УДК 539.3

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ И ФУНКЦИЯ ГРИНА ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С ГРАНИЦЕЙ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ПО КОРНЕВОЙ ЗАВИСИМОСТИ

© 2021 г. Г. С. Кротов*

Академия труда и социальных отношений (АТИСО), Москва, Россия
**e-mail: yamaths555@gmail.com*

Поступила в редакцию 07.11.2020 г.
После доработки 01.12.2020 г.
Принята к публикации 04.12.2020 г.

Развит метод функций Грина для уравнения нестационарной теплопроводности в ограниченной области с границей, движущейся по закону $\beta\sqrt{t}$. Метод приводит к точным аналитическим решениям краевых задач в условиях температурного нагрева. Получен явный вид функции Грина для первой краевой задачи в описанной выше области. Показана эквивалентность результатов, полученных с помощью метода функции Грина и другими методами.

Ключевые слова: функция Грина, первая краевая задача, нестационарная теплопроводность, уравнение теплопроводности, движущаяся граница, интегральное преобразование

DOI: 10.31857/S000233102101009X

ВВЕДЕНИЕ

Нахождение решений задач нестационарной теплопроводности имеет как практический, так и сугубо научный интерес. Например, это касается различных вопросов термоупругости, гидромеханики, фазовых превращений, процессов диффузии, абляции, горения [1], [2]. Несмотря на хорошо развитую аналитическую теорию нестационарного тепломассопереноса и близких направлений, достигнутые за последнее время успехи в нахождении точных аналитических решений весьма незначительны. Среди них можно отметить, например, работы [3] и [4], в которых получены функции Грина и точные аналитические решения задачи нестационарной теплопроводности в различных областях.

Одной из целей данной работы является получение функции Грина первой краевой задачи в ограниченной области, граница которой движется по закону $\beta\sqrt{t}$. Нахождение этой функции в свою очередь позволяет выписать точное аналитическое решение в указанной области, которое также получено в текущей статье. Еще одной целью является показать согласованность результатов в ограниченной области $0 \le x \le \beta\sqrt{t}$, работы полученных методов функции Грина и методом рядов.

Для начала напомним метод функции Грина для ограниченной области с подвижной границей. Пусть $\bar{\Omega}_t = \{(x,t); 0 \le x \le y(t), t \ge 0\}$, где $y(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Тогда температурное поле $T(x,t)$ может быть найдено в области Ω_t как результат решения задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < y(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$T(x,t)\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad 0 \le x \le y(0), \quad y(0) \ge 0, \tag{2}$$

$$T(x,t)\big|_{x=0} = \varphi_1(t), \quad t \ge 0, \tag{3}$$

$$T(x,t)\big|_{x=y(t)} = \varphi_2(t), \quad t \ge 0. \tag{4}$$

Функция Грина $G(x,t,x',\tau)$ для задачи (1)–(4) является решением

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \quad 0 < x < y(t), \quad t > \tau, \tag{5}$$

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{t=\tau} = \delta(x - x'), \quad 0 < x < y(\tau), \tag{6}$$

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{x=0} = G(x,t,x',\tau)\big|_{t=y(x)} = 0, \quad t > \tau. \tag{7}$$

Интегральное представление (1)–(4) будет иметь вид

$$T(x,t) = \int_0^{y(0)} T(x',\tau)G(x,t,x',\tau)\big|_{\tau=0}\,dx' + a\int_0^t \left[T(x',\tau)\frac{\partial G}{\partial x'}\right]_{x'=0} d\tau - \\ - a\int_0^t \left[T(x',\tau)\frac{\partial G}{\partial x'}\right]_{x'=y(\tau)} d\tau + \int_0^t \int_0^{y(\tau)} f(x',\tau)G(x,t,x',\tau)\,d\tau dx'. \tag{8}$$

Первая краевая задача в области $\Omega_t = \{(x,t); 0 \le x \le \beta\sqrt{t}, t \ge 0\}$

Температурное поле может быть найдено в результате решения задачи

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < \beta\sqrt{\tau}, \quad t > 0, \tag{9}$$

$$T(x,t)\big|_{x=0} = \varphi_1(t), \quad t \ge 0, \tag{10}$$

$$T(x,t)\big|_{x=\beta\sqrt{t}} = \varphi_2(t), \quad t \ge 0. \tag{11}$$

Начальное условие (2) в этом случае не задается, так как при $t = 0$ область вырождается в точку. Функция Грина $G(x,t,x',\tau)$ для задачи (9)–(11) будет являться решением задачи

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \quad 0 < x < \beta\sqrt{t}, \quad t > \tau, \tag{12}$$

$$G(x,t,x',\tau')\big|_{t=\tau} = \delta(x - x'), \quad 0 < x < \beta\sqrt{\tau}, \tag{13}$$

