

УДК 621.316

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ БАЛАНСОВОЙ НАДЕЖНОСТИ ОЭС МЕТОДАМИ ТОЧЕЧНОЙ ОЦЕНКИ

© 2020 г. В. П. Обоскалов<sup>1, 2, \*</sup>, А. С. Х. Абдель Менаем<sup>2</sup><sup>1</sup>НИЦ “Надежность и ресурс больших систем и машин” УрО РАН, Екатеринбург, Россия<sup>2</sup>Уральский федеральный университет, УралЭНИИ, Екатеринбург, Россия

\*e-mail: vro1704@mail.ru

Поступила в редакцию 27.07.2020 г.

После доработки 17.08.2020 г.

Принята к публикации 20.08.2020 г.

С целью повышения вычислительной эффективности расчетных процедур при оценке балансовой надежности (БН) объединенных электроэнергетических систем (ОЭС) предлагаются и сравниваются аналитические методы определения показателей БН ОЭС, основанные на точечной оценке вероятностных распределений. Определена эффективность использования методов Розенблюта и Хонга для оценки БН. Показано, что для БН предпочтительна схема Хонга ( $4n + 1$ ). Предложена модификация схемы Хонга ( $2n + 1$ ), заключающаяся в подключении дополнительного блока комбинации переменных. Применимость методов по точности и скорости получения решения оценивалась методом статистического моделирования (Монте-Карло).

*Ключевые слова:* балансовая надежность, объединенные электроэнергетические системы, методы точечной оценки, схемы Розенблюта и Хонга

DOI: 10.31857/S0002331020060035

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Балансовая надежность электроэнергетической системы (ЭЭС) – это способность электроэнергетической системы обеспечивать электроприемники (нагрузку) электроэнергией регламентированного качества в требуемом объеме [1–3]. На первое место здесь выдвигается задача резервирования. В силу вероятностного характера нагрузки генерирующая подсистема должна обладать такими располагаемыми мощностью и энергией, чтобы компенсировать плановый прирост и случайные отклонения нагрузки от ожидаемых или заявленных значений.

Балансовая надежность, как одно из составных свойств теории надежности ЭЭС, в большей степени ориентирована на оценку рисков от ненадежности системы при принятии решений о структуре и объеме резервирования в задачах перспективного развития ЭЭС и планирования ремонтов основного оборудования ЭЭС [1].

Основным показателем балансовой надежности (ПБН) ОЭС является интегральная вероятность бездефицитной работы ОЭС [2]. Дополнительными ПБН, представляющими не меньшую значимость для решения практических задач проектирования развития и эксплуатации ЭЭС, являются: вероятность появления и математическое ожидание дефицита мощности в отдельных, входящих в состав ОЭС зонах надежности (ЗН – часть территориальной ЭЭС, где не являются значимыми ограничения по пропускной способности внутренних связей); интегральная вероятность бездефицитной работы зоны надежности; интегральная вероятность исчерпания пропускной способ-

ности межзонной связи (совокупности межзонных связей) в прямом и обратном направлении; математическое ожидание годового объема ограничения потребления электрической энергии в зоне надежности и ОЭС в целом; относительное удовлетворение потребителей электрической энергией; коэффициент обеспеченности электроэнергией; коэффициент использования генерирующей мощности и др. [1–3]. В зарубежных странах широко используются аналогичные, не принципиально отличающиеся показатели [4]. Вероятности могут использоваться как индикативные показатели качественной оценки БН (вероятность велика или мала) и фигурировать в критериях допустимости (в том числе по социальным факторам), а математические ожидания и дисперсии – в экономических критериях.

Наибольшее развитие в теории БН ОЭС получили статистические методы и, прежде всего, метод статистического моделирования (Монте-Карло), который позволяет достаточно точно моделировать вероятностные распределения случайных величин, определяющих состояния ОЭС, но практическое применение которого затруднено из-за недопустимо большого числа испытаний необходимого для достижения приемлемой точности решения. Моделирование вероятностных распределений является лишь одним из этапов расчетного процесса. Наиболее затратным по времени является анализ случайных состояний ОЭС, включающий в себя процедуру оптимального распределения возможного дефицита мощности (РДМ) [1–5] между ОЭС, входящими в состав ОЭС. В результате длительность расчетов увеличивается многократно.

Требование позонной (узловой) оценки ПБН предопределило необходимость распределения потоков мощности между источниками питания и узлами нагрузки. Данная задача в условиях неопределенности исходных данных получила название оптимального вероятностного потокораспределения (*probabilistic optimal power flow*), целью которого является распределение мощности вероятностно распределенной нагрузки энергосистемы между параллельно работающими генераторами при выполнении режимных ограничений (по пропускной способности связей и сечений, по предельным значениям модулей напряжений, располагаемой генерирующей мощности, величине ограничения нагрузки, и др.) [6–8]). В качестве условий, определяющих правила и целевые функции оптимального потокораспределения, рассматриваются экономические, экологические, надежность и иные критерии.

Распределение генерирующей мощности имеет системный характер. При этом локальные ограничения электропотребления функционально зависимы от суммарного дефицита мощности в ОЭС и способности электрической сети передать системные резервы в узлы с дефицитом мощности. Известны решения задачи РДМ в детерминистической постановке [9–13]. Учет неопределенности параметров ОЭС реализуется, как правило, в вероятностной постановке.

Существует два основных направления вероятностных методов анализа БН ОЭС: аналитические и на основе статистического моделирования. Метод Монте-Карло (ММК) является наиболее известным статистическим методом моделирования, используемым для решения задач с вероятностно определенными параметрами [1, 5, 9, 14 и др.]. На базе многочисленных реализаций исходных случайных величин, описываемых заданными функциями распределения, формируются массивы реализаций результирующих показателей или характеристик ОЭС. Полученные массивы обрабатываются методами математической статистики. Для каждой реализации выполняются детерминированные вычисления оптимального потокораспределения. Статистические моменты выходных переменных определяются аналогично любой функционально определяемой результирующей величине.

