
УДК 550.34; 536.248

МОДЕЛЬ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ИСПАРЕНИЯ

© 2020 г. Ю. Б. Зудин^{1, *}, Д. С. Уртенев¹, В. С. Устинов¹

¹Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия
*e-mail: yzudin@gmail.com

Поступила в редакцию 10.08.2020 г.

После доработки 17.08.2020 г.

Принята к публикации 20.08.2020 г.

Рассмотрена проблема определения граничных условий для уравнений Навье-Стокса при интенсивном испарении с поверхности конденсированной фазы. Предложена модель ударной волны испарения, основанная на суперпозиции линейной кинетической задачи и газодинамической задачи об ударной волне разрежения. Проведены параметрические расчеты экстраполированных граничных условий для ряда вариантов интенсивного испарения: одноатомный и многоатомный газ, влияние коэффициента конденсации, максимальный массовый поток. Показано, что решение задачи консервативно по отношению к способу аппроксимации функции распределения. Получено, что для ударной волны испарения выполняется принцип неубывания энтропии. Проведено решение обратной задачи интенсивного испарения.

Ключевые слова: граничные условия, уравнения Навье-Стокса, ударная волна испарения, суперпозиция, аппроксимация функции распределения, принцип неубывания энтропии, обратная задача

DOI: 10.31857/S0002331020060072

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании фазовых переходов (испарение, конденсация) в большинстве случаев используется квазиравновесная схема, основанная на гипотезе о термодинамическом равновесии системы [1]. Реальным процессам испарения и конденсации всегда присуща термодинамическая неравновесность, нарастающая с ростом их интенсивности. Неравновесные явления, возникающие на границе раздела фаз в процессах фазовых переходов, изучаются в рамках молекулярно-кинетической теории испарения и конденсации. Если фазовый переход является малоинтенсивным по сравнению с молекулярным перемешиванием, то кинетический анализ может проводиться на основе линейной кинетической теории. Если скорость истечения газа сравнима со звуковой, то говорят об “интенсивном испарении”, актуальном для ряда приложений. Сюда относятся: моделирование обтекания космических объектов при их входе в земную атмосферу [2]; организация лазерного облучения материалов [3]; расчет истечения теплоносителя в вакуум при разгерметизации защитной оболочки атомного реактора космического аппарата [4].

Процесс интенсивного испарения представляет интерес также и для фундаментальных проблем. Согласно двухжидкостной теории [5], перенос тепла в сверхтекучем гелии осуществляется за счет противотока нормальной и сверхтекучей компонент. Этот механизм, имеющий квантово-механическую природу, приводит к исчезновению термического сопротивления в объеме жидкости. Транспорт тепла в сверхтекучем гелии

осуществляется исключительно за счет испарения на межфазной границе. Атмосфера кометы образуется путем сублимации ее ледяного ядра под воздействием солнечного излучения [6]. В зависимости от расстояния до Солнца расчетная скорость испарения изменяется в широких пределах и может достигать огромных значений. Переменный во времени процесс испарения влияет на плотность атмосферы кометы и тем самым — на характер ее движения.

Для описания интенсивного испарения требуется решение газодинамической задачи об истечении вещества с поверхности конденсированной фазы (ПКФ). Закономерности сплошной среды теряют свою применимость в прилегающем к поверхности слое Кнудсена (СК), имеющем толщину порядка длины свободного пробега молекул. Поведение функции распределения (ФР) молекул по скоростям в неравновесном СК описывается кинетическим уравнением Больцмана. По мере удаления от ПКФ неравновесные эффекты монотонно сглаживаются и исчезают во внешней газовой области, где справедливы уравнения Навье-Стокса (“навьестоксовская область”).

При строгом (микроскопическом) подходе ФР определяется из решения интегро-дифференциального уравнения Больцмана с пятимерным оператором столкновений [7]. Зная ФР и используя ее в качестве весового множителя в кинетических интегралах (“сумматорных инвариантах”), можно найти интересующие нас газодинамические параметры — плотность, температуру, давление. Целью приближенного (макроскопического) описания является определение граничных условий для газодинамических уравнений в навьестоксовской области. Для этого производится экстраполяция распределений газодинамических параметров непосредственно на ПКФ, минуя СК (который при таком подходе считается бесконечно тонким). Взаимосвязь разномасштабных задач — микроскопической для уравнения Больцмана в СК и макроскопической для уравнений газодинамики в навьестоксовской области — составляют специфику и сложность кинетического анализа.

Попытки решения микроскопической задачи без привлечения уравнения Больцмана, как правило, приводят к ошибочным результатам. Показательна работа [8], в которой использовалась весьма сложная математическая процедура: преобразование уравнения Больцмана в интегро-дифференциальное уравнение Винера-Хопфа и его трансформация в матричную форму; факторизация матричного уравнения и исследование его свойств с помощью теоремы Гохберга-Крейна о самосопряженных матрицах [9]. Однако в дальнейшем автор [8] выступил с опровержением полученных им результатов по причине ошибки в математических выкладках.

Для построения распределений параметров в навьестоксовской области достаточно задать экстраполированные граничные условия на поверхности, не интересуясь деталями поведения ФР. Поэтому макроскопический подход фактически сводится к вычислению “кинетических скачков”, возникающих на ПКФ в результате экстраполяции. Необходимым условием является здесь валидация приближенных результатов с помощью имеющихся численных решений уравнения Больцмана (см., в частности, работы [10, 11]). Последние, однако, также представляют собой некоторые приближения. Точные решения уравнения Больцмана известны для отдельных случаев с пространственно-однородными распределениями параметров [12]. При численном исследовании задач даже с простой геометрией (например, задачи испарения в полупространство газа) используются различные приближенные методы: сведение уравнения Больцмана к системе моментных уравнений [13]; замена уравнения Больцмана на упрощенные уравнения (релаксационное уравнение Крука [14], модельное уравнение Кейза [15]).

Отметим, что отклонения от локального термодинамического равновесия проявляются исключительно в газовой среде. Неравновесные эффекты в конденсированной фазе могут наступать лишь при аномальных интенсивностях процессов переноса.

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОЛЕКУЛ ПО СКОРОСТЯМ

Рассмотрим одномерную задачу испарения с плоской поверхности в полупространство покоящегося пара – одноатомного идеального газа. Поле молекулярных скоростей в СК содержит три компонента: два – параллельные поверхности c_x , c_y и один – нормальный к поверхности c_z . Модуль вектора полной скорости равен: $c^2 = c_x^2 + c_y^2 + c_z^2$. Молекулярные потоки массы, импульса и энергии в СК складываются из потоков, эмитируемых ПКФ, и потоков, падающих на нее из навьестоксовской области. Процесс эмиссии молекул можно схематично представить следующим образом. Некоторая часть молекул жидкости, находящихся вблизи поверхности в состоянии хаотического теплового движения, временно приобретает кинетическую энергию, превышающую энергию связи молекулы. Вследствие этого “быстрые” молекулы отрываются от ПКФ и испускаются в газовую область.

При кинетическом анализе обычно полагается, что интенсивность эмиссии молекул однозначно определяется температурой поверхности T_w .¹ Отсюда следует, что спектр эмитируемых молекул описывается равновесным распределением Максвелла:

$$f_w^+ = \frac{n_w}{\pi^{3/2} v_w^3} \exp\left(-\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{v_w^2}\right). \quad (1)$$

Здесь $n = \rho/m$ – числовая плотность молекул; m – масса молекулы. Функция f_w^+ определена в интервалах молекулярных скоростей: $-\infty < c_x < \infty$, $-\infty < c_y < \infty$, $0 < c_z < \infty$.

Распределение вида (1) было получено Максвеллом (Maxwell) [16, 17] на основе представления о газе как об ансамбле идеально упругих шариков, хаотически движущихся и сталкивающихся друг с другом. “Шарики-молекулы” подразделяются на группы по скоростям, содержащие постоянное число молекул, которые меняют скорость после столкновений. Отсюда следует гауссовский равновесный спектр молекул (1), с помощью которого Максвеллом были рассчитаны число молекул в каждом диапазоне скоростей и их средняя скорость. Полная ФР эмитируемых молекул (“положительная половина ФР”) вычислялась в [16, 17] как произведение ФР для каждой из трех декартовых координат.

ФР молекул, летящих из навьестоксовской области к поверхности, описывается распределением Максвелла, смещенным по оси скоростей c_z на величину скорости испарения u_∞ :

$$f_\infty^- = \frac{n_\infty}{\pi^{3/2} v_\infty^3} \exp\left(-\frac{c_x^2 + c_y^2 + (c_z - u_\infty)^2}{v_\infty^2}\right). \quad (2)$$

В процессе своего движения в СК молекулы взаимодействуют между собой и со встречным потоком, поэтому поверхности достигает молекулярный поток с деформированной “отрицательной половиной” ФР: $f_w^- \neq f_\infty^-$. В результате суммарная ФР на поверхности будет состоять из положительной и отрицательной половин, сформированных в различных условиях:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq c_z < \infty : f_w = f_w^+ \\ -\infty < c_z \leq 0 : f_w = f_w^- \end{array} \right\}$$

¹ Отметим, что это физически правдоподобное предположение не имеет строгого обоснования.

