ИЗВЕСТИЯ РАН. ЭНЕРГЕТИКА 2021, № 2, с. 75–81

УДК 536.24

К РАСЧЕТУ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПЛОСКОГО ТЕЛА ПРИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ТРЕТЬЕГО РОДА

© 2021 г.
Ю. В. Видин[1], В. С. Злобин[1, *]

[1]Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

**e-mail: zlobinsfu@mail.ru*

Поступила в редакцию 25.09.2020 г.
После доработки 01.12.2020 г.
Принята к публикации 24.02.2021 г.

В практике расчетов теплового состояния конструкций наиболее часто встречаются задачи нагрева (охлаждения) при несимметричных граничных условиях третьего рода. Решение таких задач является сложным и трудоемким процессом. Громоздкость и трудоемкость процесса возрастает особенно при расчете начальной стадии прогрева. При этом для определения собственных чисел необходимо решать трансцендентное уравнение, содержащее числа Био, характеризующие интенсивность теплообмена на поверхностях плоского тела. В статье предлагается относительно несложный приближенный метод определения наименьшего и наибольшего значения собственных чисел, с последующим уточнением этого интервала. В процессе выполнения итераций интервал быстро сужается и приближается к истинному значению искомого собственного числа. Также приведена методика аналитического определения первого собственного числа.

Ключевые слова: аналитическое решение, несимметричный нагрев, характеристическое уравнение, числа Био, собственные числа, наименьшее собственное число, наибольшее собственное число

DOI: 10.31857/S0002331021010179

Процесс несимметричного прогрева однородного плоского тела при граничных условиях третьего рода весьма часто встречается в инженерной практике [1]. В связи с этим исследованию данного теплового явления посвящено значительное количество теоретических работ, например [2–4]. Так, в частности, в монографии сравнительно ограниченного объема [3] приведено аналитическое решение в безразмерной форме задачи нестационарного несимметричного переноса тепла в однослойной пластине при линейных граничных условиях третьего рода [3]

$$\vartheta(X,\mathrm{Fo}) = \frac{\mathrm{Bi}_1(1+\mathrm{Bi}_0X)}{\mathrm{Bi}_0+\mathrm{Bi}_1+\mathrm{Bi}_0\mathrm{Bi}_1} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[\cos(\mu_nX) + \frac{\mathrm{Bi}_0}{\mu_n}\sin(\mu_nX)\right]\exp\left(-\mu_n^2\mathrm{Fo}\right). \quad (1)$$

Здесь первое слагаемое в правой части соответствует стационарному температурному полю тела, т.е., когда $\mathrm{Fo}\to\infty$, а Bi_0 и Bi_1 – безразмерные числа подобия (числа Био) на внешних поверхностях изделия ($X = 0$ и $X = 1$), коэффициенты ряда A_n рассчитываются по соотношению

$$A_n = \left[\left(1 + \frac{\mathrm{Bi}_0}{\mathrm{Bi}_1}\right)\frac{\mu_n + \sin\mu_n\cos\mu_n}{2\sin\mu_n} + \frac{\mathrm{Bi}_0}{\mu_n}\sin\mu_n\right]^{-1}, \quad (2)$$

а собственные числа μ_n являются корнями характеристического уравнения

$$\mathrm{ctg}\mu = \frac{\mu^2 - \mathrm{Bi}_0\mathrm{Bi}_1}{\mu\left(\mathrm{Bi}_0 + \mathrm{Bi}_1\right)}, \quad (3)$$

в котором Bi_0 и Bi_1 присутствуют на совершенно равноправных условиях.

Очевидно, что в случае, когда $\mathrm{Bi}_0 = 0$ (односторонний подвод тепла к пластине), задача становится симметричной и зависимости (1)–(3) принимают существенно более простой вид. В такой постановке она детально исследована в классической литературе по теплопроводности академиком А.В. Лыковым [5]. Однако необходимо отметить, что, если число $\mathrm{Bi}_0 \neq 0$, то аналитический расчет несимметричного температурного поля по (1) сопряжен с определенными трудностями. При этом основная сложность определения искомого температурного поля связана с вычислениями собственных значений μ_n согласно зависимости (3). Громоздкость и трудоемкость расчетов особенно возрастает при исследовании начальной стадии переноса тепла в теле, т.е. когда Fo является малой величиной и, следовательно, приходится учитывать большое число первых слагаемых ряда (1).