К числу аналитических методов [15] относятся и методы точечной оценки (*Point estimate method*) [16–22 и др.]. Перечисленные методы имеют не только положительные, позволяющие их преимущественное использование, но и отрицательные качества. В частности, не все перечисленные методы достаточно хорошо работают в пред-

ставляющей наибольший интерес при анализе надежности ЭЭС области малых вероятностей. Отсюда для оценки применимости и выбора того или другого метода требуется их сопоставление с более точным (при условии необходимо минимального объема испытаний) методом Монте-Карло.

В данной работе в рамках задачи РДМ сравниваются по точности результатов и времени расчетов некоторые реализации методов точечных оценок. Дано математическое описание методов. Их сравнение показано на расчетах тестовой схемы.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РДМ

Объектом исследования является ОЭС, представленная в виде совокупности зон надежности, объединенных межсистемными связями ограниченной пропускной способности (ПС). Внутри каждой ЗН распределение потоков мощности между отдельными узлами нагрузки и генерации не ограничено ПС элементов электропередачи. Отсюда каждую ЗН  $j = 1, \dots, n$  можно рассматривать как отдельный узел, где определена суммарная располагаемая мощность  $G_{j,i}^p$  всех источников питания,  $G_j^p = \sum_{i=1}^{N_{g,j}} G_{j,i}^p$  и суммарная (с учетом потерь мощности в МСС) мощность спроса нагрузки  $L_j^c = \sum_{i=1}^{N_{L,j}} L_{j,i}^c$ , где  $N_{g,j}$ ,  $N_{L,j}$  – число генераторов и узлов нагрузки в ЗН  $j$ . При этом как  $G_j^p$ , так и  $L_j^c$  имеют вероятностный характер (некоторая часть генераторов находится вынужденно в отключенном состоянии, а мощность нагрузки априори имеет вероятностный характер).

Обычно суммарная нагрузка ЭЭС, состоящей практически из бесконечного числа электроприемников, согласно предельной теореме Ляпунова описывается нормальным (гауссовским) законом вероятностного распределения, с известным математическим ожиданием (МО) и дисперсией. Располагаемая мощность группы однотипных генераторов, как правило, описывается биномиальным распределением. Распределение располагаемой мощности нескольких групп генераторов является результатом “свертки” биномиальных распределений и в общем случае существенно отличается от нормального. Однако ОЭС в сумме содержит относительно большое число генераторов и согласно предельной теореме Муавра-Лапласа также может быть описана нормальным законом, но с целью повышения точности расчетов здесь иногда выделяют группу наиболее мощных генераторов. При этом система генерации представляется в виде двух групп генераторов – наиболее мощных, описываемых биномиальным распределением, и всех остальных, описываемых нормальным распределением [15]. ПС МСС может быть описана либо распределением Бернулли (МСС или включена или отключена на время ремонтных работ), или биномиальным распределением, если МСС представляет группу параллельно включенных линий электропередачи.

В силу вероятностной природы нагрузки и располагаемой генерации может оказаться, что суммарная располагаемая мощность ОЭС  $G_\Sigma^p = \sum_{j=1}^n G_j^p$  окажется меньше суммарного спроса  $L_\Sigma^c = \sum_{j=1}^n L_j^c$ ,  $G_\Sigma^p < L_\Sigma^c$ . Это определяет небаланс мощности (НМ) в системе,  $N_\Sigma = G_\Sigma^p - L_\Sigma^c$ , положительная часть которого определяет резерв, а отрицательная часть – дефицит генерирующей мощности (ДМ) в ОЭС. При этом, в силу, как правило, принимаемого допущения о независимости  $G_\Sigma^p$ ,  $L_\Sigma^c$ , математическое ожидание и дисперсия НМ:

$$M(N_\Sigma) = M(G_\Sigma^p) - M(L_\Sigma^c); \quad D(N_\Sigma) = D(G_\Sigma^p) + D(L_\Sigma^c). \quad (1)$$

По существу, полученные величины уже частично определяют надежность ОЭС. Если принять допущение о нормальном вероятностном распределении небаланса мощности, с МО и дисперсией, определяемыми выражениями (1), то вероятность дефицита мощности в ОЭС может быть вычислена через функцию нормального распределения  $F(x, m, \sigma)$ :

$$\mathcal{P}(Def) = F_{N_{\Sigma}}(0, m_{N_{\Sigma}}, \sigma_{N_{\Sigma}}),$$

где  $m_{N_{\Sigma}}$ ,  $\sigma_{N_{\Sigma}}$  — соответственно МО и среднеквадратичное отклонение НМ.

Однако в практике больший интерес представляет не столько дефицит мощности, суммарный по ОЭС в целом, сколько наличие и вероятностные показатели дефицита мощности в ЗН. Наличие локальных дефицитов мощности является результатом ограниченной пропускной способности межсистемных связей (МСС) и невозможностью доставки энергии от избыточных ЗН в дефицитные. Неравномерность распределения ожидаемых локальных ДМ позволяет выявить “узкие места” в структуре электрической сети. Именно эти показатели позволяют определить место приложения инвестиций в развитие ОЭС. В результате возникает задача распределения дефицитов мощности между ЗН, входящими в состав ОЭС.

Для решения данной задачи необходимы критерии или условия, согласно которым осуществляется диспетчирование недоотпуска электроэнергии. В качестве критериев могут рассматриваться: минимум затрат на компенсацию ущерба от недоотпуска электроэнергии; минимум среднеквадратичного недоотпуска электроэнергии и др. Условиями РДМ могут быть: пропорциональность распределения суммарного небаланса мощности; ограничение электропотребления лишь для тех ЗН, где собственная генерация меньше собственной нагрузки (стратегия “локального эгоизма”); ограничение электропотребления с целью обеспечения необходимого резерва мощности и др. Согласно выбранному критерию формируется целевая функция (ЦФ), производится выбор независимых переменных, определяется система ограничений и допущений.

