УДК 536.24

НЕЛИНЕЙНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПЛОСКОГО ТЕЛА

Ю. В. Видин[1, *], В. С. Злобин[1]

[1]*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Сибирский федеральный университет”, Красноярск, Россия*

**e-mail: zlobinsfu@mail.ru*

Поступила в редакцию 10.08.2020 г.
После доработки 17.08.2020 г.
Принята к публикации 20.08.2020 г.

В статье рассмотрен аналитический метод решения задачи определения нелинейного нестационарного температурного поля плоского тела при переменном коэффициенте теплопроводности. В случае решения подобных задач возникает проблема оценок полученного поля температур. Предлагаемый приближенный метод решения сложной исходной задачи основан на использовании известных решений существенно более простых задач и позволяет установить как максимально возможные, так и минимальные значения искомого поля температур, т.е. верхнюю и нижнюю границы. Такой подход является весьма продуктивным, т.к. позволяет получить достаточно узкую зону фактического распределения температуры внутри изучаемого тела. Предлагаемый в статье приближенный метод решения может быть использован для решения широкого класса нелинейных задач теплопроводности с различными граничными условиями.

Ключевые слова: температурное поле, коэффициент теплопроводности, характеристическое уравнение, собственные числа, аналитическое решение

DOI: 10.31857/S0002331020060059

В том случае, когда теплофизические коэффициенты переноса материала имеют ярко выраженную зависимость от температуры, и процесс нагрева (или охлаждения) тела осуществляется в широком интервале ее изменения, приходится решать нелинейное дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности [1–3]. Аналитическое интегрирование такого уравнения совместно с заданными краевыми условиями, как правило, сопряжено со значительными математическими трудностями. Получить строгое, в теоретическом смысле, решение таких задач удается только в исключительных случаях. Теоретическому исследованию подобных проблем посвящено сравнительно много работ, систематизированный обзор которых приведен в статье А.В. Лыкова [3]. В ней дан всесторонний анализ приближенных методов, применяющихся в современной инженерной практике. Существующим способам свойственны недостатки, главными из которых являются их математическая сложность и отсутствие достаточных доказательств точности предлагаемых решений поставленных задач.

Учитывая важность подобных задач как в прикладном, так и теоретическом отношениях, представляет существенный интерес разработка эффективных инженерных методов их решения. Наиболее приемлемым подходом к изучению подобных процессов можно считать приближенные способы, основанные на получении оценок искомого поля температур как максимально возможных, так и минимальных величин. Такой прием является весьма продуктивным, если удается установить сравнительно узкую зону для фактического распределения температуры внутри изучаемого изделия как в пространстве, так и во времени. При этом необходимо руководствоваться принципом – проводить исследование сложной сформулированной задачи на основе использования известных решений существенно более простых задач.

Проиллюстрируем рекомендуемый аналитический способ на примере конкретной теплофизической задачи, записанной для удобства в следующей безразмерной форме

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial}{\partial X}\left[(1 + a\vartheta)\frac{\partial\vartheta}{\partial X}\right], \quad 0 < \mathrm{Fo} < \infty, \quad 0 \le X \le 1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial \mathrm{X}} = 0 \quad \text{при} \quad X = 0, \tag{2}$$

$$\vartheta = 0 \quad \text{при} \quad X = 1, \tag{3}$$

$$\vartheta = 1 \quad \text{при} \quad \mathrm{Fo} = 0. \tag{4}$$

Параметр a, характеризующий динамику изменения коэффициента теплопроводности изделия от температуры может быть как положительным ($a > 0$), так и отрицательным ($a < 0$), что зависит от вида материала [1].

Очевидно, что в частном случае, а именно, когда $a = 0$, задача (1)–(4) оказывается линейной, решение которой известно [2]

$$\vartheta(X, \mathrm{Fo}) = \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi X\right)\exp\left(-\frac{(2n-1)^2}{4}\pi^2 \mathrm{Fo}\right). \tag{5}$$

Бесконечный ряд в формуле (5) является быстросходящимся и, начиная с некоторого значения числа Фурье (обычно $\mathrm{Fo} \ge 0.3$), можно ограничиться одним первым слагаемым, т.е. тогда имеем

$$\vartheta(X, \mathrm{Fo}) = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}X\right)\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}\mathrm{Fo}\right). \tag{6}$$

При малых числах Fo ($\mathrm{Fo} \le 0.2$), т.е. для начальной стадии процесса, целесообразно вместо (5) применить более простое выражение [2]

$$\vartheta(X, \mathrm{Fo}) = 1 - \left(\mathrm{erfc}\frac{1-X}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}} + \mathrm{erfc}\frac{1+X}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right), \tag{7}$$