Автор монографии [3] выполнил весьма полезную работу по составлению большого количества таблиц первых шести корней μ_n и коэффициентов A_n для многочисленных комбинаций между величинами Bi_0 и Bi_1. При этом числовые расчеты проведены с очень высокой точностью (пять значащих цифр после запятой). Необходимо подчеркнуть, что автор данной книги проявил высокую добросовестность и ответственность и полученные им результаты следует признать в качестве эталонных.

Аналогичные таблицы расчета для первых шести собственных чисел μ_n с тремя значащими цифрами после запятой, но несколько позднее, были опубликованы авторами работы [4]. Здесь же, в несколько более расширенном варианте, чем в [5], приведены табличные значения μ_n в частном случае уравнения (3), когда ($\mathrm{Bi}_0 = 0$). Однако, несмотря на то, что, как уже указано, имеются широко известные материалы по характеристическому уравнению (3), по-видимому, целесообразно дополнительно к названным вспомогательным таблицам разработать аналитические методы определения корней μ_n при любых возможных комбинациях между числами подобия Bi_0 и Bi_1. Это направление исследования является особенно актуальным в связи с тем, что теплофизических задач, опирающихся на уравнение (3) и ему подобных, в инженерной практике встречается очень много.

Очевидно, что предложить единый аналитический подход расчета чисел μ_n, удовлетворяющих зависимости (3), сравнительно сложно. Поэтому, по нашему мнению, эффективнее будет поэтапный подход. На первой стадии, наверное, целесообразнее установить возможные границы для искомых чисел μ_n. В частности, это удается относительно просто указать, если принять, что числитель в правой части (3) равен нулю, т.е.

$$\mu^2 - \mathrm{Bi}_0\mathrm{Bi}_1 = 0. \quad (4)$$

В этом случае, очевидно, имеем

$$\mu_n = \frac{(2n-1)}{2}\pi, \quad (5)$$

где $n = 1, 2, 3,...$

Условие (5) соблюдается, если имеет место равенство

$$\mathrm{Bi}_0\mathrm{Bi}_1 = \frac{(2n-1)^2}{4}\pi^2. \tag{6}$$

Следовательно, когда

$$\mathrm{Bi}_0\mathrm{Bi}_1 \le \frac{(2n-1)^2}{4}\pi^2, \tag{7}$$

то

$$(n-1)\pi \le \mu_n \le \frac{2n-1}{2}\pi. \tag{8}$$

Если же

$$\mathrm{Bi}_0\mathrm{Bi}_1 \ge \frac{(2n-1)^2}{4}\pi^2, \tag{9}$$

то тогда

$$\frac{2n-1}{2}\pi \le \mu_n \le n\pi. \tag{10}$$

Проиллюстрируем сказанное на конкретном числовом примере. Допустим $\mathrm{Bi}_0 = 1$, а $\mathrm{Bi}_1 = 2$, т.е. $\mathrm{Bi}_0\mathrm{Bi}_1 = 2$. Это произведение меньше, чем $\frac{\pi^2}{4} = 2.4674$. Следовательно, первое собственное число μ_1 для данной комбинации между Bi_0 и Bi_1 находится в интервале $0 < \mu_1 < \frac{\pi}{2}$. Для следующих чисел μ_n более высокого порядка n будут иметь место соотношения

$$\pi < \mu_2 < \frac{3}{2}\pi,$$

$$2\pi < \mu_3 < \frac{5}{2}\pi,$$

и т.д.

Если же рассмотреть вариант $\mathrm{Bi}_0 = 1$, а $\mathrm{Bi}_1 = 3$, т.е. $\mathrm{Bi}_0\mathrm{Bi}_1 = 3$, то тогда $\frac{\pi}{2} < \mu_1 < \pi$, а для последующих значений $n\,(n = 1, 2, 3,...)$ останутся справедливыми предыдущие неравенства.