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{x=0} = 0, \quad t > \tau, \tag{14}$$

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{x=\beta\sqrt{t}} = 0, \quad t > \tau. \tag{15}$$

Интегральное представление будет иметь вид

$$T(x,t) = a\int_0^t \left[\left(T(x',\tau)\frac{\partial G}{\partial x'}\right)_{x'=0} - \left(T(x',\tau)\frac{\partial G}{\partial x'}\right)_{x'=\beta\sqrt{\tau}}\right] d\tau + \int_0^t d\tau \int_0^{\beta\sqrt{t}} f(x',\tau)G(x,t,x',\tau)\,dx'. \tag{16}$$

Функция Грина первой краевой задачи в области $\Omega_t = \{(x,t); 0 \le x \le \beta\sqrt{t}, t \ge 0\}$

Найдем аналитический вид функции Грина $G(x,t,x',\tau)$ задачи (12)–(15). Эту задачу можно переписать в эквивалентной форме

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \delta(t-\tau)\delta(x-x'), \quad 0 < x < \beta\sqrt{t}, \quad t > \tau, \tag{17}$$

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{t=0} = 0, \; x \ge 0, \tag{18}$$

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{x=0} = 0, \quad t > \tau, \tag{19}$$

$$G(x,t,x',\tau)\big|_{x=\beta\sqrt{t}} = 0, \quad t > \tau. \tag{20}$$

Введем переменные

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{2at}}, \quad \theta = \frac{1}{2}\ln t\left(t = e^{2\theta}\right). \tag{21}$$

Тогда задача (12)–(15) примет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + x_1\frac{\partial G}{\partial x_1} = \frac{\partial G}{\partial \theta} - 2e^{2\theta}\delta\left(\sqrt{2a}x_1e^{\theta} - x'\right)\delta\left(e^{2\theta} - \tau\right),\\ 0 < x_1 < \frac{\beta}{\sqrt{2a}}, \quad -\infty < \theta < +\infty.\end{gathered} \tag{22}$$

$$G\big|_{x_1} = 0, \quad G\big|_{x_1=0} = 0, \quad \lim_{\theta\to-\infty} G = 0. \tag{23}$$

Перейдем в пространство изображений Фурье

$$\bar{G}(x_1, i\lambda, x', \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x_1,\theta,x',\tau)e^{-i\lambda\theta}d\theta. \tag{24}$$

Предварительно вычислим интеграл

$$I = 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\theta}\delta\left(\sqrt{2a}x_1e^{\theta} - x'\right)\delta\left(e^{\theta} - \tau\right)e^{-i\lambda\theta}d\theta. \tag{25}$$

Принимая $e^{2\theta} = z$, из (22) и учитывая, что $dz = 2e^{2\theta}d\theta$ и $d\theta = \dfrac{dz}{2e^{2\theta}} = \dfrac{1}{2}z^{-1}dz$, получим

$$\begin{gathered}I = 2\int_{-\infty}^{+\infty} z\delta\left(x_1\sqrt{2az} - x'\right)\delta(z-\tau)z^{-\frac{i\lambda}{2}}\frac{1}{2}z^{-1}dz = \int_{0}^{+\infty}\delta\left(x_1\sqrt{2az} - x'\right)\delta(z-\tau)z^{-\frac{i\lambda}{2}}dz = \\ = \delta\left(x_1\sqrt{2a\tau} - x'\right)\tau^{-\frac{i\lambda}{2}}.\end{gathered} \tag{26}$$

Применим теперь интегральное преобразование (24) к уравнению (22), считая $G \to 0$ при $\theta \to \infty$ и вводя обозначения $\beta_0 = \dfrac{\beta}{\sqrt{2a}}$, $\xi_0 = \dfrac{x'}{\sqrt{2a\tau}}$, получим

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{G}}{\mathrm{d}x_1^2} + x_1\frac{\mathrm{d}\bar{G}}{\mathrm{d}x_1} - i\lambda\bar{G} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta\left(x_1\sqrt{2a\tau} - x'\right)\tau^{-\frac{i\lambda}{2}}, \tag{27}$$

$$\bar{G}\big|_{x_1=\beta_0} = 0, \quad \bar{G}\big|_{x_1=0} = 0. \tag{28}$$

Задача (27)–(28) эквивалентна следующей:

$$\bar{G}'' + x_1\bar{G}' - i\lambda\bar{G} = 0, \tag{29}$$

$$\bar{G}\big|_{x_1=\beta_0} = 0, \tag{30}$$

$$\bar{G}\big|_{x_1=0} = 0, \tag{31}$$

$$\bar{G}\big|_{x_1=\xi_0-0} = \bar{G}\big|_{x_1=\xi_0+0}, \tag{32}$$

$$\left.\frac{d\bar{G}}{dx_1}\right|_{x_1=\xi_0-0} - \left.\frac{d\bar{G}}{dx_1}\right|_{x_1=\xi_0+0} = \frac{1}{2\sqrt{a\pi}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}. \tag{33}$$

Вопрос эквивалентности задач (27)–(28) и (29)–(33) подробно рассмотрен в [3].

