УДК 536.24

РАСЧЕТ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С УЧЕТОМ АКСИАЛЬНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2019 г. Ю. В. Видин[1], Р. В. Казаков[2, *]

[1]Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия
[2]Координационный совет МОД "Народный контроль в ЖКХ", Красноярск, Россия
**e-mail: roman.kazakov@list.ru*

Поступила в редакцию 11.09.2018 г.

Предложен аналитический метод расчета собственных значений и собственных функций в задаче теплообмена для ламинарного потока жидкости в плоском канале с учетом аксиальной теплопроводности. С помощью гипергеометрической конфлюэнтной функции удается найти точные реперные величины собственных чисел и собственных функций при определенных соотношениях между числами подобия Био и Пекле. Кроме этого рекомендуемый способ позволяет выполнить необходимые математические вычислительные операции при произвольном сочетании названных чисел подобия с достаточной степенью точности, задавая соответствующий безразмерный комплекс α. Такой подход позволяет существенно ограничить (уменьшить) количество весомых членов бесконечного ряда применяемой гипергеометрической функции. Выведенные строгие и приближенные аналитические решения с использованием названных функций могут быть применены для теоретического анализа широкого класса теплофизических задач, в том числе и нелинейных.

Ключевые слова: теплообмен, теплопроводность, гипергеометрические конфлюэнтные функции

DOI: 10.1134/S0002331019010138

В работах [1]– [3] достаточно подробно рассмотрены аналитические задачи теплообмена при ламинарном движении жидкости в каналах различного сечении. При этом, как правило, принималось допущение, что теплопроводность среды в осевом направлении пренебрежимо мала. Во многих случаях это допущение оказывается приемлемым. Однако, иногда влияние аксиальной теплопроводности жидкости может быть существенным, что, например, имеет место при сравнительно небольших значениях числа *Pe*. Тогда математическая постановка исследуемого процесса несколько усложняется, и, в частности, для канала плоской конфигурации принимает вид:

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial Y^2} + \frac{1}{Pe^2}\frac{\partial^2\vartheta}{dX^2} = \left(1 - Y^2\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial X}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial Y} = 0 \quad \text{при } Y = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial Y} = -Bi\vartheta \quad \text{при } Y = 1, \tag{3}$$

$$\vartheta(Y, 0) = \vartheta(Y) \quad \text{при } X = 0. \tag{4}$$

Здесь использована общепринятая безразмерная система записи исследуемого процесса в предположении, что на внешней поверхности канала выполняется граничное условие третьего рода.

Очевидно, что аналитическое решение такой задачи может быть представлено в форме бесконечного ряда

$$\vartheta(Y, X) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(Y) \exp\left(-\mu_n^2 X\right), \tag{5}$$

где $\psi_n(Y)$ собственные функции задачи, а μ_n собственные значения. Основная сложность формулы (5) заключается в трудности нахождения собственных значений μ_n. Известно, что задача о собственных значениях и собственных функциях, или задача Штурма—Лиувилля, сводится к поиску решения системы уравнений, которая для рассматриваемого случая может быть записана следующим образом:

$$\psi'' + \left[\frac{\mu^4}{Pe^2} + \mu^2(1 - Y^2)\right]\psi = 0, \tag{6}$$

$$\psi' = 0 \quad \text{при } Y = 0, \tag{7}$$

$$\psi' = -Bi\psi \quad \text{при } Y = 1. \tag{8}$$

Выразить интеграл этой системы через элементарные функции в общем случае не представляется возможным. Поэтому для ее решения целесообразно использовать специальные функции. Как показано в [3], общее решение такого типа задач можно выразить в виде

$$\psi = \exp\left(-\mu\frac{Y^2}{2}\right) F_a\left(\alpha, \gamma, \mu Y^2\right), \tag{9}$$

где $F_a(\alpha, \gamma, \mu Y)^2$ — вырожденная гипергеометрическая функция, определяемая как бесконечная сумма [4]— [7]

$$\begin{aligned} F_a(\alpha, \gamma, \mu Y^2) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\mu Y^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{\mu^2 Y^4}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\frac{\mu^3 Y^6}{3!} + \ldots + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m-1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+m-1)}\frac{\mu^m Y^{2m}}{m!} + \ldots \end{aligned} \tag{10}$$