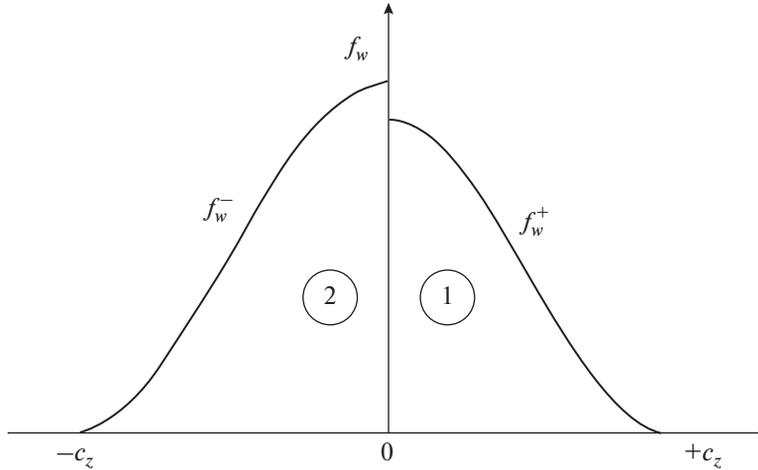


Рис. 1. Вид функции распределения молекул по скоростям на поверхности конденсированной фазы при испарении: 1 – положительная половина ФР, 2 – отрицательная половина ФР.

Отсюда следует, что спектр молекул на ПКФ имеет разрывный характер (рис. 1). При удалении от поверхности этот разрыв должен сглаживаться за счет межмолекулярных столкновений, причем основная перестройка будет приходиться на СК.

УРАВНЕНИЯ СОХРАНЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ПОТОКОВ

В одномерном случае вектор \mathbf{u}_∞ вырождается в скалярную скорость u_∞ в направлении потока испарения. В силу корпускулярной структуры газа в СК на межфазной поверхности сосуществуют противоположно направленные молекулярные потоки – эмитируемые J_i^+ и падающие J_i^- . В равновесном случае имеет место равенство: $J_i^+ = J_i^-$. При возникновении небаланса $J_i^+ > J_i^-$ в навьестоксовской области возникают потоки испарения: поток массы ($i = 1$) –

$$J_1^+ - J_1^- = \rho_\infty u_\infty, \tag{3}$$

поток импульса ($i = 2$) –

$$J_2^+ - J_2^- = \rho_\infty u_\infty^2 + p_\infty \tag{4}$$

и поток энергии ($i = 3$) –

$$J_3^+ - J_3^- = \frac{\rho_\infty u_\infty^3}{2} + \frac{5}{2} p_\infty u_\infty. \tag{5}$$

Здесь ρ_∞ – плотность; p_∞ – давление.

В эталонном случае ПКФ полагается абсолютно проницаемой: она адсорбирует все падающие из газовой области молекулы и эмитирует все молекулы, поступающие из глубины конденсированной фазы. В общем случае граница раздела фаз является частично проницаемой: она пропускает лишь часть $\beta < 1$ потоков, подходящих к ней с обеих сторон. Здесь “коэффициент конденсации” β зависит от состояния поверхности и физической природы конденсированной фазы и может изменяться в диапазоне $0 < \beta \leq 1$.

Рассмотрим влияние β на уравнение сохранения потока массы молекулярных потоков. Пусть ПКФ эмитирует в газовую фазу не весь поток J_1^+ , а только его часть βJ_1^+ . Пусть также только часть падающего на поверхность потока βJ_1^- захватывается ею, а оставшаяся часть $(1 - \beta)J_1^-$ — отражается в газовую область. В результате такой селекции отходящий от ПКФ суммарный поток будет складываться из двух составляющих — эмитируемой и отраженной:

$$J_{1\beta}^+ = \beta J_1^+ + (1 - \beta)J_1^-.$$

Заменяя в (3) J_1^+ на $J_{1\beta}^+$, получаем уравнение сохранения потока массы для случая частично проникаемой ПКФ:

$$\beta(J_1^+ - J_1^-) = \rho_\infty u_\infty.$$

Конкретные выражения для эмитируемого и падающего потоков массы определяются в результате интегрирования ФР по трехмерному полю молекулярных скоростей. Интервалы интегрирования по параллельным поверхности скоростям у положительной и отрицательной половин ФР совпадают: $-\infty < c_x < \infty$, $-\infty < c_y < \infty$. Различие проявляется при интегрировании по нормальной к поверхности скорости, где необходимо учитывать области определения функций: $0 < c_z < \infty$ для f_w^+ ; $-\infty < c_z < 0$ для f_w^- (рис. 1). В результате получаем следующие выражения: для эмитируемых потоков —

$$\left. \begin{aligned} J_1^+ &= m \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f_w^+ c_z dc_z \right) dc_y \right\} dc_x, \\ J_2^+ &= m \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f_w^+ c_z^2 dc_z \right) dc_y \right\} dc_x, \\ J_3^+ &= \frac{1}{2} m \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f_w^+ c_z c^2 dc_z \right) dc_y \right\} dc_x; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

для падающих потоков —

$$\left. \begin{aligned} J_1^- &= m \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^0 f_w^+ c_z dc_z \right) dc_y \right\} dc_x, \\ J_2^- &= m \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^0 f_w^+ c_z^2 dc_z \right) dc_y \right\} dc_x, \\ J_3^- &= \frac{1}{2} m \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^0 f_w^+ c_z c^2 dc_z \right) dc_y \right\} dc_x. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Подставляя f_w^+ из (1) в интегралы (6), для эмитируемых потоков J_i^+ , получаем:

$$J_1^+ = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \rho_w v_w, \quad J_2^+ = \frac{1}{4} \rho_w v_w^2, \quad J_3^+ = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \rho_w v_w^3.$$

Теперь для решения рассматриваемой задачи остается найти отрицательную половину ФР. В рамках микроскопического (точного) подхода f_w^- определяется из решения уравнения Больцмана. Как следствие, уравнения сохранения (3)–(5) *обращаются в тождества*. При макроскопическом (приближенном) анализе f_w^- задается в некото-

ром классе функций с неизвестными свободными параметрами. Для их определения необходимо решить уравнения сохранения (3)–(5).

МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИНТЕНСИВНОГО ИСПАРЕНИЯ

Ниже приводится краткое изложение основных положений имеющихся макроскопических моделей интенсивного испарения [18–26]. Во всей занятой газом области должно выполняться уравнение состояния идеального газа:

$$p = \frac{1}{2} \rho v^2, \quad (8)$$

где $v = \sqrt{2R_g T}$ – тепловая скорость молекул.

Предполагается, что отрицательная половина ФР в процессе движения к ПКФ деформируется вследствие межмолекулярных столкновений и на некоторой промежуточной “поверхности перемешивания” в СК принимает вид:

$$f_m^- = \frac{n_m}{\pi^{3/2} v_m^3} \exp\left(-\frac{c_x^2 + c_y^2 + (c_z - u_m)^2}{v_m^2}\right).$$

На поверхности перемешивания должны выполняться законы сохранения: потока массы –

$$\rho_w v_w - \rho_m v_m I_1 = 2\sqrt{\pi} \rho_\infty u_\infty, \quad (9)$$

потока импульса –

$$\rho_w v_w^2 - \rho_m v_m^2 I_2 = 4\rho_\infty u_\infty^2 + 2\rho_\infty v_\infty^2 \quad (10)$$

и потока энергии –

$$\rho_w v_w^3 - \rho_m v_m^3 I_3 = \sqrt{\pi} \rho_\infty u_\infty^3 + \frac{5}{2} \sqrt{\pi} \rho_\infty v_\infty^2 u_\infty. \quad (11)$$

В уравнения (9)–(11) входят безразмерные падающие потоки:

$$I_1 = \exp(-s_m^2) - \sqrt{\pi} s_m \operatorname{erfc}(s_m), \quad I_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} s_m \exp(-s_m^2) - (1 + 2s_m^2) \operatorname{erfc}(s_m),$$

$$I_3 = \left(1 + \frac{s_m^2}{2}\right) \exp(-s_m^2) - \left(\frac{5\sqrt{\pi}}{4} s_m + \frac{\sqrt{\pi}}{2} s_m^3\right) \operatorname{erfc}(s_m).$$

Здесь $\operatorname{erfc}(s_m)$ – дополнительный интеграл вероятности; нижние индексы обозначают: “w” – поверхность конденсированной фазы, “m” – поверхность перемешивания, “∞” – навьестоксовскую область.

Пусть параметры на поверхности перемешивания и в навьестоксовской области связаны между собой коэффициентами $\alpha_\rho, \alpha_v, \alpha_s$:

$$\rho_m = \alpha_\rho \rho_\infty, \quad v_m = \alpha_v v_\infty, \quad s_m = \alpha_s s_\infty.$$

Здесь $s_\infty = u_\infty / v_\infty$ – скоростной фактор, связанный с числом Маха – $M = \sqrt{\frac{2k}{k+2}} s_\infty$; k – число степеней свободы молекулы ($k = 3$ для одноатомного, $k = 5$ для двухатомного, $k = 6$ – для многоатомного газа).

При стандартной постановке задачи заданными являются плотность ρ_w и температура T_w . Это означает, что заданы тепловая скорость на ПКФ v_w и скоростной фактор s_∞ (или связанное с ним число Маха). Тогда система уравнений (9)–(11) будет содержать пять неизвестных: на поверхности перемешивания – плотность ρ_m , тепловую

скорость v_m и скорость испарения u_m ; в навьестоксовской области – плотность ρ_∞ и тепловую скорость v_∞ .