Уравнение (29) является уравнением Вебера, частными решениями которого являются функции

$$\begin{cases} e^{\frac{-x_1^2}{4}} D_{-1-i\lambda}(x_1), \quad e^{\frac{-x_1^2}{4}} D_{-1-i\lambda}(-x_1), \\ e^{\frac{-x_1^2}{4}} D_{i\lambda}(ix_1), \quad e^{\frac{-x_1^2}{4}} D_{i\lambda}(-ix_1), \end{cases} \tag{34}$$

где $D_\nu(z)$ – функция параболического цилиндра. Функции $D_\nu(z)$ и $D_\nu(-z)$ – линейно независимы, если ν не является целым числом, а функции $D_{-1-\nu}(z)$ и $D_\nu(\pm iz)$ линейно независимы при $\forall\nu$ [8]. Каждая функция из (34) может быть выражена линейно через две другие. Поэтому в качестве общего решения уравнения (29) можно взять любую пару линейно независимых функций (34), например, первую и третью. Тогда решение уравнения (29) примет вид:

$$\bar{G} = e^{\frac{-x_1^2}{4}}\left[c_1 D_{-1-i\lambda}(x_1) + c_2 D_{i\lambda}(ix_1)\right], \quad 0 < x_1 < \xi_0, \tag{35}$$

$$\bar{G} = e^{\frac{-x_1^2}{4}}\left[c_3 D_{-1-i\lambda}(x_1) + c_4 D_{i\lambda}(ix_1)\right], \quad \xi_0 < x_1 < \beta_0. \tag{36}$$

Используя условия (32) и (33), получим систему

$$\begin{cases} c_1 D_{-1-i\lambda}(\xi_0) + c_2 D_{i\lambda}(i\xi_0) = c_3 D_{-1-i\lambda}(\xi_0) + c_4 D_{i\lambda}(i\xi_0), \\ c_1\left[-\frac{x_1}{2}D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0-0} + c_2\left[-\frac{x_1}{2}D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0-0} = \\ = c_3\left[-\frac{x_1}{2}D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + c_4\left[-\frac{x_1}{2}D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right]\Bigg|_{x_1=\xi_0+0} + \\ + \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} e^{\frac{\xi_0^2}{4}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}. \end{cases} \tag{37}$$

Найдем выражения постоянных c_1, c_2 через c_3, c_4. Для этого воспользуемся методом Крамера и выражением для вронскиана функции параболического цилиндра [9]

$$D_\nu(z)\frac{d}{dz}D_{-\nu-1}(iz) - D_{-\nu-1}(iz)\frac{d}{dz}D_\nu(z) = -ie^{\frac{-\nu\pi}{2}}. \tag{38}$$

Получаем $c_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $c_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, где

$$\Delta = \left|\begin{matrix} D_{-1-i\lambda}(x_1) & D_{i\lambda}(ix_1) \\ \left[-\frac{x_1}{2}D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right] & \left[-\frac{x_1}{2}D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right]\end{matrix}\right|_{x_1=\xi_0+0} = e^{-\frac{\lambda\pi}{2}}, \qquad (39)$$

$$\Delta_1 = \left|\begin{matrix} [c_3 D_{-1-i\lambda}(x_1) + c_4 D_{i\lambda}(ix_1)]\big|_{x_1=\xi_0+0} & D_{i\lambda}(ix_1)\big|_{x_1=\xi_0-0} \\ c_3\left[-\frac{x_1}{2}D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right]\Big|_{x_1=\xi_0+0} + & \\ + c_4\left[-\frac{x_1}{2}D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right]\Big|_{x_1=\xi_0+0} + & \left[-\frac{x_1}{2}D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right]\Big|_{x_1=\xi_0-0} + \\ + \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} e^{\frac{\xi_0^2}{4}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)} & \end{matrix}\right|, \qquad (40)$$

$$\Delta_2 = \left|\begin{matrix} D_{-1-i\lambda}(x_1)\big|_{x_1=\xi_0-0} & [c_3 D_{-1-i\lambda}(x_1) + c_4 D_{i\lambda}(ix_1)]\big|_{x_1=\xi_0+0} \\ & c_3\left[-\frac{x_1}{2}D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right]\Big|_{x_1=\xi_0+0} + \\ \left[-\frac{x_1}{2}D_{-1-i\lambda}(x_1) + \frac{dD_{-1-i\lambda}(x_1)}{dx_1}\right]\Big|_{x_1=\xi_0-0} & + c_4\left[-\frac{x_1}{2}D_{i\lambda}(ix_1) + \frac{dD_{i\lambda}(ix_1)}{dx_1}\right]\Big|_{x_1=\xi_0+0} + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} e^{\frac{\xi_0^2}{4}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)} \end{matrix}\right|. \qquad (41)$$

