

УДК 621.3.011.4

КООРДИНАТНО-СТРУКТУРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЕМКОСТИ

© 2020 г. В. Н. Острейко*

Закрытое акционерное общество “Завод электротехнического оборудования”,
Великие Луки, Россия

*e-mail: ogk@zeto.ru

Поступила в редакцию 31.03.2020 г.

После доработки 05.06.2020 г.

Принята к публикации 11.06.2020 г.

Изложена теория координатно-структурного метода, основанная на интерпретации геометрической структуры потенциального электрического поля как ортогональной криволинейной системы координат, названных координатами поля. В таких координатах скалярный потенциал зависит только от одной переменной и, следовательно, вектор электрической напряженности имеет лишь одну составляющую. Это позволяет получить три различных по виду, но эквивалентных по сути, буквенных формул для электрической емкости. Упомянутые формулы, записанные в координатах, геометрически приближенно соответствующих координатам поля (названных координатами аппроксимации), становятся также приближенными. При этом две из трех упомянутых формул определяют завышенное и заниженное значения емкости, что позволяет иметь гарантированную оценку погрешности соответствующих расчетов. Третья же формула позволяет повысить точность этих расчетов. Высокая точность и практическая эффективность изложенного метода проиллюстрирована на двух примерах расчета емкости.

Ключевые слова: электрическая емкость, скалярный потенциал, электрический заряд, диэлектрическая проницаемость, эквипотенциальные поверхности, поверхности вектора напряженности, ортогональные координаты, координаты поля, координаты аппроксимации

DOI: 10.31857/S0002331020040068

Многие современные электротехнические задачи по существу являются оптимизационными. Для их решения наиболее предпочтительны аналитические (буквенные) алгоритмы расчета. В состав таких алгоритмов могут входить электрические емкости [1–3] и их электромагнитные аналоги, например, электрические и магнитные проводимости. Фактически для буквенного расчета емкости в отечественной литературе имеется единственный справочник [4]. Естественно, что он не охватывает многие практические задачи. Настоящая работа посвящена дополнению указанного справочника. Это дополнение основано на давней работе автора [5], которая переосмыслена и радикально усовершенствована.

1. Электрическая емкость C . Она соответствует электрическому полю, удовлетворяющему уравнениям [6, с. 38]:

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi, \quad \text{div}\mathbf{E} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{E} – вектор электрической напряженности, φ – скалярный потенциал, а ε – диэлектрическая проницаемость линейной изотропной, но в общем случае неоднородной среды, т.е. в общем случае ε является функцией координат.

Рассмотрим случай, когда это поле обусловлено двумя проводниками с поверхностями S_1 и S_2 , на которых распределены равные по величине, но противоположные по знаку заряды q . При этом потенциал φ на поверхностях S_1 и S_2 принимает некоторые постоянные значения φ_1 и $\varphi_2 \neq \varphi_1$. В таком случае пространство между упомянутыми проводниками можно охарактеризовать электрической емкостью C , определяемой выражением [4, 6]:

$$C = |q/(\varphi_1 - \varphi_2)|. \quad (2)$$

Фактически емкость C относится к объему пространства с проницаемостью ε , ограниченному торцевыми эквипотенциальными поверхностями S_1 и S_2 , к которым вектор \mathbf{E} нормален, и некоторой боковой поверхностью S_0 , к которой вектор \mathbf{E} касателен. По сути, этот объем является трубкой T вектора \mathbf{E} . Поэтому в дальнейшем объем, характеризующий емкость C , будем обозначать как $T(S_1, S_2; S_0)$.

2. Координаты поля и их фундаментальное свойство. Уравнения (1), записанные в ортогональных криволинейных координатах u, v, τ с метрическими коэффициентами h_u, h_v, h_τ , имеют вид [6, с. 43]:

$$E_u h_u = -\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad E_v h_v = -\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad E_\tau h_\tau = -\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\varepsilon E_u h_v h_\tau)}{\partial u} + \frac{\partial(\varepsilon E_v h_\tau h_u)}{\partial v} + \frac{\partial(\varepsilon E_\tau h_u h_v)}{\partial \tau} = 0. \quad (4)$$

Допустим, что в координатах u, v, τ вектор \mathbf{E} имеет лишь одну составляющую E_u :

$$E_v = E_\tau = 0. \quad (5)$$

Согласно (3) в этом случае потенциал φ будет зависеть только от u :

$$\varphi = \varphi(u), \quad E_u h_u = -\varphi'(u) = \xi(u). \quad (6)$$

Ортогональные координаты u, v, τ , в которых выполняются условия (5), а значит и (6), будем называть координатами поля.