В однопараметрической модели [18] принимается допущение: $v_m = v_\infty$, $s_m = s_\infty$, что означает: $\alpha_v = \alpha_s = 1$. Тогда ФР будет содержать единственный свободный параметр α_ρ , а число неизвестных сократится до трех. Модель [18] представляет собой четырехмоментное приближение к решению уравнения Больцмана [7]. Будем использовать теперь лишь одно допущение: $v_m = v_\infty$, или $\alpha_v = 1$. Такая аппроксимация отрицательной половины ФР является более гибкой и оставляет в ней два свободных параметра – α_ρ , α_s . В этом случае система (9)–(11) будет содержать четыре неизвестных. Для ее замыкания примем физическое допущение о неразрывности потока испарения при его движении от поверхности перемешивания к границе СК:

$$\rho_m u_m = \rho_\infty u_\infty.$$

Это равенство мы будем называть “условием перемешивания”, а разработанную в работах [19–22] двухпараметрическую модель – “моделью перемешивания”. Последняя представляет собой пятимоментное приближение к решению уравнения Больцмана [7]. Модель перемешивания была использована при исследовании интенсивной конденсации (включая сверхзвуковые режимы) [23], а также для расчета параметров сопряженной задачи “теплопроводность в облучаемом теле – испарение с поверхности” [24].

В макроскопических моделях [18–22] в соответствии с кинетической теорией падающие потоки J_i^- рассчитываются с помощью интегралов (7). Имеются также менее строгие подходы. Так, в работе [25] вместо максвелловского спектра эмитируемых молекул (формула (1)) используется анизотропная ФР, содержащая две различные температуры. Автор [26] использовал поправочную функцию в подынтегральных выражениях (6), искажающую классическое распределение Максвелла (2).

ГИПОТЕЗА О КОНСЕРВАТИВНОСТИ

Макроскопические модели [18–26] позволяют доводить задачу интенсивного испарения до аналитических решений. Последние обладают следующими преимуществами по сравнению с численными исследованиями.

- Возможность замкнутого качественного описания задачи, выявления определяющих параметров и их классификации по степени важности.
- Общность, позволяющая проводить параметрические исследования путем варьирования начальных и краевых условий.
- Возможность тестирования численных решений полных уравнений на основе базовых аналитических решений упрощенных уравнений (полученных в результате оценки и выбрасывания отдельных членов).
- Возможность использования аналитических решений для проверки корректности постановки численных исследований.

Перечисленные достоинства аналитических решений иллюстрируются, в частности, в работах Карташова [27, 28], посвященных широкому спектру задач теплопроводности и термоупругости.

При численном исследовании интенсивного испарения [10, 11] возникают вычислительные трудности в окрестности звукового режима ($M = 1$). Так, в [10] последняя расчетная точка получена при $M \approx 0.86$, а в [11] – при $M \approx 0.96$. Кроме того, в рамках численных методов невозможно исследовать предельный переход при $M \rightarrow 0$. Например, в работах [10, 11] первые расчетные точки получены при $M \approx 0.1$, в то время,

как приближенный аналитический подход позволяет получать решение во всем диапазоне изменения чисел Маха: $0 \leq M \leq 1$.

Для последующего изложения важно отметить, что в моделях [18–26] использовались сильно отличающиеся друг от друга аппроксимации ФР, а также различное число уравнений при математическом описании. Несмотря на это, полученные в указанных работах результаты весьма хорошо согласуются как между собой, так и с результатами численных исследований [10, 11]. Это примечательное обстоятельство позволяет высказать следующую гипотезу: макроскопическое описание интенсивного испарения является консервативным по отношению к способу аппроксимации ФР. В настоящей статье предлагается новый вариант макроскопической модели, имеющий целями: а) разработать физически обоснованную аналитическую методику расчета граничных условий для уравнений Навье-Стокса при интенсивном испарении; б) обосновать гипотезу о консервативности. Основной идеей модели является суперпозиция результатов линейной кинетической теории испарения [13, 14] и газодинамической теории ударных волн [29].

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ИСПАРЕНИЯ

Линейная кинетическая теория. Линейная кинетическая теория испарения представлена в пионерских работах [13, 14] на основе решения линеаризованного уравнения Больцмана, а также релаксационного уравнения Крука. Эта теория позволила описать процесс испарения при $s \ll 1$ во всей области его протекания (от ПКФ до бесконечности) и обнаружить специфические эффекты термодинамической неравновесности пара. Последующие исследования [30–33], в общем и целом, подтвердили фундаментальные результаты [13, 14]. Приведем полученные в указанных работах выражения для линейных скачков: температуры –

$$\Delta T_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{4} T_w s_w$$

и давления –

$$\Delta p_1 = F p_w s_w,$$

где $F(\beta) = 2\sqrt{\pi} \frac{1 - 0.4\beta}{\beta}$ – функция коэффициента конденсации.

Используя понятие энтальпии идеального газа –

$$\Delta h = c_p \Delta T, -$$

перейдем от перепада температур к соответствующему перепаду энтальпий:

$$\Delta h_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{4} c_p T_w s_w,$$

где c_p – изобарная теплоемкость.

Ударная волна разрежения. Как известно [29], законы сохранения массы, импульса и энергии, положенные в основу уравнений динамики невязкого нетеплопроводного газа, применимы не только к непрерывным газодинамическим величинам, но также и к областям, в которых они испытывают разрыв. Так как масштаб длины в динамике идеального газа отсутствует, то в нем могут существовать сколь угодно тонкие переходные слои. В предельном случае мы имеем разрыв: конечные скачки газодинамических величин через бесконечно тонкий слой. Движущаяся внутри среды поверхность разрыва представляет собой ударную волну [29].

Будем считать, что ПКФ представляет собой фронт стоячей ударной волны разрежения. При переходе через разрыв давление, энтальпия и скорость газа будут испытывать скачки, определяемые соотношениями:

$$\Delta p_2 = \rho_\infty u_\infty^2 - \rho_w u_w^2, \quad \Delta h_2 = \frac{1}{2}(u_\infty^2 - u_w^2).$$

Согласно физической схеме эмиссии молекулы на жидкостной стороне ПКФ находятся в состоянии хаотического теплового движения с нулевой статистически осредненной скоростью. Следовательно, при переходе через разрыв молекулы должны ускоряться до скорости u_w , и к волновым скачкам Δp_2 , Δh_2 следует добавить скачки ускорения, следующие из уравнения Бернулли –

$$\Delta p_3 = \frac{1}{2} \rho_w u_w^2$$

и из определения энтальпии торможения идеального газа –

$$\Delta h_3 = \frac{1}{2} \frac{u_w^2}{c_p}.$$

Ударная волна испарения. Будем полагать, что суперпозиция линейных скачков, волновых скачков и скачков ускорения образует ударную волну испарения (УВИ). Тогда получаем суммарные скачки: энтальпии –

$$\Delta h \equiv h_w - h_\infty = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 \quad (12)$$

и давления –

$$\Delta p \equiv p_w - p_\infty = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3. \quad (13)$$

Раскрывая выражения для входящих в (12), (13) слагаемых, будем иметь:

$$\Delta h = \frac{\sqrt{\pi}}{4} c_p T_w s_w + \frac{1}{2} u_\infty^2, \quad (14)$$

$$\Delta p = F p_w s_w + \rho_\infty u_\infty^2 - \frac{1}{2} \rho_w u_w^2. \quad (15)$$

Переходя от перепада энтальпий к перепаду температур, из (12) получаем:

$$\Delta T = \frac{\sqrt{\pi}}{4} T_w s_w + \frac{1}{2} \frac{u_\infty^2}{c_p}. \quad (16)$$

Запишем условие непрерывности массового потока при переходе через фронт волны:

$$\rho_w u_w = \rho_\infty u_\infty.$$

Введем безразмерные значения параметров газа в навьестоксовской области – давления $\tilde{p} = p_\infty / p_w$, температуры $\tilde{T} = T_\infty / T_w$ и плотности $\tilde{\rho} = \rho_\infty / \rho_w$. Эти величины связаны между собой уравнением состояния идеального газа²:

$$\tilde{p} = \tilde{\rho} \tilde{T}. \quad (17)$$

Запишем выражение для изобарной теплоемкости идеального газа:

$$c_p = \frac{k+2}{2} R. \quad (18)$$

² Уравнение (17) представляет собой безразмерную форму записи уравнения (8).

Таблица 1. Звуковое испарение ($M = 1$). Сопоставление результатов настоящей работы с результатами работ [19, 22]

	Модель ударной волны испарения	Модель перемешивания [19, 22]
\tilde{T}_∞	0.672	0.657
\tilde{p}_∞	0.209	0.208
J	0.826	0.829

Выражая из (15), (16) давление p_∞ и температуру T_∞ газа в навьестоксовской области и переходя к безразмерной форме записи, получаем:

$$\tilde{p} + Fs_w + \left(\frac{2}{\tilde{p}} - 1\right)s_w^2 - 1 = 0, \quad (19)$$

$$\tilde{T} + \frac{\sqrt{\pi}}{4}s_w + \frac{2}{i + 2}\frac{s_w^2}{\tilde{p}^2} - 1 = 0. \quad (20)$$

Отсюда следует связь скоростных факторов на поверхности конденсированной фазы (ПКФ) и в навьестоксовской области:

$$s_w = s_\infty \tilde{p} \sqrt{\tilde{T}}. \quad (21)$$

Система уравнений (17)–(21) представляет собой замкнутое описание модели УВИ. По результатам решения определяется также безразмерная массовая скорость газа, истекающего из СК:

$$J \equiv 2\sqrt{\pi}s_w = \frac{j_\infty}{j_M},$$

где

$$j_M = \frac{\rho_w v_w}{2\sqrt{\pi}} -$$

испускаемый поверхностью молекулярный поток массы.