Преобразовывая далее (40 и (41), находим

$$\Delta_1 = e^{-\frac{\lambda\pi}{2}} c_3 - D_{i\lambda}(i\xi_0)\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}, \qquad (42)$$

$$\Delta_2 = e^{-\frac{\lambda\pi}{2}} c_4 + D_{-1-i\lambda}(\xi_0)\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}. \qquad (43)$$

Откуда получаем

$$c_1 = c_3 - D_{i\lambda}(i\xi_0)\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}, \qquad (44)$$

$$c_2 = c_4 + D_{-1-i\lambda}(\xi_0)\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}. \qquad (45)$$

Используя условия (30) $\overline{G}\big|_{x_1=\beta_0} = 0$ и (31) $\overline{G}\big|_{x_1=0} = 0$ получаем систему на c_3 и c_4:

$$\begin{cases} \left[c_3 - D_{i\lambda}(i\xi_0)\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\right] D_{-1-i\lambda}(0) + \left[c_4 + D_{-1-i\lambda}(\xi_0)\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\right] D_{i\lambda}(0) = 0, \\ c_3 D_{-1-i\lambda}(\beta_0) + c_4 D_{i\lambda}(i\beta_0) = 0. \end{cases} \qquad (46)$$

Следовательно,

$$c_3 = D_{i\lambda}(i\beta_0)\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\frac{D_{i\lambda}(i\xi_0)D_{-1-i\lambda}(0)-D_{-1-i\lambda}(\xi_0)D_{i\lambda}(0)}{D_{i\lambda}(i\xi_0)D_{-1-i\lambda}(0)-D_{-1-i\lambda}(\xi_0)D_{i\lambda}(0)} \tag{47}$$

или

$$c_3 = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}D_{i\lambda}(i\beta_0)}{2\sqrt{a\pi}\left[D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-1-i\lambda}(0)-D_{-1-i\lambda}(\beta_0)D_{i\lambda}(0)\right]}\left[D_{-1-i\lambda}(0)D_{i\lambda}(i\xi_0)-D_{i\lambda}(0)D_{-1-i\lambda}(\xi_0)\right]. \tag{48}$$

Так как $c_4 = -c_3\frac{D_{-1-i\lambda}(\beta_0)}{D_{i\lambda}(i\beta_0)}$, то

$$c_4 = -\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}D_{-1-i\lambda}(i\beta_0)}{2\sqrt{a\pi}D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-1-i\lambda}(0)-D_{-1-i\lambda}(\beta_0)D_{i\lambda}(0)}\left[D_{-1-i\lambda}(0)D_{i\lambda}(i\xi_0)-D_{-1-i\lambda}(\xi_0)D_{i\lambda}(0)\right]. \tag{49}$$

Подставляя (48) и (49) в (44) и (45) находим c_1, c_2:

$$c_1 = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\frac{D_{i\lambda}(0)\left[D_{-1-i\lambda}(\beta_0)D_{i\lambda}(i\xi_0)-D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-1-i\lambda}(\xi_0)\right]}{D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-1-i\lambda}(0)-D_{-1-i\lambda}(\beta_0)D_{i\lambda}(0)}, \tag{50}$$

$$c_2 = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\frac{D_{-1-i\lambda}(0)\left[-D_{-1-i\lambda}(\beta_0)D_{i\lambda}(i\xi_0)+D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-1-i\lambda}(\xi_0)\right]}{D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-1-i\lambda}(0)-D_{-1-i\lambda}(\beta_0)D_{i\lambda}(0)}. \tag{51}$$

Тогда решение задачи (29)–(33) примет вид

$$\bar{G} = \begin{cases} \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{x_1^2}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\frac{D_{-1-i\lambda}(\beta_0)D_{i\lambda}(i\xi_0)-D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-1-i\lambda}(\xi_0)}{D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-1-i\lambda}(0)-D_{-1-i\lambda}(\beta_0)D_{i\lambda}(0)}[D_{-1-i\lambda}(x_1)D_{i\lambda}(i\xi_0)- \\ -D_{i\lambda}(ix_1)D_{-1-i\lambda}(0)], \quad 0 < x_1 < \xi_0, \\ \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}+\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{x_1^2}{4}}\tau^{-\frac{1}{2}(i\lambda+1)}}{2\sqrt{a\pi}}\frac{D_{-1-i\lambda}(0)D_{i\lambda}(i\xi_0)-D_{i\lambda}(0)D_{-1-i\lambda}(\xi_0)}{D_{i\lambda}(i\beta_0)D_{-1-i\lambda}(0)-D_{-1-i\lambda}(\beta_0)D_{i\lambda}(0)}[D_{-1-i\lambda}(x_1)D_{i\lambda}(i\beta_0)- \\ -D_{i\lambda}(ix_1)D_{-1-i\lambda}(\beta_0)], \quad \xi_0 < x_1 < \beta_0. \end{cases} \tag{52}$$