где

$$\mathrm{erfc}Z = 1 - \mathrm{erf}Z. \tag{8}$$

Специальная функция $\mathrm{erf}Z$ (интегральная ошибка) достаточно подробно исследована авторами книги [4], в которой приведены ее табличные числовые значения с шагом 0.01 до предельной величины $Z = 3$. Наличие данной таблицы существенно облегчает выполнение вычислений по соотношению (7). При больших значениях $Z\,(Z > 2)$ можно использовать асимптотическую формулу [5]

$$\mathrm{erfc}Z = \frac{e^{-Z^2}}{\sqrt{\pi}Z}\left(1 - \frac{1}{2Z^2} + \frac{3}{4Z^4}\right). \tag{9}$$

Таким образом, на основе (6) и (7) особенно легко находится безразмерная температура в центре пластины ($X = 0$) соответственно по элементарным выражениям

1) если $\mathrm{Fo} \le 0.2$

$$\vartheta(0, \mathrm{Fo}) = 1 - 2\mathrm{erfc}\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}, \tag{10}$$

Таблица 1. Температурное поле пластины при $a = 0.2$

Fo	$\vartheta^*(0,\mathrm{Fo})$	$\vartheta(0,\mathrm{Fo})$	$\vartheta^{**}(0,\mathrm{Fo})$	$\vartheta^*(0.5,\mathrm{Fo})$	$\vartheta(0.5,\mathrm{Fo})$	$\vartheta^{**}(0.5,\mathrm{Fo})$
0.02	1	1	1	0.9876	0.9773	0.9775
0.04	0.9992	0.9969	0.9931	0.9229	0.9073	0.9015
0.06	0.9922	0.9840	0.9846	0.8511	0.8365	0.8254
0.08	0.9752	0.9601	0.9586	0.7885	0.7757	0.7620
0.1	0.9493	0.9282	0.9238	0.7357	0.7241	0.7092
0.2	0.7723	0.7391	0.7205	0.5532	0.5412	0.5221
0.4	0.4745	0.4466	0.4115	0.3356	0.3213	0.2943
0.6	0.2897	0.2705	0.2516	0.2049	0.1933	0.1649
0.8	0.1769	0.1644	0.1294	0.1251	0.1170	0.0919
1.0	0.1080	0.1002	0.0720	0.0764	0.0711	0.0510

2) если $\mathrm{Fo} > 0.2$

$$\vartheta(0,\mathrm{Fo}) = \frac{4}{\pi}\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}\mathrm{Fo}\right). \tag{11}$$

Нетрудно показать, что расчеты по формулам (6), (7), (10) и (11) будут давать завышенные результаты в случае $a > 0$ и наоборот заниженные при $a < 0$. Для нахождения противоположной границы для искомого поля температуры $\vartheta(X,\mathrm{Fo})$ целесообразно ввести новую зависимую переменную

$$\theta(X,\mathrm{Fo}) = \vartheta(X,\mathrm{Fo}) + \frac{a}{2}\vartheta^2(X,\mathrm{Fo}). \tag{12}$$

Тогда задача (1)—(4) преобразуется к виду

$$\frac{1}{1+a\vartheta}\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\theta}{\partial X^2}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{X}} = 0 \quad \text{при} \quad X = 0, \tag{14}$$

$$\theta = 0 \quad \text{при} \quad X = 1, \tag{15}$$

$$\theta = \left(1 + \frac{a}{2}\right) \quad \text{при} \quad \mathrm{Fo} = 0. \tag{16}$$

Решая квадратное алгебраическое уравнение (12), получим соотношение

$$\vartheta(X,\mathrm{Fo}) = -\frac{2}{a} \pm \sqrt{\frac{4}{a^2} + \frac{2}{a}\theta(X,\mathrm{Fo})}, \tag{17}$$

в котором при $a > 0$ в правой части следует брать знак “+”, а при $a < 0$ — знак “–”. Если в левой части дифференциального уравнения (13) заменить сомножитель $\frac{1}{1+a\vartheta}$ на комплекс $\frac{1}{1+a}$, то аналитическое решение системы (13)—(16) можно представить в виде

$$\theta(X,\mathrm{Fo}) = \frac{2(2+a)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi X\right)\exp\left[-\frac{(2n-1)^2}{4}\pi^2(1+a)\mathrm{Fo}\right], \tag{18}$$