В качестве независимых переменных в задаче РДМ, как правило, назначаются востребованная генерация  $\{G_j\}$  плюс обеспеченная нагрузка  $\{L_j\}$  или сетевые инъекции  $u_j = L_j - G_j$  узлов  $j = 1, \dots, n$ . На ранних этапах развития теории БН ЭЭС, когда преимущественное применение имели потоковые модели (например, Форда-Фалкерсона) предпочтение при выборе независимых переменных отдавалось потокам мощности  $\{P_{ij}\}$  по МСС [1]. При этом принималось допущение о возможности любого произвольного потокораспределения, то есть не учитывались законы Ома и Кирхгофа. Однако в последнее время в задачах БН ЭЭС все большее применение получают принципы потенциального распределения потоков мощности, частично учитывающие закон Ома и Кирхгофа [23]. В этих условиях выбор  $\{P_{ij}\}$  в качестве независимых переменных становится неэффективным, поскольку это приводит к появлению дополнительных функциональных ограничений, связанных с учетом потенциального принципа распределения потоков мощности в сложно замкнутой структуре ОЭС.

В задаче РДМ важное значение имеют учет ограничений по пропускной способности МСС, что вводит большое число функциональных неравенств, и учет потерь мощности в электрической сети, являющихся, как правило, квадратичной функцией потоков мощности, что делает задачу РДМ нелинейной. В результате при нелинейности целевой функции и ограничений математическая структура РДМ сводится к виду задач нелинейного программирования. Использование нелинейного программирования в качестве внутренней процедуры ММК многократно увеличивает длительность расчетов БН ЭЭС. ММК становится не эффективным, и требуются иные математические методы оценки БН ОЭС.

### 3. МЕТОДЫ ТОЧЕЧНОЙ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Аналитические методы в отличие от статистических дают одно и то же решение при повторном расчете. Решение формируется в процессе некоторой, определяемой программным алгоритмом последовательности математических операций. Как правило, аналитические методы имеют большее быстродействие, но для их реализации необходимо знать все математические соотношения перехода от исходных данных к результирующим, что не всегда оказывается возможным. В результате вводятся некоторые допущения, приводящие к погрешности расчетов.

Сущность метода точечной оценки (Point Estimation Method) заключается в аппроксимации функции распределения  $F(x)$  непрерывной случайной величины вероятностным рядом  $\{x_j; w_j, j = 1, \dots, n_p\}$  – совокупностью точек (часто называемых концентрациями), для которых определена их величина  $x_j$  и вероятность  $w_j$ . Применительно к свойству неопределенности вероятность  $w_i$  может трактоваться как “весовой коэффициент” точки. Пары  $\{x_j; w_j\}$  (часто называемые вероятностными импульсами) определяются таким образом, чтобы удовлетворялись некоторые вероятностные критерии, например, первые  $m$  начальных или центральных моментов непрерывной случайной величины  $x$  и вероятностного ряда  $\{x_j; w_j\}$  были бы одинаковы. В частности,

$$\sum_{j=1}^{n_p} x_j w_j = m_x; \quad \sum_{j=1}^{n_p} (x_j - m_x)^k w_j = \mu_{x,k}, \quad (2)$$

где  $\mu_{x,k}$  –  $k$ -й центральный момент случайной величины  $x$ .

При определении моментов некоторой результирующей случайной величины  $z = h(x)$  данный подход позволяет перейти от непрерывного интегрирования (как правило, невозможного в аналитическом виде и требующего процедур численного интегрирования)

$$m_k(h(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} (h(x))^k dF(x)$$

к суммированию

$$m_k(h(x)) = \sum_{j=1}^{n_p} (h(x_j))^k w_j. \quad (3)$$

Здесь  $x_j$  – это значение переменной, по которой оценивается функция  $h(x)$ . Вес  $w_j$ ,  $\sum w_j = 1$  является фактором, который определяет относительную важность этой оценки в анализируемой функции  $h(x)$ . Данный подход может быть распространен на совокупность входных переменных  $\{x_i, i = 1, \dots, n\}$ , образующих многомерное вероятностное распределение. При этом анализируемая функция зависит от всех переменных,  $z = h(x_1, \dots, x_n)$ . При дискретности  $\{x_i\}$ ,  $z = h(x_{ij}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n_{pi})$ . Соответствие весов вероятностям требует знания вероятностей совместных событий  $\mathcal{P}(x_{1j_1}, \dots, x_{ij_i}, \dots, x_{nj_n})$ , или многомерной плотности распределения, что в реальных технических расчетах практически не реализуемо. Здесь, как правило, принимается допущение о независимости входных переменных. При этом вес сочетания  $\{x_{ij}; x_{rs}\}$  равен произведению весов составных компонент,  $w(x_{ij}; x_{rs}) = w_{ij} w_{rs}$ .

Для удобства математического представления центральных моментов, например, (2) выполняется замена переменных (4), в результате чего расположение переменной

определяется относительным отклонением  $\xi_{x_i,j}$  переменной  $x_i$  от своего МО  $\mu_{x_i}$ , а в качестве точки  $x_{i0}$  принимается  $\mu_{x_i}$ :

$$x_{i,j} = m_{x_i} + \xi_{x_i,j} \sigma_{x_i}, \quad (4)$$

где  $\sigma_{x_i}$  – стандартное отклонение переменной  $x_i$ .

Существуют разные схемы точечных оценок в зависимости от числа вероятностных импульсов и способа представления входных векторов. В данной статье рассматриваются два подхода: ( $m^n$ ) Розенблюта (Rosenblueth) и реализации схем Хонга (Hong): ( $m \times n$ ) и ( $m \times n$ ) + 1, где  $n$  – размерность анализируемой переменной;  $m$  – число точек вероятностной концентрации для отдельной переменной.

Чтобы получить плотность или интегральную функцию вероятностного распределения выходных случайных величин, используется ряд Грамм–Шарлье [11] при нормализации переменных и ее моментов или кумулянтов. В соответствии с теорией Грамм–Шарлье, плотность и интегральная функция распределения выходной переменной могут быть записаны в виде

$$F(z) = \phi(z) + \sum_{i=3}^r \frac{c_i}{i!} \phi^{(i-1)}(z), \quad f(z) = \sum_{i=0}^p \frac{c_i}{i!} \phi^{(i)}(z), \quad (5)$$

где  $\phi(z)$  и  $\phi^{(i)}(z)$  представляют плотность и  $i$ -ую производную плотности стандартного нормального распределения;  $r$  – порядок разложений Грама–Шарлье;  $c_i$  – коэффициент члена ряда Грамм–Шарлье.