Согласно (6) в координатах поля u, v, τ поверхности u являются эквипотенциальными. Поэтому вектор \mathbf{E} имеет лишь одну составляющую E_u , которая нормальна к поверхностям u и касательна к поверхностям v и τ . Следовательно, на эквипотенциальных торцевых граничных поверхностях S_1 и S_2 объема $T(S_1, S_2; S_0)$ координата u примет некоторые постоянные значения u_1 и u_2 . При этом на его боковой граничной поверхности S_0 координаты v и τ также примут некоторые постоянные значения v_1, v_2 и τ_1, τ_2 . Значит в координатах поля граничная поверхность объема $T(S_1, S_2; S_0)$ задается шестью указанными постоянными значениями координат, т.е. **объем $T(S_1, S_2; S_0)$ конкретизируется как $T(u_1, u_2; v_1, v_2, \tau_1, \tau_2)$** , где в дальнейшем для определенности будем придерживаться условий: $u_2 > u_1, v_2 > v_1, \tau_2 > \tau_1$.

С учетом (5) из уравнения (4) следует:

$$\varepsilon E_u h_v h_\tau = \varepsilon_c \eta(v, \tau), \quad (7)$$

где $\eta(v, \tau)$ – некоторая функция, не зависящая от координаты u , а ε_c – постоянная величина с размерностью диэлектрической проницаемости.

Разделив (7) на второе выражение (6), имеем:

$$Q = Q(u, v, \tau) = \frac{\varepsilon h_v h_\tau}{h_u} = \varepsilon_c \frac{\eta(v, \tau)}{\xi(u)} > 0, \quad (8)$$

где условие $Q > 0$ обусловлено неотрицательностью ε и метрических коэффициентов.

Уравнение (8) отражает **фундаментальное свойство координат поля**. Оно заключается в том, что, хотя отдельно проницаемость ε и метрические коэффициенты h_u, h_v, h_τ ортогональной структуры эквипотенциалей u и поверхностей v, τ вектора \mathbf{E} могут как угодно сложно зависеть от всех трех координат u, v, τ , однако **в выражении $Q(u, v, \tau)$ переменные u и v, τ всегда разделяются**.

3. Емкость C_u , соответствующая поверхностям u координат поля. Из приведенных определений объема $T(S_1, S_2; S_0)$ и координат поля следует, что интеграл от функции εE_u по площади любой поверхности u в пределах изменения координат v и τ равен заряду q , относящемуся к поверхностям S_1 и S_2 :

$$\int_{v_1}^{v_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \varepsilon E_u h_v h_\tau dv d\tau = q. \quad (9)$$

Это уравнение с учетом (6) и (8) преобразуется к виду:

$$q = \int_{v_1}^{v_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} E_u h_u Q dv d\tau = -\varphi'(u) \int_{v_1}^{v_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} Q dv d\tau$$

или, следовательно,

$$-\varphi'(u) = \frac{q}{f(u)}, \quad f(u) = \int_{v_1}^{v_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} Q dv d\tau. \quad (10)$$

Интегрируя данное уравнение по u , получим:

$$\varphi(u_1) - \varphi(u_2) = \varphi_1 - \varphi_2 = q \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{f(u)}.$$

Отсюда в соответствии с (2) следует **первое выражение для емкости** объема $T(u_1, u_2; v_1, v_2, \tau_1, \tau_2)$:

$$1/C_u = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{f(u)} = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\int_{v_1}^{v_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} Q dv d\tau}, \quad (11)$$

где индекс u указывает на то, что **это выражение получено с учетом эквипотенциальности координатных поверхностей u** .

4. Емкость $C_{v\tau}$, соответствующая поверхностям v, τ координат поля. Интегрируя второе уравнение (6) по координате u , получим:

$$\int_{u_1}^{u_2} E_u h_u du = \varphi(u_1) - \varphi(u_2) = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (12)$$

Это уравнение с учетом (7) и (8) преобразуется к виду:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\varepsilon E_u h_v h_\tau}{Q} du = \varepsilon E_u h_v h_\tau \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{Q}$$

или, следовательно,

$$\varepsilon E_u h_v h_\tau = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{F(v, \tau)}, \quad F(v, \tau) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{Q}. \quad (13)$$

Интегрируя данное уравнение по v и τ с учетом (9), получим:

$$q = (\varphi_1 - \varphi_2) \int_{v_1}^{v_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dv d\tau}{F(v, \tau)}.$$

Отсюда в соответствии с (2) следует **второе выражение для емкости** объема $T(u_1, u_2; v_1, v_2, \tau_1, \tau_2)$:

$$C_{v\tau} = \int_{v_1}^{v_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dv d\tau}{F(v, \tau)} = \int_{v_1}^{v_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dv d\tau}{\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{Q}}, \quad (14)$$

где индекс $v\tau$ указывает на то, что это **выражение получено с учетом совпадения координатных поверхностей v, τ с поверхностями вектора E** .