$m = 1,2,3...$

При этом для плоского канала параметры α и γ будут соответственно равны

$$\alpha = \frac{1}{4}\left(1 - \mu - \frac{\mu^3}{Pe^2}\right); \quad \gamma = \frac{1}{2}. \tag{11}$$

При отсутствии аксиальной растечки тепла, то есть в случае больших значений числа Pe ($Pe > 100$), коэффициент α можно принять равным $\alpha = \frac{1}{4}(1 - \mu)$. Этот случай подробно исследован в работах [1]— [3].

При замене в (10) $\gamma = \frac{1}{2}$ легко получить следующую зависимость

$$\begin{aligned} F_a(\alpha, \gamma, \mu Y^2) = 1 + 2\Big[\alpha\mu Y^2 + \frac{\alpha}{3}(\alpha+1)\mu^2 Y^4 + \frac{2\alpha}{45}(\alpha+1)(\alpha+2)\mu^3 Y^6 + \\ + \frac{\alpha}{315}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\mu^4 Y^8 + \ldots\Big]. \end{aligned} \tag{12}$$

Далее, подставляя решение (9) с учетом (12) в граничное условие (8), находим характеристическое уравнение для определения собственных значений μ_n:

$$\mu - \frac{4\left[\alpha\mu + \frac{2}{3}\alpha(\alpha+1)\mu^2 + \frac{6}{45}\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\mu^3 + \frac{4}{315}\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\mu^4 + \ldots\right]}{1+2\left[\alpha\mu + \frac{\alpha}{3}(\alpha+1)\mu^2 + \frac{2}{45}a(a+1)(\alpha+2)\mu^3 + \frac{\alpha}{315}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\mu^4 + \ldots\right]} = Bi. \quad (13)$$

Если $Bi \Rightarrow \infty$ (граничное условие первого рода), то формула (13) упрощается

$$\begin{gathered}1 + 2\left[\alpha\mu + \frac{\alpha}{3}(\alpha+1)\mu^2 + \frac{2}{45}a(a+1)(\alpha+2)\mu^3 + \right.\\ \left. + \frac{\alpha}{315}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\mu^4 + \ldots\right] = 0\end{gathered} \quad (14)$$

или

$$1 + 2\alpha\mu\left[1 + \frac{(\alpha+1)\mu}{3} + \frac{2(a+1)(\alpha+2)\mu^2}{45} + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\mu^3}{315} + \ldots\right] = 0. \quad (15)$$

Величины первых трех собственных чисел μ_n в зависимости только от комплекса Bi, приведенные в таблице, являются максимально возможными. При уменьшении числа подобия Pe они снижаются. Так, например, если допустить, что $\mu_1 = 0.5$ и соответствующая величина $Pe = \frac{1}{2}$, то тогда $\alpha_1 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{0.5^3}{0.5^2} - 0.5\right) = 0.$

Следовательно, в этом случае $Bi = 0.5$. Таким образом, если $Bi = 0.5$ и $Pe = 0.5$, то первое собственное значение будет $\mu_1 = 0.5$. Если же $Bi = 0.5$ и $Pe \Rightarrow \infty$, то имеет место равенство $\mu_1 = 0.7755$ (см. табл. 1).

Значения первых трех характеристических чисел μ_n и $\alpha_{n\max}$ для плоского канала при отсутствии аксиальной теплопроводности

Данный подход может быть существенно расширен. Для этого уравнение (13) удобнее записать в форме

$$\mu\left(1 - \frac{4\alpha\left[1 + \frac{2}{3}(\alpha+1)\mu + \frac{2}{15}(\alpha+1)(\alpha+2)\mu^2 + \frac{4}{315}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\mu^3 + \ldots\right]}{1+2\alpha\mu\left[1 + \frac{(\alpha+1)}{3}\mu + \frac{2}{45}(\alpha+1)(\alpha+2)\mu^2 + \frac{1}{315}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\mu^3 + \ldots\right]}\right) = Bi. \quad (16)$$