Используя замену (21) и применяя обратное преобразование Фурье

$$G(x_1,t,x',\tau) = G(x_1,\theta,x',\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{G}(x_1,i\lambda,x',\tau)e^{i\lambda\theta}d\lambda =$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\bar{G}(x_1,i\lambda,x',\tau)e^{i\lambda\theta}d(i\lambda) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int\bar{G}(x_1,p,x',\tau)e^{p\theta}dp =$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\bar{G}(x_1,p,x',\tau)e^{\frac{p}{2}\ln t}dp = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\bar{G}(x_1,p,x',\tau)e^{p/2}dp$$

к решению (52), получаем

$$G(x_1,t,\xi_0,\tau)=\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}}{2\pi i\sqrt{2a\tau}}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{D_p(i\xi_0)\,D_{-p-1}(\beta_0)-D_p(i\beta_0)\,D_{-p-1}(\xi_0)}{D_p(i\beta_0)\,D_{-p-1}(0)-D_p(0)\,D_{-p-1}(\beta_0)}\times$$
$$\times\left[D_p(0)\,D_{-p-1}(x_1)-D_{-p-1}(0)\,D_p(ix_1)\right]e^{-\frac{\pi}{2}pi}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}dp. \tag{53}$$

В переменных x, x', t, τ функция Грина (53) будет записана в виде

$$G(x,t,x',\tau)=\frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\frac{x'^2}{\tau}-\frac{x^2}{t}\right]}}{2\pi i\sqrt{2a\pi\tau}}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{D_p\left(\frac{ix'}{\sqrt{2a\tau}}\right)D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)-D_{-p-1}\left(\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}{D_{-p-1}\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}(0)-D_p(0)\,D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}\times$$
$$\times\left[D_p(0)\,D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)-D_{-p-1}(0)\,D_p\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right]e^{-\frac{\pi}{2}pi}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}dp. \tag{54}$$

Целью дальнейших преобразований будет получение аналитического вида функции Грина задачи (29)—(33) в виде ряда. Для этого, используя согласно [8]

$$D_p(z)=\frac{\Gamma(p+1)}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{\frac{\pi}{2}pi}D_{-p-1}(iz)-e^{-\frac{\pi}{2}pi}D_{-p-1}(-iz)\right], \tag{55}$$

получаем

$$G(x_1,t,\xi_0,\tau)=\frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}}{4\pi i\sqrt{a\pi\tau}}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma(p+1)\frac{D_{-p-1}(-\xi_0)\,D_{-p-1}(\beta_0)-D_{-p-1}(\xi_0)\,D_{-p-1}(-\beta_0)}{D_{-p-1}(-\beta_0)-D_{-p-1}(\beta_0)}\times$$
$$\times\left[D_{-p-1}(x_1)-D_{-p-1}(-x_1)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}dp. \tag{56}$$

В переменных x, x', t, τ (56) примет вид

$$G(x,t,x',\tau)=\frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\frac{x'^2}{\tau}-\frac{x^2}{t}\right]}}{4\pi i\sqrt{a\pi\tau}}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma(p+1)\times$$
$$\times\frac{D_{-p-1}\left(-\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)-D_{-p-1}\left(\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)D_{-p-1}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}{D_{-p-1}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)-D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}\times \tag{57}$$
$$\times\left[D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)-D_{-p-1}\left(-\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}dp.$$

Пусть

$$F(p)=\Gamma(p+1)\frac{D_{-p-1}(-\xi_0)\,D_{-p-1}(\beta_0)-D_{-p-1}(\xi_0)\,D_{-p-1}(-\beta_0)}{D_{-p-1}(-\beta_0)-D_{-p-1}(\beta_0)}\times$$
$$\times\left[D_{-p-1}(x_1)-D_{-p-1}(-x_1)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Так как функция $D_p(z)$ является целой функцией переменного z и параметра p, то подынтегральная функция $F(p)$ является аналитической во всей комплексной плоскости p, за исключением простых полюсов в точках $p = -n(n = 1, 2, 3, \ldots)$ и в точках $p = p_n$, где p_n – нецелые корни уравнения

$$D_{-p-1}(-\beta_0) - D_{-p-1}(\beta_0) = 0. \tag{58}$$

Решение уравнений типа (58) представляет собой самостоятельную задачу. Насколько известно автору работы [5] и [6] являются первыми, рассматривающими этот вопрос. Далее по теореме о вычетах

$$G(x_1, t, \xi_0, \tau) = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4} - \frac{x_1^2}{4}}}{4\pi i\sqrt{a\pi\tau}}\left(2\pi i\left[\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname*{res}_{p=-n} F(p) + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname*{res}_{p=p_n} F(p)\right]\right). \tag{59}$$