ВАЛИДАЦИЯ МОДЕЛИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ИСПАРЕНИЯ

Критерием эффективности любой приближенной модели должна служить степень согласования полученных на ее основе результатов с имеющимися в литературе результатами. Ниже рассматриваются результаты такого сопоставления по трем параметрам: числу Маха M , коэффициенту конденсации β и числу степеней свободы молекулы k .

Одноатомный газ при $\beta = 1$. На рисунке 2 приведено сопоставление результатов расчета по соотношениям (17)–(21) с результатами расчета по однопараметрической модели [18] для случая испарения одноатомного газа при $\beta = 1$. Видно, что кривые зависимости безразмерной массовой скорости J от числа Маха (рис. 2а) практически совпадают. Небольшое расхождение (менее 2%) вблизи точки $M = 1$ может быть обусловлено тем, что согласно [18] максимум зависимости $J(M)$ достигается при $M \approx 0.879$, в то время как в модели УВИ – в точке звукового испарения $M = 1$. Отклонение кривых для безразмерной температуры пара в навьестоксовской области (рис. 2б) не превышает 3%, а кривых для безразмерного давления – 2%. Отметим, что расчет по модели УВИ фактически воспроизводит расчет по модели перемешивания, выполненный в работах [19, 22]. Сопоставление этих результатов при звуковом испарении дано в табл. 1.

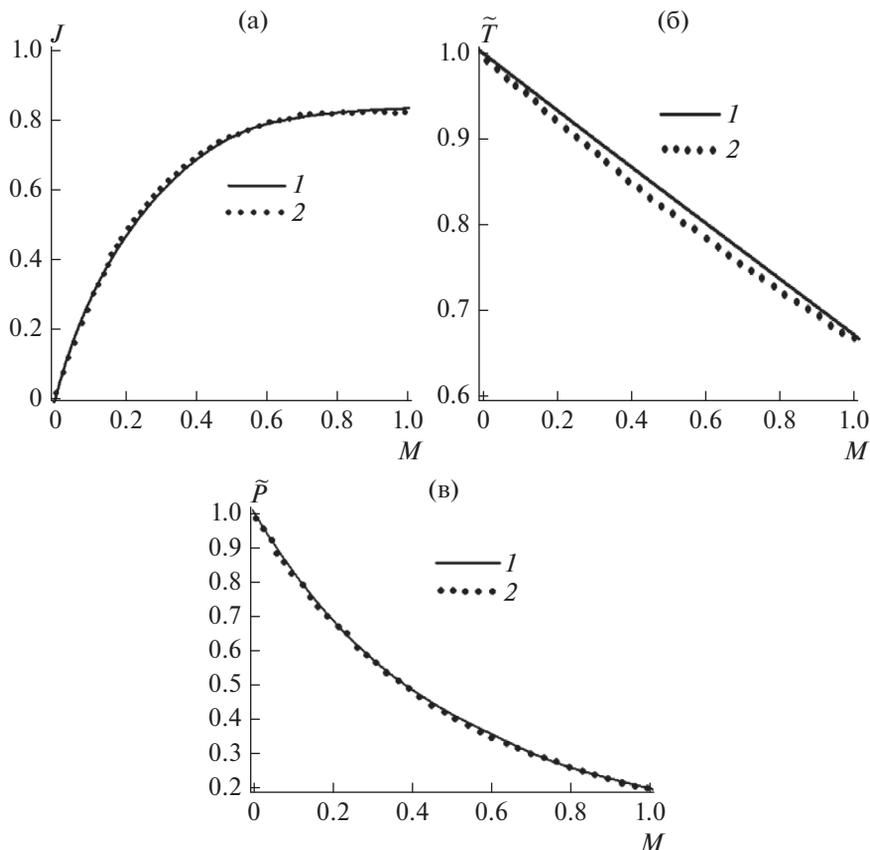


Рис. 2. Зависимость параметров пара в навьестоксовской области от числа Маха: 1 – настоящая работа, 2 – модель [18]. (а) – безразмерная массовая скорость эмитируемого молекулярного потока; (б) – безразмерная температура эмитируемого молекулярного потока; (в) – безразмерное давление испаряемого потока.

Одноатомный газ при $0 < \beta \leq 1$. На рисунке 3 приведены расчетные кривые зависимостей J, \tilde{T}, \tilde{p} от числа Маха для трех значений β . Влияние коэффициента конденсации учитывается функцией F , входящей в линейный скачок давления (15). Видно, что уменьшение β приводит к уменьшению массовой скорости (рис. 3а) и давления (рис. 3в) и к увеличению температуры в навьестоксовской области (рис. 3б).

На рисунке 4 приводятся зависимости J, \tilde{T}, \tilde{p} от коэффициента конденсации, рассчитанные для случая звукового испарения ($M = 1$) по соотношениям (17)–(21) и по однопараметрической модели [18]. Видно, что зависимости для $J_1 \equiv J|_{M=1}$, $\tilde{p}_1 \equiv \tilde{p}|_{M=1}$ практически совпадают. Однако зависимости $\tilde{T}_1 \equiv \tilde{T}|_{M=1}$ от β различаются даже качественно: в модели УВИ при уменьшении коэффициента конденсации происходит линейный рост температуры газа в навьестоксовской области; а согласно [18] имеем: $\tilde{T}_1 = \text{idem}$.

Многоатомный газ при $\beta = 1$. Решение задачи интенсивного испарения для многоатомного газа было впервые получено в работе [34] в рамках моментного метода с помощью сложной математической процедуры. Излагаемая в настоящей работе модель

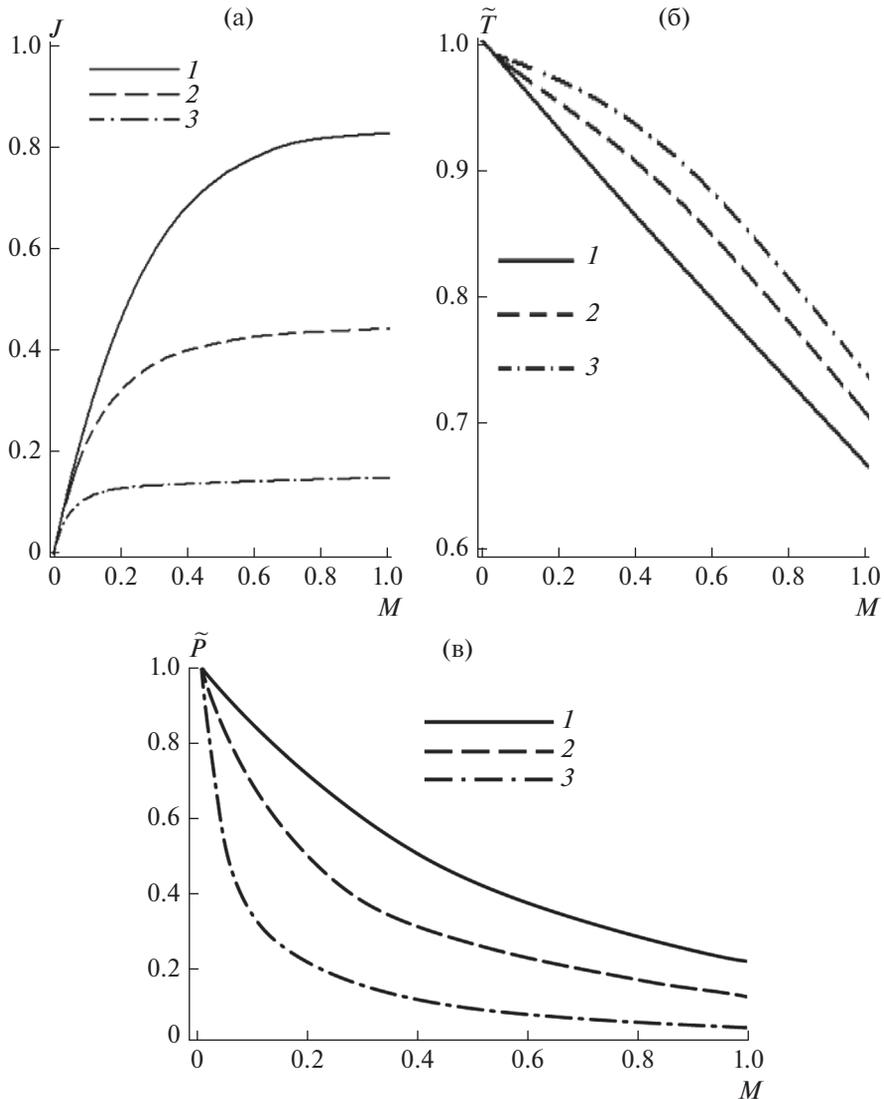


Рис. 3. Влияние коэффициента конденсации на зависимость параметров пара в навьестоксовской области от числа Маха; 1 – $\beta = 1$; 2 – $\beta = 0.5$; 3 – $\beta = 0.15$. Расчет по модели ударной волны испарения. (а) – безразмерная массовая скорость эмитируемого потока; (б) – безразмерная температура испаряемого потока; (в) – безразмерное давление испаряемого потока.