Полагая, что, если в определенной области параметр α=0, то тогда будет иметь место равенство

$$\mu_1 = Bi. \quad (17)$$

Очевидно, что оно справедливо в том случае, когда действует условие

$$Pe = Bi\sqrt{\frac{Bi}{1 - Bi}}. \quad (18)$$

При таком варианте соотношения между Bi и Pe первая собственная функция $\psi_1(Y)$ для задачи (6)–(8) принимает весьма простой аналитический вид $\psi_1(Y) = \exp\left(-\frac{BiY^2}{2}\right)$. Также несложной оказывается аналогичная функция и в предельном случае, когда $Bi = 1$ и $Pe \Rightarrow \infty$ $\psi_1 = \exp(-0.5Y^2)$, так как при таком сочетании значений Bi и Pe комплекс тоже $\alpha = 0$ (см. табл. 1). Естественно, что предложенные зависимости являются в математическом отношении абсолютно строгими.

Таблица 1

Bi	μ_1	μ_2	μ_3	α_{1max}	α_{2max}	α_{3max}
0	0	4.2872	8.3037	0.250	0.822	–1.826
0.1	0.3782	4.3336	8.3264	0.155	–0.833	–1.823
0.2	0.5227	4.3775	8.3553	0.119	–0.844	–1.839
0.3	0.6263	4.4190	8.3834	0.093	–0.855	–1.846
0.4	0.7080	4.4585	8.4106	0.073	–0.865	–1.853
0.5	0.7755	4.4958	8.4370	0.056	–0.874	–1.859
0.6	0.8329	4.5313	8.4625	0.042	–0.883	–1.866
0.7	0.8827	4.5649	8.4872	0.029	–0.891	–1.872
0.8	0.9264	4.5969	8.5112	0.018	–0.899	–1.878
0.9	0.9652	4.6272	8.5344	0.009	–0.907	–1.884
1.0	1.000	4.6562	8.5618	0	–0.9141	–1.890
1.5	1.1319	4.7813	8.6593	–0.033	–0.945	–1.915
2.0	1.2202	4.8809	8.7469	–0.055	–0.970	–1.938
3.0	1.3321	5.0280	8.8874	–0.083	–1.007	–1.972
4.0	1.4003	5.1305	8.9937	–0.100	–1.033	–1.998
5.0	1.4463	5.2055	9.0761	–0.112	–1.051	–2.019
10.0	1.5524	5.3976	9.3025	–0.138	–1.099	–2.076
20.0	1.6141	5.5218	9.4673	–0.154	–1.130	–2.117
30.0	1.6361	5.5683	9.5302	–0.159	–1.142	–2.133
40.0	1.6475	5.5926	9.5636	–0.162	–1.148	–2.141
50.0	1.6544	5.6075	9.5843	–0.164	–1.152	–2.146
60.0	1.6590	5.6174	9.5983	–0.165	–1.154	–2.150
80.0	1.6649	5.6304	9.6161	–0.166	–1.158	–2.154
100.0	1.6684	5.6382	9.6271	–0.167	–1.160	–2.157
1000.0	1.6813	5.6699	9.6680	–0.170	–1.167	–2.167
∞	1.6816	5.6699	9.6682	–0.170	–1.167	–2.167

Рассмотренный подход определения первого собственного числа μ_1 приемлем при условии, что $Bi \le 1$. Если же $\mathrm{Bi} > 1$, то можно допустить, что параметр $\alpha = -1$. При такой величине α характеристическое уравнение (16) преобразуется в квадратичную алгебраическую зависимость.

$$\mu^2 - \frac{5 + 2Bi}{2}\mu + \frac{Bi}{2} = 0. \tag{19}$$

Отсюда, в частности, следует, что $\mu_2 = 5$ справедливо при $Bi = 2.778$ и $Pe \Rightarrow \infty$, т.е. тогда вторая собственная функция задачи (6)–(8) запишется в форме элементарного соотношения

$$\psi_2(Y) = (1 - 10Y^2)\exp(-2.5Y^2).$$

На основании (19) удается определить также и первое собственное число μ_1. Если, например, $Bi = 2.778$, то получается $\mu_1 = 0.2778$, что соответствует $Pe = 0.0674$.