### 3.1. Схема Розенблюта

Чтобы проиллюстрировать основную идею схемы Розенблюта [16, 17], рассмотрим функцию  $h(x)$  одной переменной  $x$ , первые три центральных момента  $\mu_{x,1}$ ,  $\mu_{x,2}$ ,  $\mu_{x,3}$  которой (МО, стандартное отклонение и асимметрия) известны. Прежде всего необходимо отметить, что на основании четырех условий (равенство трех моментов и равенство единице суммы весов) можно определить два вероятностных импульса, поскольку каждый импульс характеризуется двумя параметрами (расположение и вес).

Расположения и веса входной переменной  $x$  получаются с помощью решения системы нелинейных уравнений

$$\sum_{j=1}^m w_j = 1; \quad \sum_{j=1}^m w_j x_j^k = \mu_{x,k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

где  $\mu_{x,k}$  –  $k$ -й центральный момент случайной величины  $x$ .

Для нормирования переменных,  $\xi = (x - \mu_x) / \sigma_x$ , выражение (6) в развернутом виде, при  $m = 2$  принимает вид:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1; \\ w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 = 0; \\ w_1 \xi_1^2 + w_2 \xi_2^2 = \sigma_y^2 = 1; \\ w_1 \xi_1^3 + w_2 \xi_2^3 = \nu_x, \end{cases}$$

где  $\nu_x$  – центральный момент третьего порядка, при  $\sigma_x^2 = 1$  равный асимметрии,  $\nu_x = E[(x - \mu_x)^3] / \sigma_x^3$ .

Представленное в [16] решение данной системы уравнений имеет вид

$$\xi_{x_1}, \xi_{x_2} = \frac{v_x}{2} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{v_x}{2}\right)^2}; \quad w_1 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{v_x}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_x}{2}\right)^2}} \right]; \quad w_2 = 1 - w_1.$$

В случае стандартной нормально (или симметрично) распределенной переменной  $v_x = 0$ . Отсюда, расположения  $\xi_{x_1}, \xi_{x_2} = \mp 1$ . При этом:

$$x_1 = \mu_x + \sigma_x; \quad x_2 = \mu_x - \sigma_x.$$

Веса этих точек одинаковы  $w_1 = w_2 = 1/2$ .

Если  $h(x)$  является функцией двух переменных  $\{x_1, x_2\}$ , то процедура Розенблюта заключается в создании четырех векторов, являющихся комбинацией точек, по одной из каждой переменной, т.е. здесь формируются четыре входных вектора так, чтобы значение каждой переменной было на одно стандартное отклонение выше или ниже среднего значения:  $(\mu_{x_1} + \sigma_{x_1}, \mu_{x_2} + \sigma_{x_2})$ ,  $(\mu_{x_1} + \sigma_{x_1}, \mu_{x_2} - \sigma_{x_2})$ ,  $(\mu_{x_1} - \sigma_{x_1}, \mu_{x_2} + \sigma_{x_2})$  and  $(\mu_{x_1} - \sigma_{x_1}, \mu_{x_2} - \sigma_{x_2})$ . Поскольку  $h(x)$  представляет комбинацию значений двух входных переменных, то вес каждого вектора составляет  $w_i = 0.5^2 = 0.25$ .

В общем случае, когда  $h(x)$  является функцией от  $n$  переменных  $(x_i, i = 1, \dots, n)$ , процедура Розенблюта выбирает  $N = m^n$  точек анализа функции  $h(x)$  (все возможные комбинации  $m$  значений  $n$  переменных), выбранных таким образом, чтобы значение каждой переменной было на одно стандартное отклонение выше или ниже среднего значения,  $\{\mu_{x_i} \mp \sigma_{x_i}, \mu_{x_j} \mp \sigma_{x_j}\}$ . При одинаковой стратегии выбора расположения вероятностных импульсов для всех переменных вероятности многомерных импульсов  $(r_k = \mu_{x_1} \mp \sigma_{x_1}, \dots, \mu_{x_i} \mp \sigma_{x_i}, \dots, \mu_{x_n} \mp \sigma_{x_n}, k = 1, \dots, N)$  одинаковы, отсюда  $MO h(x)$  представляет собой среднее значение функций на множестве импульсов

$$h(x) = \frac{1}{N} \sum h(r_k).$$

При решении задачи оценки БН ЭЭС, как правило, случайными переменными являются нагрузка и располагаемая генерация ЭЭС. При этом число переменных даже для относительно небольших систем исчисляется сотнями. Принимая во внимание соотношение  $N = m^n$ , можно утверждать, что данный метод применим только при числе переменных не более 12–14. При большем числе переменных более эффективным по быстродействию и точности расчетов вновь становится метод Монте-Карло.

### 3.2. Схемы Хонга (Hong)

Метод Хонга [18, 19] имеет две схемы  $(m \times n)$  и  $(m \times n + 1)$ .

**Первая схема** характеризуется тем, что каждый входной вероятностный импульс  $r_k$ ,  $k = 1, \dots, nm$  характеризуется отклонением только одной переменной  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Все остальные переменные в импульсе принимаются равными своим МО,  $\mu_{x_j}, j \neq i$ :

$$r_k = \mu_{x_1}, \dots, \mu_{x_i} + \xi_{x_{i,j}} \sigma_{x_i}, \dots, \mu_{x_n}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Отсюда общее количество оценок равно  $N = nm$ . Координаты расположения  $\xi_{x_{i,j}}$  и веса  $w_{x_{i,j}}$  для каждой случайной величины определяются путем решения системы нелинейных уравнений, аналогичной (6) [18]:

$$\sum_{j=1}^m w_{x_{i,j}} = 1; \quad \sum_{j=1}^m w_{x_{i,j}} \xi_{x_{i,j}}^k, \quad k = 1, \dots, n_M, \quad (7)$$

где  $n_M$  – число сравниваемых моментов (как правило, не больше 4).