Таким образом, достаточно просто удается установить первоначальную “вилку”, в которой располагается искомый корень μ_n.

Следующий шаг по уменьшению интервала, в котором предположительно должно находиться истинное значение μ_n заключается в использовании решения для частного случая общего уравнения (3). Для этого нужно принять $\mathrm{Bi}_0 = 0$, т.е. предположить, что происходит односторонний подвод (отвод) тепла к исследуемому телу, и задача вырождается в симметричную, для которой выражение (3) существенно упрощается и принимает вид [4, 5]

$$\mathrm{ctg}\,\mu = \frac{\mu}{\mathrm{Bi}_1}, \tag{11}$$

первые числа корней которого хорошо изучены и рассмотрены во многих классических работах по аналитической теории теплопроводности.

Нетрудно показать, что собственные значения μ_n уравнения (11) могут служить нижней оценкой для корней μ_n выражения (3) при $\mathrm{Bi}_0 > 0$. Например, для рассмотренного ранее варианта $\mathrm{Bi}_0 = 1$ и $\mathrm{Bi}_1 = 2$ зона, где располагается фактически μ_1 существенно сузится, а именно будет [4, 5] $1.0769 < \mu_1 < \frac{\pi}{2}$. Подобное сужение "вилки" будет распространяться и на последующие числа μ_n, а конкретно получим

$$3.6436 < \mu_2 < \frac{3}{2}\pi,$$

$$6.5783 < \mu_3 < \frac{5}{2}\pi,$$

и т.п.

В результате удается достигнуть с помощью наиболее простых математических операций наименьший интервал для характеристического числа μ_n. Так, в частности, для μ_1 может быть применен следующий подход. Вводим некоторое условное число Био

$$\mathrm{Bi}^* = \sqrt{\mathrm{Bi}_0 \mathrm{Bi}_1}. \tag{12}$$

Естественно, если $\mathrm{Bi}_0 = \mathrm{Bi}_1$, то

$$\mathrm{Bi}^* = \mathrm{Bi}_0 = \mathrm{Bi}_1. \tag{13}$$

По величине $\frac{\mathrm{Bi}^*}{2}$ на основе несложного уравнения

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{2\beta}{\mathrm{Bi}^*} \tag{14}$$

определяем β_1, а далее

$$\mu_1 = 2\beta_1. \tag{15}$$

Допустим, что $\mathrm{Bi}_0 = \mathrm{Bi}_1 = 2$, и значит $\mathrm{Bi}^* = 2$. Тогда, исходя из зависимости (14), имеем $\beta_1 = 0.8603$ и далее получим $\mu_1 = 2\beta_1 = 2 \times 0.8603 = 1.7206$, что строго соответствует табличному значению [4]. Итак, в тех вариантах, в которых $\mathrm{Bi}_0 = \mathrm{Bi}_1$ вместо уравнения (3) может быть использовано существенно более простое (11) или (14). Если же $\mathrm{Bi}_0 \neq \mathrm{Bi}_1$, то в первом приближении также можно воспользоваться предложенным способом. В качестве примера вернемся к рассмотренному выше варианту $\mathrm{Bi}_0 = 1$, а $\mathrm{Bi}_1 = 2$. Тогда получим $\mathrm{Bi}^* = \sqrt{\mathrm{Bi}_0 \mathrm{Bi}_1} = \sqrt{1 \times 2} = 1.4142$, т.е. $\frac{\mathrm{Bi}^*}{2} = 0.7071$, следовательно на основе (14) будет $\beta_1 = 0.7535$. Окончательно имеем $\mu_1 = 2\beta_1 = 2 \times 0.7535 = 1.5070$. Данное рассчитанное число и является оценкой μ_1 снизу для принятого варианта $\mathrm{Bi}_0 = 1$ и $\mathrm{Bi}_1 = 2$. Таким образом, новые границы для μ_1 при заданных величинах Bi_0 и Bi_1 оказываются $1.5070 < \mu_1 < \frac{\pi}{2}$ очень близкими.