Для такого сочетания *Bi* и *Pe* первая собственная функция будет иметь вид

$$\psi_1(Y) = (1 - 0.5556Y^2)\exp(-0.1389Y^2).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, важным достоинством предлагаемых решений (9), (13)–(16) является то, что при фиксированных параметрах α ($\alpha = 0; -1; -2; \ldots$), входящие в них бесконечные ряды, обрываются и определение искомых величин μ_n и ψ_n сводится к аналитическому исследованию сравнительно простых алгебраических соотношений. На базе этих же зависимостей могут быть проведены приближенные вычисления искомых величин для дробных значений параметра α. При этом такие расчеты, как правило, являются достаточно точными, в случае вычисления нескольких первых корней μ_n

На основе аналитических решений задачи типа (1)–(4), полученных в данной работе с помощью вырожденных гипергеометрических функций, могут быть исследованы также некоторые нелинейные процессы переноса тепла в трубах, как например, поставленные в [8].

Следует сказать, что для повышения эффективности предложенного метода целесообразно использовать табличные данные, приведенные в источниках [9, 10]. При этом имеет смысл дополнительно расширить объем информации о функциях типа (10), приведенные в работах [9] и [10], для области значений параметра $\alpha < 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Видин Ю.В., Злобин В.С., Иванов В.В., Медведев Г.Г.* Инженерные методы расчета задач нелинейного теплообмена при ламинарном течении жидкости в каналах / Красноярск, СФУ, 2015. 155 с.
2. *Видин Ю.В., Злобин В.С., Иванов В.В.* К расчету процесса теплообмена при ламинарном течении жидкости в плоском канале // Известия вузов. Проблемы энергетики, 2016. № 1–2. С. 100–105.
3. *Видин Ю.В., Злобин В.С., Казаков Р.В.* Расчет нагрева ламинарного потока жидкости при переменном коэффициенте теплообмена на поверхности круглого канала // Известия вузов. Проблемы энергетики, 2015. № 9–10. С. 69–75.
4. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики. М.: Изд-во “Наука”, 1968. 619 с.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Изд-во “Наука”, 1970. 720 с.
6. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Изд-во “Наука”, 1979. 830 с.
7. *Аксенов Е.П.* Специальные функции в небесной механике. М.: Изд-во “Наука”, 1986. 318 с.
8. *Иванов В.В., Видин Ю.В.* Влияние аксиальной теплопроводности жидкости в трубах на процессы радиационного конвективного охлаждения наружных поверхностей // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки, 2014. № 5. С. 46–47.
9. *Slater L.J.* On the evaluation of the confluent hypergeometric function / Proceedings of the Cambridge philosophical society, 1953. V. 49. P. 612.
10. *Rushton S., Lang E.D.* Tables of confluent hypergeometric function / Sankhya. The Indian journal of statistics, 1954. V. 13. P. 377.

Calculation of Heat Exchanger at Laminar Flow of Fluid in a Flat Channel with Axial Heat Conductivity

Y. V. Vidin[a] and R. V. Kazakov[b, #]

[a]*Siberian federal university, Krasnoyarsk, Russia*
[b]*Coordinating council MOD “Public control in housing”, Krasnoyarsk, Russia*
[#]*e-mail: roman.kazakov@list.ru*

An analytical method is proposed for calculating eigenvalues and eigenfunctions in the heat transfer problem for a laminar flow of a fluid in a flat channel with allowance for the axial thermal conductivity. Using the hypergeometric confluence function, it is possible to find the exact reference values of the eigenvalues and eigenfunctions for certain relations between the Bio and Peclet number similarities. In addition, the recommended method makes it possible to perform the necessary mathematical computational operations for an arbitrary combination of the named similarity numbers with a sufficient degree of accuracy by specifying the corresponding dimensionless complex α. This approach allows us to substantially limit (reduce) the number of weighty terms of the infinite series of the applied hypergeometric function. Derived strict and approximate analytical solutions using the above functions can be applied to the theoretical analysis of a wide class of thermophysical problems, including nonlinear ones.

Keywords: heat transfer, thermal conductivity, hypergeometric confluent functions