При  $m = 2$  для каждой случайной величины  $x_i, i = 1, \dots, n$  необходимы четыре уравнения с четырьмя неизвестными (координаты и веса двух точек размещения вероятностных импульсов).

Решение системы уравнений (6) при  $m = 2$ :

$$\begin{aligned} \xi_{x_{i,1}}, \xi_{x_{i,2}} &= \mp 1; \\ w_{x_{i,1}} = w_{x_{i,2}} &= 0,5. \end{aligned}$$

В многомерном пространстве переменных система уравнений (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m w_j &= 1/n; \\ \sum_{j=1}^m w_j \xi_j^k &= \lambda_{x,k}, k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

где  $\lambda_{x,k} = \mu_{x,k} / \sigma_x^k$ .

Для схемы Хонга  $2 \times n$

$$\xi_{x_{i,1}}, \xi_{x_{i,2}} = \frac{v_{x_i}}{2} \pm \sqrt{n + \left(\frac{v_{x_i}}{2}\right)^2}; \quad w_{x_{i,1}} = \frac{1}{n} \frac{\xi_{x_{i,2}}}{(\xi_{x_{i,2}} - \xi_{x_{i,1}})}; \quad w_{x_{i,2}} = -\frac{1}{n} \frac{\xi_{x_{i,1}}}{(\xi_{x_{i,2}} - \xi_{x_{i,1}})},$$

где  $v_{x_i} = \lambda_{x,3}$  – коэффициент асимметрии переменной  $x_i$ .

Следует обратить внимание, что координаты точек концентрации в рассматриваемой схеме зависят от числа переменных  $n$ .

**Вторая схема.** Специфика второй модели Хонга,  $(2 \times n + 1)$  заключается в учете еще одной (третьей) специфичной точки – МО случайной величины, которое для нормированных величин, участвующих при расчете центральных моментов, равно нулю. Отсюда для третьей точки уже определено ее расположение. В результате для определения параметров точек смещения требуется система из пяти (а не шести) уравнений – одно уравнение для суммы весов и 4 для обеспечения тождественности первых четырех центральных моментов.

Преимущество схемы заключается в учете не только третьего, но и четвертого (эксцесс,  $k_{x_i} = \lambda_{x_i,4}$ ) центральных моментов в уравнениях (7). Решениями рассматриваемой системы уравнений становятся [18]:

$$\begin{aligned} \xi_{x_{i,1}}, \xi_{x_{i,2}} &= \frac{v_{x_i}}{2} \pm \sqrt{k_{x_i} - \frac{3}{4} v_{x_i}^2}; \quad w_{x_{i,1}} = \frac{1}{\xi_{x_{i,1}}^2 - \xi_{x_{i,1}} \xi_{x_{i,2}}}; \quad w_{x_{i,2}} = \frac{1}{\xi_{x_{i,2}}^2 - \xi_{x_{i,1}} \xi_{x_{i,2}}}; \\ w_{x_{i,3}} &= \frac{1}{n} - w_{x_{i,1}} - w_{x_{i,2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Третья точка концентрации одинакова для всех переменных. Отсюда нет надобности повторять многократно одни и те же расчеты, соответствующие МО входных переменных. Здесь вес точки, соответствующей МО

$$w_0 = 1 - \sum_{i=1}^n (w_{x_{i,1}} + w_{x_{i,2}}) = 1 - \frac{1}{\lambda_{x_i,4} - \lambda_{x_i,3}^2}.$$

Реализации входных векторов, также как и в первой модели Хонга, содержат одну из двух точек  $(x_{i,j}, j = 1, 2)$  каждой входной случайной величины  $x_i, i = 1, \dots, n$ , в то время как другие входные переменные представлены их МО. Однако из-за наличия третьей точки (МО) точки концентрации имеют иные местоположения и веса (8).

Схема 2  $(2 \times n) + 1$  основана на линейной суперпозиции схем Хонга  $(2 \times n)$  и  $(2 \times n) + 1$  [19]. Моменты выходной случайной величины  $(z = h(\mathbf{x}))$  определяются как среднее их выходных моментов:

$$E(z^k) = \frac{1}{2} \left\{ w_0 (h(\mu_{x_1}, \dots, \mu_{x_m}))^k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 w_{x_{i,j}} (h(\mu_{x_1}, \dots, x_{i,j}, \dots, \mu_{x_m}))^k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 w_{x'_{i,j}} (h(\mu_{x_1}, \dots, x'_{i,j}, \dots, \mu_{x_m}))^k \right\},$$

где  $x'_{i,j}$  и  $x_{i,j}$  — точки реализации схем Хонга  $(2 \times n)$  и  $((2 \times n) + 1)$  соответственно.

Возникает вопрос — насколько допустимо представление в общем случае непрерывной многомерной функции плотности вероятности переменных в виде дискретного вероятностного ряда с относительно небольшим числом вероятностных импульсов и, главное, чем объясняется возможность замены многомерного интегрирования некоторой совокупностью дискретных точек?

Частичным объяснением здесь может служить часто применяемая схема линеаризации рассматриваемой функции многих переменных  $h(\mathbf{x})$  в области некоторого вектора  $\bar{x}_0$  (при вероятностном анализе, как правило, это МО)

$$h(\mathbf{x}) \approx h(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} (x_i - x_{i0}).$$

При дискретности приращения (в том числе при определении производных)

$$h(\mathbf{x}) \approx h(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \frac{h(x_{10}, \dots, x_{i0} + \Delta x_i, \dots, x_{n0}) - h(\mathbf{x}_0)}{\Delta x_i} (x_i - x_{i0}).$$

Математическое ожидание  $h(\mathbf{x})$ :

$$M(h(\mathbf{x})) \approx h(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{h(x_{10}, \dots, x_{i0} + \Delta x_i, \dots, x_{n0}) - h(\mathbf{x}_0)}{x_{ij} - x_{i0}} (x_{ij} - x_{i0}) w_{ij}.$$

Отсюда

$$M(h(\mathbf{x})) \approx h(\mathbf{x}_0) w_0 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h(x_{10}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{n0}) w_{ij}, \quad (9)$$

где  $x_{ij}, w_{ij}$  — соответственно  $j$ -е расположение и вероятность переменной  $x_i$ ;

$$w_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij}.$$

При представлении переменных в нормализованном виде  $\xi_{x_i} = (x_i - \mu_{x_i})/\sigma_{x_i}$  выражение (9) может быть представлено в виде

$$M(h(x_n)) \approx h(0)w_0 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h(\xi_{x_{i,j}})w_{ij},$$

что описывает схему  $(2n + 1)$ . Отсюда метод точечных оценок является аналогом дискретной аппроксимации функций распределения в области МО независимых переменных.

