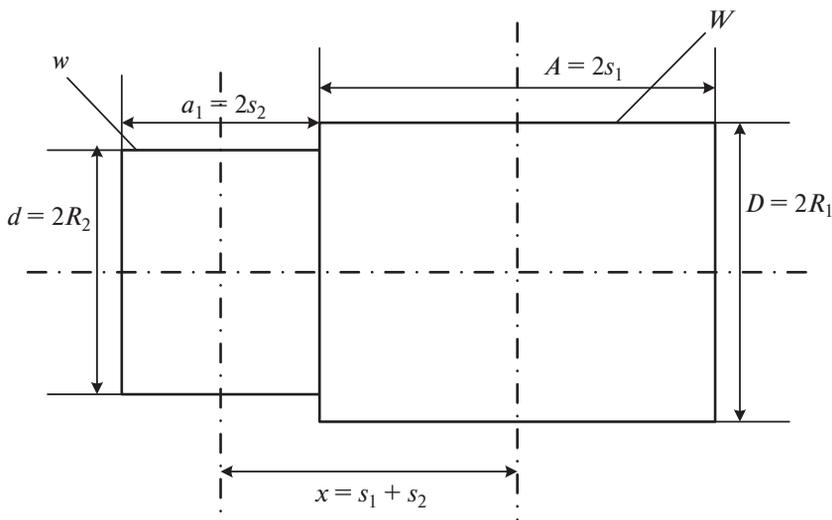


Рис. 2. Обозначение геометрических размеров для коаксиальных соленоидов с числом витков  $w$  и  $W$ .

где

$$l_1 = \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2}, \quad l_2 = \sqrt{x_2^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2}, \quad l_3 = \sqrt{x_3^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2}, \quad l_4 = \sqrt{x_4^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2}, \quad (3)$$

$x_1 = x + \frac{A+a}{2}$ ,  $x_2 = x - \frac{A-a}{2}$ ,  $x_3 = x + \frac{A-a}{2}$ ,  $x_4 = x - \frac{A+a}{2}$ , а  $F_1 - F_4$  — значение функций  $F$ , заданных таблично при  $\delta = \frac{d}{D}$  и отношениях  $\lambda_1^2 = \left(\frac{D}{2l_1}\right)^2$ ,  $\lambda_2^2 = \left(\frac{D}{2l_2}\right)^2$ ,  $\lambda_3^2 = \left(\frac{D}{2l_3}\right)^2$ ,  $\lambda_4^2 = \left(\frac{D}{2l_4}\right)^2$ .

В данном конкретном случае  $x_1 = 0.048$  м,  $x_2 = 0.008$  м,  $x_3 = 0.004$  м,  $x_4 = 0$  и соответственно  $l_1 = 0.052$  м,  $l_2 = 0.0215$  м,  $l_3 = 0.0447$  м,  $l_4 = 0.02$  м,  $\delta = \frac{0.032}{0.04} = 0.8$ ,  $\lambda_1^2 = \left(\frac{0.02}{0.052}\right)^2 \cong 0.148$ ,  $\lambda_2^2 = \left(\frac{0.02}{0.0215}\right)^2 \cong 0.865$ ,  $\lambda_3^2 = \left(\frac{0.02}{0.0447}\right)^2 \cong 0.2$ ,  $\lambda_4^2 = \left(\frac{0.02}{0.02}\right)^2 = 1.0$ .

Для нахождения значений  $F_1, F_2, F_3, F_4$  следует воспользоваться таблицей 7.1 в [6], по которой будем иметь для  $F_1 - F_4$  следующие численные значения: 0.998, 0.938, 0.997, 0.912. Подстановкой значений в формулу (3) с учетом произведения числа витков, принятых равных 24, и геометрических размеров  $d = 2R_2$ ,  $a = 2s_2$ , и  $A = 2s_1$ , а именно,  $d = 0.032$  м,  $a = 0.008$  м и  $A = 0.04$  м найдем:

$$M = \frac{\pi}{8} \times 4\pi \times 10^{-7} \times 24 \times \frac{(0.032)^2}{0.008 \times 0.04} [0.052 \times 0.998 - 0.0215 \times 0.938 - 0.0447 \times 0.997 + 0.02 \times 0.912] \cong 0.201 \times 10^{-6} \text{ Гн},$$

т.е. значение весьма близкое к графику  $M$  от  $x$  при  $x = 0.024$  м в [2].