5. Емкость $C_{uv\tau}$, соответствующая поверхностям u, v, τ координат поля. Из уравнений (6) и (13) с учетом соответственно (10) и (8) следуют два эквивалентных выражения для напряженности поля в его координатах:

$$E_u = q [h_u f(u)]^{-1}, \quad E_u = (\varphi_1 - \varphi_2) [h_u Q F(v, \tau)]^{-1}.$$

Приравняв эти выражения, с учетом (2), получим **третье выражение для емкости** объема $T(u_1, u_2; v_1, v_2, \tau_1, \tau_2)$:

$$C_{uv\tau} = \frac{f(u)}{Q F(v, \tau)} = \left(Q \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{Q} \right)^{-1} \int_{v_1}^{v_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} Q dv d\tau, \quad (15)$$

где индекс $uv\tau$ указывает на то, что это **выражение получено с учетом как эквипотенциальности координатных поверхностей u , так и совпадения поверхностей v, τ с поверхностями вектора E** .

6. Эквивалентность в координатах поля трех выражений для емкости. Рассмотренная теория координат поля является математически строгой. Следовательно, выражения (15), (14) и (11) для емкостей $C_{uv\tau}$, $C_{v\tau}$ и C_u должны приводить к одному и тому же, точному значению емкости C объема $T(u_1, u_2; v_1, v_2, \tau_1, \tau_2)$. С учетом свойства координат поля (8) это действительно имеет место:

$$C_{uv\tau} = C_{v\tau} = C_u = C = \varepsilon_c \left(\int_{u_1}^{u_2} \xi(u) du \right)^{-1} \int_{v_1}^{v_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \eta(v, \tau) dv d\tau. \quad (16)$$

Отметим, что смысл отыскания разных по форме, но эквивалентных по сути, выражений (15), (14) и (11) для электрической емкости C обусловлен тем, что в неудовлетворяющих условию (8) приближенных координатах поля (названных в последующем п. 8 координатами аппроксимации) упомянутые выражения при сопоставимой точности могут приводить к существенно разной сложности расчетов.

7. Координаты u, v, τ как координаты поля. Согласно теории, изложенной в п. 2, **ортонормальные координаты u, v, τ являются координатами поля** в объеме $T(u_1, u_2; v_1, v_2, \tau_1, \tau_2)$ **при выполнении двух условий:**

1) координаты геометрически соответствуют границам S_1, S_2 и S_0 указанного объема, т.е. на торцевых поверхностях S_1 и S_2 координата u принимает некоторые постоянные значения u_1 и $u_2 > u_1$, а на боковой поверхности S_0 постоянные значения $v_1, v_2 > v_1$ и $\tau_1, \tau_2 > \tau_1$ принимают координаты v и τ ;

2) метрические коэффициенты координат h_u, h_v, h_τ совместно с диэлектрической проницаемостью ε в указанном объеме удовлетворяют соотношению (8) функциональной разделимости переменных u и v, τ .

При образовании координат u, v, τ как геометрической структуры, в ряде случаев имеется возможность удовлетворить **условию 1)** при заданных границах S_1, S_2 и S_0 . Понятно, что сравнительно несложным является обратное, т.е. использовать имеющиеся ортогональные координаты для определения соответствующих им поверхностей S_1, S_2 и S_0 , а значит, и вида объема $T(u_1, u_2; v_1, v_2, \tau_1, \tau_2)$.

Что касается **условия 2)**, то в общей постановке оно выполнимо лишь за счет проницаемости ε , т.е. согласно (8), если

$$\varepsilon = \varepsilon(u, v, \tau) = \varepsilon_c \frac{h_u(u, v, \tau)}{h_v(u, v, \tau) h_\tau(u, v, \tau)} \frac{\eta(v, \tau)}{\xi(u)} > 0,$$

где $\eta(v, \tau)$ и $\xi(u)$ — ограниченные по величине функции соответствующих координат, которые обеспечивают выполнение условия $\varepsilon > 0$.

8. Аппроксимация координат поля. Будем называть **координатами аппроксимации u, v, τ** ортогональные координаты с метрическими коэффициентами h_u, h_v, h_τ , **удовлетворяющие условию 1), но не удовлетворяющие условию 2)**, приведенным в п. 7, т.е. координаты аппроксимации не удовлетворяют соотношению (8). Поэтому они приближенно описывают (аппроксимируют) геометрическую структуру поля в объеме $T(S_1, S_2; S_0) = T(u_1, u_2; v_1, v_2, \tau_1, \tau_2)$, причем структура самих координат определяется лишь геометрией границ S_1, S_2 и S_0 без учета уравнений поля (3), (4) и диэлектрической проницаемости ε . Следовательно, **выражения (15), (14) и (11) в координатах аппроксимации являются приближенными.** Соответственно этому равенства (16) обратятся в приближения:

$$C_{uv\tau} \approx C_{v\tau} \approx C_u \approx C, \tag{17}$$

где степени приближений зависят от геометрической близости координат аппроксимации и координат поля, при этом, в отличие от C_u и $C_{v\tau}$, емкость $C_{uv\tau}$ является постоянной величиной, т.е. $C_{uv\tau} = C_{uv\tau}(u, v, \tau)$.