Используя свойства функции параболического цилиндра при целых p, а также пользуясь соотношениями для функции Эрмита [8]

$$D_n(z) = e^{-\frac{z^2}{4}} 2^{-\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) H_n(y)}{2^n n!} t^n = \left(1 - t^2\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{2xyt - \left(x^2 + y^2\right)t^2}{1 - t^2}\right), \quad |t| < 1,$$

$$H_n(-z) = (-1)^n H_n(z); \quad D_n(-z) = (-1)^n D_n(z);$$

$$\lim_{p \to -n} (p + n)\Gamma(p + 1) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n - 1)!}, \quad n = 1, 2 \ldots,$$

получаем, что первая сумма в (59) равна нулю. Это означает, что функция Грина имеет следующий вид

$$G(x_1, t, x', \tau) = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4} - \frac{x_1^2}{4}}}{2\sqrt{a\pi\tau}} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname*{res}_{p=p_n} F(p) = \frac{e^{\frac{\xi_0^2}{4} - \frac{x_1^2}{4}}}{2\sqrt{a\pi\tau}} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(p_n + 1) \times$$
$$\times \frac{D_{-p_n-1}(-\xi_0) D_{-p_n-1}(\beta_0) - D_{-p_n-1}(\xi_0) D_{-p_n-1}(-\beta_0)}{\frac{\partial}{\partial p}\left[D_{-p-1}(-\beta_0) - D_{-p-1}(\beta_0)\right]\Big|_{p=p_n}} \left[D_{-p_n-1}(x_1) - D_{-p_n-1}(-x_1)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p_n}{2}}, \tag{60}$$

где p_n – действительные отрицательные нецелые корни уравнения (58).

Переходя к переменным x, x', t, τ в (60), получаем функцию Грина в виде ряда

$$G(x, t, x', \tau) = \frac{e^{\frac{1}{8a}\left(\frac{x'^2}{\tau} - \frac{x^2}{t}\right)}}{2\sqrt{a\pi\tau}} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(p_n + 1) \times$$
$$\times \frac{D_{-p_n-1}\left(-\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right) D_{-p_n-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_{-p_n-1}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p_n-1}\left(\frac{x'}{\sqrt{2a\tau}}\right)}{\frac{\partial}{\partial p}\left[D_{-p-1}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) - D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)\right]\Big|_{p=p_n}} \times \tag{61}$$
$$\times \left[D_{-p_n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{-p_n-1}\left(-\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p_n}{2}},$$

где p_n – действительные отрицательные нецелые корни уравнения (58).

Подведем итог этой части работы. Формулы (54) и (57) – явный вид функции Грина первой краевой задачи в области $\Omega_t = \{(x,t); 0 \le x \le \beta\sqrt{t}, t \ge 0\}$ *в интегральной форме*, а формула (61) – *в виде ряда*.

Приложение. Согласованность результатов. Вопрос согласованности результатов, полученных разными методами, играет очень важную роль. В связи с этим в качестве приложения результатов этой работы найдем с помощью описанного выше метода температурную функцию, полученную в известной работе Э.М. Карташова и Б.Я. Любова [7] с помощью метода рядов. Метод рядов является очень мощным инструментом и среди прочего позволяет решить краевую задачу (1)–(4) при условии, что функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ допускают разложение в виде рядов

$$\varphi_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\frac{k}{n}} t^{\frac{k}{n}}, \quad t > 0, \tag{62}$$

$$\varphi_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_{\frac{k}{m}} t^{\frac{k}{m}}, \quad t > 0. \tag{63}$$

В этом случае, согласно [7], решение в области

$$\Omega_t = \{(x,t); 0 \le x \le \gamma\sqrt{2at}, t \ge 0\} \tag{64}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} T(x,t) = e^{-\frac{x^2}{8at}} \Bigg[&\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_{\frac{k}{n}} \frac{D_{-2\frac{k}{n}-1}(\gamma) D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{2\frac{k}{n}}(i\gamma) D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{D_{-2\frac{k}{n}-1}(\gamma) D_{2\frac{k}{n}}(0) - D_{2\frac{k}{n}}(i\gamma) D_{-2\frac{k}{n}-1}(0)} t^{\frac{k}{n}} + \\ &+ e^{\frac{\gamma^2}{4}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_{\frac{k}{m}} \frac{D_{2\frac{k}{m}}(0) D_{-2\frac{k}{m}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{-2\frac{k}{m}-1}(0) D_{2\frac{k}{m}}\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{D_{-2\frac{k}{m}-1}(\gamma) D_{2\frac{k}{m}}(0) - D_{2\frac{k}{m}}(i\gamma) D_{-2\frac{k}{m}-1}(0)} t^{\frac{k}{m}} \Bigg]. \end{aligned} \tag{65}$$