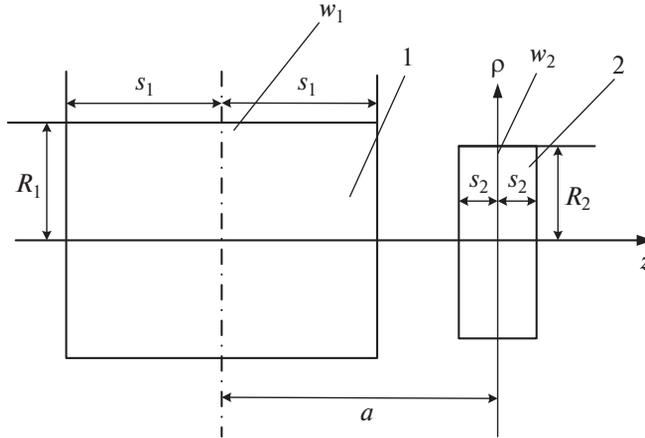


Рис. 3. Коаксиальные соленоиды с расстоянием между плоскостями симметрии равным  $a$ .

Положение коаксиального соленоида с индексом 2 относительно правого или левого торца соленоида с индексом 1 (рис. 1, 2) значения не имеет. Альтернативой для этой методики расчета можем служить комплекс расчетных выражений, данных в [5], для общего случая расположения коаксиальных соленоидов, показанных на рис. 3.

В [5] выражение для взаимной индуктивности представлено в виде рядов:

$$M = \frac{\pi\mu_0 w_1 w_2 R_1}{(2s_1/R_1)(2s_2/R_2)} \sum_{k=1}^4 (-1)^{k-1} \left\{ \frac{1}{2} \left[ (q_k^2 + 1)^{1/2} - q_k \right] - \frac{1}{16} \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \frac{1}{(q_k^2 + 1)^{3/2}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{128} \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^4 \frac{1 - 4q_k^2}{(q_k^2 + 1)^{7/2}} - \frac{5}{2048} \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^6 \frac{8q_k^4 - 12q_k^2 + 1}{(q_k^2 + 1)^{11/2}} + \dots \right\}, \quad (4)$$

где (рис. 3)

$$q_1 = \frac{a - s_1 - s_2}{R_2}, \quad q_2 = \frac{a + s_1 - s_2}{R_2}, \quad q_3 = \frac{a + s_1 + s_2}{R_2}, \quad q_4 = \frac{a - s_1 + s_2}{R_2}, \quad (5)$$

и геометрические размеры записаны в соответствии рис. 3,  $w_1, w_2$  – число витков соленоидов 1 и 2.

Зададимся теперь значением  $a$  равным  $x$  (рис. 1), т.е.  $a = 0.024$ ,  $s_1 = R_1$ ,  $w_1 w_2 = 24$ ,  $R_2 = 0.016$  м,  $s_2 = 0.004$  м и  $s_1 = 0.02$  м, и найдем, что  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = 2.5$ ,  $q_3 = 3.0$  и  $q_4 = 0.5$ .

Перед суммой в (4) имеем  $\pi \times 4\pi \times 24 \times 0.02/2 \times 0.5 \cong 1.895 \times 10^{-6}$  Гн. Для  $q_1 = 0$  получаем под знаком суммы в (4) 0.374, для  $q_2 = 2.5$  – (–0.0917), для  $q_3 = 3.0$  имеем 0.0783, и для  $q_4 = 0.5$  – (–0.2428). Объединяя эти значения и умножая их на величину, стоящую перед суммой в (4), получаем  $0.223 \times 10^{-6}$  Гн. Таким образом результаты расчетов по методикам, данным в [5] и [6], дают близкие численные результаты, которые и служат основанием для ревизии выражения (2), приведенного в [4]. Этому выражению здесь приписан номер 1.

Близость численных значений позволяет рекомендовать для определения электродинамических сил следующее выражение, данное в [5] (рис. 3):

$$f = \frac{\pi\mu_0 i_1 i_2 w_1 w_2}{(2s_1/R_1)(2s_2/R_2)} \frac{R_1}{R_2} \sum_{k=1}^4 (-1)^k \left\{ -\frac{1}{2} \left[ (q_k^2 + 1)^{1/2} - q_k \right] (q_k^2 + 1)^{-1/2} + \right. \\ \left. + \frac{3}{16} \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 q_k (q_k^2 + 1)^{-5/2} + \frac{5}{128} \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^4 q_k (3 - 4q_k^2) (q_k^2 + 1)^{-9/2} - \right. \\ \left. - \frac{35}{2048} \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^6 q_k (-8q_k^4 + 20q_k^2 + 1) (q_k^2 + 1)^{-13/2} + \dots \right\}, \quad (6)$$

где  $q_k$  определены в соответствии с (5).