9. Влияние проницаемости ε на величину емкости C . Согласно энергетическим принципам Дирихле и Томсона [4, с. 67–74 и 7, с. 78–84], если диэлектрическая проницаемость ε в любой части объема $T(S_1, S_2; S_0)$ увеличивается (или уменьшается), то емкость C этого объема также увеличится (или уменьшится) либо останется неизменной. В частности, если в указанный объем поместить бесконечно тонкие оболочки произвольной конфигурации с проницаемостью $\varepsilon = \infty$ (или $\varepsilon = 0$), то это приведет либо к увеличению (или уменьшению) емкости C , либо величина C останется неизменной. Характерно, что последнее будет иметь место только в том случае, когда оболочки с проницаемостью $\varepsilon = \infty$ (или $\varepsilon = 0$) совпадают с эквипотенциальными поверхностями поля (или с поверхностями вектора E).

10. Завышенное значение емкости C в координатах аппроксимации. Допустим, что в объем $T(u_1, u_2; v_1, v_2, \tau_1, \tau_2)$ внесено множество бесконечно тонких оболочек с проницаемостью $\varepsilon = \infty$, совпадающих с поверхностями и координат аппроксимации u, v, τ . Это приведет к изменению распределения исходного поля, так как поверхности u и v за $\varepsilon = \infty$ станут эквипотенциальными. Следовательно, в данном случае емкость указанного объема будет определяться выражением (11), причем согласно п. 9 ее величина C_u будет больше или равна истинной емкости C , т.е.

$$C_u \geq C. \tag{18}$$

Очевидно, что степень этого неравенства зависит от степени геометрического соответствия поверхностей u координат аппроксимации эквипотенциальным поверхностям исходного поля.

11. Заниженное значение емкости C в координатах аппроксимации. Допустим теперь, что в объем $T(u_1, u_2; v_1, v_2, \tau_1, \tau_2)$ внесено множество бесконечно тонких оболочек с проницаемостью $\varepsilon = 0$, совпадающих с поверхностями v, τ координат аппроксимации u, v, τ . Это также приведет к изменению распределения исходного поля, поскольку поверхности v, τ из-за $\varepsilon = 0$ станут непроницаемыми для потока вектора \mathbf{eE} . Следовательно, в данном случае емкость указанного объема будет определяться выражением (14), причем согласно п. 9 ее величина $C_{v\tau}$ будет меньше или равна истинной емкости C , т.е.

$$C_{v\tau} \leq C. \quad (19)$$

Понятно, что степень этого неравенства зависит от степени геометрического соответствия поверхностей v, τ координат аппроксимации поверхностям вектора \mathbf{E} исходного поля.

Отметим, что (19) и (18) могут обратиться в равенства только при выполнении условия (8), когда координаты аппроксимации u, v, τ фактически являются координатами поля.

12. Оценка погрешности расчета емкости C в координатах аппроксимации. Согласно (19) и (18) истинная величина емкости C объема $T(u_1, u_2; v_1, v_2, \tau_1, \tau_2)$ удовлетворяет неравенствам:

$$C_{v\tau} \leq C \leq C_u. \quad (20)$$

Эти неравенства дают два варианта приближенного расчета (17) емкости C , т.е.

$$C \approx \tilde{C}, \quad \tilde{C} = C_{v\tau} \leq C, \quad \tilde{C} = C_u \geq C, \quad (21)$$

где $C_{v\tau}$ и C_u определяются выражениями (14) и (11).

С учетом (20) для модуля относительной погрешности δ обоих приближений (21) справедливы соотношения:

$$\delta = |C - \tilde{C}|/C \leq (C_u - C_{v\tau})/C \leq (C_u - C_{v\tau})/C_{v\tau} = -1 + C_u/C_{v\tau}$$

или, следовательно:

$$\delta \leq \delta_m = -1 + C_u/C_{v\tau}, \quad (22)$$

где равенство $\delta = \delta_m$ имеет место только при $\delta_m = 0$, когда $C_u = C_{v\tau}$.

При выборе из двух приближений (21), имеющих одну и ту же гарантированную оценку погрешностей (22), можно исходить из наибольшей простоты выражения C_u или $C_{v\tau}$. Возможен и вариант, основанный на использовании двух средних значений, определяемых емкостями (14) и (11). Действительно, легко убедиться, что среднеарифметическая – C_A и среднегеометрическая – C_G величины:

$$C_A = (C_u + C_{v\tau})/2, \quad C_G = \sqrt{C_u C_{v\tau}} \quad (23)$$

также, как и C , удовлетворяют неравенствам вида (20), т.е.

$$C_{v\tau} \leq C_A \leq C_u, \quad C_{v\tau} \leq C_G \leq C_u. \quad (24)$$

Следовательно, для каждого из двух приближений:

$$C \approx C_A, \quad C \approx C_G \quad (25)$$

справедлива оценка (22) для относительной погрешности δ . При этом ниже будет показано, что скорее всего, более точной является величина C_G .