Используя интегральное представление температурного поля (16), а также явный вид полученной функции Грина (54) покажем, что решение (65) может быть получено и с помощью приведенного выше подхода. Согласно ему температурная функция при граничных условиях (62) и (63) будет представлена в виде

$$T(x,t) = a\int_0^t \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \left[b_{\frac{k}{n}} \tau^{\frac{k}{n}} \frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=0} - c_{\frac{k}{m}} \tau^{\frac{k}{m}} \frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} \right] d\tau. \tag{66}$$

Очевидно, что для ее получения потребуется найти частные производные $\frac{\partial G}{\partial x'}$ на границах области. Для удобства найдем эти частные производные в области

$\Omega_t = \left\{(x,t); 0 \le x \le \beta\sqrt{t}, t \ge 0\right\}$, а затем запишем полученный результат в области (65). Продифференцировав частным образом (54) и воспользовавшись (55), получаем

$$\left.\frac{\partial G(x,t,x',\tau)}{\partial x'}\right|_{x'=0} = \frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{2\pi i\sqrt{2a\tau}}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\left[D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_p\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)-D_p\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)\right]}{D_p(0)\,D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)-D_p\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}(0)}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}dp. \quad (67)$$

$$\left.\frac{\partial G(x,t,x',\tau)}{\partial x'}\right|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} = \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2-\frac{x^2}{t}\right]}}{2\pi i\sqrt{2a\tau}}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\left[D_p(0)\,D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)-D_{-p-1}(0)\,D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)\right]}{D_p\left(\frac{i\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}(0)-D_p(0)\,D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{p}{2}}dp. \quad (68)$$

Далее, применяя теорему о вычетах, найдем интеграл

$$\int\limits_0^t b_{\frac{k}{n}}\tau^{\frac{k}{n}}\left.\frac{\partial G}{\partial x'}\right|_{x'=0}d\tau = \int\limits_0^t\frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{4\pi i a\tau}b_{\frac{k}{n}}\tau^{\frac{k}{n}}\left[\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_p\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)-D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{D_p(0)\,D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)-D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}(0)}\frac{t^{p/2}}{\tau^{p/2}}dp\right]d\tau =$$

$$= \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{4\pi i a}\frac{b_{\frac{k}{n}}\left[D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_p\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)-D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right]t^{p/2}}{D_p(0)\,D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)-D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}(0)}\int\limits_0^t\tau^{\frac{k}{n}-\frac{p}{2}-1}d\tau\right]dp =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{4\pi i a}b_{\frac{k}{n}}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\left[D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_p\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)-D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right]t^{\frac{p}{2}+\frac{k}{n}-\frac{p}{2}}}{\left[D_p(0)\,D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)-D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}(0)\right]\left(\frac{k}{n}-\frac{p}{2}\right)}dp =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{2\pi i a}b_{\frac{k}{n}}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\left[D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_p\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)-D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)\right]t^{\frac{k}{n}}}{\left[D_p(0)\,D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)-D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}(0)\right]\left(2\frac{k}{n}-p\right)}dp =$$

$$= b_{\frac{k}{n}}\frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{a}\frac{D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)-D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{D_{2\frac{k}{n}}(0)\,D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)-D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-2\frac{k}{n}-1}(0)}t^{\frac{k}{n}}.$$

Т.е.

$$\int\limits_0^t b_{\frac{k}{n}}\tau^{\frac{k}{n}}\left.\frac{\partial G}{\partial x'}\right|_{x'=0}d\tau = b_{\frac{k}{n}}\frac{e^{-\frac{x^2}{8at}}}{a}\frac{D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)-D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right)}{D_{2\frac{k}{n}}(0)\,D_{-2\frac{k}{n}-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)-D_{2\frac{k}{n}}\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-2\frac{k}{n}-1}(0)}t^{\frac{k}{n}}. \quad (69)$$