Тогда имеем в конфигурации, принятой для рис. 1 и рис. 3, где  $a = x = 0.024$  м,  $s_2 = 0.004$  м,  $s_1 = R_1 = 0.02$  м,  $R_2 = 0.016$  м с числом витков 24 и 1, следующее выражение перед суммой:

$$\frac{\pi \times 4\pi \times 10^{-7} \times 24 i_1 i_2}{2 \times 0.5} \times 1.25 = 118.435 \times 10^{-6} i_1 i_2. \quad (7)$$

Вычисления под знаком суммы в (6) с подстановкой  $q_1 - q_4$  приводят к следующим численным значениям при ограничении первыми тремя членами ряда (6): для  $q_1 = 0$  имеем (+0.5), для  $q_2 = 2.5$  (-0.02989), соответственно для  $q_3 = 3.0$  (+0.02318) и для  $q_4 = 0.5$  (-0.1576). В сумме получаем значение, равное 0.3357. Тогда для силы взаимодействия находим:  $f = 118.435 \times 10^{-6} i_1 i_2 0.3357 = 39.757 \times 10^{-6} i_1 i_2$ , а для оценки силы взаимодействия при синусоидальном процессе и действующих значениях токов  $10^4$  А будем иметь в среднем во времени:  $F = 39.757 \times 10^2$  Ньютон или 405.52 кГс.

Вернемся к вопросу о взаимной индуктивности для случая симметричного расположения коаксиальных соленоидов, когда соленоид меньшего радиуса располагается целиком внутри другого с торцами, равноудаленными от торцов внешнего соленоида, как показано на рис. 4.

В этом случае взаимная индуктивность определяется выражением:

$$M = \frac{\pi\mu_0 w_1 w_2 R_2}{(2s_1/R_1)(2s_2/R_2)} \left\{ \left[ \left( q_1^2 + 1 \right)^{1/2} - \frac{1}{8} \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 \left( q_1^2 + 1 \right)^{-3/2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{64} \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^4 \left( 1 - 4q_1^2 \right) \left( q_1^2 + 1 \right)^{-7/2} - \frac{5}{1024} \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^6 \left( 8q_1^4 - 12q_1^2 + 1 \right) \left( q_1^2 + 1 \right)^{-11/2} \dots \right] - \right. \\ \left. - \left[ \left( q_2^2 + 1 \right)^{1/2} - \frac{1}{8} \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 \left( q_2^2 + 1 \right)^{-3/2} - \frac{1}{64} \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^4 \left( 1 - 4q_2^2 \right) \left( q_2^2 + 1 \right)^{-7/2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{5}{1024} \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^6 \left( 8q_2^4 - 12q_2^2 + 1 \right) \left( q_2^2 + 1 \right)^{-11/2} \dots \right] \right\}, \quad (8)$$

где

$$q_1 = -\frac{s_1 + s_2}{R_1}, \quad q_2 = \frac{s_1 - s_2}{R_1}. \quad (9)$$

Подставляя численные значения, соответствующие указанным в подрисуночной надписи на рис. 1, т.е., принимая произведения витков равным 24,  $s_1 = R_1 = 0.02$  м,

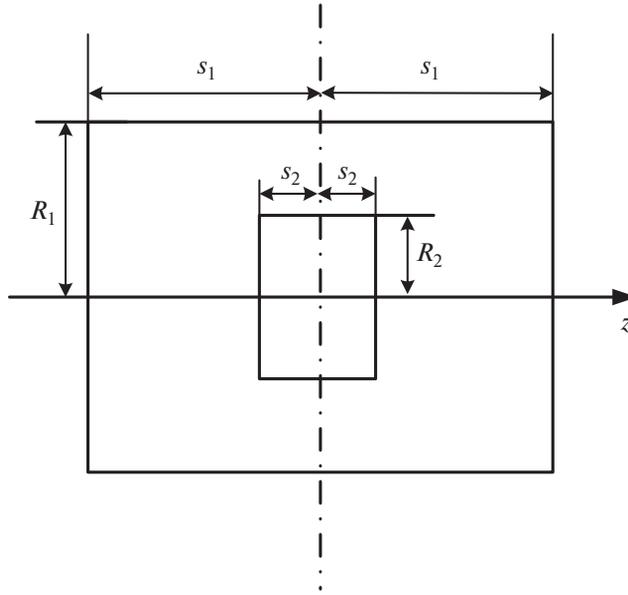


Рис. 4. Коаксиальные соленоиды с симметричным расположением.