УВИ позволяет описать влияние числа степеней свободы молекулы простым и физически ясным способом – учетом изобарной теплоемкости идеального газа. На рисунке 5 приведены расчетные кривые зависимостей J, \tilde{T}, \tilde{p} от числа Маха для случая многоатомного газа. Видно, что по мере увеличения степеней свободы молекулы массовая скорость газа снижается (рис. 5а), а температура и давление в навьестоксовской области – возрастают (рис. 5б, 5в). В таблице 2 приведено сопоставление результатов расчета по модели УВИ с результатами работы [11] для вариантов $n = 3, 5, 6$ при $M = 0.96$.

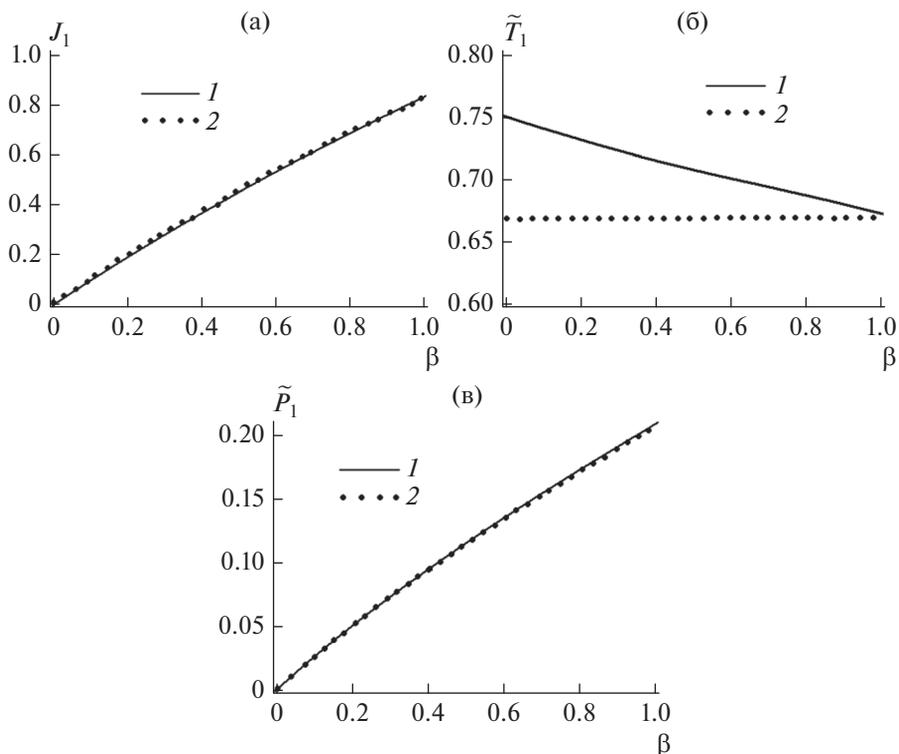


Рис. 4. Зависимость параметров пара в навьестоксовской области при звуковом испарении от коэффициента конденсации; 1 – настоящая работа, 2 – модель [18]. (а) – безразмерная массовая скорость эмитируемого потока; (б) – безразмерная температура испаряемого потока; (в) – безразмерное давление испаряемого потока.

Максимальный массовый поток. Создатели кинетической теории – Герц (Hertz), Лангмюр (Langmuir) и Кнудсен (Knudsen) – в своих ранних работах предполагали, что при испарении в вакуум отходящий от ПКФ поток пара в точности равен эмитируемому молекулярному потоку: $j_\infty = j_M$ (т.е. $J = 1$). Затем постановка задачи была уточнена с учетом торможения максвелловского потока находящимся вблизи поверхности “облаком молекул” (характерный термин ранних кинетических работ). Отсюда следует: $j_\infty < j_M$ (т.е. $J < 1$). Важное значение имеет вопрос о координате максимума зависимости $J(M)$. Так, расчетные зависимости $J(M)$, полученные в работе [34] для $k = 3, 5, 6$, имеют максимум в диапазоне $0.8 \leq M \leq 0.9$. Автор [35] показал, что этот результат является следствием неточности использованного в [34] моментного мето-

Таблица 2. Сопоставление результатов настоящей работы с результатами численного исследования [10] при $M = 0.96$

	Настоящая работа	Работа [10]	Настоящая работа	Работа [10]	Настоящая работа	Работа [10]
	$k = 3$		$k = 5$		$k = 6$	
\tilde{T}_∞	0.685	0.667	0.757	0.763	0.779	0.793
J	0.826	0.836	0.809	0.807	0.804	0.798

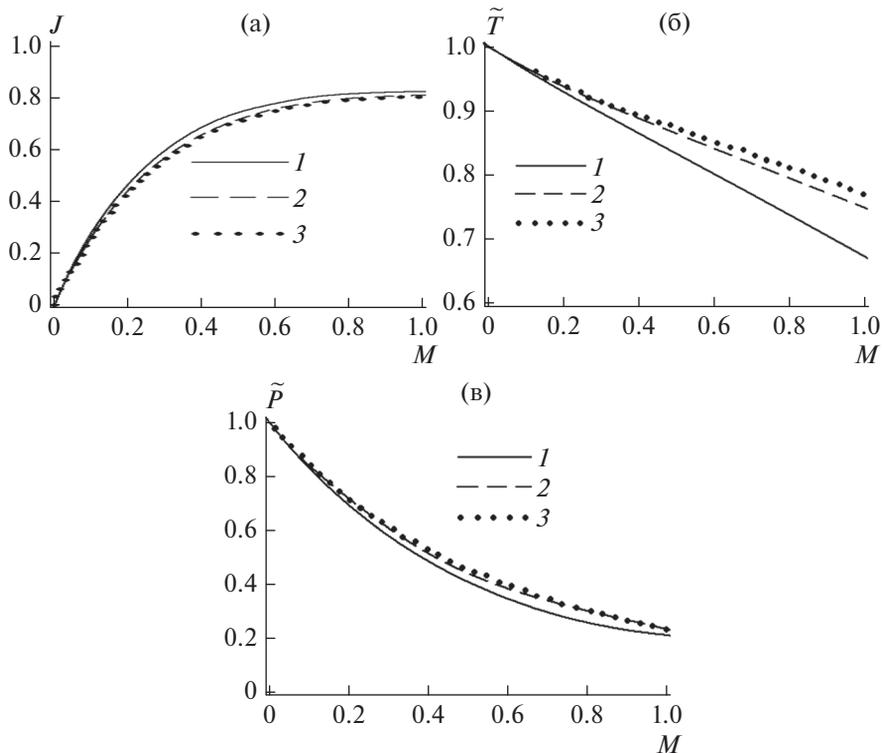


Рис. 5. Влияние числа степеней свободы молекулы на зависимость параметров пара в навесстоксовской области от числа Маха: 1 – $k = 3$; 2 – $k = 5$; 3 – $k = 6$. Расчет по модели ударной волны испарения. (а) – безразмерная массовая скорость эмитируемого потока; (б) – безразмерная температура испаряемого потока; (в) – безразмерное давление испаряемого потока.

да. Предложен метод корректировки околосвуковых параметров газа, основанный на уравнениях сохранения потоков массы, импульса и энергии в СК. Было показано, что максимум зависимости $J(M)$ наступает в “звуковой точке” $M = 1$. В таблице 3 приведено сопоставление результатов расчета по модели УВИ при $M = 1$ с результатами работы [35] для вариантов $k = 5, 6$. Отметим, что модель УВИ предсказывает максимум зависимостей $J(M)$ в точности при $M = 1$ для произвольного числа степеней свободы молекулы. На рисунке 6 приведена иллюстрация звукового максимума зависимости массовой скорости от числа Маха. Как представляется, это примечательное свойство модели вытекает из выводов теории ударных волн [29]:

- в сверхзвуковом потоке любое возмущение относится от поверхности
- если область сверхзвукового течения существовала в начальный момент времени, то она является неустойчивой и должна отрываться от поверхности.

Вследствие этого область $M > 1$ на рис. 6 является физически нереализуемой, и ее назначение на рисунке сводится к иллюстрации существования максимума зависимостей $J(M)$ при $M = 1$. Как видно, при $\beta = 1$ некоторая часть (около 17%) эмитируемых молекул возвращается обратно на поверхность и адсорбируется ею. При уменьшении коэффициента конденсации доля “возвращенных” молекул увеличивается.