13. Выбор более точной формулы для расчета емкости C . Согласно (16) и (15) при выполнении условия (8) имеет место равенство:

$$C = C_{uv\tau} = \left(Q \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{Q} \right)^{-1} \int_{v_1}^{v_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} Q dv d\tau.$$

Данное уравнение можно переписать в виде:

$$Q = Q(u, v, \tau) = \left(C \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{Q} \right)^{-1} \int_{v_1}^{v_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} Q dv d\tau.$$

Приравнивая это выражение с выражением (8), имеем:

$$\eta(v, \tau) = \left(C \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{Q} \right)^{-1}, \quad \xi(u) = \varepsilon_c \left(\int_{v_1}^{v_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} Q dv d\tau \right)^{-1}.$$

Подставив эти выражения в (16), с учетом (14) и (11), получим:

$$C = \varepsilon_c \left(\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\int_{v_1}^{v_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} Q dv d\tau} \right)^{-1} \int_{v_1}^{v_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dv d\tau}{C \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{Q}} = \frac{C_u C_{v\tau}}{C}.$$

Поскольку в координатах аппроксимации условие (8) не выполняется, то это уравнение является приближенным, т.е. $C \approx C_u C_{v\tau}/C$ или, следовательно,

$$C \approx C_\Gamma = \sqrt{C_u C_{v\tau}}. \tag{26}$$

Данное приближение свидетельствует о том, что, скорее всего, **величина C_Γ определяет наиболее точное приближение к емкости C** , чем соответствующие выражения (24), (14) и (11) для C_A , $C_{v\tau}$ и C_u . Исследованию этого вопроса будет посвящена последующая статья автора.

14. Электрическая емкость осесимметричной системы проводников вращения. В этом случае у координат аппроксимации u, v, τ переменная $\tau = \alpha$, где α – координата вращения относительно общей оси симметрии проводников. У таких координат метрические коэффициенты не зависят от α , т.е. [5]

$$h_u = h_u(u, v), \quad h_v = h_v(u, v), \quad h_\tau = h_\alpha = \rho = \rho(u, v), \tag{27}$$

где ρ – расстояние от оси вращения до текущей точки с координатами u, v .

Следовательно, **координатам аппроксимации u, v, α с метрическими коэффициентами (27) соответствует независящий от α плоско-меридианный объем $T(u_1, u_2; v_1, v_2, \alpha_1, \alpha_2)$** . В этих координатах функция (8) имеет вид:

$$Q = Q(u, v, \alpha) = \varepsilon(u, v, \alpha) \frac{h_v(u, v)}{h_u(u, v)} \rho(u, v), \tag{28}$$

т.е. функция Q , в отличие от коэффициентов (27), может зависеть от α , поскольку такую зависимость может иметь проницаемость ε .

Если согласно [5] у координат аппроксимации

$$h_u(u, v) = h_v(u, v), \tag{29}$$

то уравнение (28) упрощается:

$$Q = Q(u, v, \alpha) = \varepsilon(u, v, \alpha) \rho(u, v) \tag{30}$$

и значит в случае однородного диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_c = \text{const}$ оно принимает вид:

$$Q = Q(u, v) = \varepsilon_c \rho(u, v). \tag{31}$$

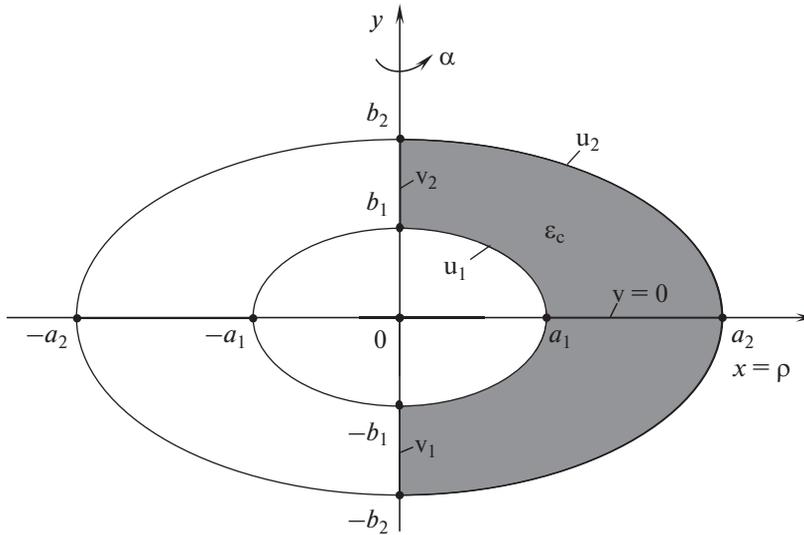


Рис. 1. Меридианное сечение $\alpha = \text{const}$ осесимметричной системы двух сплюснутых софокусных эллипсоидов вращения; затемненная часть сечения соответствует двумерной области, вращение которой вокруг оси y от $\alpha = \alpha_1 = 0$ до $\alpha = \alpha_2 = 2\pi$ образует плоско-меридианный объем $T(u_1, u_2; v_1, v_2, \alpha_1, \alpha_2)$.