Нужно отметить, что этот способ дает возможность получить нижнюю оценку первого собственного числа уравнения (3). Располагая близкими граничными величина-

Таблица 1. Главные значения функции $\operatorname{arctg} x$

x	$\operatorname{arctg} x$	x	$\operatorname{arctg} x$	x	$\operatorname{arctg} x$
0	0.00000000	1.1	0.83298127	2.2	1.14416880
0.1	0.09966865	1.2	0.87605805	2.3	1.16066900
0.2	0.19739556	1.3	0.91510070	2.4	1.17600520
0.3	0.29145679	1.4	0.95054684	2.5	1.19028990
0.4	0.38050638	1.5	0.98279372	2.6	1.20362250
0.5	0.46364761	1.6	1.01219700	2.7	1.21609070
0.6	0.54041950	1.7	1.03907230	2.8	1.22777240
0.7	0.61072596	1.8	1.06369780	2.9	1.23873690
0.8	0.67474094	1.9	1.08631840	3.0	1.24904580
0.9	0.73281510	2.0	1.10714870	4.0	1.32581766
1.0	0.78539816	2.1	1.12637710	5.0	1.37340077

ми для фактических чисел μ_n, удается с помощью несложной итерационной процедуры получить близкие к истинным значения μ_n. Для этого нужно использовать следующую схему вычислений

$$\operatorname{tg}\mu_{\max} = \frac{\mu_{\min}\left(\mathrm{Bi}_0 + \mathrm{Bi}_1\right)}{\mu_{\min}^2 - \mathrm{Bi}_0 \cdot \mathrm{Bi}_1}. \tag{16}$$

Покажем ее применение на том же варианте $\mathrm{Bi}_0 = 1$, $\mathrm{Bi}_1 = 2$.

$$\operatorname{tg}\mu_{1\max} = \frac{\mu_{1\min}\left(\mathrm{Bi}_0 + \mathrm{Bi}_1\right)}{\mu_{1\min}^2 - \mathrm{Bi}_0 \cdot \mathrm{Bi}_1} = \frac{1.5070\,(1+2)}{1.5070^2 - 1\times 2} = \frac{4.521}{0.27105} = 16.6796.$$

Как следует из справочника [6] $\mu_{1\max} = \operatorname{arctg} 16.6796 = 1.5109$, т.е. получили окончательные пределы для μ_1

$$1.5070 < \mu_1 < 1.5109.$$

Эталонное значение μ_1 для принятых $\mathrm{Bi}_0 = 1$ и $\mathrm{Bi}_1 = 2$ согласно [4] равняется

$$\mu_1 = 1.5094.$$

Формула вида (16) может быть использована также наоборот для расчета $\mu_{\min}$ по известной величине $\mu_{\max}$. Для упрощения перехода по (16) от $\mu_{\min}$ к $\mu_{\max}$ (или наоборот) целесообразно использовать приведенную в работе табл. 1 для функции $\operatorname{arctg} x$.

В заключение остановимся на аналитической методике определения первого собственного значения μ_1 уравнения (3), являющегося наиболее важным при расчете нестационарного температурного поля на регулярной стадии процесса. Предлагаемый способ основан на представлении функции $\operatorname{ctg}\mu$ в форме усеченного степенного ряда [6]

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{1}{\mu} - \left(\frac{\mu}{3} + \frac{\mu^3}{45}\right). \tag{17}$$

Данная аппроксимация вполне приемлема при ограничении $\mu < \frac{\pi}{2}$. Подставляя (17) в зависимость (3), получим биквадратное алгебраическое уравнение

$$\mu^4 + 15\left(1 + \frac{3}{\mathrm{Bi}_0 + \mathrm{Bi}_1}\right)\mu^2 - 45\left(1 + \frac{\mathrm{Bi}_0 \cdot \mathrm{Bi}_1}{\mathrm{Bi}_0 + \mathrm{Bi}_1}\right) = 0. \tag{18}$$