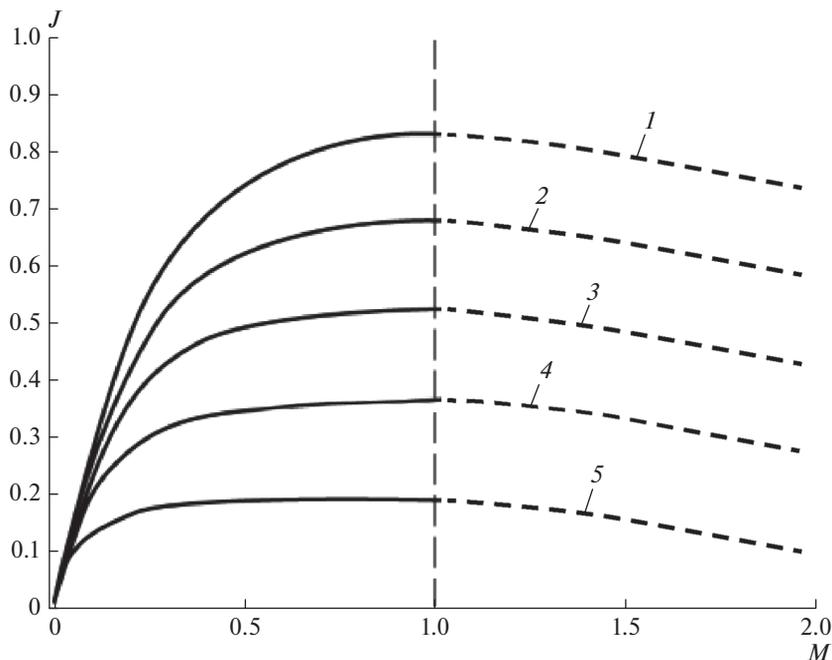


Рис. 6. Звуковой максимум зависимости массовой скорости от числа Маха. 1 – $\beta = 1$; 2 – $\beta = 0.8$; 3 – $\beta = 0.6$; 4 – $\beta = 0.4$; 5 – $\beta = 0.2$. Расчет по модели ударной волны испарения. Пунктиром показаны нереализуемые сверхзвуковые режимы.

ПРИРАЩЕНИЕ ЭНТРОПИИ ЧЕРЕЗ ФРОНТ ВОЛНЫ

Как известно, понятие энтропии характеризует направление протекания самопроизвольных термодинамических процессов. Существование и свойства энтропии как функции состояния термодинамической системы устанавливает второй закон термодинамики [36]. Его различные формулировки, имеющиеся в литературе, фактически представляют собой частные следствия общего принципа неубывания энтропии [37]: “В адиабатически изолированной термодинамической системе энтропия не может убывать. Она или сохраняется, если в системе происходят только обратимые процессы, или возрастает, если в системе протекает хотя бы один необратимый процесс”. Отсюда следует, что в состоянии равновесия энтропия изолированной термодинамической системы должна иметь максимально возможное значение.

Более узкое значение имеет принцип минимума производства энтропии, сформулированный Пригожиным [38] в виде следующей теоремы: “Если система не находится в стационарном состоянии, то оно будет изменяться до тех пор, пока скорость про-

Таблица 3. Звуковое испарение ($M = 1$). Сопоставление результатов настоящей работы с результатами [35]

	Настоящая работа	Работа [35]	Настоящая работа	Работа [35]
	$k = 5$		$k = 6$	
\tilde{T}_∞	0.749	0.758	0.771	0.791
\tilde{p}_∞	0.236	0.2366	0.244	0.245
J	0.809	0.805	0.804	0.796

изводства энтропии, или, иначе, диссипативная функция системы не примет наименьшего значения”. Теорема Пригожина описывает стремление системы к состоянию, максимально близкому к состоянию термодинамического равновесия в условиях тормозящего действия внешних сил. Из нее следует, что стационарному состоянию неравновесной системы соответствует минимальная скорость роста энтропии.

Найдем разность энтропий идеального газа при переходе через фронт УВИ:

$$\Delta S = c_p \ln \frac{T_\infty}{T_w} - R \ln \frac{p_\infty}{p_w}.$$

Переходя к безразмерному виду, получаем:

$$\Delta \tilde{S} = \frac{k+2}{2} \ln \tilde{T} - \ln \tilde{p}, \quad (22)$$

где $\Delta \tilde{S} = \Delta S/R$. Расчет по формуле (22) показывает, что всегда выполняется неравенство: $\Delta \tilde{S} \geq 0$. Следовательно, переход через фронт УВИ есть необратимый процесс, для которого выполняется второй закон термодинамики. Далее, производство энтропии в звуковой точке всегда имеет минимум: $M = 1, d\tilde{S}/dM = 0$ (рис. 7). Согласно теореме Пригожина, это означает, что здесь достигается равновесное состояние.

Как известно, классическая ударная волна разрежения является неустойчивой, так как при переходе через ее фронт всегда выполняется неравенство $\Delta \tilde{S} \leq 0$ [29]. Полученный выше вывод означает, что наложение кинетических скачков на ударную волну разрежения переводит ее в класс устойчивых разрывных течений. Доказанное свойство устойчивости УВИ является аргументом в пользу физической корректности развиваемой в настоящей работе модели. Итак, при звуковом испарении достигают своего максимального значения как эмитируемый поверхностью молекулярный поток (рис. 6), так и производство энтропии при переходе через фронт УВИ (рис. 7).

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ИНТЕНСИВНОГО ИСПАРЕНИЯ

Выше рассматривалась прямая задача интенсивного испарения, включающая следующие этапы.

- Задается ФР в виде смещенного распределения Максвелла (2) со свободными параметрами.

- Из кинетических интегралов (7) определяются падающие молекулярные потоки J_i^- .

- Величины J_i^- подставляются в систему уравнений сохранения (9)–(11), из решения которой рассчитываются свободные параметры (один – в однопараметрической модели, два – в модели перемешивания), а также интересующие нас экстраполированные граничные условия.

Рассмотрим теперь обратную задачу “восстановления” свободных параметров $\alpha_\rho, \alpha_v, \alpha_s$ по заданным ρ_∞, v_∞ (или p_∞, T_∞). Решение системы трансцендентных уравнений (9)–(11), содержащих дополнительные интегралы вероятности (функции ошибок), проводилось в рамках программного пакета компьютерной математики Maple с помощью функции “fsolve”. Как известно, основными признаками эффективности численных методов являются [39]: универсальность, простота организации вычислений и контроля за точностью, а также скорость сходимости. В нашем случае трудность заключается в том, что, – в отличие от случая нелинейных алгебраических уравнений, – не существует универсального алгоритма анализа сходимости и корректности решения трансцендентных уравнений.

Как видно из рис. 8, результаты решения для модели перемешивания и модели УВИ оказались весьма близки между собой. Согласно расчетам, коэффициенты α_ρ, α_v

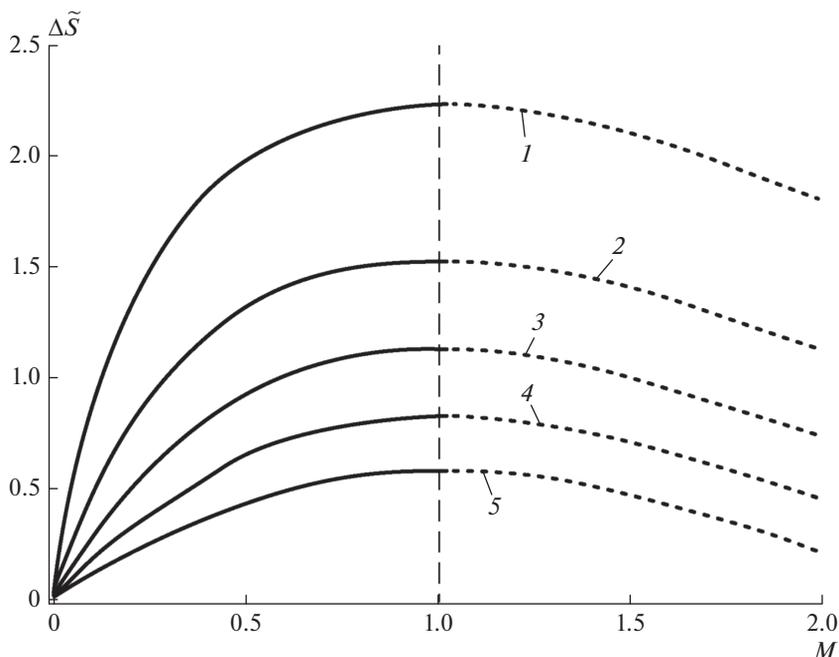


Рис. 7. Звуковой максимум зависимости прироста энтропии от числа Маха. 1 – $\beta = 1$; 2 – $\beta = 0.8$; 3 – $\beta = 0.6$; 4 – $\beta = 0.4$; 5 – $\beta = 0.2$. Расчет по модели ударной волны испарения. Пунктиром показаны нереализуемые сверхзвуковые режимы.