Отсюда следует, что если функция $\rho(u, v)$ удовлетворяет условию (8) разделимости координат u и v , т.е.

$$\rho = \rho(u, v) = \eta(v)/\xi(u), \quad (32)$$

то координаты аппроксимации u, v, α с метрическими коэффициентами (27), (29) в однородном диэлектрике фактически являются координатами поля. В этом случае выражения (15), (14) и (11) будут определять одно и то же, точное значение (16) емкости плоско-меридианного объема $T(u_1, u_2; v_1, v_2, \alpha_1, \alpha_2)$.

15. Уточнения двух формул для емкости. Проиллюстрируем эффективность изложенного метода на двух Примерах.

Пример 1. Найдем выражение для емкости C между двумя проводниками в виде сплюснутых софокусных эллипсоидов вращения с полуосями $a_1, b_1 < a_1$ и $a_2, b_2 < a_2$, причем $a_2 > a_1, b_2 > b_1$ (рис. 1). Диэлектрик между эллипсоидами – однородный ($\epsilon = \epsilon_c$), их полуфокусные расстояния p_1 и p_2 – одинаковы:

$$p_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = p_2 = \sqrt{a_2^2 - b_2^2} = p. \quad (33)$$

Геометрически указанным проводникам (рис. 1) соответствуют сплюснутые эллипсоидальные координаты вращения u, v, α , которые в меридианном сечении $\alpha = \text{const}$ связаны с прямоугольными координатами x, y уравнениями [8, с. 163]:

$$x = x(u, v) = p \operatorname{ch}(u) \cos(v), \quad y = y(u, v) = p \operatorname{sh}(u) \sin(v). \quad (34)$$

Метрические коэффициенты этих координат соответствуют уравнениям (27), (29), причем согласно (34) и рис. 1

$$\rho = x = p \operatorname{ch}(u) \cos(v), \quad (35)$$

т.е. видим, что функция ρ удовлетворяет условию (32). Следовательно, указанные координаты u, v, α являются координатами поля и поэтому позволяют определить точное выражение для искомой емкости C .

Согласно (34) и рис. 1 координаты v и α изменяются в пределах:

$$v_1 = -\pi/2, \quad v_2 = \pi/2, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 2\pi, \quad (36)$$

при этом

$$b_n = y(u_n, v_2) = p \operatorname{sh}(u_n), \quad n = 1, 2. \quad (37)$$

Поскольку $\tau = \alpha$, то, например, из выражения (14) с учетом (31), (35)–(37) и [9, с. 63, п. 9] следует:

$$\begin{aligned} C &= C_{v\tau} = \int_{v_1}^{v_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\varepsilon_c p \operatorname{ch}(u) \cos(v)} \right)^{-1} dv d\alpha = \\ &= 2\pi \varepsilon_c p \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(v) dv \left(\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\operatorname{ch}(u)} \right)^{-1} = 4\pi \varepsilon_c p \left(\operatorname{arctg} \frac{p(b_2 - b_1)}{p^2 + b_1 b_2} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (38)$$

В справочнике [4, с. 189, п. 6] для емкости (38) приведено (без литературной ссылки) **приближенное выражение**:

$$C \approx 4\pi \varepsilon_c p \left| \operatorname{arccos}(b_1/a_1) - \operatorname{arccos}(b_2/a_2) \right|^{-1},$$

которое **фактически является точным**, поскольку при последовательном применении тригонометрических формул – сначала [9, с. 62, п. 5], а затем [9, с. 63, п. 9], оно преобразуется в выражение (38).

Пример 2. Найдем выражение для емкости между двумя проводниками в виде круглых осесимметричных торов с радиусами R_1 и $R_2 > R_1$ их образующих окружностей (рис. 2). Диэлектрик между торами – однородный ($\varepsilon = \varepsilon_c$).

Обратная логарифмической функции [6, с. 162] экспоненциальная зависимость $x + jy = R_1 \exp(u + jv)$ и соответствующие ей функции:

$$x = x(u, v) = R_1 \exp(u) \cos(v), \quad y = y(u, v) = R_1 \exp(u) \sin(v), \quad (39)$$

определяют в затемненной области рис. 2 ортогональную сетку концентрических окружностей $u = \operatorname{const}$ и лучей $v = \operatorname{const}$. При вращении этой сетки [5] относительно оси x_ρ образуются ортогональные координаты u, v, α с метрическими коэффициентами (27), (29), причем согласно (39) и рис. 2

$$\rho = R_0 + y = R_0 + R_1 \exp(u) \sin(v), \quad (40)$$

т.е. из-за наличия R_0 функция ρ не удовлетворяет условию (32). Следовательно, координаты u, v, α являются координатами аппроксимации, а не координатами поля. Поэтому они будут обеспечивать приближенные значения емкостей (17).