которое при повышенных значениях Fo становится проще

Таблица 2. Температурное поле пластины при $a = -0.2$

Fo	$\vartheta^*(0, \mathrm{Fo})$	$\vartheta(0, \mathrm{Fo})$	$\vartheta^{**}(0, \mathrm{Fo})$	$\vartheta^*(0.5, \mathrm{Fo})$	$\vartheta(0.5, \mathrm{Fo})$	$\vartheta^{**}(0.5, \mathrm{Fo})$
0.02	1	1	1	0.9876	0.9884	0.9942
0.04	0.9992	0.9994	0.9998	0.9229	0.9334	0.9463
0.06	0.9922	0.9952	0.9969	0.8511	0.8648	0.8818
0.08	0.9752	0.9840	0.9884	0.7885	0.8017	0.8214
0.1	0.9493	0.9651	0.9772	0.7357	0.7475	0.7688
0.2	0.7723	0.8081	0.8433	0.5532	0.5637	0.5796
0.4	0.4745	0.5074	0.5506	0.3356	0.3509	0.3825
0.6	0.2897	0.3131	0.3638	0.2049	0.2184	0.2544
0.8	0.1769	0.1925	0.2421	0.1251	0.1350	0.1699
1.0	0.1080	0.1181	0.1618	0.0764	0.0831	0.1133

$$\theta(X, \mathrm{Fo}) = \frac{2(2+a)}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}X\right)\exp\left[-\frac{\pi^2}{4}(1+a)\,\mathrm{Fo}\right]. \tag{19}$$

При малых величинах Fo предпочтительнее использовать выражение

$$\theta(X, \mathrm{Fo}) = \left(1+\frac{a}{2}\right)\left[1-\left(\mathrm{erfc}\,\frac{1-X}{2\sqrt{(1+a)\,\mathrm{Fo}}}+\mathrm{erfc}\,\frac{1-X}{2\sqrt{(1+a)\,\mathrm{Fo}}}\right)\right]. \tag{20}$$

Таким образом, границами для действительного температурного поля $\vartheta(X, \mathrm{Fo})$ удовлетворяющего исходной задаче (1)–(4) служат $\vartheta^*(X, \mathrm{Fo})$ и $\vartheta^{**}(X, \mathrm{Fo})$, которые рассчитываются по формуле (6) (либо (7)) или по выражению (17), с предварительным определением $\theta(X, \mathrm{Fo})$ на основе (19) (или (20)).

В таблице 1 приведены данные расчетов $\vartheta^*(X, \mathrm{Fo})$ и $\vartheta^{**}(X, \mathrm{Fo})$ для центра пластины ($X = 0$) и плоскости с координатой $X = 0.5$ при коэффициенте $a = 0.2$. Здесь же указаны результаты, полученные численным методом [6]. Таблица 2 содержит подобные вычисления, проведенные для варианта, когда $a = -0.2$.

Принятые величины параметра a соответствуют характерным случаям весьма значительной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры [7]. Из анализа названных таблиц видно, что предлагаемый способ позволяет получать простыми математическими действиями сравнительно узкую зону, в которой располагается искомое поле температуры. С уменьшением параметра a область между верхней и нижней граничными кривыми очевидно будет уменьшаться.

В заключение нужно отметить, что при переходе к задаче с граничным условием третьего рода, вместо рассмотренного в данной статье первого рода, предлагаемый подход позволит еще дополнительно увеличить степень точности полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Видин Ю.В., Иванов В.В., Казаков Р.В.* Инженерные методы расчета задач теплообмена. Красноярск, СФУ, 2014. 167 с.
2. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
3. *Лыков А.В.* Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности. Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. № 5. 1970. С. 109–150.
4. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.
5. *Сегал Б.И., Семендяев К.А.* Пятизначные математические таблицы. 3-е изд. М.: Гос. Изд-во физ-мат. лит., 1962. 464 с.
6. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. С. 432.
7. *Лившиц Б.Г., Крапошин В.С., Линецкий Я.Л.* Физические свойства металлов и сплавов. М.: Металлургия, 1980. С. 320.

Nonlinear Unsteady Thermal Conductivity of a Flat Body

Yu. V. Vidin[a], * and V. S. Zlobin[a]

[a]*Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia*
**e-mail: zlobinsfu@mail.ru*

The article considers an analytical method for solving the problem of determining the nonlinear nonstationary temperature field of a flat body with a variable coefficient of thermal conductivity. In the case of solving such problems, the problem of estimating the obtained temperature field arises. The proposed approximate method for solving a complex initial problem is based on the use of known solutions to significantly simpler problems and allows you to set both the maximum possible and minimum values of the desired temperature field, i.e. the upper and lower bounds. This approach is very productive, because it allows you to get a fairly narrow zone of the actual temperature distribution inside the body under study. The proposed approximate solution method can be used to solve a wide class of nonlinear heat conduction problems with different boundary conditions.

Keyword: temperature field, thermal conductivity coefficient, characteristic equation, eigenvalues, analytical solution