$R_2 = 0.8R_1 = 0.016$  м,  $s_2 = 0.25R_2 = 0.004$  м, и, следовательно,  $q_1 = -1.2$  и  $q_2 = -0.8$ , будем иметь:

$$M = 1.516 \times 10^{-6} \left\{ \left[ \left( (1.2)^2 + 1 \right)^{1/2} - \frac{1}{8} \left( \frac{0.016}{0.02} \right)^2 \left( (1.2)^2 + 1 \right)^{-3/2} - \frac{1}{64} \left( \frac{0.016}{0.02} \right)^4 \left( 1 - 4(1.2)^2 \right) \left( (1.2)^2 + 1 \right)^{-7/2} \dots \right] - \left[ \left( (0.8)^2 + 1 \right)^{1/2} - \frac{1}{8} \left( \frac{0.016}{0.02} \right)^2 \left( (0.8)^2 + 1 \right)^{-3/2} - \frac{1}{64} \left( \frac{0.016}{0.02} \right)^4 \left( 1 - 4(0.8)^2 \right) \left( (0.8)^2 + 1 \right)^{-7/2} \dots \right] \right\}.$$

Оценка первой квадратной скобки выражаются численным значением 1.5424, а для второй квадратной – оценка значением (-1.2637). Поэтому максимальное значение индуктивности в конфигурации рис. 4 равно:

$$M = 0.4225 \times 10^{-6} \text{ Гн},$$

которое совпадает практически с численным значением, определяемым по кривой Fig. 4 работы [2] при  $x = 0$ .

Естественно предположить, что максимальное значение для взаимной индуктивности должно вытекать и из выражения (1) в случае его правомерности при значении  $x = 0$ . Тогда  $l_1 = -R_1$ ,  $l_2 = R_1$ ,  $d_1 = \sqrt{2}R_1$ ,  $d_2 = \sqrt{2}R_1$ ,  $R_1 = 0.02$  м и  $R_2 = 0.016$  м. Для квадратной скобки в (1) имеем: численное значение 7460, а для взаимной индуктивности  $0.00121 \times 10^{-7} \times 7460 \cong 0.903 \times 10^{-6}$  Гн.

Из вышеизложенного следует необходимость корректировки выражения (1), данного в [2], и целесообразность использования методики, данной в [6], выражения (4) с учетом (5) для определения взаимной индуктивности, а также выражения (6) при определении электродинамических сил для внешнего расположения соленоидов. Для внутрен-

него расположения соленоидов рекомендации по расчету сил даны в [5], а управление движением можно осуществить изменением величины и направления токов.

Заметим в заключении, что реализация ускоренного перемещения “coilgun” хорошо проиллюстрировано в работе [8], где ускорение проводящего объекта осуществляется в многосекционном индукторе, одна половина которого подключена к условно положительному генератору, а вторая – к отрицательному, и на всем протяжении объект испытывает ускоряющее воздействие только одного знака.

## ВЫВОДЫ

Результаты расчетов по формуле (1), данной в [2], для определения  $M$  расходятся с графиком зависимости взаимной индуктивности от  $x$  [2, Fig. 4], который подтверждается на основе независимых альтернативных выражений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kim S., Yang H., Hahn S. An optimal design of capacitor driver coilgun, IEEE Trans. Magn. 1994. V. 20. P. 207–211.
2. Katsumi Masugata. Hyper Velocity Acceleration by a pulsed Coilgun using traveling magnetic Field, IEEE Trans on Magnetics. 1997. V. 33. № 6. P. 4434–4438.
3. Thom K., Norwood Y. Theory of an Electromagnetic mass accelerator for achieving hyper velocities. NASA, Washington. 1961. P. 36.
4. Цицикян Г.Н., Антипов М.Ю. Электродинамические силы, действующие на контур с током в поле соленоида при его перемещении вдоль оси. Электричество. 2020. № 8. С. 58–62.
5. Цицикян Г.Н. Взаимные индуктивности и силы взаимодействия соосных контуров, соленоидов и катушек. Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1985. № 6. С. 90–99.
6. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей. Справочная книга. Л.: Энергоатомиздат, 1986. 488 с.
7. Bueno A.M., Assis A.R.T. Deriving Force from Inductance-IEEE Trans. on Magnetics. 1998. V. 34. № 1. P. 317–319.
8. Balicki A., Zabar Z., Birenbaum L. and Czarkowski D. On the Desing of Coilguns for Super-Velocity Launchers. IEEE Trans. on Magnetics. 2007. V. 43. P. 107–110.

## Mutual Inductance of Coaxial Solenoids and Comparative Analysis

G. N. Tsitsikyan<sup>a,\*</sup> and M. Yu. Antipov<sup>a,\*\*</sup>

<sup>a</sup>*TsNII SET branch of the Krylov State Research Centre, SPb, Russia*

*\*e-mail: george.20021940@mail.ru*

*\*\*e-mail: posich@mail.ru*

Mutual inductances in coaxial solenoid systems with external and internal arrangement are considered on the basis of know recommendations, which made it possible to reveal differences in the assessment of mutual inductance, found during comparison by calculation. As a result, alternative expressions are presented both for calculating inductances and for the electrodynamic forces arising during the flow of current, which may be used in many practical applications, including motion control devices based on the effects of electromagnetic acceleration or deceleration.

*Keywords:* mutual inductances, coaxial solenoid, electromagnetics forces