Отсюда следует [6]

$$\mu_1^2 = 7.5\left(1 + \frac{3}{\mathrm{Bi}_0 + \mathrm{Bi}_1}\right)\left[\sqrt{1 + 0.8\frac{(\mathrm{Bi}_0 + \mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_0\mathrm{Bi}_1)}{(\mathrm{Bi}_0 + \mathrm{Bi}_1 + 3)^2}(\mathrm{Bi}_0 + \mathrm{Bi}_1)} - 1\right]. \tag{19}$$

Используя (19), находим μ_1 для случая $\mathrm{Bi}_0 = 1$ и $\mathrm{Bi}_1 = 2$.

$$\mu_1^2 = 7.5 \times 2\left[\sqrt{1 + 0.8 \times \frac{5 \times 3}{6^2}} - 1\right] = 2.3205,$$

$$\mu_1 = \sqrt{2.3205} = 1.5233.$$

Таким образом, аналитическое решение (19) дает несколько завышенное значение μ_1. При умеренных величинах Bi_0 и Bi_1 расхождение между рассчитанным корнем μ_1 по (19) и действительным сокращается. Очевидно, что формула (19) применима для плоских тел сравнительно умеренной термической массивности. Рекомендуемый метод может быть усилен за счет учета в разложении (17) следующих слагаемых более высоких степеней. Естественно, это потребует решения алгебраического уравнения третьей или даже четвертой степени. На основе значения μ_1, полученного по зависимости (19), легко определить противоположную оценку по выражению аналогичному (16).

Нужно также еще отметить, что изложенные в статье рекомендации применимы не только для плоских систем, но и для криволинейных, например, для цилиндрических и сферических, имеющих сравнительно небольшую кривизну. Кроме этого, является также важным то обстоятельство, что рекомендуемые подходы могут быть полезны при анализе характеристических уравнений еще более сложных, чем зависимость (3). Так, в частности, представляет большой технический интерес неустановившийся процесс распространения энергии в однородной конструкции, имеющей внешнюю оболочку из материала с другими теплофизическими свойствами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Видин Ю.В.* Исследование несимметричного прогрева тел под действием радиации. Автореф. дисс. на соискание ученой степени кандидата техн. наук. Томский политехн. ин-т им. С.М. Кирова. Томск: Изд-во Томского гос. ун-та. 1964.
2. *Видин Ю.В.* Инженерные методы теплопроводности. Красноярск. Изд-во КГТУ. 1992, 96 с.
3. *Михайлов М.Д.* Нестационарные температурные поля в оболочках. М.: Энергия, 1967, 120 с.
4. *Григорьев Л.Я., Маньковский О.Н.* Инженерные задачи нестационарного теплообмена. Л.: Энергия. 1968. 83 с.
5. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
6. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Гос изд-во физ-мат. лит., 1962. 608 с.

Calculation of Eigenvalues in the Problem of Nonstationary Thermal Conductivity of a Flat Body Under Unsymmetric Boundary Conditions of the Third Kind

Yu. V. Vidin[a] and V. S. Zlobin[a, *]

[a] *Siberian federal University, Krasnoyarsk, Russia*

**e-mail: zlobinsfu@mail.ru*

In the practice of calculating the thermal state of structures, the most common problems are heating (cooling) under asymmetric boundary conditions of the third kind. Solving such problems is a complex and time-consuming process. The bulkiness and complexity of the process increases especially when calculating the initial stage of warming up. In this case, to determine the eigenvalues, it is necessary to solve a transcendental equation containing the Bio numbers that characterize the intensity of heat exchange on the surfaces of a flat body. The article offers a relatively simple approximate method for determining the smallest and largest values of eigenvalues, with subsequent refinement of this interval. In the process of execution of iterations, the interval is shrinking rapidly and approaching the true value of the sought eigenvalues. The method of analytical determination of the first eigenvalue is also given.

Keyword: analytical solution, asymmetric heating, characteristic equation, Bio numbers, eigenvalue, the smallest eigenvalue, the largest proper number