Тестовые расчеты показывают, и многие исследователи подтверждают [21], что в области переменных, близких к МО, точность схем  $2^n$  Розенблюта и  $(2 \times n)$  Хонга примерно одинаковы. В более удаленной от МО области, что при анализе надежности систем более актуально, поскольку наибольший интерес здесь представляют маловероятные события, следует отдать предпочтение второй схеме Хонга  $(2 \times n + 1)$ , при  $\xi_{x_1}, \xi_{x_2} = \mp\sqrt{3}$ . Однако для анализа надежности ЭЭС даже этот метод Хонга с вероятностными импульсами в точках  $(-\sqrt{3}\sigma; 0; \sqrt{3}\sigma)$  является недостаточным, поскольку в инженерной практике колебание нагрузки в диапазоне  $\mp 2\sigma$  считается нормально допустимым, отвечающим критерию надежности. В проектной и эксплуатационной практике, как правило, расчетным является режим максимальной нагрузки, где  $P = m_p + 2\sigma_p$ . Дополнительно следует отметить, что мощность наиболее мощных в ЭЭС генераторов сопоставима с СКО генерации. Отсюда схема Хонга  $(2 \times n)$  реализует реально действующий в ЭЭС критерий надежности  $N - 1$ , согласно которому отключение любого элемента ЭЭС не должно приводить к ограничению электропотребления. В результате при анализе надежности интерес представляет область за пределами  $\mp 2\sigma$  или отвечающей критерию  $N - 2$  и выше. Этому условию частично отвечает вторая схема Хонга при  $m = 4$ . Здесь координаты вероятностных импульсов [18] в схеме  $(4 \times n)$ :

$$\begin{aligned} \xi_{x_1}, \xi_{x_4} &= \mp\sqrt{3 + \sqrt{6}} \approx \mp 2.33; \quad \xi_{x_2}, \xi_{x_3} = \mp\sqrt{3 - \sqrt{6}} \approx \mp 0.74; \quad w_{x_1} = w_{x_4} = \\ &= \frac{(3 - \sqrt{6})}{12} \approx 0.046; \quad w_{x_2} = w_{x_3} = \frac{(3 + \sqrt{6})}{12} \approx 0.45; \end{aligned}$$

в схеме  $(4 \times n + 1)$ .

$$\begin{aligned} \xi_{x_1}, \xi_{x_5} &= \mp\sqrt{5 + \sqrt{10}} \approx \mp 2.86; \quad \xi_{x_2}, \xi_{x_4} = \mp\sqrt{5 - \sqrt{10}} \approx \mp 1.36; \quad \xi_{x_3} = 0. \\ w_{x_1} = w_{x_5} &= (7 - 2\sqrt{10})/60 \approx 0.011; \quad w_{x_2} = w_{x_4} = (7 + 2\sqrt{10})/60 \approx 0.22; \quad w_{x_3} = 8/15. \end{aligned}$$

Для задачи оценки надежности ЭЭС более значимыми являются области от  $2\sigma$  до  $3\sigma$ . Отсюда можно ожидать, что лучшим вариантом может стать суперпозиция схем Хонга  $(4 \times n)$  и  $(4 \times n + 1)$ .

В общем случае для определения четырех импульсов произвольного вероятностного распределения требуется 8 уравнений (координаты и веса). Как было отмечено выше, эти уравнения формируются из условия равенства первых центральных моментов  $(\mu_0, \dots, \mu_7)$ . Координаты этих импульсов являются корнями полинома четвертой сте-

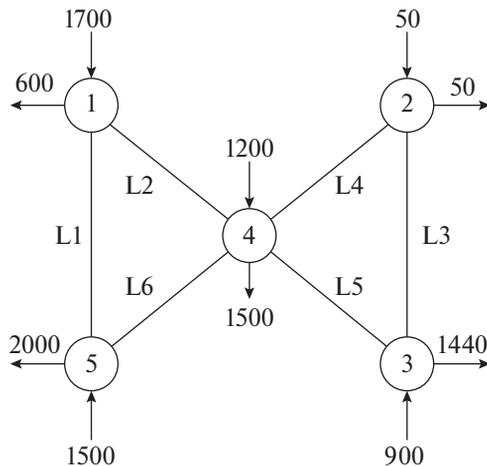


Рисунок 1.

пени  $\xi^4 + c_3\xi^3 + c_2\xi^2 + c_1\xi + c_0 = 0$  [22]. Коэффициенты полинома  $c_0, c_1, c_2, c_3$  являются решением системы линейных уравнений (схема Грамма):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \mu_3 & \mu_4 \\ 1 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 \\ \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & \mu_6 \\ \mu_4 & \mu_5 & \mu_6 & \mu_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mu_5 \\ \mu_6 \\ \mu_7 \\ \mu_8 \end{pmatrix},$$

где  $\mu_k$  — стандартный центральный момент  $k$ -го порядка. После расчета координат  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  веса определяются из системы уравнений (7).