Согласно (39) и рис. 2 координаты v и α изменяются в пределах:

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 2\pi, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 2\pi, \quad (41)$$

при этом

$$R_n = x(u_n, v_1) = R_1 \exp(u_n), \quad n = 1, 2. \quad (42)$$

Поскольку $\tau = \alpha$, то из выражений (14) и (11) после интегрирования с учетом (31), (40)–(42) следует:

$$C_{v\alpha} = \frac{C_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\ln \frac{R_0/R_1 + \sin v}{R_0/R_2 + \sin v} \right)^{-1} dv, \quad (43)$$

$$C_u = C_0 / \ln K, \quad C_0 = 4\pi^2 \varepsilon_c R_0, \quad K = R_2/R_1 > 1. \quad (44)$$

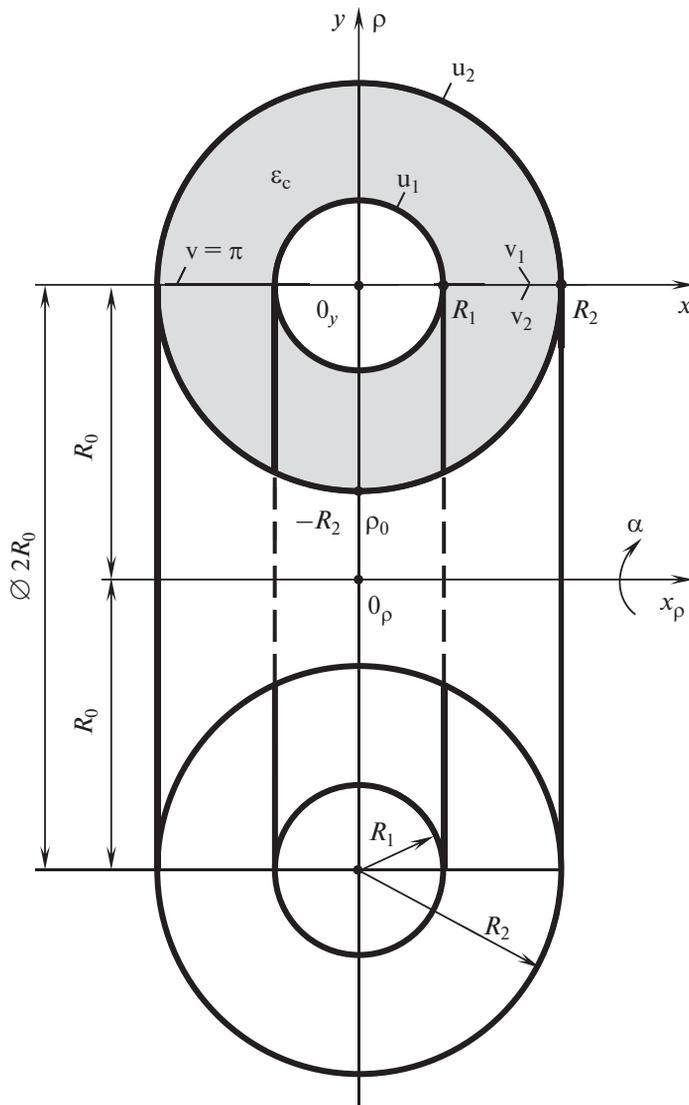


Рис. 2. Меридианное сечение $\alpha = \text{const}$ осесимметричной системы двух торов вращения; затемненная часть сечения соответствует кольцевой двумерной области, вращение которой при $\rho_0 = R_0 - R_2 \geq 0$ по радиусу R_0 вокруг оси x_ρ от $\alpha = \alpha_1 = 0$ до $\alpha = \alpha_2 = 2\pi$ образует плоско-меридианный объем $T(u_1, u_2; v_1, v_2, \alpha_1, \alpha_2)$.

Выражениям C_u и $C_{v\alpha}$ соответствуют средние значения (23) и оценка погрешности (22) относительно точного значения емкости C .

В справочнике [4, с. 190, п. 5–4–4] для емкости C приведено (без литературной ссылки) соответствующее **приближенное выражение**:

$$C \approx C_{\Pi} = C_u \left[1 - (R_2/R_0)^2 (1 - k^2 - 2k \ln K) \right], \quad k = 1/K < 1, \quad (45)$$

где C_u есть величина (44).