Используя аналогичные преобразования, найдем интеграл

$$\int_0^t c_{\frac{k}{m}} \tau^{\frac{k}{m}} \frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} d\tau = \int_0^t \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2 - \frac{x^2}{t}\right]}}{4\pi i a\tau} c_{\frac{k}{m}} \tau^{\frac{k}{m}} \left[\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{p-1}(0)D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)}{D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)D_{-p-1}(0) - D_p(0)D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} \frac{t^{p/2}}{\tau^{p/2}} dp \right] d\tau =$$

$$= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2 - \frac{x^2}{t}\right]}}{4\pi i a} \frac{c_{\frac{k}{m}} \left[D_p(0)\, D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{p-1}(0)\, D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)\right] t^{p/2}}{D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}(0) - D_p(0)\, D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} \int_0^t \tau^{\frac{k}{m} - \frac{p}{2} - 1} d\tau \right] dp =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2 - \frac{x^2}{t}\right]}}{4\pi i a} 2c_{\frac{k}{m}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left[D_p(0)\, D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{p-1}(0)\, D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)\right] t^{p/2} t^{\frac{k}{m} - \frac{p}{2}}}{\left[D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}(0) - D_p(0)\, D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)\right]\left(\frac{k}{m} - \frac{p}{2}\right)} d\frac{p}{2} =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2 - \frac{x^2}{t}\right]}}{4\pi i a} 2c_{\frac{k}{m}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left[D_p(0)\, D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{p-1}(0)\, D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)\right] t^{\frac{k}{m}}}{\left[D_p\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-p-1}(0) - D_p(0)\, D_{-p-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)\right]\left(2\frac{k}{m} - p\right)} dp =$$

$$= c_{\frac{k}{m}} \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2 - \frac{x^2}{t}\right]}}{a} \frac{\left[D_p(0)\, D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{p-1}(0)\, D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)\right]}{D_{2\frac{k}{m}}\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-2\frac{k}{m}-1}(0) - D_{2\frac{k}{m}}(0)\, D_{-2\frac{k}{m}-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} t^{\frac{k}{m}}.$$

Т.е.

$$\int_0^t c_{\frac{k}{m}} \tau^{\frac{k}{m}} \frac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'=\beta\sqrt{\tau}} d\tau = c_{\frac{k}{m}} \frac{e^{\frac{1}{8a}\left[\beta^2 - \frac{x^2}{t}\right]}}{a} \frac{\left[D_p(0)\, D_{-p-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2at}}\right) - D_{p-1}(0)\, D_p\left(\frac{ix}{\sqrt{2at}}\right)\right]}{D_{2\frac{k}{m}}\left(i\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right) D_{-2\frac{k}{m}-1}(0) - D_{2\frac{k}{m}}(0)\, D_{-2\frac{k}{m}-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2a}}\right)} t^{\frac{k}{m}}. \quad (70)$$

Подставляя далее (69) и (70) в (66), а также учитывая, что

$$\beta = \gamma\sqrt{2a},$$

получаем (65).

ВЫВОДЫ

Получен явный вид функции Грина в интегральной форме и в виде ряда первой краевой задачи нестационарной теплопроводности в ограниченной области, граница которой движется по закону $\beta\sqrt{t}$. Показана согласованность результатов, полученных с помощью метода функции Грина, и другими авторами с использованием других подходов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М. Высш. школа. 2001. С. 540.
2. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: URSS. 2012. С. 655.
3. *Карташов Э.М., Кротов Г.С.* Функции Грина в задачах нестационарной теплопроводности в области с границей, движущейся по корневой зависимости / Известия РАН. Энергетика. 2006. № 4. С. 134–149.

4. *Антимиров М.Я.* Функция Грина одномерного уравнения параболического типа при движении границы по закону $\beta\sqrt{t}$ / Латвийский математический ежегодник. Рига. Зинатне. 1973. С. 70–97.
5. *Кротов Г.С.* Корни трансцендентного уравнения с функцией параболического цилиндра при фиксированном значении аргумента. Тепловые вопросы в технике. 2015. Т. 7. № 7. С. 318–324.
6. *Кротов Г.С.* Корни функции параболического цилиндра при фиксированном значении аргумента / Ученые Записки МИТХТ. Москва. 2005. Выпуск 14. С. 41–48.
7. *Карташов Э.М., Любов Б.Я.* Метод решения краевых задач теплопроводности для области с границей, движущейся по параболическому закону / Журн. технической физики. V XVI. 1971. № 1. С. 3–16.
8. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз. 1962. 1100 с.
9. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука. 1966. Т. II. 330 с.

Analytic Solution and Green's Function of the Dirichlet Problem of Non-stationary Heat Coduction in a Bounded Domain with a Boundary Moving Along Root Dependence

G. S. Krotov*

Academy of Labour and Social Relations, Moscow, Russia
**e-mail: yamaths555@gmail.com*

The method of Green's functions is developed for the equation of non-stationary heat conduction in a bounded domain with a boundary moving according to the $\beta\sqrt{t}$ law. The method leads to exact analytical solutions of boundary value problems in conditions of temperature heating. An explicit form of the Green's function is obtained for the first boundary value problem in the region described above. The equivalence of the results obtained using the Green's function method and other methods is shown.

Keywords: Green's function, the Dirichlet problem, non-stationary heat conduction, transient heat conduction, heat equation, moving boundary, integral transform