**Модифицированная вторая схема Хонга.** В задаче оценки БН ОЭС в качестве независимых переменных рассматриваются генерации  $G_1, \dots, G_n$  и нагрузки  $L_1, \dots, L_n$  узлов, а в качестве входных векторов в методе РЕМ — их объединение,  $x = \{G_1, \dots, G_{n_{nodes}}, L_1, \dots, L_{n_{nodes}}\}$ . В схеме Хонга ( $2 \times n + 1$ ) меняется только одна компонента — либо нагрузка, либо генерация (критерий  $N - 1$ ), но реально ограничение нагрузки наблюдается при наложении двух негативных событий — при максимальной нагрузке происходит отключение ЛЭП или генератора. С целью учета данного фактора в схеме Хонга  $2 \times n + 1$  предлагается ввести дополнительный блок анализируемых векторов  $\{\mu_{G_i} - \xi_{G_{i,1}}\sigma_{G_i}, \mu_{L_i} + \xi_{L_{i,2}}\sigma_{G_i}, i = 1, \dots, n_{nodes}\}$ . Вес компоненты вектора данного блока определяется по аналогии со схемой Розенблюта, как вероятность совместной реализации двух независимых событий  $w_i = w_{G_{i1}}w_{L_{i2}}$ . Расчеты показывают, что при оценке МО данная эмпирическая, математически не обоснованная модификация показывает более точные решения.

#### 4. ПРОВЕРОЧНЫЕ РАСЧЕТЫ

В данном разделе на базе тестовых расчетов сопоставляются работоспособность и эффективность рассмотренных методов применительно к задаче оценки показателей БН ОЭС. На рисунке 1 показана пятиузловая тестовая электрическая схема ОЭС. Нагрузка и располагаемая генерирующая мощность ЗН являются независимыми случай-

**Таблица 1.** Параметры ЗН и МСС

ЗН	Располагаемая генерация, МВт		Спрос нагрузки, МВт		МСС	R, Ом	X, Ом	P <sub>L,max</sub> , МВт
	МО	СКО	МО	СКО	L1	10	100	500
1	1700	170	600	60	L2	5	50	500
2	50	5	50	5	L3	1	10	500
3	1440	144	900	90	L4	3	33	500
4	1200	120	1500	150	L5	2	10	500
5	1500	150	2000	200	L6	5	50	500

**Таблица 2.** Погрешности и длительности расчетов рассмотренных математических методов

Параметр	ММК	Розен-г					
		2 <sup>n</sup>	2n	2n+1	4n+1	2(2n) + 1	M2n+1
Длительность расчета, сек	40	9	3.2	3.3	3.9	3.5	3.5
Суммарный ДМ, %	8.68	20.5	6.9	44.6	45.1	43.1	16.2
Максимальный (по ЗН) ДМ, %	4.093	49	-13	61	66	43	11
Отклонение ДМ, %		86.8	108.6	68.3	66.2	86.29	34.8
Отклонение СКО ДМ, %		69.5	79.7	62.2	61	70.7	43.8
Макс. вероятность ДМ, %	0.05	-1	-54	-22	-30	-26	34
Отклонение вероятности ДМ, %		21	47.5	22.5	22.5	25.9	28.2
Средний ПМ по МСС, %	261.4	0.28	0.13	2.7	2.76	1.35	1.18
Среднее отклонение вероятности перегрузки МСС, %		41.9	74.1	50	36	45.4	13
Макс. вероят. перегрузки МСС, %	0.36	-4	17	17	16	-8	13
Средняя экспортная мощность, %	-2.98	1	1	3	3	7	4

ными величинами, описываемыми нормальными распределениями вероятностей с заданными МО и дисперсией. В таблице 1 представлены исходные данные, характеризующие тестовую схему.

Рассмотренные методы сравниваются по среднему значению, стандартному отклонению и вероятности ограничения нагрузки в узлах, а также среднему значению и вероятности перегрузки потоков мощности в МСС. Расчеты выполнены в программной среде MATLAB и представлены в табл. 2. В качестве эталонного для сравнения методов принят ММК с числом статистических испытаний 10<sup>4</sup>. При этом объеме испытаний разброс результатов ММК не превышает 1.5%.

В качестве входных переменных рассматриваются нагрузка и располагаемая генерация ЗН. Отсюда объединенный вектор варьируемых переменных содержит 10 компонент (2n). В качестве основного показателя при сравнении методов принято относительное отклонение рассматриваемого показателя от соответствующего показателя, полученного по ММК. Для оценки эффективности метода точечных оценок используются индексы ошибок ε<sub>s</sub>, определяемые как средние ошибки по совокупности ЗН и ММК.

$$\epsilon_s = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \left| \frac{\delta_{s,j}^{MCS} - \delta_{s,j}^*}{\delta_{s,j}^{MCS}} \right| \times 100[\%], \quad (11)$$

где K, в зависимости от показателя s, это или число ЗН или число МСС; δ<sub>s,j</sub><sup>MCS</sup> δ<sub>s,j</sub><sup>\*</sup> – значения анализируемого показателя, вычисленные по ММК и по рассматриваемому методу.

По сравнению с ММК все рассматриваемые методы точечной оценки имеют на порядок меньшую длительность расчетов. Результирующие показатели условно можно разделить на две группы: маловероятные (дефицит мощности в узлах, перегрузка МСС) и показатели, близкие к МО (узловой экспорт мощности и загрузка МСС). Метод Розенблюта, существенно проигрывая всем остальным сравниваемым методам по скорости расчетов, имеет некоторые преимущества только при расчете показателей дефицитности ЗН. Это объясняется тем, что данный метод учитывает наложение событий малой генерации и большой нагрузки. Методы Хонга  $2 \times n$  и  $2 \times n + 1$  практически не уступают по точности методам Хонга  $4 \times n$  и  $4 \times n + 1$  – те и другие достаточно точны при оценке ПН второй группы и одинаково не точны при оценке ПН первой группы. Чуть точнее метод Хонга  $4 \times n + 1$ . Модифицированный метод Хонга  $M(2 \times n) + 1$ , имея такое же быстродействие, как остальные методы Хонга, позволяет получить более точные решения для показателей первой группы.

Отсюда для практического применения при решении задач БН, объединенных ЭЭС, можно рекомендовать методы Хонга  $M(2 \times n) + 1$  и  $4 \times n + 1$ . При этом желательно увеличить вероятность оцениваемых показателями БН маловероятных событий (дефицит мощности). Это можно сделать, например, путем организации цикла отключения элементов ОЭС по критерию  $N - 1$  или  $N - 2$ .