Таблица 1. $R_0/R_2 = 1$ – емкости (43)–(46) и их погрешности (46), (22), соответствующие тороидальной системе (рис. 2)

$k = R_1/R_2$	$C_{v\alpha}/C_0$	C_u/C_0	C_{AG}/C_0	C_{Π}/C_0	$\delta C_{\Pi}, \%$	$\delta_m, \%$
0.001	0.137	0.145	0.141	0.002	98.6	5.84
0.01	0.204	0.217	0.210	0.020	90.5	6.37
0.1	0.408	0.434	0.421	0.204	51.5	6.37
0.2	0.590	0.621	0.605	0.425	29.8	5.25
0.3	0.796	0.831	0.813	0.675	17.0	4.40
0.4	1.055	1.091	1.073	0.975	9.13	3.41
0.5	1.405	1.443	1.424	1.361	4.42	2.70
0.6	1.921	1.958	1.939	1.905	1.75	1.93
0.7	2.768	2.804	2.786	2.774	0.43	1.30
0.8	4.450	4.481	4.466	4.468	0.04	0.70
0.9	9.470	9.491	9.480	9.488	0.08	0.22

Отметим, что при $R_0/R_2 \gg 1$ затемненная часть рис. 2 при вращении образует практически прямолинейный цилиндрический конденсатор длиной $l = 2\pi R_0$, имеющий емкость [6, с. 95]: $C = 2\pi\epsilon_c l (\ln K)^{-1}$. Легко видеть, что к этой величине при $R_0/R_2 \gg 1$ стремятся все три выражения (43)–(45). Поэтому их численный анализ целесообразно осуществить при значениях $R_0/R_2 \geq 1$, неудовлетворяющих условию $R_0/R_2 \gg 1$. Результаты таких расчетов приведены в табл. 1, где δC_{Π} – модуль относительной погрешности выражения (45) по сравнению с величиной C_{Γ} , равной C_A с точностью до пяти знаков после запятой, т.е.

$$\delta C_{\Pi} = |1 - C_{\Pi}/C_{AG}|, \quad C_{AG} = C_A \approx C_{\Gamma} = \sqrt{C_u C_{v\alpha}}. \quad (46)$$

Согласно данным таблицы все четыре выражения для C_u , $C_{v\alpha}$, C_{AG} обеспечивают высокую точность расчетов искомой емкости (верхняя граница их относительной погрешности δ_m невелика). В то же время **погрешность выражения (45) при малых значениях $k = R_1/R_2$ значительна**. Поэтому при решении практических задач следует использовать приближение $C \approx C_u$, содержащее весьма простое выражение (44) или предположительно более точную величину C_{Γ} из (46), содержащую сравнительно сложное выражение (43), численное компьютерное интегрирование которого является элементарным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенная теория координатно-структурного метода открывает широкие возможности для получения новых буквенных выражений для электрической емкости с гарантированной оценкой погрешности (22) соответствующих расчетов. Это проиллюстрировано на двух конкретных Примерах (п. 15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adalev A.S., Hayakaw M., Korovkin N.V. Identification of electric circuits: problems and methods of solution accuracy enhancement Proceedings – IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems “Proceedings - IEEE International Symposium on Circuits and Systems 2005”. 2005. С. 980–983.

2. *Adalev A.S., Hayakawa M., Korovkin N.V.* Identification of electric circuits described by ill-conditioned mathematical models IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. 2006. Т. 53. № 1. С. 78–91.
3. *Adalev A.S., Hayakawa M., Korovkin N.V.* Using linear relations between experimental characteristics in stiff identification problems of linear circuit theory IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. 2008. Т. 55. № 5. С. 1237–1247.
4. *Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г.* Расчет электрической емкости. Л.: Энергоиздат, 1981, 288 с.
5. *Острейко В.Н.* Расчет проводимостей плоскомеридианных полей с помощью конформных отображений. Изв. вузов. Электромеханика, 1974. № 11. С. 1175–1183.
6. *Миролюбов Н.Н., Костенко М.В., Левинштейн М.Л., Тиходеев Н.Н.* Методы расчета электростатических полей. М.: Высшая школа, 1963. 416 с.
7. *Полиа Г., Сегё Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Госиздат физ.-мат. лит., 1962. 336 с.
8. *Андре Анго.* Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1967. 780 с.
9. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Coordinate Structural Method of Letter Calculation of Electric Capacity

V. N. Ostreiko*

Close Joint Stock Company Plant of Electrotechnical Equipment, Velikie Luki, Russia

**e-mail: ogk@zeto.ru*

The theory of the coordinate-structural method based on the interpretation of the geometric structure of the potential electric field as an orthogonal curvilinear coordinate system called as the field coordinates is stated. In such coordinates, the scalar potential depends only on one variable and, therefore, the vector of electric tension has only one component. It allows you to get three literal expressions different in form, but equivalent in essence, for the electrical capacitance. The mentioned formulae written in coordinates geometrically approximately corresponding to field coordinates (called approximation coordinates) also become approximate. At the same time, two of the three mentioned formulae determine its overestimated and underestimated values, that allows us to obtain a guaranteed estimation of the error of the corresponding calculations. The third formula makes it possible to increase the accuracy of these calculations. The high accuracy and practical effectiveness of the described method is illustrated by two examples of the capacity calculation.

Keywords: electric capacitance, scalar potential, electric charge, tension vector, dielectric permeability, equipotential surfaces, tension vector surfaces, orthogonal coordinates, field coordinates, approximation coordinates