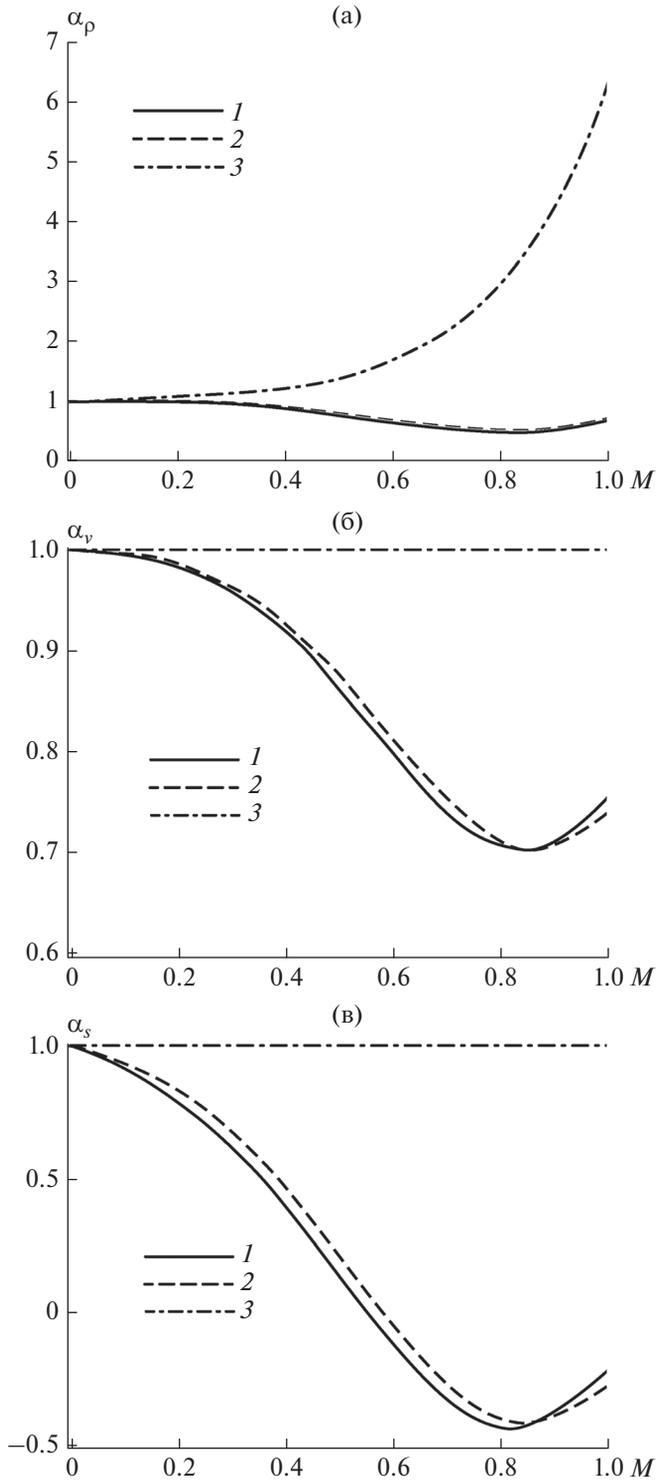
изменяются в пределах небольшого диапазона. Однако коэффициент α_s обнаруживает anomalous поведение: с ростом числа Маха он проходит через ноль и меняет свой знак. Это означает, что сдвиг ФР имеет вид, характерный для обратного направления парового потока (т.е. для задачи конденсации).

Рассмотрим теперь обратную задачу с исходными данными, заданными на основе численных решений [10, 11]. Как видно из рис. 9, коэффициенты тепловой скорости α_v и сдвига функции распределения α_s меняются сравнительно слабо. Однако коэффициент плотности α_p в диапазоне $0.6 \leq M \leq 1$ возрастает на три порядка. Ввиду отсутствия универсальных рекомендаций для случая трансцендентных уравнений, при анализе обратной задачи будем исходить из следующих *предположений*.

Предположение 1. Отрицательный сдвиг ФР (рис. 8а) является следствием овражного характера поверхности уровня искомых функций. Как известно, овражность (т.е. вытянутость линий уровня вдоль одного направления) приводит к резкому ухудшению сходимости градиентных методов поиска экстремума функций [40]. Овражные свойства системы уравнений существенно снижают эффективность традиционных

Рис. 8. Зависимость коэффициентов обратной задачи от числа Маха для различных макроскопических моделей: 1 – модель перемешивания, 2 – модель ударной волны испарения, 3 – однопараметрическая модель.³ (а) – коэффициент плотности; (б) – коэффициент тепловой скорости; (в) – коэффициент сдвига функции распределения.

³ В рамках однопараметрической модели имеем: $\alpha_v = \alpha_s = 1$.



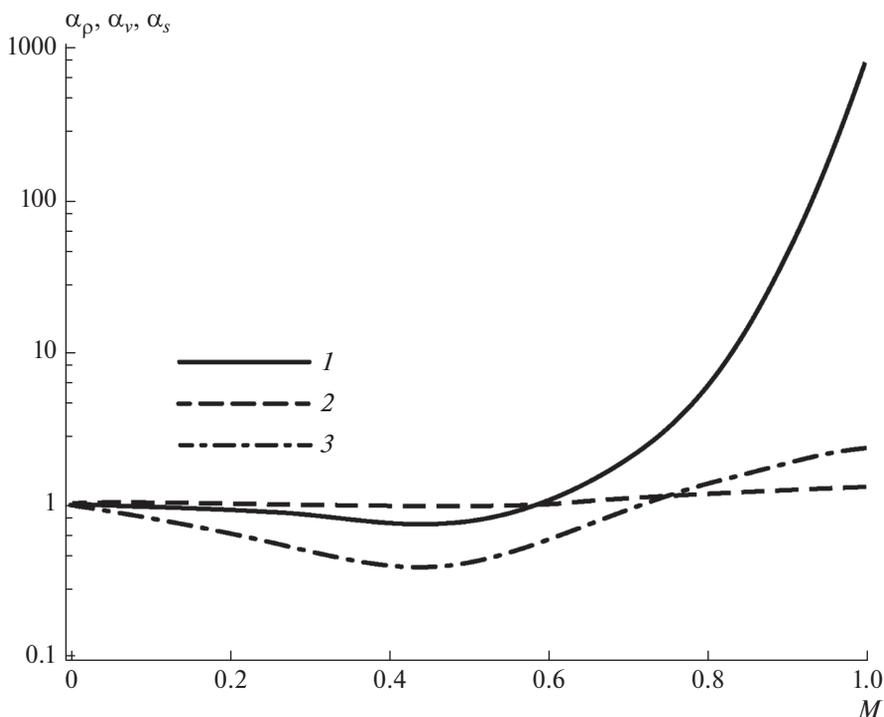


Рис. 9. Зависимость коэффициентов обратной задачи от числа Маха для численных результатов: 1 – коэффициент плотности; 2 – коэффициент тепловой скорости; 3 – коэффициент сдвига функции распределения.

итерационных алгоритмов численного решения [41]. Были проведены уточняющие расчеты методом Ньютона с модификацией Исаева-Сонина. Их результаты практически совпали с результатами, полученными при расчете на Maple с помощью функции `fsolve`. Вывод: предполагаемая овражность системы уравнений не влияет на решение обратной задачи.

Предположение 2. Причиной аномального поведения α_s (рис. 9) является неустойчивость решения обратной задачи. Напомним, что задача считается неустойчивой, если малые погрешности в задании исходной величины приводят к немалым погрешностям в результате расчетов [42]. Было выполнено тестирование численного метода для расчета коэффициента плотности α_ρ , включающее следующие этапы.

- Рассматривалось испарение при звуковом режиме $M = 1$.
- Устанавливался максимальный диапазон имеющихся решений прямой задачи для обоих аналитических методов – однопараметрического и двухпараметрического.
- Варьировалось значение какого-либо одного конкретного параметра функции (давления или температуры) при фиксированном значении второго.
- Из решения обратной задачи определялось значение α_ρ .

Было получено, что при фиксированной температуре и варьируемом давлении эта величина меняется почти на пять порядков. Вывод: решение обратной задачи является неустойчивым.

Прямая и обратная задачи. Выше было показано, что в рамках прямой задачи использование сильно различающихся между собой методов приводит к весьма близким результатам. Наоборот, восстановление свободных параметров ФР по заданным гра-

Таблица 4. Сопоставление характеристик различных подходов к решению задачи интенсивного испарения

	Уравнение Больцмана (его аналоги)	Функция распределения падающего потока	Уравнения сохранения молекулярных потоков	Результаты решения
Микроскопический подход ([10, 11])	Численное решение	Определяется из решения уравнения Больцмана	Обращаются в тождества	Детальное описание функции распределения
Макроскопический подход ([18–26])	Не используется	Задается в виде распределения Максвелла со свободными параметрами	Выполняется решение	Экстраполированные граничные условия
Кинетическая ударная волна (настоящая работа)	Не используется	Не используется	Заменяются на суперпозицию известных решений	Экстраполированные граничные условия

ничным условиям в рамках обратной задачи обнаруживает сильную неустойчивость. Таким образом, прямая и обратная задачи интенсивного испарения характеризуются противоположными свойствами. В этой связи можно указать на идейно близкий классический раздел высшей математики [43]. Известно, что сильное варьирование параметров подынтегральной функции приводит (за исключением специальных случаев) к слабому изменению первообразной функции. Наоборот, даже при небольшом изменении дифференцируемой функции ее производная может претерпевать заметное изменение. Проведенные оценки косвенно подтверждают высказанную выше гипотезу о консервативности прямой задачи интенсивного испарения. Отметим, что строгое обоснование указанной гипотезы требует проведения отдельного исследования обратной задачи для системы уравнений (9)–(11). При этом следует более детально изучить свойства овражности и устойчивости [40–42], а также использовать имеющиеся алгоритмы решения обратных задач [44].