## ВЫВОДЫ

1. При оценке БН ОЭС методы точечных оценок эффективны лишь в том случае, когда параметр оцениваемой величины находится в интервале от минимального до максимального смещения точек концентрации вероятностей.

2. Схемы Хонга  $(4n + 1)$  и  $(2n + 1)$  имеют примерно одинаковые результаты, но в силу большей точности моделирования предпочтение стоит отдать схеме  $(4n + 1)$ .

3. Модифицированный метод Хонга  $M(2 \times n) + 1$ , имея такое же быстродействие как остальные методы Хонга, за счет учета группы комбинированных событий позволяет получить более точные решения для показателей надежности, описывающих маловероятные события. Однако в силу недостаточности теоретической обоснованности данного метода необходима проверка на его пригодность при распространении метода на иные классы задач.

4. Метод Розенблюта применим только при числе переменных не более 12–14. При большем числе переменных более эффективным по быстродействию и точности расчетов становится метод Монте-Карло.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Надежность систем энергетики и их оборудования. Спр. в 4 т. / Под общей ред. Руденко Ю.Н. Т.2. Надежность электроэнергетических систем. Справочник / Под ред. Розанова М.Н. М.: Энергоатомиздат, 2000.
2. Методические указания по проведению расчетов балансовой надежности: СТО 59012820.27.010.005-2018. М.: АО “СО ЭЭС”, 2018.
3. Руденко Ю.Н., Чельцов М.Б. Надежность и резервирование в энергосистемах. Новосибирск: Наука, 1974.
4. Чукреев Ю.Я. Сравнение отечественных и зарубежных вероятностных показателей балансовой надежности электроэнергетических систем // Изв. РАН. Энергетика. 2012. № 6.
5. Чукреев Ю.Я. Модели обеспечения надежности электроэнергетических систем. Сыктывкар: Изд-во Коми НЦ УрО РАН, 1995.
6. Эндрэни Дж. Моделирование при расчетах надежности в электроэнергетических системах. М.: Энергоатомиздат, 1983.
7. Биллингтон Р., Аллан Р. Оценка надежности электроэнергетических систем: Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1988.
8. Zhu J. Optimization of power system operation, John Wiley & Sons Inc., New York, NY, 2009.

9. Зоркальцев В.И., Ковалев Г.Ф., Лебедева Л.М., Пержабинский С.М. Минимизация дефицита мощности в ЭЭС с учетом потерь мощности в линиях электропередачи // *Электричество*. 2010. № 9.
10. Зоркальцев В.И. Пержабинский С.М. Модели оценки дефицита мощности электроэнергетической системы // *Сибирский журн. индустриальной математики* 2012. № 1.
11. Oboskalov V., Abdel Menaem A., Valiev R., Mahnitko A. and Varfolomejeva R. Mathematical methods for probabilistic estimation of power shortage in concentrated electric power systems // *Proceedings of the 10th International Scientific Symposium on Electrical Power Engineering, Elektroenergetika* 2019. P. 128–132.
12. Zhang H., Li P. Probabilistic analysis for optimal power flow under uncertainty // *IET Generation, Transmission & Distribution*, 2010. V. 4. № 5. P. 553–561.
13. Ketabi A., Fini M.H. An Underfrequency Load Shedding Scheme for Hybrid and Multiarea Power Systems // *IEEE Transactions on Smart Grid*. 2015. V. 6. № 1. P. 82–91.
14. Ковалев Г.Ф., Лебедева Л.М. Надежность систем электроэнергетики. Новосибирск: Сибирская изд. фирма “Наука” Академиздатцентра “Наука”, 2015.
15. Обоскалов В.П. Надежность обеспечения баланса мощности электроэнергетических систем. Екатеринбург: Изд-во ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2002.
16. Rosenblueth E. Point estimates for probability moments // *Proc. Natl. Acad. Sci.* 1975. V. 72. P. 3812–3814.
17. Rosenblueth E. Two-point estimates in probability // *Appl. Math. Model.* 1981. V. 5. P. 329–335.
18. Hong H.P. An efficient point estimate method for probabilistic analysis // *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 1998. V. 59. P. 261–267.
19. Hong H.P. Point-estimate moment-based reliability analysis // *Civil Engineering Systems* 1996. V. 13(4). P. 281–294.
20. John T. Christian, Gregory B. Baecher. The point-estimate method with large numbers of variables // *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 2002. V. 26. P. 1515–1529.
21. Delgado C., Dominguez-Navarro J.A. Point estimate method for probabilistic load flow of an unbalanced power distribution system with correlated wind and solar sources // *Electrical Power and Energy Systems*. 2014. V. 61. P. 267–278.
22. Morales J.M., Perez-Ruiz J. Point Estimate Schemes to Solve the Probabilistic Power Flow // *IEEE Transactions on Power Systems*. 2007. V. 22. № 4. P. 1594–1601.
23. Обоскалов В.П. Алгоритмические аспекты расчета вероятностных показателей дефицита мощности в задаче балансовой надежности ОЭС // *Изв. РАН. Энергетика*. 2020. № 2. С. 59–74.

### Point Estimate Method for Probabilistic Estimation of Adequacy Indices in Power Systems

V. P. Oboskalov<sup>a, b, \*</sup> and A. A. Abdel Menaem<sup>b</sup>

<sup>a</sup>SEC “Reliability and Safety of Large Systems and Machines” UB RAS, Yekaterinburg, Russia

<sup>b</sup>Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia

\*e-mail: vpo1704@mail.ru

This paper investigates the accuracy and computational efficiency of the point estimate method (PEM) in the adequacy indices evaluation of composite generation and transmission systems. The Rosenbluth and Hong PEMs are considered. Moreover, a modification of Hong’s  $(2n + 1)$  is proposed to provide accurate indices and at the same time having high computational efficiency. The modified Hong’s method considers rare failure events by adding vectors containing two variables variation representing  $N - 2$  security criteria. The applicability of the methods in terms of the accuracy and speed of obtaining a solution is compared by the Monte Carlo simulation method.

*Keywords:* adequacy, multiarea power systems, point estimate method, E. Rosenbluth’s and Hong’s methods