Основным результатом настоящей работы является разработка модели ударной волны испарения, радикально упрощающей кинетический анализ задачи. Роль и место данной модели среди имеющихся подходов поясняет табл. 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена проблема определения экстраполированных граничных условий для уравнений Навье-Стокса при интенсивном испарении с поверхности конденсированной фазы. Проведен анализ макроскопических моделей, основанных на различных аппроксимациях функции распределения падающих на поверхность молекулярных потоков. Предложена модель ударной волны испарения, основанная на суперпозиции классических результатов линейной кинетической теории испарения и газодинамической теории об ударной волне разрежения. Проведены параметрические расчеты экстраполированных граничных условий для ряда вариантов интенсивного испарения: одноатомный и многоатомный газ; влияние коэффициента конденсации; максимальный массовый поток испарения. Показано выполнение принципа неубывания энтропии при переходе через фронт ударной волны испарения, что является доказательством ее устойчивости. Получено, что при звуковом испарении выполняется принцип минимума производства энтропии, следующий из теоремы Пригожина. Проведено решение обратной задачи интенсивного испарения, выявившее его сильную неустойчивость. Показано, что решение задачи интенсивного испарения является консервативным по отношению к способу аппроксимации функции распределения. Основ-

ным результатом настоящей работы является разработка модели ударной волны испарения, радикально упрощающей кинетический анализ рассматриваемой задачи.

Сокращения: ПКФ – поверхность конденсированной фазы; СК – слой Кнудсена; УВИ – ударная волна испарения; ФР – функция распределения.

Обозначения: c – молекулярная скорость; c_x, c_y, c_z – компоненты молекулярной скорости; c_p – изобарная теплоемкость; f – функция распределения молекул по скоростям; h – энтальпия; j – массовый поток; J – молекулярный поток; k – число степеней свободы молекулы; M – число Маха; m – масса молекулы; n – числовая плотность; p – давление; R – индивидуальная газовая постоянная; s – скоростной фактор; S – энтальпия; T – температура; u – скорость испарения; v – тепловая скорость молекул.

Греческие символы: α_p – коэффициент плотности; α_v – коэффициент тепловой скорости; α_s – коэффициент сдвига функции распределения; β – коэффициент конденсации; ρ – плотность.

Нижние индексы: w – поверхность конденсированной фазы; m – поверхность перемешивания; ∞ – бесконечность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лабунцов Д.А., Ягов В.В. Механика двухфазных систем. М.: Изд-во МЭИ. 2000. 374 с.
2. Суржиков С.Т. Радиационная газовая динамика спускаемых космических аппаратов больших размеров. ТВТ. 2010. Т. 48. № 6. С. 956–964.
3. Gusarov A.V., Smurov I. Target-vapour interaction and atomic collisions in pulsed laser ablation. J. Physics D: Applied Physics. 2001. V. 34. № 8. P. 1147–1156.
4. Ларина И.Н., Рыков В.А., Шахов Е.М. Испарение с поверхности и истечение пара через плоский канал в вакуум. Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 1. С. 150–158.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.
6. Захаров В.В., Крифо Ж.Ф., Лукьянов Г.А., Родионов А.В. О моделировании сложных неравновесных течений газа в широком диапазоне чисел Кнудсена на примере внутренней атмосферы комет. Математическое моделирование. 2002. Т. 14. № 8. С. 91–95.
7. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
8. Rao Y.P. Temperature and density jumps in the kinetic theory of gases and vapors. Physics of Fluids. 1971. V. 14. P. 1340–1346.
9. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука. 1965. 448 с.
10. Gusarov A.V., Smurov I. Gas-dynamic boundary conditions of evaporation and condensation: numerical analysis of the Knudsen layer. Physics of Fluids. 2002. V. 14. P. 4242–4255.
11. Frezzotti A.A. A numerical investigation of the steady evaporation of a polyatomic gas. European J. Mechanics – B/Fluids. 2007. V. 26. P. 93–104.
12. Бобылев А.В. Точные и приближенные методы в теории нелинейных кинетических уравнений Больцмана и Ландау. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 1987. 251 с.
13. Лабунцов Д.А. Анализ процессов испарения и конденсации. ТВТ. 1967. Т. 5. С. 647–654.
14. Муратова Т.М., Лабунцов Д.А. Кинетический анализ процессов испарения и конденсации. Теплофизика высоких температур. 1969. Т. 7. С. 959–967.
15. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитические методы в кинетической теории. М.: Изд-во МГОУ. 2008. 280 с.
16. Maxwell J.C. Illustrations of the dynamical theory of gases: Part I. On the motions and collisions of perfectly elastic spheres. Philosophical Magazine. 1860. V. 19. P. 19–32.
17. Maxwell J.C. Illustrations of the dynamical theory of gases: Part II. On the process of diffusion of two or more kinds of moving particles among one another. Philosophical Magazine. 1860. V. 20. P. 21–37.
18. Labuntsov D.A., Kryukov A.P. Analysis of intensive evaporation and condensation. International J. Heat and Mass Transfer. 1979. V. 2. P. 989–1002.
19. Зудин Ю.Б. Приближенный кинетический анализ интенсивного испарения. Инженерно-физический журн. 2015. Т. 88. № 4. С. 980–986.
20. Зудин Ю.Б. Приближенный кинетический анализ интенсивной конденсации. Теплофизика и Аэромеханика. 2015. Т. 22. № 1. С. 73–85.
21. Зудин Ю.Б. Линейный кинетический анализ испарения и конденсации. Теплофизика и Аэромеханика. 2016. Т. 23. № 3. С. 437–450.
22. Zudin Yu.B. Non-equilibrium Evaporation and Condensation Processes: Analytical Solutions. Heidelberg: Springer. 2019 (2nd Edition). 404 p.

23. Зудин Ю.Б., Уртенев Д.С., Устинов В.С. Кинетический анализ интенсивной конденсации (дозвуковой и сверхзвуковой режимы). Известия РАН. Энергетика. 2019. № 4. С. 75–97.
24. Зудин Ю.Б., Уртенев Д.С., Устинов В.С. Анализ сопряженной задачи испарение-теплопроводность. Известия РАН. Энергетика. 2020. № 1. С. 138–158.
25. *Croui P.D.* An application of kinetic theory to the problems of evaporation and sublimation of monatomic gases. *J. Mathematical Physics*. 1936. V. 15. P. 1–54.
26. *Rose J.W.* Accurate approximate equations for intensive subsonic evaporation. *International J. Heat and Mass Transfer*. 2000. V. 43. P. 3869–3875.
27. *Карташов Э.М.* Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами. Изв. РАН. Энергетика. 1999. № 5. С. 3–34.
28. *Карташов Э.М.* Аналитические решения гиперболических моделей нестационарной теплопроводности. Тонкие химические технологии. 2018. Т. 13. № 2. С. 81–90.
29. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука. 2008. 653 с.
30. *Loyalka S.K.* Slip and jump coefficients for rarefied gas flows: variational results for Lennard–Jones and $n(r)-6$ potentials. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 1990. V. 163. P. 813–821.
31. *Siewert E.* Heat transfer and evaporation/condensation problems based on the linearized Boltzmann equation. *European J. Mechanics – B/Fluids*. 2003. V. 22. P. 391–408.
32. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Граничные задачи для молекулярных газов. М.: Изд-во МГОУ. 2005. 264 с.
33. *Bond M., Struchtrup H.* Mean evaporation and condensation coefficient based on energy dependent condensation probability. *Physical Review*. 2004. V. E 70. 061605.
34. *Cercignani C.* Strong evaporation of a polyatomic gas, in: *Rarefied Gas Dynamics; International Symposium, 12th, Charlottesville, VA, July. 7–11, 1980, Technical Papers. Part 1. American Institute Aeronautics and Astronautics. N.Y. 1981. P. 305–320.*
35. *Skovorodko P.A.* Semi-empirical boundary conditions for strong evaporation of a polyatomic gas, in: *Bartel T., Gallis M. (Eds.), Rarefied Gas Dynamics, 22th International Symposium, Sydney, Australia, 9–14 July 2000, in: AIP Conference Proceedings, vol. 585, American Institute Physics. Melville. N.Y. 2001. P. 588–590.*
36. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука. 1976. 584 с.
37. *Базаров И.П.* Термодинамика М.: Высшая школа. 1991. 376 с.
38. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир 1973. 280 с.
39. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука. 1989. 432 с.
40. *Ларичев О.И., Горвиц Г.Г.* Методы поиска локального экстремума овражных функций. М.: Наука. 1990. 95 с.
41. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552 с.
42. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит. 2005. 256 с.
43. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 5. М.: Наука. 1959. 657 с.
44. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1986. 288 с.

The Evaporation Shock Wave Model of Evaporation

Yu. B. Zudin^{a,*}, D. S. Urtenov^a, and V. S. Ustinov^a

^aNational Research Centre “Kurchatov Institute”, Moscow, Russia

*e-mail: yzudin@gmail.com

We consider the problem of determination of a boundary conditions for the Navier-Stokes equation under strong evaporation from the condensed-phase surface. We propose a kinetic shock wave model based on superposition of the linear kinetic problem and the gas-dynamic rarefaction shock wave problem. Parametric calculations of extrapolated boundary conditions were carried out for specific realizations of strong evaporation: monatomic and polyatomic gas, the effect of condensation coefficient, maximum mass flux. It is shown that the evaporation shock wave satisfies the classical law of increasing entropy. We also prove that the solution is conservative relative to a method of approximation of the distribution function. The inverse strong evaporation problem is solved. The principal result is the development of the evaporation shock wave model.

Keywords: boundary conditions, Navier-Stokes equation, evaporation shock wave, superposition, the law of increasing entropy, distribution function approximation, inverse problem